# TERS ÜNIVALENT FONKSIYONLARIN KATSAYILARI

**Murat SAT**

**Y.Lisans Tezi**
**Matematik Anabilim Dali**
**Doç. Dr. Halit ORHAN**
**2007**

ATATÜRK ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ

**Y.LISANS TEZI**

# TERS ÜNIVALENT FONKSIYONLARIN KATSAYILARI

**Murat SAT**

**MATEMATIK ANABILIM DALI**

**ERZURUM**
**2007**

Doç. Dr. Halit ORHAN danismanliginda, Murat SAT tarafindan hazirlanan bu çalisma ……/……/……tarihinde asagidaki jüri tarafindan Matematik Anabilim Dali'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmistir.

Baskan:………………………. *Imza:*

Üye :………………………. *Imza:*

Üye :……………………… *Imza:*

Üye :……………………… *Imza:*

Üye :………………………. *Imza:*

**Yukaridaki sonucu onaylarim**

**Prof. Dr. M. ERTUGRUL**
**Enstitü Müdürü**

# ÖZET

Y.Lisans Tezi

**TERS ÜNIVALENT FONKSIYONLARIN KATSAYILARI**

Murat SAT

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dali

Danisman: Doç. Dr. Halit ORHAN

Bu tezde ters ünivalent fonksiyonlarin katsayilari incelenmistir. Buna ilave olarak genellestirilmis Koebe fonksiyonunun tersi için katsayi esitlikleri elde edilmistir. Ayrica $P_*(n, l, a)$ sinifina ait katsayi esitlikleri bulunmustur.

**2007, 61 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Ünivalent fonksiyon, analitik fonksiyon, ters ünivalent fonksiyonlarin katsayilari

## ABSTRACT

MS Thesis

# COEFFICIENTS OF INVERSE UNIVALENT FUNCTIONS

Murat SAT
Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Halit ORHAN

In this thesis were investigated coefficients of invers univalent functions. In addition to this matter, coefficient equalities were obtained for invers of generalized Koebe fuction. Further, coefficient equalities were obtained for invers of the functions belong to the class $P_*(n, l, a)$.

**2007, 61 pages**
**Keywords:** Univalent function, analytic function, coefficients of invers univalent functions

## TESEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sundugum bu çalisma Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapilmistir.

Bu tez konusunu bana veren, çalismalarimda ve tezin hazirlanisinda yakin ilgi ve yardimlarini esirgemeyen Sayin hocam Doç. Dr. Halit ORHAN'A ve degerli fikirlerimden faydalandigim Sayin hocam Prof. Dr. Muhammet KAMALI'YE ve Sayin hocam Prof. Dr. Ekrem KADIOGLU'YA en içten tesekkürlerimi arz ederim.

Çalismalarim esnasinda kendisinden görmüs oldugum destekten dolayi da anneme tesekkürlerimi sunarim.

**Murat SAT**
**Ekim 2007**

## IÇINDEKILER

ÖZET………………………………………………………………………………. i
ABSTRACT…………………………………………………………………………. ii
TESEKKÜR………………………………………………………………………… iii
SIMGELER DIZINI………………………………………………………………. v
SEKILLER DIZINI……………………………………………………….............. vi
**1. GIRIS……………………………………………………………………………1**
**2. KURAMSAL TEMELLER………………..……………………………………...5**
2.1. Topolojik Kavramlar………………………………………………………..5
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar…………………………………..….6
2.3. Konveks ve Yildizil Fonksiyonlar……………………………………….....10
**3. MATERYAL ve YÖNTEM………………………………………………..15**
3.1. Alan Teoremleri Için Katsayilar…….…………………………………………15
3.2. Bir Fonksiyonun Tersi Için Katsayilar……………………………………….28
3.3. Birim Diskten Sag Yari Düzleme Alan Dönüsümü…………………………….35
3.4. Uygulamalar…………………………………………………………………….39
**4. ARASTIRMA BULGULARI……………………………………………...59**
**5. SONUÇ………………………………………………………………...…60**
KAYNAKLAR……………………………………………………………………61
ÖZGEÇMIS……………………………………………………………………

## SIMGELER DIZINI

| | |
|---|---|
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayilar cümlesi |
| $E$ | Birim disk |
| $S$ | $E$ de ünivalent ve analitik olan fonksiyonlarin sinifi |
| $\mathbb{Z}$ | Tamsayilar cümlesi |
| $B_0$ | Bütün sinirli fonksiyonlarin cümlesi |
| $D(z_0, d)$ | $z_0$ merkezli $d$ yariçapli yuvar |
| $\Gamma$ | Basit kapali egri |
| $k(z)$ | Koebe fonksiyonu |
| $b_n$ | Ters katsayilar |
| $SS^*$ | Normalize edilmis fonksiyonlarin sinifi |

## SEKILLER DIZINI

Sekil 2.1. Konveks Bölge …………………………………………………………...10
Sekil 2.2. Yildizil Bölge……………………………………………………………..10

# 1. GIRIS

$E$ kompleks düzlemde açik birim diski göstersin. $E$ diskinde $f(0)=0$, $f'(0)=1$ aksiyomlarini saglayan ve $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimde tanimlanan analitik ve ünivalent fonksiyonlarin sinifi $S$ olsun. $0 \le a < 1$ olmak üzere $f \in S$ fonksiyonu;

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > a\ , \qquad z \in E$$

esitsizligini sagliyorsa $f$ ye $a$ mertebeden yildizildir denir. $a$ mertebeden yildizil fonksiyonlarin sinifi $S^*(a)$ ile gösterilir. Eger $zf'(z) \in S^*(a)$ ise $f$ ye $a$ mertebeden konveks fonksiyon denir. Böyle fonksiyonlarin sinifi $C(a)$ ile gösterilir. $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $S$ sinifinda olmasi için yeter kosul $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$ olmasidir. Aslinda bu sart $S^*(0)=S^*$ biçimindeki daha küçük sinif içinde bir yeter kosuldur. $0 \le a < 1$ olmak üzere $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $S$ sinifinda olmasi için benzer bir yeter sart $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-a}{1-a}\right)|a_n| \le 1$ olmasidir.

$(0 \le a < 1,\ -\infty < d < \infty)$ olmak üzere $\sum_{n=2}^{\infty} n^d \left(\frac{n-a}{1-a}\right)|a_n| \le 1$ esitsizligi saglanirsa $f(z) \in S_d(a)$ dir. Burada $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimindedir. Her sabit $n$ için $n^d$ ifadesi $d$ ya göre artandir. Böylece $d_1 < d_2$ olmak üzere $S_{d_2}(a) \subset S_{d_1}(a)$ kapsami dogrudur. Sonuç olarak eger $d \ge 0$ ise $S_d(a)$ sinifina ait olan ve $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-a}{1-a}\right)|a_n| \le 1$ esitsizligini saglayan fonksiyonlar $a$ mertebeden ünivalent yildizil ve $\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{n-a}{1-a}\right)|a_n| \le 1$ esitsizligini saglayan fonksiyonlar sadece $a$ mertebeden ünivalent konveks fonksiyonlarin $S_d(a)$ sinifina aittir. Yine eger $d<0$ ise $S_d(a)$ sinifi non-ünivalent fonksiyonlari da ihtiva eder. $S_d(a)$ sinifinin temel özellikleri V.Kumar, A.K.Mishra, M.Choudhury, M.K.Das gibi bir çok matematikçi tarafindan çalisilmistir. Eger $f \in S_d(a)$ ise $(n=2,3,4,\ldots)$ için,

$$|a_n| \le \frac{(1-a)}{n^d(n-a)}$$

esitsizligi yazilir. $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $n$ için sadece

$$f_n(z) = z + \frac{1-a}{n^d(n-a)} e^{iq} z^n$$

fonksiyonlari için esitlik saglanir.

Her $f \in S$ için $f^{-1}$ ters fonksiyonu $f^{-1}(f(z)) = z$ ile tanimlanir. Bu fonksiyon $r(f) \ge \frac{1}{4}$ olmak üzere $|w| < r(f)$ de analitik ve

$$f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n, \qquad (|w| < r(f))$$

biçiminde bir Maclaurin seri açilimina sahiptir.

Bieberbach tahmini olarak bilinen De Branges teoremi

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde verilen $S$ sinifina ait bir fonksiyon için $(n=2,3,4,\ldots)$ olmak üzere $|a_n| \le n$ esitsizliginin oldugunu açiklar. $|a_n| = n$ esitligi sadece Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonlari için saglanir. 1923 yilinin baslarinda K.Löwner üçüncü katsayi da Bieberbach tahmini göstermek için Löwner metodu olarak bilinen meshur parametrik metodunu icat etti. K.Löwner bu metodu kullanarak $S$ ve $S^*$ siniflarina ait olan fonksiyonlarin ters fonksiyonlari için tüm katsayilar üzerine kesin sonuçlar buldu. Böylece eger $f \in S$ veya $(f \in S^*)$ ise $f^{-1}$ fonksiyonu

$$f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n$$

olarak verilebilir. Buradan $(n=2,3,4,\ldots)$ için $|b_n| \leq \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ esitsizligi yazilir (K.Löwner 1923). Bu esitsizlik Koebe fonksiyonunun tersi için esitlik haline dönüsür.

Tüm $S$ sinifina ait ters fonksiyonlar için katsayi tahmini son yüzyilin ilk yarisinda tamamem çözülmüs olmasina ragmen literatürde $S$ nin belli alt siniflari için sadece kismi sonuçlara ulasilabilmektedir. Örnegin $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere eger $f \in S^*(\alpha)$ ise

$$|b_2| \leq 2(1-\alpha)$$

$$|b_3| \leq \begin{cases} (1-\alpha)(5-6\alpha) & 0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3} \\ (1-\alpha) & \frac{2}{3} \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

esitsizlikleri saglanir (J.G.Krzyz, R.J.Libera ve E.Zlotkiewicz 1979). Bununla birlikte $n \geq 9$ oldugunda $f \in C(\alpha)$ ve $n \geq 4$ oldugunda $f \in S^*(\alpha)$ fonksiyonlari için kesin sinir bulma problemi hala açik bir problem olarak çözüm beklemektedir.

$(d \geq 0, 0 \leq \alpha < 1)$ olmak üzere $S_d(\alpha)$ sinifina ait fonksiyonlarin ters fonksiyonlari için katsayi tahmini A.K.Mishra ve P.Gochhayat tarafindan çalisildi.
Dahasi $(d \geq 0, 0 \leq \alpha < 1)$ olmak üzere $f \in S_d(\alpha)$ için $|b_2|, |b_3|$ ve $|b_4|$ katsayilari için kesin sinirlar elde edildi. Buna ilaveten her $n \geq 2$ pozitif tamsayisi ve her $f \in S_d(\alpha)$ fonksiyonu için

$$|b_n| \leq \begin{cases} \frac{2}{n2^{(n-1)d}}\binom{2n-3}{n-2}\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\right)^{n-1}; & 0 \leq \alpha \leq e_n, 0 \leq d \leq d_n \\ \frac{1-\alpha}{n^d(n-\alpha)}; & 1-t_n \leq \alpha < 1, d > 0 \end{cases}$$

esitsizligi saglanacak biçimde $e_n, d_n, t_n$ pozitif reel sayilarinin oldugu gösterildi.

Bizde bu çalismamizda J.G.Krzyz, R.J.Libera ve E.Zlotkiewicz ters katsayi problemini $\alpha$ mertebeden yildizil fonksiyonlarin ters katsayilarina genislettik. Bunlara ilave olarak

Koebe fonksiyonunun ters katsayilarini hesapladik. Ayrica J.G.Krzyz nin sonuçlarini $P_*(n,l,a)$ sinifi için genislettik. Elde ettigimiz sonuçlarin $l=0$ özel degeri için J.G.Krzyz nin sonuçlarini bulduk.

# 2. KURAMSAL TEMELLER

## 2.1. Topolojik Kavramlar

Bu bölümde, tezdeki bosluklari doldurmak için ihtiyaç duydugumuz bazi topolojik verilecektir.

**2.1.1. Tanim (Komsuluk):** $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasi verilsin. $B(z_0, e) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < e\}$ kümesine $z_0$ noktasinin $e$ komsulugu denir.

**2.1.2. Tanim (Iç nokta):** $D \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in D$ olsun. $z_0$ noktasinin bir $e$ komsulugu tamamen $D$ kümesine ait ise, $z_0$ noktasina iç nokta denir.

**2.1.3. Tanim (Açik Küme):** Her noktasi iç nokta olan kümeye açik küme denir. Tümleyeni açik olan kümeye ise kapali küme denir. $\mathbb{C}$ kompleks düzlem ve $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski birer açik kümedir. Fakat $\overline{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ kümesi kapali kümedir.

**2.1.4. Tanim (Yakinsaklik):** Kompleks sayilarin bir $(z_n)$ dizisi verilsin. Her $e > 0$ sayisi için $n \geq n_0$ oldugunda $|z_n - z_0| < e$ olacak biçimde bir $n_0$ dogal sayisi varsa, bu dizi $z_0$ kompleks sayisina yakinsiyor denir. $(z_n)$ dizisinin $z_0$ noktasina yakinsamasi $z_n \to z_0$ biçiminde gösterilir (Dönmez 1985).

**2.1.5. Tanim (Baglantili Küme):** Eger $B \subseteq Y \cup Z$, $B \cap Z \neq \varnothing$ ve $B \cap Y \neq \varnothing$, $B \cap Y \cap Z = \varnothing$ olacak biçimde $Y$ ve $Z$ gibi bos olmayan iki açik küme bulunamaz ise, $B \subset \mathbb{C}$ kümesine baglantili küme denir.

Bir baska ifade ile tümleyeni baglantili olan kümeye basit baglantili küme denir.

**2.1.6. Tanim (Bölge):** Kompleks düzlemde açik ve baglantili kümelere bölge denir. Kapali ve baglantili kümelere ise özel olarak kapali bölge denir.

**2.1.7. Tanim (Örtü):** $X$ herhangi bir uzay olsun. Bilesimleri $V$ kümesini kapsayan $\{G_i\}$ ailesine, $V \subset X$ kümesinin örtüsü denir. Bilesimleri $V \subset X$ kümesini kapsayan ve $\cup_i G_i = X$ olan açik kümelerin $\{G_i\}$ ailesine $V \subset X$ kümesinin açik örtüsü denir. Bilesimleri $V \subset X$ kümesini kapsayan alt aileye veya $V$ kümesini örten aileye, verilen bir örtünün alt örtüsü adi verilir. Eger $V \subset X$ kümesini kapsayan alt aile yalniz sonlu sayida küme kapsiyorsa, bu aileye de sonlu alt örtü denilir (Dönmez 2000).

**2.1.8. Tanim (Kompaktlik):** Eger bir kümenin her açik örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa, bu kümeye kompakttir denir(Dönmez 2000).

## 2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kisimda analitik ve ünivalent fonksiyon kavraminin yani sira, bunlarla ilgili bazi tanimlar verilecektir.

**2.2.1. Tanim (Analitik Fonksiyon):** *f*, kompleks degiskenli ve kompleks degerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasinin bir komsulugunda tanimli olsun. Eger

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona $z_0$ noktasinda diferenseyellenebilirdir denir. Eger $f(z)$ fonksiyonu $z_0$ noktasinin bir komsulugunda diferenseyellenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna $z_0$ noktasinda analitik fonksiyon denir (Duren 1983).

Örnegin eger $f(z)=z^2$ ise bu halde $f(z)$ fonksiyonu her yerde analitiktir. Fakat $f(z)=|z|$ fonksiyonu hiçbir yerde analitik degildir. Çünkü bu fonksiyon yalniz $z=0$ noktasinda türevi vardir. $z_0$ noktasinin herhangi bir komsulugunun tamaminda türevi yoktur.

Eger $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarinda analitikse $f(z)$ fonksiyonuna tam fonksiyon denir. $e^z, \sin z, \cos z$ gibi fonksiyonlar örnek olarak verilebilir.

**2.2.2. Tanim (Ünivalent Fonksiyon):** Bir $f$(z) fonksiyonu verilsin. $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1)=f(z_2)$ olmasi sadece ve sadece $z_1=z_2$ olmasini gerektiriyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $D$ bölgesinde ünivalent ya da yalinkat fonksiyon denir (Nehari 1952).

Bu çalismada ünivalent kelimesini tercih edecegiz. Örnegin $g(z)=\frac{z}{2}$ ve $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ve $ad-bc \neq 0$ olmak üzere $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ dönüsümü birer ünivalent fonksiyondur. Oysa $f(z)=0$ ve $f(z)=z^2$ fonksiyonlari ünivalent degildir.

$E$ açik birim disk ve $g(z)$ fonksiyonu da $E$ de analitik ise

$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ seklinde seri gösterimine sahip olsun. Burada $\frac{g(z)-b_0}{b_1}=f(z)$ denilirse ve $\frac{b_n}{b_1}=f(z)$ yazilirsa

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (1')$$

elde edilmis olur.

**2.2.3. Tanim (Normalize Edilmis Fonksiyon):** $(1')$formundaki bir fonksiyona, normalize edilmistir denir.

Eger $f(z)$ fonksiyonu ünivalent ve $(1')$ formuna sahipse ona normalize edilmis univalent fonksiyon denir.

**2.2.4. Tanim (S Sinifi):** $E=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olan ve $f(0)=0,\ f'(0)=1$ kosullarini saglayan fonksiyon $E$ diskinde $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açilimina sahiptir. Bu sekildeki fonksiyonlarin sinifi $S$ ile gösterilir.

**2.2.5. Tanim (Koebe Fonksiyonu):** $S$ sinifinda olan,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z^2)}=z+2z^2+3z^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$$

biçiminde gösterilen fonksiyona Koebe fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $E$ birim diskini $\mathbb{C}-\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$ bölgesi üzerine bire bir olarak dönüstürür.

**2.2.6. Tanim (Genellestirilmis Koebe Fonksiyonu):** $k(c,z)\equiv\frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c-1\right]$ biçimindeki fonksiyona genellestirilmis Koebe fonksiyonu denir. Eger $c=2$ alinirsa 2.2.5. Tanim ile verilen fonksiyon elde edilir.

**2.2.7. Tanim (Schwarz Lemmasi):** $f:E=\{z:|z|<1\}\to C$ analitik, $z\in E$ için $|f(z)|\leq 1$ ve $f(0)=0$ olsun. Bu durumda $z\in E$ noktalari için $|f(z)|\leq|z|$ ve $|f'(0)|\leq 1$ dir. Üstelik $z_0\in E(z_0\neq 0)$ için $|f(z_0)|=|z_0|$ ise $c$, $|c|=1$ özelliginde bir sabit olmak üzere , $f(z)=cz$ biçimindedir.

**2.2.8. Tanim (Alan Teoremi):** $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun $\overline{E_r}=\{z: |z|\leq 1\}$ kapali diskinde analitik oldugunu kabul edelim. Eger $f(\overline{E_r})$ nin alani $A(r,f)\equiv A(r)$ ise bu halde

$$A(r)=p\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$$

olur. Burada $f(z)$ fonksiyonunun ünivalent kabul edilmedigine dikkat ediniz (Fejer 1913-1917).

Alan teoremi $f(\overline{E_r})$ Riemann yüzeyleri alanindan söz eder. Eger bir $D$ düzlemsel bölgesi $f(\overline{E_r})$ ile $k$ defa örtülürse, bu durumda $D$ nin alani $A(r)$ de $k$ kez hesaplanir. Böylece eger $f(z)$ tamamiyla $a_n z^n$ biçiminde tek terimli ise bu halde $f(\overline{E_r})$ ifadesi $R=|a_n|r^n$ yariçapli $n$ katli disk temsil eder. Basit geometriden $n$ katli diskin alani $np\,R^2=np\,|a_n|^2\,r^{2n}$ olur.

$$A(r)=p\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$$

ifadesi yalnizca böyle terimlerin toplamidir.

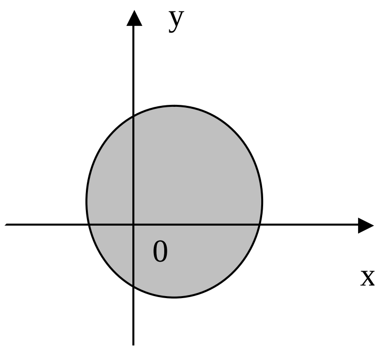
Alan teoreminin $E^x=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ bölgesi için (Gronwall 1914) tarafindan verilen tanimi asagidaki gibidir. Eger $f(z)=z+\sum_{n=o}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$ fonksiyonu $E^x=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ bölgesinde analitik ve ünivalent ise bu halde $\sum n|c_n|^2\leq 1$ esitsizligi geçerlidir. Bundan baska verilen bu esitsizligin esitlik halinde saglanmasi için gerekli ve yeterli kosul $f(E^x)$ kümesinin sifir alanli bir küme hariç tüm kompleks düzlemi örtmesidir.

### 2.3. Konveks ve Yildizil Fonksiyonlar

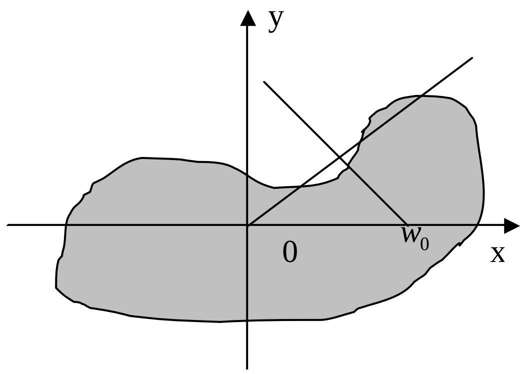
Bu bölümde dogal geometrik kosullar ile tanimlanan $S$ sinifinin önemli bazi alt siniflari ve tez kisminda geçen bazi tanimlar ve önermeler verildi.

$D \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $w_0 \in D$ olsun. Eger $w_0$ noktasini $D$ nin diger bir $w$ noktasina birlestiren dogru parçasi tamamen $D$ nin içinde kaliyorsa $D$ ye $w_0$ noktasina göre yildizil bölge denir.

Daha açik bir ifade ile, $D$ bölgesinin her bir noktasi $w_0$ noktasindan görülebilir. Her bir noktasina göre yildizil olan bölgeye konveks bölge denir. Yani, $D$ nin keyfi iki noktasini birlestiren dogru parçasi $D$ nin içinde kaliyorsa, $D$ bölgesine konvekstir denir.




**Sekil 2.1.** Konveks bölge




**Sekil 2.2.** Yildizil bölge

Konveks ve yildizil bölgeler, sirasi ile Sekil 2.1 ve Sekil 2.2 de gösterilmistir. Sekil 2.2 de gösterilen bölge, $w_0$ noktasina göre yildizil fakat orjine göre yildizil degildir.

Birim diski orjin noktasina göre yildizil bir bölgeye konform olarak dönüstüren fonksiyona yildizil fonksiyon, birim diski konveks bir bölgeye konform olarak dönüstüren fonksiyona da konveks fonksiyon denir (Goodman 1983).

Konveks ve yildizil fonksiyonlarin arasindaki iliski asagidaki teoremde verilmistir. $f(z)$ fonksiyonunun $E$ birim diskinde konveks olmasi için gerekli ve yeterli kosul $f(z)$ nin $E$ de yildizil olmasidir.

$L_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ biçiminde tanimlanan fonksiyon , $E$ birim diskini sag yari düzleme dönüstürdügünden dolayi konvekstir. $k(E)$ bölgesi, her $R(w_0) > -\dfrac{1}{4}$ noktasina göre yildizildir (Goodman 1983). Burada $k$, Koebe fonksiyonu ve $w_0 \in R$ dir.

Bundan baska konveks fonksiyonlara örnek olarak $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ ve $\log\left[\dfrac{1+z}{1-z}\right]$ fonksiyonlarini verebiliriz. $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu ise yildizil fakat konveks degildir.

$S$ nin konveks fonksiyonlarindan olusan alt sinifini $C$ ve yildizil fonksiyonlarindan olusan alt sinifini da $S^*$ ile gösterecegiz. Böylece bu siniflar arasinda $C \subset S^* \subset S$ biçiminde bir kapsam bagintisi vardir.

**2.3.1. Tanim (Taylor Açilimi):** Eger $f$ , $z_0$ merkezli ve $R$ yariçapli bir $L$ çemberinin içinde analitik ise bu durumda çemberin içinde bulunan her $z$ noktasinda

biçimindedir. Yani $|z - z_0| < R$ oldugunda kuvvet serisi $f(z)$ ye yakinsar.

**2.3.2. Tanim (Cauchy Türev Formülü):** $w = f(z)$ fonksiyonu bir $g$ kapali çevresinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eger $a$, $g$ nin içinde bir nokta ise $n = 0,1,2,3,\dots$ olmak üzere

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2p\, i} \int_g \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

olur.

**2.3.3. Önerme (Binom Açilimi):** $f(x) = (1+x)^a$, $a > 0$ keyfi gerçel sayi olmak üzere biçimsel olarak

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

seklindedir.

O halde verilen önermeden yararlanarak daha sonraki katsayi hesaplarinda kullanacagimiz

$$f(z) = \frac{1}{\left[ f\left( \frac{1}{z^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} = z + c_1 \frac{1}{z} + c_3 \frac{1}{z^3} + \dots$$

esitligini verelim.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

serisinde $z$ yerine $(\frac{1}{z^2})$ yazilarak

$$f\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{z^2}+a_2\frac{1}{z^4}+a_3\frac{1}{z^6}+\dots \qquad (2')$$

elde edilir. $(2')$ifadesinin $\frac{1}{2}$ inci kuvveti alinip düzenlenirse,

$$\left[f\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{z}+\frac{a_2}{2}\frac{1}{z^3}+\left(\frac{a_3}{2}-\frac{a_2{}^2}{8}\right)\frac{1}{z^5}+\left(\frac{a_4}{2}-\frac{2a_2a_3}{8}+\frac{3a_2{}^3}{24}\right)\frac{1}{z^7}+\dots$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{a_2}{2}\frac{1}{z^3}+\left(\frac{a_3}{2}-\frac{a_2^2}{8}\right)\frac{1}{z^5}+\dots}=z-\frac{a_2}{2}\frac{1}{z}+\left(\frac{3a_2^2}{8}-\frac{a_3}{2}\right)\frac{1}{z^3}+\dots \qquad (3')$$

olur. Böylece,

$$f(z)=\frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}=z+c_1\frac{1}{z}+c_3\frac{1}{z^3}+\dots$$

ifadesi gelir. $(3')$ esitliginden $c_1=-\frac{a}{2}$, $c_3=\frac{3a_2^2}{8}-\frac{a_3}{2}$ katsayilari bulunur.

**2.3.4. Tanim (Cramer Kurali):**

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n$$

lineer denklem sisteminin katsayilar matrisinin determinanti $\Delta\neq 0$ olmak üzere tek çözümü vardir. Bu çözüm;

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & . & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & . & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ b_n & a_{n2} & . & a_{nn}\end{vmatrix},\ \Delta x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & . & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & . & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{n1} & b_n & . & a_{nn}\end{vmatrix},\ \Delta x_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & b_1\\ a_{21} & a_{22} & . & b_2\\ . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & . & b_n\end{vmatrix}$$

iken $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta}$ formülleriyle hesaplanir.

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüme Alan Teoremleri ile baslanacak, daha sonra kuvvet serilerinin katsayilari için bazi formüller gelistirilecektir.

## 3.1. Alan Teoremi Için Katsayilar

S sinifin için $|a_2| \leq 2$ esitsizliginin ispatlanmasinda;

$$f(z) = \frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = z + c_1\frac{1}{z} + c_3\frac{1}{z^3} + \dots \tag{1}$$

dönüsümünün alan teoremi ile birlestirilmesinin çok yararli sonuçlar verdigi görüldü (Bieberbach 1916 ). Bu yüzden (1) esitliginin sag tarafindaki diger katsayilarin kullanisli sonuçlar verip vermedigini sormak dogaldir. Üstelik bazi $k \neq 2$ pozitif tamsayilari için $\left[f(z^k)\right]^{\frac{1}{k}}$ ifadesini göz önüne almak istenebilir. Bu sekildeki düsünceler kesinlikle yeni esitsizlikler üretir. Ancak $a_2, a_3, \dots$ katsayilarinda oldugu gibi $c_n$ katsayilarindaki karmasikliklardan dolayi yöntem beklenildigi kadar verimli degildir. Buradaki ilk sonucumuz sirasiyla üssün 2 ve $\frac{1}{2}$ olmasi yerine $k$ ve $\frac{1}{k}$ oldugu durum için (1) deki katsayilari verir.

**3.1.1. Teorem:** $k \neq 0$ bir tamsayi ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

fonksiyonuda orjin noktasi hariç $E$ açik birim diskinde bir sifirinin olmadigini kabul edelim.

$$f(z)=\frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{z^{k}}\right)\right]^{\frac{1}{k}}}=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{nk-1}}{z^{nk-1}} \tag{3}$$

ve $g(k,m)=(k+1)(2k+1)(3k+1)\cdots(mk+1)=\prod_{j=1}^{m}(jk+1)$ olsun. $g(k,0)=1$ esitligi verilsin. Bu takdirde ikinci toplam $s_m(n)$ deki sirali $n$ liler üzerinden alinmak üzere

$$c_{nk-1}=\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m g(k,m-1)}{k^m}\left(\sum_{s_m(n)}\frac{a_2^{r_1}a_3^{r_2}\cdots a_{n+1}^{r_n}}{r_1!r_2!\cdots r_n!}\right) \tag{4}$$

seklinde yazilir. Burada $s_m(n)$

$$n=r_1+2r_2+3r_3+\cdots+nr_n \tag{5}$$

$$m=r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n \tag{6}$$

esitliklerini saglayan negatif olmayan tam sayilarda $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ sirali $n$ lilerin bir koleksiyonudur. Bu teoremin ilk 6 durumu asagidaki formülleri verir.

$n=1$ degeri için;

$$c_{k-1}=\sum_{m=1}^{1}\frac{(-1)^m g(k,m-1)}{k^m}\left(\sum_{s_m(1)}\frac{a_2^{r_1}a_3^{r_2}\cdots a_{n+1}^{r_n}}{r_1!r_2!\cdots r_n!}\right)$$

$$c_{k-1}=\left(\frac{-g(k,0)}{k}\sum_{s_1(1)}\frac{a_2^{r_1}}{r_1!}\right) \tag{7}$$

olur. (7) deki toplamda (5) ve (6) dan $r_1=1$ bulunur. Bu degerde (7) de yerine yazilirsa

$$c_{k-1}=-\frac{a_2}{k} \tag{8}$$

bulunur.

$n$ =2 degeri için;

$$c_{2k-1} = \sum_{m=1}^{2} \frac{(-1)^m g(k, m-1)}{k^m} \left( \sum_{s_m(2)} \frac{a_2^{r_1} a_3^{r_2}}{r_1! r_2!} \right)$$

$$c_{2k-1} = \left( \frac{-1g\,(k,0)}{k} \sum_{s_1(2)} \frac{a_2^{r_1} a_3^{r_2}}{r_1! r_2!} \right) + \left( \frac{g\,(k,1)}{k^2} \sum_{s_2(2)} \frac{a_2^{r_1} a_3^{r_2}}{r_1! r_2!} \right)$$

olur. (9) daki birinci toplamda $r_1$ ile $r_2$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 &= 2 \\ r_1 + r_2 &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

denklem sistemi elde edilir. (10) denklem sistemi çözüldügünde $r_2 = 1$ , $r_1 = 0$ bulunur.

Benzer sekilde (9) daki ikinci toplamda $r_1$ ile $r_2$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 &= 2 \\ r_1 + r_2 &= 2 \end{aligned} \tag{11}$$

denklem sistemi elde edilir. (11) denklem sistemi çözüldügünde $r_2 = 0$ , $r_1 = 2$ bulunur. (10) ve (11) denklem sistemlerinden elde edilen $r_1$ ile $r_2$ degerleri (9) da yerlerine yazilirsa

$$c_{2k-1} = \left( \frac{-1}{k} a_3 \right) + \left( \frac{k+1}{k^2} \frac{a_2{}^2}{2!} \right) = \frac{-1}{k} a_3 + \frac{k+1}{2k^2} a_2{}^2 \tag{12}$$

bulunur.

$n$ =3 degeri için;

$$c_{3k-1} = \sum_{m=1}^{3} \frac{(-1)^m g(k, m-1)}{k^m} \left( \sum_{s_m(3)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3}}{r_1! r_2! r_3!} \right)$$

$$c_{3k-1} = \left( \frac{-1g(k,0)}{k} + \frac{g(k,1)}{k^2} + \frac{g(k,2)}{k^3} \right) \left( \sum_{s_m(3)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3}}{r_1! r_2! r_3!} \right)$$

$$c_{3k-1} = \left( \frac{-g(k,0)}{k} \right) \left( \sum_{s_1(3)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3}}{r_1! r_2! r_3!} \right) + \left( \frac{g(k,1)}{k^2} \right) \left( \sum_{s_2(3)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3}}{r_1! r_2! r_3!} \right) \tag{13}$$

$$+ \left( \frac{g(k,2)}{k^3} \right) \left( \sum_{s_3(3)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3}}{r_1! r_2! r_3!} \right)$$

olur. (13) deki birinci toplamda $r_1, r_2, r_3$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 &= 3 \\ r_1 + r_2 + r_3 &= 1 \end{aligned} \tag{14}$$

denklem sistemi elde edilir. (14) denklem sistemi çözüldügünde $r_1 = r_2 = 0, r_3 = 1$ bulunur.

Benzer sekilde (13) deki ikinci toplamda $r_1, r_2, r_3$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 3$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = 2 \qquad (15)$$

denklem sistemi elde edilir. (15) denklem sistemi çözüldügünde $r_3 = 0, r_1 = r_2 = 1$ bulunur.

Ayni sekilde (13) deki üçüncü toplamda $r_1$ , $r_2$ , $r_3$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 = 3$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = 3 \qquad (16)$$

denklem sistemi elde edilir. (16) denklem sistemi çözüldügünde $r_1 = 3, r_2 = 0, r_3 = 0$ bulunur. (14), (15) ve (16) denklem sistemlerinden elde edilen $r_1$ , $r_2$ , $r_3$ degerleri (13) de yerlerine yazilirsa

$$c_{3k-1} = \frac{-1}{k} a_4 + \frac{(k+1)}{k^2} a_2 a_3 - \frac{(k+1)(2k+1)}{k^3 6} a_2{}^3 \qquad (17)$$

bulunur.

$n=4$ degeri için;

$$c_{4k-1} = \sum_{m=1}^{4} \frac{(-1)^m g(k, m-1)}{k^m} \left( \sum_{s_m(4)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4}}{r_1! r_2! r_3! r_4!} \right)$$

$$c_{4k-1} = \left( \frac{-g(k,0)}{k} \right) \left( \sum_{s_1(4)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} {}_5{}^{r_4}}{r_1! r_2! r_3! r_4!} \right) + \left( \frac{g(k,1)}{k^2} \right) \left( \sum_{s_2(4)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4}}{r_1! r_2! r_3! r_4!} \right)$$
$$- \left( \frac{g(k,2)}{k^3} \right) \left( \sum_{s_3(4)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4}}{r_1! r_2! r_3! r_4!} \right) + \left( \frac{g(k,3)}{k^4} \right) \left( \sum_{s_4(4)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4}}{r_1! r_2! r_3! r_4!} \right) \qquad (18)$$

olur. (18) deki birinci toplamda $r_1$ , $r_2$ , $r_3$ , $r_4$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 &= 4 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 1 \end{aligned} \tag{19}$$

denklem sistemi elde edilir. (19) denklem sistemi çözüldügünde $r_1 = r_2 = r_3 = 0, r_4 = 1$ bulunur.

Benzer sekilde (18) deki ikinci toplamda $r_1$ , $r_2$ , $r_3$ , $r_4$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 &= 4 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 2 \end{aligned} \tag{20}$$

denklem sistemi elde edilir. (20) denklem sistemi çözüldügünde $r_2 = r_4 = 0, r_1 = r_3 = 1$ bulunur.

Ayni sekilde (18) deki üçüncü toplamda $r_1$ , $r_2$ , $r_3$ , $r_4$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 &= 4 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 3 \end{aligned} \tag{21}$$

denklem sistemi elde edilir. (21) denklem sistemi çözüldügünde $r_3 = r_4 = 0, r_1 = 2, r_2 = 1$ bulunur.

Benzer olarak (18) deki dördüncü toplamda $r_1$ , $r_2$ , $r_3$ , $r_4$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 &= 4 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 4 \end{aligned} \tag{22}$$

denklem sistemi elde edilir. (22) denklem sistemi çözüldügünde $r_2 = r_3 = r_4 = 0, r_1 = 4$ bulunur. (19), (20) , (21), (22) denklem sistemlerinden elde edilen $r_1, r_2, r_3, r_4$ degerleri (18) de yerlerine yazilirsa

$$c_{4k-1} = \frac{-1}{k} a_5 + \frac{(k+1)}{k^2} a_2 a_4 - \frac{(k+1)(2k+1)}{k^3} \frac{a_2{}^2 a_3}{2} + \frac{(k+1)(2k+1)(3k+1)}{k^4} \frac{a_2{}^4}{24} \tag{23}$$

bulunur.

$n$ =5 degeri için;

$$c_{5k-1} = \sum_{m=1}^{5} \frac{(-1)^m g(k,m-1)}{k^m} \left( \sum_{s_m(5)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4} a_6{}^{r_5}}{r_1! r_2! r_3! r_4! r_5!} \right)$$

$$\begin{aligned} c_{5k-1} = &\left( \frac{-g(k,0)}{k} \right) \left( \sum_{s_1(5)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4} a_6{}^{r_5}}{r_1! r_2! r_3! r_4! r_5!} \right) + \left( \frac{g(k,1)}{k^2} \right) \left( \sum_{s_2(5)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4} a_6{}^{r_5}}{r_1! r_2! r_3! r_4! r_5!} \right) \\ &- \left( \frac{g(k,2)}{k^3} \right) \left( \sum_{s_3(5)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4} a_6{}^{r_5}}{r_1! r_2! r_3! r_4! r_5!} \right) + \left( \frac{g(k,3)}{k^4} \right) \left( \sum_{s_4(5)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4} a_6{}^{r_5}}{r_1! r_2! r_3! r_4! r_5!} \right) \\ &- \left( \frac{g(k,4)}{k^5} \right) \left( \sum_{s_5(5)} \frac{a_2{}^{r_1} a_3{}^{r_2} a_4{}^{r_3} a_5{}^{r_4} a_6{}^{r_5}}{r_1! r_2! r_3! r_4! r_5!} \right) \end{aligned} \tag{24}$$

olur. (24) deki birinci toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 &= 5 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 &= 1 \end{aligned} \tag{25}$$

denklem sistemi elde edilir. (25) denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0, r_5 = 1$ bulunur.

Benzer sekilde (24) deki ikinci toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 &= 5 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 &= 2 \end{aligned} \tag{26}$$

denklem sistemi elde edilir. (26) denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = r_5 = r_4 = 0, r_2 = r_3 = 1$ veya $r_2 = r_3 = r_5 = 0, r_1 = r_4 = 1$ bulunur.

Ayni sekilde (24) deki üçüncü toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 &= 5 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 &= 3 \end{aligned} \tag{27}$$

denklem sistemi elde edilir. (27) denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = r_4 = r_5 = 0$ veya $r_1 = 2, r_3 = 1, r_4 = r_2 = r_5 = 0$ bulunur.

Benzer olarak (24) deki dördüncü toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 &= 5 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 &= 4 \end{aligned} \tag{28}$$

denklem sistemi elde edilir. (28) denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = 3, r_2 = 1, r_3 = r_4 = r_5 = 0$ bulunur.

Ayni sekilde (24) deki besinci toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 &= 5 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 &= 5 \end{aligned} \tag{29}$$

denklem sistemi elde edilir. (29) denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = 4, r_4 = 1, r_3 = r_2 = r_5 = 0$ bulunur. (25), (26), (27), 28) ve (29) denklem sistemlerinden elde edilen $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ degerleri (24) de yerlerine yazilirsa

$$\begin{aligned} c_{5k-1} = & \frac{-1}{k}a_6 + \frac{(k+1)}{k^2}a_2a_5 + \frac{k+1}{k^2}a_3a_4 - \frac{(k+1)(2k+1)}{k^3}\left(\frac{a_2a_3^{\ 2}}{2!} + \frac{a_2^{\ 2}a_4}{2}\right) \\ & + \frac{(k+1)(2k+1)(3k+1)}{k^4}\frac{a_2^{\ 3}a_3}{6} - \frac{(k+1)(2k+1)(3k+1)(4k+1)}{k^5}\frac{a_2^{\ 5}}{120} \end{aligned} \tag{30}$$

bulunur.

$n=6$ degeri için;

$$c_{6k-1} = \sum_{m=1}^{6} \frac{(-1)^m g(k, m-1)}{k^m}\left(\sum_{s_m 6} \frac{a_2^{\ r_1} a_3^{\ r_2} a_4^{\ r_3} a_5^{\ r_4} a_6^{\ r_5} a_7^{\ r_6}}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!r_6!}\right)$$

$$\begin{aligned} c_{6k-1} = & \left(\frac{-g(k,0)}{k}\right)\left(\sum_{s_1(6)} \frac{a_2^{\ r_1} a_3^{\ r_2} a_4^{\ r_3} a_5^{\ r_4} a_6^{\ r_5} a_7^{\ r_6}}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!r_6!}\right) + \left(\frac{g(k,1)}{k^2}\right)\left(\sum_{s_2(6)} \frac{a_2^{\ r_1} a_3^{\ r_2} a_4^{\ r_3} a_5^{\ r_4} a_6^{\ r_5} a_7^{\ r_6}}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!r_6!}\right) \\ & - \left(\frac{g(k,2)}{k^3}\right)\left(\sum_{s_3(6)} \frac{a_2^{\ r_1} a_3^{\ r_2} a_4^{\ r_3} a_5^{\ r_4} a_6^{\ r_5} a_7^{\ r_6}}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!r_6!}\right) + \left(\frac{g(k,3)}{k^4}\right)\left(\sum_{s_4(6)} \frac{a_2^{\ r_1} a_3^{\ r_2} a_4^{\ r_3} a_5^{\ r_4} a_6^{\ r_5} a_7^{\ r_6}}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!r_6!}\right) \\ & - \left(\frac{g(k,4)}{k^5}\right)\left(\sum_{s_5(6)} \frac{a_2^{r_1} a_3^{r_2} a_4^{r_3} a_5^{r_4} a_6^{r_5} a_7^{r_6}}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!r_6!}\right) + \left(\frac{g(k,5)}{k^6}\right)\left(\sum_{s_6(6)} \frac{a_2^{r_1} a_3^{r_2} a_4^{r_3} a_5^{r_4} a_6^{r_5} a_7^{r_6}}{r_1!r_2!r_3!r_4!r_5!r_6!}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

olur. (31) deki birinci toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} & r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 = 6 \\ & r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 1 \end{aligned} \tag{32}$$

denklem sistemi elde edilir. (32) denklem sistemi çözüldügünde, $r_6 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0$ bulunur.

Benzer sekilde (31) deki ikinci toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ arasindaki bagintilar (5) ve (6) dan

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 = 6$$
$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 3 \qquad (33)$$

denklem sistemi elde edilir. (33) denklem sistemi çözüldügünde $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $r_4 = r_5 = r_6 = 0$ veya $r_1 = 2$, $r_4 = 1$, $r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = 0$ veya $r_2 = 3$, $r_1 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$ bulunur.

Ayni sekilde (31) deki üçüncü toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ arasindaki esitlikler (5) ve (6) dan

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 = 6$$
$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 5 \qquad (34)$$

denklem sistemi elde edilir. (34) denklem sistemi çözüldügünde $r_1 = 4$, $r_2 = 1$, $r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$ bulunur.

Benzer olarak (31) deki dördüncü toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ arasindaki esitlikler (5) ve (6) dan

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 = 6$$
$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 2 \qquad (35)$$

denklem sistemi elde edilir. (35) deki denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = r_5 = 1$, $r_2 = r_3 = r_4 = r_6 = 0$ veya $r_2 = r_4 = 1$, $r_1 = r_3 = r_5 = r_6 = 0$ veya $r_3 = 2$, $r_1 = r_2 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$ bulunur.

Benzer sekilde (31) deki besinci toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ arasindaki esitlikler (5) ve (6) dan

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 = 6$$
$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 4 \qquad (36)$$

denklem sistemi elde edilir. (36) daki denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$ veya $r_1 = 3$, $r_3 = 1$, $r_2 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$ bulunur.

Ayni sekilde (31) deki altinci toplamda $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ arasindaki esitlikler (5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} &r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + 6r_6 = 6 \\ &r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 6 \end{aligned} \tag{37}$$

denklem sistemi elde edilir. (37) deki denklem sistemi çözüldügünde

$r_1 = 6$, $r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$ bulunur. (32), (33), (34), (35), (36) ve (37) denklem sistemlerinden elde edilen $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ degerleri, (31) de yerine yazilirsa

$$\begin{aligned} c_{6k-1} = &-\frac{1}{k}a^7 + \frac{(k+1)}{2k^2}(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2) - \frac{(k+1)(2k+1)}{6k^3}(6a_2a_3a_4 + 3a_2^2a_5 + a_3^3) \\ &+ \frac{(k+1)(2k+1)(3k+1)}{12k^4}(3a_2^2a_3^2 + 2a_2^3a^4) - \frac{(k+1)(2k+1)(3k+1)(4k+1)}{24k^5}a_2^4a_3 \\ &+ \frac{(k+1)(2k+1)(3k+1)(4k+1)(5k+1)}{720k^6}a_2^6 \end{aligned} \tag{38}$$

bulunur.

$c_{nk-1}$ katsayilarini determinant olarak da belirtebiliriz. Gerçekten de (3) ifadesinin $z$ 'ye göre türevi alinirsa,

$$-\frac{1}{k}\frac{f'\left(\dfrac{1}{z^k}\right)}{\left(f\left(\dfrac{1}{z^k}\right)\right)^{1+\frac{1}{k}}}\frac{(-k)}{z^{k+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-nk)c_{nk-1}}{z^{nk}} \tag{39}$$

olur. Sol taraftaki esitlikleri kullanarak;

$$\frac{1}{z\left[f\left(\dfrac{1}{z^k}\right)\right]^{\frac{1}{k}}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{nk-1}}{z^{nk}} \tag{40}$$

$$\frac{1}{z^{k}}\, f'\left(\frac{1}{z^{k}}\right)=\frac{1}{z^{k}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{z^{kn}} \tag{41}$$

elde edilir. $\frac{1}{z^{k}}$ yerine $z$ , $a_1 = 1$ , $c_{-1} = 1$ olarak degistirirsek

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-nk)c_{nk-1}z^{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^{n}\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_{nk-1}z^{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n}\right) \tag{42}$$

olur. Bu verilerle

$$\sum_{j=0}^{n}(jk+n-j)a_{n+1-j}\,c_{jk-1}=0\,, n=1,2,3,\ldots \tag{43}$$

elde edilir. (43) deki toplam ifadesi açilirsa

$$na_{n+1}+(k+n-1)a_n c_{k-1}+(2k+n-2)a_{n-1}c_{2k-1}+\cdots=0 \quad \text{olur.}$$

$n$=1degeri için;

$$a_2+kc_{k-1}+(2k-2)a_0 c_{2k-1}+(3k-2)a_{-1}c_{3k-1}+\cdots=0$$

$n$=2 degeri için;

$$2a_3+(k+1)a_2 c_{k-1}+2kc_{2k-1}+(3k+1)a_0 c_{3k-1}+\cdots=0$$

…………

$n$ degeri için;

$$na_{n+1}+(k+n-1)a_n c_{k-1}+\cdots=0$$

esitligi yazilir. Buradaki $c_i$ degiskenleri lineerdir. O halde Cramer kurali ile

$$c_{nk-1} = \frac{(-1)^n}{n!k^n}\begin{vmatrix} a_2 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 2a_3 & (k+1)a_2 & 2k & \cdots & 0 \\ 3a_4 & (k+2)a_3 & (2k+1)a_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ na_{n+1} & (k+n-1)a_n & (2k+n-2)a_{n-1} & \cdots & (n-1)(k+1)a_2 \end{vmatrix} \tag{44}$$

determinanti elde edilir. Bu determinant katsayi bulmada isimizi kolaylastirir.

**3.1.2. Teorem:** Eger $k \neq 0$ pozitif tamsayisi ve $c_{nk-1}$ (3) denklemi ile tanimliysa, o zaman $c_{nk-1}$ (44) determinanti ile verilebilir. (44) de $A_{ij}$

$$A_{ij} = \begin{cases} \left[i + (j-1)(k-1)\right] a_{2+i-j}, & i+1 \geq j \text{ ise} \\ 0, & i+1 < j \text{ ise} \end{cases} \tag{45}$$

seklindedir ve $a_1 = c_{-1} = 1$ dir.

Hem (4) hem de (44) ayni ifadeleri verdiginden (44) deki determinant degerinin tekligi (4) de açiktir.

Eger $k$ yerine $-K$ yazarsak

$$g(z) = \frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{z}\right)^k\right]^{\frac{1}{k}}} = \left[f(z)^K\right]^{\frac{1}{K}} = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1} z^{nK+1} \tag{46}$$

(46) da katsayilar için bir formül elde ederiz. Böylece $k$ , $-K$ ile ve $c_{nK-1}$ de $b_{nK+1}$ ile yer degistirdiginde $b_{nK+1}$ katsayisi (4) veya (44) denklemiyle verilebilir.

3.1.1. Teorem de verilen formülde $k$ nin bir tamsayi olup olmadigi sorulabilir. Burada oldugu gibi bunun hiçbir anlami yoktur.

Sayet $f(z)$ fonksiyonu $S$ de ise o zaman $\dfrac{f(z)}{z}$ nin $E$ de hiç sifiri olmadigini görürüz. Bundan dolayi herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$h(z) = \left[\frac{f(z)}{z}\right]^{-\frac{a}{2}} = \left[\frac{z}{f(z)}\right]^{\frac{a}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{47}$$

fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. (47) deki ifade de her iki taraf $z^{a/2}$ ifadesine bölünürse;

$$\frac{1}{[f(z)]^{\frac{a}{2}}} = \frac{1}{z^{\frac{a}{2}}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-\frac{a}{2}} \tag{48}$$

elde edilir. Ve burada; $k = \dfrac{2}{a}$ yazilirsa

$$\frac{1}{[f(z)]^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{z^{\frac{1}{k}}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk-1} z^{n-\frac{1}{k}} \tag{49}$$

olur.

**3.1.3. Teorem:** $a \neq 0$ da herhangi bir reel sayi ve $f(z) \in S$ ise,

$$\left[\frac{z}{f(z)}\right]^{\frac{a}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{50}$$

serisindeki $b_n$ katsayilari $k = \dfrac{2}{a}$ olmak üzere $b_n = c_{nk-1}$ esitligi ile verilir. Burada $c_{nk-1}$ ifadesi hem 3.1.1. Teorem hem de 3.1.2. Teoremdeki gibidir.

### 3.2. Bir Fonksiyonun Tersi Için Katsayilar

Bir fonksiyonun tersi için verilen Maclaurin serisindeki katsayilar da bir formül vermek mümkündür. Adet oldugu üzere kabul edelim ki

$$w = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$z = g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \tag{51}$$

fonksiyonu da $w=0$ merkezli küçük bir diskte daima mevcut olacak ters fonksiyon olsun. Burada amacimiz $a_2,\ a_3,\dots,a_n$ katsayilarinin bir fonksiyonu olarak $b_n$ katsayilarini bulmak olacaktir. Bu problem $F(z)$ fonksiyonun $w$ ya göre düzenlenmis bir kuvvet serisi olarak ifade edildigi daha genel teoremin bir özel durumu olarak kismen çözülmüstür.

3.1.3. Teorem deki $b_n = c_{nk-1}$ ve $k = \dfrac{2}{a}$ esitliklerinden yararlanilarak 3.1.1. Teorem kullanilmaksizin $b_n$ katsayilari bulunabilir. Söyle ki, (44) den

$n=1$ degeri için; $c_{k-1} = -\dfrac{1}{k} a_2 \Rightarrow c_{k-1} = b_1 = -a\,\dfrac{a_2}{2}$ ve

$n=2$ degeri için; $c_{2k-1} = -\dfrac{1}{k} a_3 + \dfrac{k+1}{2k^2} a_2^2 \Rightarrow c_{2k-1} = b_2 = -a.\dfrac{a_3}{2} + a(a+2)\dfrac{a_2^2}{8}$

elde edilir. O halde, (5) ve (6) denklemleri kullanmadan da $b_n$ katsayilari bulunabilir.

**3.2.1. Teorem:** $F(z)$ fonksiyonu $z$=0 noktasini ihtiva eden bir diskte analitik ve $f(z)$ ve $g(w)$ fonksiyonlari da (2) ve (51) ile verilen ayni diskte birbirlerinin ters fonksiyonlari olsunlar.

$$h(z) = \frac{f(z)}{z} = \frac{z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots}{z} = 1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \tag{52}$$

olsun. Bu durumda $z=0$ noktasinin bazi komsulugunda

$$F(z)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{F'(z)}{h(z)^n}\right)\right]_{z=0} \tag{53}$$

olur. Bu seri Bürmann Lagrange serisi olarak adlandirilir.

**Ispat:** K , $z$ düzleminde orjin civarinda küçük uygun bir çember ve $\Gamma$ ise $f(z)$ altinda K nin $w$ düzlemindeki görüntüsü olsun. Burada K çemberini $w=0$ noktasini içeren çok küçük basit kapali bir egri olarak seçtik. Eger

$$F(z)=F(g(w))=\sum_{n=0}^{\infty}c_n w^n \tag{54}$$

ise, Cauchy integral formülü yardimiyla,

$$c_n=\frac{1}{2pi}\int_{\Gamma}\frac{F(z)}{w^{n+1}}dw \tag{55}$$

yazilir.

(55) esitliginde integrasyon egrisini $\Gamma$ ‘dan K ‘ya ve degiskeni de $w$ dan $z$ ‘ye degistirelim. Buradan

$$c_n=\frac{1}{2p\,i}\int_{C}\frac{F(z)f'(z)}{[f(z)]^{n+1}}dz \tag{56}$$

olur. (56) ‘ya kismi integrasyon uygularsak $F(z)=u$ ise $F'(z)dz=du$ olur.

$\dfrac{f'(z)}{[f(z)]^{n+1}}dz=dn \Rightarrow \displaystyle\int\frac{f'(z)}{f(z)^{n+1}}dz=\int dn$ elde edilir. Simdi de bu ifadenin integrali alinirsa

$$f(z)=u\quad,\quad f'(z)dz=du \Rightarrow \int\frac{du}{u^{n+1}}=-\frac{1}{nu^n}=-\frac{1}{n[f(z)]^n}=n$$

elde edilir.

Buradan,

$$\int_C \frac{F(z)f'(z)}{[f(z)]^{n+1}}dz = -\frac{F(z)}{n[f(z)]^n} + \frac{1}{n}\int_C \frac{F'(z)}{n[f(z)]^n}dz$$

yazilir. O halde,

$$c_n = -\frac{1}{2pi}\Delta_C \frac{F(z)}{n[f(z)]^n} + \frac{1}{2pi}\int_C \frac{F'(z)}{n[f(z)]^n}dz$$

ilk terim sifir oldugundan

$$c_n = \frac{1}{2pi}\int_C \frac{F'(z)}{n[f(z)]^n}dz = \frac{1}{2pi}\int_C \frac{F'(z)}{z^n n[h(z)]^n}dz) \qquad (57)$$

olur. Diger taraftan (57) esitliginin sag yani $\frac{F'(z)}{n[h(z)]^n}$ için yazilan Maclaurin serisindeki $z^{n-1}$ teriminin katsayisidir. Sonuç olarak;

$$c_n = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{F'(z)}{n[h(z)]^n}\right]\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{F'(z)}{h^n(z)}\right]\Bigg|_{z=0}$$

olur. Bu da (53) esitligini verir.

Eger $F(z) = z$ ise, bu sonuca kolaylikla varilabilir. Örnegin $n = 2$ alinirsa,

$$c_2 = \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2[h(z)]^2}\right]\Bigg|_{z=0} = \frac{-4h(z)h'(z)}{4[h(z)]^4}\Bigg|_{z=0} = \frac{h'(z)}{h(z)^3}\Bigg|_{z=0} = -a_2$$

olur.

**3.2.2. Teorem:**

$$w = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

ve

$$z = g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \tag{51}$$

olarak verilen ters fonksiyonlar ise bu durumda;

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [h(z)]^{-n} \Big|_{z=0} \tag{58}$$

olur. Burada $h(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}$ dir.

3.2.2. Teorem deki formül çekici görünmesine ragmen eger $h(z)$ fonksiyonu dikkatli seçilmez ise $b_n$ katsayisinin hesabi oldukça zor olabilir.Bundan ne kastedildigi asagida örneklendirilmistir.

**3.2.3. Örnek:** Eger $w = f(z) = ze^{-\mathrm{A}z}$ ise bu fonksiyonun ters fonksiyonu için Maclaurin serisini elde ederek, elde ettigimiz serinin yakinsaklik yariçapini hesaplayalim.

**Çözüm:** 3.2.1. Teoreminden $h(z) = \dfrac{f(z)}{z} = e^{-\mathrm{A}z}$ esitligi yazilir. Bu esitlik 3.2.2 Teoreminde kullanilirsa,

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [h(z)]^{-n} \Big|_{z=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{Anz}) \Big|_{z=0} = \frac{1}{n!} \underbrace{\mathrm{A}_n \mathrm{A}_n \mathrm{A}_n \ldots \mathrm{A}_n}_{(n-1)\,\tan e} e^{\mathrm{A}nz} \Big|_{z=0} = \frac{\mathrm{A}^{n-1} n^{n-1}}{n!}$$

esitligi elde edilir. Böylece $w = f(z) = ze^{-\mathrm{A}z}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu;

$$g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^{n-1} n^{n-1}}{n!} w^n \tag{59}$$

biçiminde yazilir.

Simdi de bu fonksiyonun yakinsaklik yariçapini hesaplayalim. Bunun için D'alambert kuralini kullanacagiz.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{A^{n-1}n^{n-1}}{n!}}{\dfrac{A^n(n+1)^n}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|A|}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{|A|e}$$

olup $|w| < \dfrac{1}{|A|e}$ için seri yakinsaktir.

**3.2.4. Teorem:** Eger (2) ve (51) denklemleri ile verilen $f(z)$ ve $g(w)$ ters fonksiyonlar ise bu halde $n \geq 2$ için

$$b_n = \sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\frac{(n+m-1)!}{n!}\left(\sum_{s_m(n-1)}\frac{a_2^{r_1}a_3^{r_2}\ldots a_n^{n-1}}{r_1!r_2!\ldots r_{n-1}!}\right) \tag{60}$$

yazilir. Buradaki ikinci toplam

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \ldots + (n-1)r_{n-1} = n-1 \tag{61}$$

ve

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{n-1} = m \tag{62}$$

bagintilarini saglayan $s_m(n-1)$ deki negatif olmayan tamsayilarin $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1})$ biçimindeki $(n-1)$ liler üzerindedir.

**3.2.5. Teorem:** Teorem 3.2.4.deki kosullar altinda

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\begin{vmatrix} na_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2na_3 & (n+1)a_2 & 2 & \ldots & 0 \\ 3na_4 & (2n+1)a_3 & (n+2)a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ (n-1)na_n & \ldots & \ldots & \ldots & (2n-2)a_2 \end{vmatrix} \tag{63}$$

(63) de $\left|A_{ij}\right|$ determinantindaki katsayilar

$$A_{ij} = \begin{cases} [(i-j+1)n + j - 1]a_{i-j+2} & ,\text{eger} \quad i+1 \geq j \\ 0 & ,\text{eger} \quad i+1 < j \end{cases} \tag{64}$$

ile verilir.

(63) ifadesinden yararlanarak $b_2, b_3, b_4, b_5$ katsayilarini bulmaya çalisalim.

Ilk olarak $n=2$ için;

$$b_2 = \frac{(-1)^3}{2!}2a_2 = -a_2$$

elde edilir. Sirasiyla $n$ yerine $3,4,5$ yazilarak;

$$b_3 = \frac{(-1)^4}{3!}\begin{vmatrix} 3a_2 & 1 \\ 6a_3 & 4a_2 \end{vmatrix} = \frac{12a_2^2 - 6a_3}{6} = 2a_2^2 - a_3 \tag{65}$$

$$b_4 = \frac{(-1)^5}{4!}\begin{vmatrix} 4a_2 & 1 & 0 \\ 8a_3 & 5a_2 & 2 \\ 12a_4 & 9a_3 & 6a_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{24}\left[4a_2(30a_2^2 - 18a_3) - (48a_2a_3 - 24a_4)\right]$$

$$b_4 = -\frac{1}{24}\left[120a_2^3 - 72a_2a_3 - 48a_2a_3 + 24a_4\right] = -5a_2^3 + 5a_2a_3 - a_4 \tag{66}$$

$$b_5 = \frac{1}{120}\left[\left(5a_2\begin{vmatrix} 6a_2 & 2 & 0 \\ 11a_3 & 7a_2 & 3 \\ 16a_4 & 12a_3 & 8a_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10a_3 & 2 & 0 \\ 15a_4 & 7a_2 & 3 \\ 20a_5 & 12a_3 & 8a_2 \end{vmatrix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{120}[(5a_2(6a_2(56a_2^2 - 36a_3) - 2(88a_2a_3 - 48a_4))$$

$$-(10a_3(56a_2^2 - 36a_3) - 2(120a_2a_4 - 60a))]$$

$$= \frac{1}{120}[(5a_2(336a_2^3 - 216a_2a_3 - 176a_2a_3 + 96a_4)$$

$$-(560a_3a_2^2 - 360a_3^2 - 240a_2a_4 + 120a_5))]$$

$$= \frac{5.336}{120} a_2^4 - \frac{5.216}{120} a_2^2 a_3 - \frac{5.176}{120} a_2^2 a_3 + \frac{5.96}{120} a_2 a_4$$

$$- \frac{560}{120} a_3 a_2^2 + \frac{360}{120} a_3^2 + \frac{240}{120} a_2 a_4 - \frac{120}{120} a_5$$

$$b_5 = 14a_2^4 - 21a_2^2 a_3 + 6a_2 a_4 + 3a_3^2 - a_5 \qquad (67)$$

katsayilari elde edilir.

3.2.4. Teorem ve 3.2.5. Teorem Kamber, tarafindan $f(z)$ ve $g(w)$ fonksiyonlari arasindaki çok daha karisik bir baginti için çalisilan iki formülün basitlestirilmis halidir. $f(z) = g(h(z))$ bileske fonksiyon oldugundan $f^{(n)}(z)$ için apaçik formüller gelistirildi (Todorov 1981). 3.2.4. Teorem ve 3.2.5. Teorem o formüllerin birer özel halleridir. Bu tip problemler için degisik çalismalar Todorov tarafindan verilen referanslarda görülebilir.

**3.3. Birim Diskten Sag Yari Düzleme Alan Dönüsümü**

Ara sira kullanilan ve digerlerinden daha kolay olan iki ya da daha fazla seri dönüsümü vardir.

**3.3.1. Tanim:** $E = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik $\forall z \in E$ için $|f(z)| < 1$ özelligini saglayan

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots \qquad (68)$$

biçimindeki bütün fonksiyonlarin kümesi $B_0$ olsun. Burada $B_0$ kümesinden sinirli fonksiyonlarin kümesi olarak söz edilir. Bu fonksiyonlar Schwarz Lemma’si sartlarini saglar. $b_1 = 1$ normalizasyonu elde edilmez. Çünkü eger $f(z)$ fonksiyonu $B_0$ sinifina ait ise bu takdirde Schwarz Lemma’si hem $|b_1| < 1$ hemde $f(z) = e^{ia} z$ olur.

**3.3.2. Tanim:** $E$ birim diskinde analitik ve $E$ de $\text{Re}\, g(z) > 0$ esitsizligini saglayan

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots \tag{69}$$

formundaki bütün fonksiyonlarin kümesi $P$ olsun.

$$w = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{ve} \quad z = \frac{w-1}{w+1} \tag{70}$$

biçiminde ifade edilen Möbius dönüsümleri $|z| < 1$ diskini $\text{Re}\, w > 0$ bölgesine ve $\text{Re}\, w > 0$ bölgesini de $|z| < 1$ diskine dönüstürdügünden $B_0$ ve $P$ siniflari

$$g(z) = \frac{1+f(z)}{1-f(z)} \quad \text{ve} \quad f(z) = \frac{g(z)-1}{g(z)+1} \tag{71}$$

esitlikleri ile yakin ilgilidir.

Bu söyle gösterilebilir. $w = u + iv$ olsun.

$w = \dfrac{1+z}{1-z}$ ise, $w - wz = 1 + z$ olur. Buradan da $w - 1 = z(1+w)$ yazilir. O halde $z = \dfrac{w-1}{w+1}$ elde edilir. Bu esitligin her iki tarafinin mutlak degerinden $|z| = \left|\dfrac{w-1}{w+1}\right| = \left|\dfrac{u-1+iv}{u+1+iv}\right| < 1$ yazilir. Basit islemler sonucunda $u > 0$ oldugu görülür. Böylece $|z| < 1$ birim diski $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ dönüsümü altinda $\text{Re}\, w > 0$ bölgesine tasinmis olur. Buda $f(z)$ fonksiyonunun konveks oldugunu gösterir.

Aslinda yukaridaki denklemlerin her biri için $f(z)$ nin $B_0$ a ait olmasi için gerekli ve yeterli sart $g(z)$ nin $P$ ye ait olmasidir.

**3.3.3. Teorem:** $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlari sirasiyla (68) ve (69) denklemlerinde verilen denklemlerin Maclaurin serilerine sahip olsun. Eger $f(z)$ ve $g(z)$ (71) denklemiyle ilgili ise o zaman $n > 1$ için

$$p_n = 2\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & -1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 \end{vmatrix} \tag{72}$$

ve

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\begin{vmatrix} p_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \dots & p_1 & 2 \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_2 & p_1 \end{vmatrix} \tag{73}$$

olur. (72) ve (73) determinantlarinin bazi kismi örnekleri asagida verilmistir.

$p_1 = 2b_1, \quad p_2 = 2b_1^2 + 2b_2$

$$p_3 = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} = 2\left(b_1(b_1^2 + b_2) + 1(b_1 b_2 + b_3)\right)$$

$$p_3 = 2b_1^3 + 4b_1 b_2 + 2b_3$$

$$p_4 = 2\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & -1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} = 2b_1\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b_2 & -1 & 0 \\ b_3 & b_1 & -1 \\ b_4 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$p_4 = 2b_1\left(b_1(b_1^2 + b_2) + (b_1 b_2 + b_3)\right) + 2\left(b_2(b_1^2 + b_2) + (b_1 b_3 + b_4)\right)$$

$$p_4 = 2b_1^4 + 4b_1^2 b_2 + 2b_1 b_3 + 2b_2 b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_1 b_3 + 2b_4$$

$$p_4 = 2b_1^4 + 6b_1^2 b_2 + 4b_1 b_3 + 2b_2^2 + 2b_4$$

O halde buradan;

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 2b_1 \\ p_2 &= 2b_1^2 + 2b_2 \\ p_3 &= 2b_1^3 + 4b_1 b_2 + 2b_3 \\ p_4 &= 2b_1^4 + 6b_1^2 b_2 + 4b_1 b_3 + 2b_2^2 + 2b_4 \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

yazilir.

$$b_1 = \frac{1}{2} p_1 \quad , \quad b_2 = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} p_1 & 2 \\ p_2 & p_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(2p_2 - p_1^2)$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} p_1 & 2 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\left(p_1(2p_2 - p_1^2) - 2(2p_3 - p_1 p_2\right)$$

$$= \frac{1}{8}(2p_1 p_2 - p_1^3 - 4p_3 + 2p_1 p_2)$$

$$= \frac{1}{8}(4p_3 - 4p_1 p_2 + p_1^3)$$

$$b_4 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} p_1 & 2 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 2 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\left(8p_4 - 8p_1 p_3 - 4p_2^2 + 6p_1^2 p_2 - p_1^4\right)$$

$$b_5 = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} p_1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 2 & 0 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 2 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{64}\Big[p_1^3(p_1^2 - 2p_2) - 2p_1^2(p_2 p_1 - 2p_3)$$

$$- 2p_1 p_2(p_1^2 - 2p_2) + 4p_1(p_3 p_1 - 2p_4) - 2p_1 p_2(p_1^2 - 2p_2) + 4p_2(p_1 p_2 - 2p_3)$$

$$+ 4p_3(p_1^2 - 2p_2) - 8(p_1 p_4 - 2p_5) \Big]$$

biçimindedir. Buradaki ifadeler yeniden düzenlenirse,

$$b_5 = \frac{1}{64}(p_1^5 - 8p_1^3 p_2 + 12p_1^2 p_3 + 12p_1 p_2^2 - 16p_1 p_4 - 16p_2 p_3 + 16p_5)$$

elde edilir.

$$b_6 = -\frac{1}{128}\begin{vmatrix} p_1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 2 & 0 & 0 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 2 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 2 \\ p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{128}(p_1^4(p_1^2 - 2p_2) - 2p_1^3(p_1 p_2 - 2p_3) - 2p_1^2 p_2(p_1^2 - 2p_2) + 4p_1^2(p_1 p_3 - 2p_4)$$

$$-2p_1^2 p_2(p_1^2 - 2p_2) + 4p_1 p_2(p_1 p_2 - 2p_3) + 4p_1 p_3(p_1^2 - 2p_2)$$

$$-8p_1(p_1 p_4 - 2p_5) - 2p_1^2 p_2(p_1^2 - 2p_2) + 4p_1 p_2(p_1 p_2 - 2p_3)$$

$$+4p_2^2(p_1^2 - 2p_2) - 8p_2(p_1 p_3 - 2p_4) + 4p_1 p_3(p_1^2 - 2p_2)$$

$-8p_3(p_1 p_2 - 2p_3) - 8p_4(p_1^2 - 2p_2) + 16(p_1 p_5 - 2p_6))$ olur. Buradaki ifadeler yeniden düzenlenirse,

$$b_6 = -\frac{1}{128}(p_1^6 - 10p_2 p_1^4 + 16p_1^3 p_3 + 20p_1^2 p_2^2 - 24p_1^2 p_4$$

$$-48p_1 p_2 p_3 + 32p_1 p_5 + 4p_1^2 p_2 - 8p_2^3 + 32p_2 p_4 + 16p_3^2 - 32p_6)$$ bulunur.

## 3.4. Uygulamalar

Bu kesimde konunun daha iyi anlasilmasina yardimci olacak bazi örnekler verilmistir.

**3.4.1. Örnek:** $w = f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu

$$g(w) = w - w^2 + w^3 - w^4 + \dots$$

biçimindedir.

**Çözüm:** Çözüm için 3.2.2. Teoremini kullanacagiz.

$h(z)=\dfrac{f(z)}{z}=\dfrac{\frac{z}{1-z}}{z}=\dfrac{1}{1-z}$ seklinde oldugu kolayca görülebilir.

3.2.2. Teoreminde $f(z)=w=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ nin tersi $z=g(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_n w^n$ dir. Burada $b_n$ ‘ler; $b_n=\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[h(z)]^{-n}\Big|_{z=0}$ formülü ile $b_1=1$ $b_2=-1$ $b_3=1$ $b_4=-1$ seklinde hesaplanir. $z=g(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_n w^n$ yerine yazilirsa, $g(w)=w-w^2+w^3-w^4+\ldots$ elde edilir.

**3.4.2. Örnek:** 3.2.2. Teoremini kullanarak Koebe fonksiyonun tersini bulabiliriz.

**Çözüm:**

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$$

$$h(z)=\frac{k(z)}{z}=\frac{\frac{z}{(1-z)^2}}{z}=\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$b_n=\frac{1}{n!}.\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[h(z)]^{-n}\Big|_{z=0}$$

$$b_1=\frac{1}{1}h(0)=1$$

$$b_2=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}(1-z)^4\Big|_{z=0}=-\frac{1}{2}4(1-z)^3\Big|_{z=o}=-2$$

$$b_3=\frac{1}{6}\frac{d^2}{dz^2}(1-z)^6\Big|_{z=0}=\frac{-1}{6}\frac{d}{dz}(6(1-z)^5)\Big|_{z=0}=\frac{1}{6}30(1-z)^4\Big|_{z=0}=5$$

$$b_4 = \frac{1}{24}\frac{d^3}{dz^3}(1-z)^8\Big|_{z=0} = \frac{-1}{24}\frac{d^2}{dz^2}(8(1-z)^7\Big|_{z=0} = \frac{56}{24}\frac{d}{dz}(1-z)^6\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{-56.6}{24}(1-z)^5\Big|_{z=0} = -14$$

bulunur. Buradan $b_1 = 1$ , $b_2 = -2$ , $b_3 = 5$ , $b_4 = -14$ elde edilir. O halde bu fonksiyonun ters fonksiyonu

$$g(w) = w - 2w^2 + 5w^3 - 14w^4 + \cdots$$

olur.

**3.4.3. Örnek:** $b_k$ katsayisi, (47) numarali denklemle verilmis olsun. 3.1.3. Teorem de verilen yöntem kullanilarak $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , $b_4$ katsayilari asagidaki formüller ile elde edilebilir.

$$b_1 = -a\,\frac{a_2}{2}$$

$$b_2 = -a\,\frac{a_3}{2} + a\,(a+2)\frac{a_2^{\;3}}{8}$$

$$b_3 = -a\,\frac{a_4}{2} + a\,(a+2)\frac{a_2 a_3}{4} - a\,(a+2)(a+4)\frac{a_2^{\;3}}{48}$$

$$b_4 = -a\,\frac{a_5}{2} + a\,(a+2)\frac{a_2 a_4}{4} + a\,(a+2)\frac{a_3^2}{8} - a\,(a+2)(a+4)\frac{a_2^2 a_3}{16}$$
$$+\, a\,(a+2)(a+4)(a+6)\frac{a_2^4}{384}$$

**Çözüm:** 3.1.3. Teoreminden $b_n = c_{nk-1}$ ve $k = \dfrac{2}{a}$ oldugu biliniyor.

$$b_n = c_{nk-1} = \frac{(-1)^n}{n!k^n}\begin{vmatrix} a_2 & k & 0 & \dots & 0 \\ 2a_3 & (k+1)a_2 & 2k & \dots & \vdots \\ 3a_4 & (k+2)a_3 & (2k+1)a_2 & \dots & \vdots \\ 4a_5 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ na_{n+1} & \dots & \dots & \dots & [(n-1)k+1]a_2 \end{vmatrix} \qquad (44)$$

(44) determinantindan $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , $b_4$ katsayilarini

$n=1$ degeri için;

$$b_1 = \frac{(-1)a}{2}a_2 = -a\,\frac{a_2}{2}$$

$n=2$ degeri için;

$$b_2 = \frac{a^2}{2.4}\begin{vmatrix} a_2 & \frac{2}{a} \\ 2a_3 & \left(\frac{a+2}{a}\right)a_2 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{8}\left(a_2{}^2\left(\frac{a+2}{a}\right) - \frac{4a_3}{a}\right) = -a\,\frac{a_3}{2} + a(a+2)\frac{a_2{}^2}{8}$$

$n=3$ degeri için;

$$b_3 = \frac{-1}{6.8}a^3\begin{vmatrix} a_2 & \frac{2}{a} & 0 \\ 2a^3 & (\frac{a+2}{a})a_2 & \frac{4}{a} \\ 3a^4 & (\frac{2a+2}{a})a_3 & (\frac{a+4}{a})a_2 \end{vmatrix}$$

$$b_3 = \frac{-a}{48}\left[(a_2(a_2^2(\frac{2+a}{a})(\frac{4+a}{a}) - \frac{4}{a}(\frac{2+2a}{a})a_3) - \frac{2}{a}(2a_3(\frac{4+a}{a})a_2 - 3a_4\frac{4}{a}\right]$$

$$b_3 = -a\,\frac{a_4}{2} + a(a+2)\frac{a_2a_3}{4} - a(a+2)(a+4)\frac{a_2^3}{48}$$

$n = 4$ degeri için;

$$b_4 = \frac{a^4}{24.16}\begin{vmatrix} a_2 & k & 0 & 0 \\ 2a_3 & (k+1)a_2 & 2k & 0 \\ 3a_4 & (k+2)a_3 & (2k+1)a_2 & 3k \\ 4a_5 & (k+3)a_4 & (2k+2)a_3 & (3k+1)a_2 \end{vmatrix}$$

$$b_4 = \frac{a^4}{384}\left( a_2\begin{vmatrix} (k+1)a_2 & 2k & 0 \\ (k+2)a_3 & (2k+1)a_2 & 3k \\ (k+3)a_4 & (2k+2)a_3 & (3k+1)a_2 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 2a_3 & 2k & 0 \\ 3a_4 & (2k+1)a_2 & 3k \\ 4a_5 & (2k+2)a_3 & (3k+1)a_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} b_4 = \frac{a^4}{384}\Big\{ & a_2^2(k+1)\left[(a_2^2(2k+1)(3k+1) - 3ka_3(2k+2)\right] \\ & - 2ka_2\left[(k+2)(3k+1)a_2a_3 - 3ka_4(k+3)\right] \\ & - 2a_3k\left[(2k+1)(3k+1)a_2^2 - 3ka_3(2k+2)\right] \\ & + 2k^2\left[3a_2a_4(3k+1) - 12ka_5\right]\Big\} \end{aligned}$$

biçiminde elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned} b_4 = \frac{a^4}{384}\Big[ & a_2^4(k+1)(2k+1)(3k+1) - 3a_2^2a_3k(k+1)(2k+2) - 2a_2^2a_3k(k+2)(3k+1) \\ & + 6a_2a_4k^2(k+3) - 2a_3a_2^2k(2k+1)(3k+1) + 6a_3^2k^2(2k+2) + 6a_2a_4k^2(3k+1) - 24a_5k^3\Big] \end{aligned}$$

yazilir. Bu ifade yeniden düzenlenerek,

$$\begin{aligned} b_4 = \frac{a^4}{384}\Big[ & a_2^4\left(\frac{2+a}{a}\right)\left(\frac{4+a}{a}\right)\left(\frac{6+a}{a}\right) - 3a_2^2a_3\frac{4}{a}\left(\frac{2+a}{a}\right)^2 \\ & - 2a_2^2a_3\frac{2}{a}\left(\frac{2+2a}{a}\right)\left(\frac{6+a}{a}\right) + 6a_2a_4\frac{4}{a^2}\frac{(2+3a)}{a} - 2a_3a_2^2\frac{2}{a}\left(\frac{4+a}{a}\right)\left(\frac{6+a}{a}\right) \\ & + 6a_3^2\frac{8}{a^2}\left(\frac{2+a}{a}\right) + 6a_2a_4\frac{4}{a^2}\left(\frac{6+a}{a}\right) - 24a_5\frac{8}{a^3}\Big] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$b_4 = -a\frac{a_5}{2} + a(a+2)\frac{a_2a_4}{4} + a(a+2)\frac{a_3^2}{8} - a(a+2)(a+4)\frac{a_2^2a_3}{16}$$
$$+ a(a+2)(a+4)(a+6)\frac{a_2^4}{384}$$

olur.

**3.4.4. Örnek:** $g(z) = 1 + 2f(z) + 2f^2(z) + 2f^3(z) + \cdots$ seklindeki fonksiyonun (70) denklemini sagladigini gösterebiliriz.

**Çözüm:** Amacimiz $f(z) = \dfrac{g(z)-1}{g(z)+1} = \dfrac{w-1}{w+1}$ oldugunu göstermektir. O halde verilen $g(z)$ fonksiyonunu yerine yazarsak

$$f(z) = \frac{2f(z) + 2f^2(z) + 2f^3(z) + \cdots}{2(1 + f(z) + f^2(z) + \cdots)} = \frac{2f(z)(1 + f(z) + f^2(z) + \ldots)}{2(1 + f(z) + f^2(z) + \ldots)} = f(z)$$

olur. O halde istenende gösterilmis olur.

**3.4.5. Örnek:** $n$ =1, 2, 3 için (44) denklemini kullanarak

$$c_{k-1} = -\frac{1}{k}a_2$$
$$c_{2k-1} = a_2^2\frac{k+1}{2k^2} - \frac{1}{k}a_3$$
$$c_{3k-1} = -\frac{1}{k}a_4 + \frac{k+1}{k^2}a_2a_3 - \frac{(2k+1)(k+1)}{6k^3}a_2^3$$

katsayilari elde edilebilir.

**Çözüm:**

$$c_{nk-1}=\frac{(-1)^n}{n!k^n}\begin{vmatrix} a_2 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 2a_3 & (k+1)a_2 & 2k & \cdots & 0 \\ 3a_4 & (k+2)a_3 & (2k+1)a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ na_{n+1} & (k+n-1)a_n & (2k+n-2)a_{n-1} & \cdots & [(n-1)k+1]a_2 \end{vmatrix}$$

bu denklemde

$n=1$ degeri için;

$$c_{k-1}=\frac{-1}{k}a_2$$

$n=2$ degeri için;

$$c_{2k-1}=\frac{1}{2k^2}\begin{vmatrix} a_2 & k \\ 2a_3 & (k+1)a_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2k^2}(a_2^2(k+1)-2a_3k)=a_2^2\,\frac{k+1}{2k^2}-\frac{1}{k}a_3$$

$n=3$ degeri için;

$$c_{3k-1}=\frac{-1}{6k^3}\begin{vmatrix} a_2 & k & 0 \\ 2a_3 & (k+1)a_2 & 2k \\ 3a_4 & (k+2)a_3 & (2k+1)a_2 \end{vmatrix}$$

$$c_{3k-1}=\frac{-1}{6k^3}(a_2(a_2^2(k+1)(2k+1)-2k(k+2)a_3-k(2a_3a_2(2k+1)-6ka_4)$$

$$c_{3k-1}=\frac{-1}{6k^3}(a_2^3(k+1)(2k+1)-2a_2a_3k(k+2)-2a_2a_3k(2k+1)+6k^2a_4)$$

$$c_{3k-1} = -\frac{1}{k}a_4 + \frac{k+1}{k^2}a_2a_3 - \frac{(2k+1)(k+1)}{6k^3}a_2^3 \quad \text{olur.}$$

**3.4.6. Örnek:** $b_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}}\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ (75)

determinanti ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$ esitligi verilsin. O halde $b_0 = \frac{1}{a_0}$, $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$ oldugu gösterilebilir.

**Çözüm:** (75)'den

$n = 0$ degeri için $b_0 = \frac{1}{a_0}$

$n = 1$ degeri için; $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$

oldugu kolaylikla (75) determinant tan görülebilir. Ayni ifadeler polinamlardaki bölme kullanilarak da elde edilebilir. Yani;

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$ esitliginden

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{1}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} z + \cdots$ yazilir. Buradan;

$b_0 = \frac{1}{a_0}$ ve $b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}$

oldugu görülür.

**3.4.7. Örnek:** 3.1.1. Teorem i kullanilmaksizin

$$f(z)=\frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{z^k}\right)\right]^{\frac{1}{k}}}=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{nk-1}}{z^{nk-1}} \qquad (3)$$

(3) denklemini kullanarak;

$c_{k-1}=-\frac{1}{k}a_2$, $\quad c_{2k-1}=a_2^2\frac{k+1}{2k^2}-\frac{1}{k}a_3$ ve

$c_{3k-1}=-\frac{1}{k}a_4+\frac{k+1}{k^2}a_2a_3-\frac{(2k+1)(k+1)}{6k^3}a_2^3$ katsayilari elde edilebilir.

**Çözüm:** Daha önceden

$$f(z)=\frac{1}{\left[f(\frac{1}{z^2})\right]^{\frac{1}{2}}}=z+c_1\frac{1}{z}+c_3\frac{1}{z^3}+\cdots$$

oldugu ispatlanmisti. Ayni yaklasimla (3) denklemini de gösterebiliriz. $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ oldugu biliniyor. Buradan,

$$f(\frac{1}{z^k})=\frac{1}{z^k}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\frac{1}{z^{kn}}=\frac{1}{z^k}+a_2\frac{1}{z^{2k}}+a_3\frac{1}{z^{3k}}+\cdots$$

yazilir. Bu ifadenin $\frac{1}{k}$ inci kuvveti alinirsa,

$$\left[f(\frac{1}{z^k})\right]^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}(\frac{a_2}{z^k}+\frac{a_3}{z^{2k}}+\frac{a_4}{z^{3k}}+\cdots)+\frac{(1-k)}{k}\frac{1}{k}\frac{1}{2}(\frac{a_2}{z^k}+\frac{a_3}{z^{2k}}+\frac{a_4}{z^{3k}}+\cdots)^2$$
$$+\frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}\frac{(1-2k)}{k}\frac{1}{6}(\frac{a_2}{z^k}+\frac{a_3}{z^{2k}}+\frac{a_4}{z^{3k}}+\cdots)^3+\cdots$$

olur. Buradan,

$$\left[f\left(\frac{1}{z^k}\right)\right]^{\frac{1}{k}} = 1+\frac{1}{k}\frac{a_2}{z^k}+\frac{1}{z^{2k}}\left(\frac{a_3}{k}+\frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}\frac{1}{2}a_2^2\right)+\frac{1}{z^{3k}}\left(\frac{a_4}{k}+\frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}a_2a_3 + \frac{1}{z^{4k}}\frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}\frac{(1-2k)}{k}\frac{1}{6}a_2^3\right)+\cdots \tag{76}$$

yazilir. (76)'nin çarpmaya göre tersi alinip, bölme islemi yapilirsa,

$$\frac{1}{\left[f\left(\frac{1}{z^k}\right)\right]^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}\frac{a_2}{z^k}+\frac{1}{z^{2k}}\left(\frac{a_3}{k}+\frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}\frac{1}{2}a_2^2\right)+\frac{1}{z^{3k}}\left(\frac{a_4}{k}+\frac{1}{k}\frac{(1-k)}{k}a_2a_3+\ldots\right.}$$

$$= 1-\frac{1}{z^k}\frac{a_2}{k}+\frac{1}{z^{2k}}\left(a_2^2\frac{1+k}{2k^2}-\frac{1}{k}a_3\right)+\frac{1}{z^{3k}}\left(\frac{-1}{k}a_4+\frac{k+1}{k^2}a_2a_{3_a} - \frac{(2k+1)(k+1)}{6k^3}a_2^3\right)+\cdots$$

elde edilir. O halde, (3)'den

$$c_{k-1} = \frac{-a_2}{k}$$

$$c_{2k-1} = a_2^2\frac{1+k}{2k^2}-\frac{a_3}{k}$$

$$c_{3k-1} = \frac{-a_4}{k}+\frac{k+1}{k^2}a_2a_3-\frac{(2k+1)(k+1)}{6k^3}a_2^3$$

olur. Böylece, istenen katsayilarda elde edilmis olur.

**3.4.8. Teorem:** $k(c,z) \equiv \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c-1\right]$ genellestirilmis Koebe fonksiyonunun ters katsayilari

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = -c$$

$$b_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{-8c^2+2}{3}\right)$$

$$b_4 = -\frac{1}{6}(10c^3 + 4c^2 - 6c)$$

dir.

**Ispat:** $k(c,z) \equiv \frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c - 1\right] \equiv \frac{1}{2c}\left[\frac{(1+z)^c}{(1-z)^c} - 1\right]$ olur. Öncelikle 2.3.3. Önermesinden (binom açilimindan) faydalanarak $\frac{(1+z)^c}{(1-z)^c}$ ifadesini bulalim.

$$(1+z)^c = 1 + cz + \frac{c(c-1)}{2}z^2 + \frac{c(c-1)(c-2)}{6}z^3 + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)}{24}z^4 + \ldots$$

$$(1-z)^c = (1+(-z))^c = 1 - cz + \frac{c(c-1)}{2}z^2 - \frac{c(c-1)(c-2)}{6}z^3 + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)}{24}z^4 + \ldots$$

olur. Yukaridaki ifadeler birbirine bölünerek;

$$\frac{(1+z)^c}{(1-z)^c} = 1 + 2cz + 2c^2z^2 + (\frac{4c^3+2c}{3})z^3 + (\frac{4c^3+4c^2}{3})z^4 + \ldots$$

çok terimlisi elde edilir. O halde ;

$$k(c,z) \equiv \frac{1}{2c}\left[1 + 2cz + 2c^2z^2 + (\frac{4c^3+2c}{3})z^3 + (\frac{4c^3+4c^2}{3})z^4 + \ldots - 1\right]$$ dolayisiyla

$$k(c,z) \equiv \frac{1}{2c}\left[2cz + 2c^2z^2 + (\frac{4c^3+2c}{3})z^3 + (\frac{4c^3+4c^2}{3})z^4 + \ldots\right]$$ ve buradanda

$$k(c,z) \equiv z + cz^2 + (\frac{2c^2+1}{3})z^3 + (\frac{2c^2+2c}{3})z^4 + \ldots \tag{77}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $c$ nin birkaç özel degerine bakilabilir. Örnegin $c = 2$ yazilirsa Koebe fonksiyonu elde edilir. Gerçektende,

$k(2,z) \equiv z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \ldots$ olur. Buda daha önceden verilen Koebe fonksiyonudur.

$c = 3$ degeri için;

$k(3,z) \equiv z + 3z^2 + \frac{19}{3}z^3 + 8z^4 + \ldots$ ifadesi elde edilir.

$c = 4$ degeri için;

$k(4,z) \equiv z + 4z^2 + 11z^3 + \frac{40}{3}z^4 + \ldots$ ifadesi elde edilir.

$c = 5$ degeri için;

$k(5,z) \equiv z + 5z^2 + 17z^3 + 20z^4 + \ldots$
çok terimlisi elde edilir.

Simdi ise, 3.2.2. Teoremin den faydalanarak (77) ile gösterilen esitligin tersini bulalim. Buradaki amaç, (77) esitliginin tersinin $g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n$ oldugu kabul edilerek $b_n$ katsayilarini bulmaktir.

3.2.2. Teoremin den;

$$h(z) = \frac{k(c,z)}{z} = 1 + cz + (\frac{2c^2 + 1}{3})z^2 + (\frac{2c^2 + 2c}{3})z^3 + \ldots$$

$$h'(z) = c + \frac{2(2c^2 + 1)}{3}z + \frac{3(2c^2 + 2c)}{3}z^2 + \ldots$$

$$h''(z) = \frac{2(2c^2 + 1)}{3} + 2(2c^2 + 2c)z + \ldots$$

$$h'''(z) = 2(2c^2 + 2c) + \frac{(2c^2 + 4c)}{3}z + \ldots$$

yazilir. Yine 3.2.2. Teoremin den

$$b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[h(z)\right]^{-n}\Bigg|_{z=0}$$

oldugu biliniyor. Dolayisiyla ;

$n = 1$ degeri için; $b_1 = 1$

$n = 2$ degeri için; $b_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(h(z))^2}\right]\Bigg|_{z=0} = -\frac{h(z)h'(z)}{h^4(z)}\Bigg|_{z=0} = -c$

$n = 3$ degeri için; $b_3 = \frac{1}{6}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(h(z))^3}\right]\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{h^2(z)h'(z)}{h^6(z)}\right)\Bigg|_{z=0}$

$$b_3 = -\frac{1}{2}\left[\frac{\left[2h(z)(h'(z))^2 + h''(z)h^2(z)\right]h^6(z) - 6h^5(z)(h'(z))^2 h^2(z)}{h^{12}(z)}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$b_3 = -\frac{1}{2}\left[-4c^2 + \frac{2}{3}(2c^2+1)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{-8c^2+2}{3}\right]$$

$n = 4$ degeri için;

$$b_4 = \frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{1}{h^4(z)}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{24}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{-4h^3(z)h'(z)}{h^8(z)}\right)\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{6}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{h'(z)}{h^5(z)}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$b_4 = -\frac{1}{6}\frac{d}{dz}\left(\frac{h''(z)h^5(z) - 5h^4(z)(h'(z))^2}{h^{10}(z)}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$b_4 = -\frac{1}{6}\left(\frac{h'''(z)}{h^5(z)} - \frac{15h'(z)h''(z)}{h^6(z)} + \frac{30(h'(z))^3}{h^7(z)}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$b_4 = -\frac{1}{6}(4c^2 + 4c - 10c(2c^2+1) + 30c^3) = -\frac{1}{6}(10c^3 + 4c^2 - 6c)$$

olur. O halde buradan ;

$b_1 = 1$

$b_2 = -c$

$b_3 = -\frac{1}{2}(\frac{-8c^2 + 2}{3})$

$b_4 = -\frac{1}{6}(10c^3 + 4c^2 - 6c)$

elde edilir. Dolayisiyla (77) ifadesinin ters fonksiyonu;

$$g(w) = w - cw^2 - \frac{1}{2}(\frac{-8c^2 + 2}{3})w^3 - \frac{1}{6}(10c^3 + 4c^2 - 6c)w^4 + \ldots \qquad (78)$$

olur. $c$ nin birkaç özel degerine bakilabilir. Örnegin ;

$c = 2$ degeri için;

$$g(w) = w - 2w^2 + 5w^3 - 14w^4 + \ldots$$

olur. $g(w)$ fonksiyonu uygulamalar kisminda verdigimiz Koebe fonksiyonunun tersi olarak bulundu.

$c = 3$ degeri için;

$$g(w) = w - 3w^2 + \frac{70}{6}w^4 - 48w^4 + \ldots$$

bulunur.

$c = 4$ degeri için;

$$g(w) = w - 4w^2 + 21w^3 - \frac{340}{3}w^4 + \ldots$$

bulunur.

**3.4.9. Örnek:** $f(z)=\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonunun tersini bulabiliriz.

**Çözüm:** $f(z)=\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)=\log(1+z)-\log(1-z)$ olur. $\log(1+z)$ ve $\log(1-z)$ fonksiyonlari $z=0$ noktasi civarinda Maclaurin serisine açarsak

$\log(1+z)=(\log e)z-(\dfrac{\log e}{2})z^2+(\dfrac{\log e}{3})z^3-(\dfrac{\log e}{4})z^4+\ldots$ ve

$\log(1-z)=\log(1+(-z))=-(\log e)z-(\dfrac{\log e}{2})z^2-(\dfrac{\log e}{3})z^3-(\dfrac{\log e}{4})z^4-\ldots$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler $f(z)$ de yerine yazilip düzenlenirse;

$$f(z)=2\log e(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\ldots) \qquad (79)$$

esitligi elde edilir.

Simdi ise, 3.2.2. Teoremin den faydalanarak (79)'un tersini bulalim. 3.2.2. Teoremin den;

$$h(z)=\frac{f(z)}{z}=2\log e(1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}+\frac{z^6}{7}+\frac{z^8}{9}+\ldots)$$

$$h'(z)=2\log e(\frac{2z}{3}+\frac{4z^3}{5}+\frac{6z^5}{7}+\frac{8z^7}{9}+\ldots)$$

$$h''(z)=2\log e(\frac{2}{3}+\frac{12z^2}{5}+\frac{30z^4}{7}+\frac{56z^6}{9}+\ldots)$$

$$h'''(z)=2\log e(\frac{24z}{5}+\frac{120z^3}{7}+\frac{336z^5}{9}+\ldots)$$

yazilir. Yine 3.2.2. Teoremin den

$b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[h(z)]^{-n}\Big|_{z=0}$ oldugu biliniyor. Dolayisiyla;

$n = 1$ degeri için; $b_1 = \frac{1}{2\log e}$

$n = 2$ degeri için; $b_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(h(z))^2}\right]\Big|_{z=0} = -\frac{h(z)h'(z)}{h^4(z)}\Big|_{z=0} = 0$

$n = 3$ degeri için; $b_3 = \frac{1}{6}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(h(z))^3}\right]\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}(\frac{h^2(z)h'(z)}{h^6(z)})\Big|_{z=0}$

$$b_3 = -\frac{1}{2}\left[\frac{[2h(z)(h'(z))^2 + h''(z)h^2(z)]h^6(z) - 6h^5(z)(h'(z))^2 h^2(z)}{h^{12}(z)}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$b_3 = -\frac{1}{24\log^3 e}$$

$n = 4$ degeri için;

$$b_4 = \frac{d^3}{dz^3}(\frac{1}{h^4(z)})\Big|_{z=0} = \frac{1}{24}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{-4h^3(z)h'(z)}{h^8(z)}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{6}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{h'(z)}{h^5(z)}\Big|_{z=0}$$

$$b_4 = -\frac{1}{6}\frac{d}{dz}(\frac{h''(z)h^5(z) - 5h^4(z)(h'(z))^2}{h^{10}(z)}\Big|_{z=0}$$

$$b_4 = -\frac{1}{6}(\frac{h'''(z)}{h^5(z)} - \frac{15h'(z)h''(z)}{h^6(z)} + \frac{30(h'(z))^3}{h^7(z)}\Big|_{z=0} = 0$$

olur. O halde buradan

$$b_1 = \frac{1}{2\log e}$$

$$b_2 = 0$$

$$b_3 = -\frac{1}{24\log^3 e}$$

$$b_4 = 0$$

elde edilir. Dolayisiyla (79) ifadesinin ters fonksiyonu;

$$g(w) = \frac{1}{2\log e} w - \frac{1}{24\log^3 e} w^3 + \ldots \tag{80}$$

olur.

**3.4.10. Teorem:** $E$ birim diskinde analitik olan ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimindeki fonksiyonlarin sinifi $A(n)$ ile gösterilsin. $0 \leq l < 1$ olmak üzere $\forall z \in E$ için $f \in A(n)$ fonksiyonu eger ;

$\mathrm{Re}\left( \dfrac{zf'(z) + l z^2 f''(z)}{l zf'(z) + (1 - l) f(z)} \right) > a$ kosulunu sagliyorsa $a$ mertebeden yildizil fonksiyon denir. Bu fonksiyon sinifi $P_*(n, l, a)$ ile gösterilsin. Bu sinifa ait olan fonksiyonlarin ters katsayilari

$$b_2 = -a_2(1 + l)$$

$$b_3 = 2a_2^2(1 + l)^2 - a_3(1 + 2l)$$

$$b_4 = 5a_2(a_3(1 + l)(1 + 2l) - a_2^2(1 + l)^3) - a_4(1 + 3l)$$

biçimindedir. Buradaki $a_2, a_3, a_4$ katsayilari da

$$a_2 = \frac{p_1(1 - a)}{1 + l}$$

$$a_3 = \frac{1 - a}{2(1 + 2l)}(p_2 + p_1^2(1 - a))$$

$$a_4 = \frac{1 - a}{3(1 + 3l)} p_3 + \frac{(1 - a)^2}{3(1 + 3l)} p_1 p_2 + \frac{(1 - a)}{6(1 + 3l)}(p_2 + p_1^2(1 - a)^2)$$

olarak hesaplanir.

**Ispat:** $f(z)$ nin $P_*(n,l,a)$ sinifina ait olmasi için gerek ve yeter kosul uygun bir $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\ldots$ için $zf'(z)+l\,z^2f''(z)=\left\{\left(l\,zf'(z)+(1-l)f(z)\right)(1-a)p(z)\right\}$ olmasidir. $F(z)=l\,zf'(z)+(1-l)f(z)$ fonksiyonunda $f(z)$ fonksiyonu ve $f'(z)$ fonksiyonu yerine yazilip düzenlenirse;

$$F(z)=z+a_2(1+l)z^2+a_3(1+2l)z^3+a_4(1+3l)z^4+\ldots$$

fonksiyonu elde edilir. Buradan ;

$$F'(z)=1+2a_2(1+l)z+3a_3(1+2l)z^2+4a_4(1+3l)z^3+\ldots$$

olur. Bulunan $F(z)$ fonksiyonunu ve $F'(z)$ fonksiyonunu

$zF'(z)=F(z)\left((1-a)p(z)+a\right)$ esitliginde yerine yazalim. O halde buradan;

$$z+2a_2(1+l)z^2+3a_3(1+2l)z^3+4a_4(1+3l)z^4+\ldots=$$

$$z+\left((1-a)p_1+(1-a)(1+l)a_2+a\,a_2(1+l)\right)z^2$$
$$+\left((1-a)p_2+(1-a)(1+l)a_2p_1+a_3(1-a)(1+2l)+a\,a_3(1+2l)\right)z^3$$
$$+\left((1-a)p_3+(1-a)(1+l)a_2p_2+a_3(1-a)(1+2l)p_1+a_4(1+3l)\right)z^4+\ldots$$

elde edilir. Burada karsilikli katsayilar esitlenerek;

$$a_2=\frac{p_1(1-a)}{1+l}$$

$$a_3=\frac{1-a}{2(1+2l)}(p_2+p_1^2(1-a))$$

$$a_4=\frac{1-a}{3(1+3l)}p_3+\frac{(1-a)^2}{3(1+3l)}p_1p_2+\frac{(1-a)}{6(1+3l)}(p_2+p_1^2(1-a)^2)$$

katsayilari yazilir.

Simdide $b_2,b_3,b_4$ katsayilarini bulalim.

$$F(z)=z+a_2(1+l)z^2+a_3(1+2l)z^3+a_4(1+3l)z^4+\ldots$$

fonksiyonu daha önceden elde edilmisti. Bu fonksiyonun tersini;

$$F^{-1}(w)=w+b_2w^2+b_3w^3+b_4w^4+\ldots$$

olarak gösterelim. $F(z)=w$ oldugundan $z=F^{-1}(w)$ olur. O halde

$F(z) = z + a_2(1+l)z^2 + a_3(1+2l)z^3 + a_4(1+3l)z^4 + \dots$

fonksiyonunda

$z = F^{-1}(w) = w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \dots$

yazilip düzenlenirse

$F(z) = w = F^{-1}(w) + b_2(F^{-1}(w))^2 + b_3(F^{-1}(w))^3 + b_4(F^{-1}(w))^4 + \dots$

olur. O halde buradanda ;

$$z + a_2(1+l)z^2 + a_3(1+2l)z^3 + a_4(1+3l)z^4 + \dots$$
$$= w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \dots$$
$$+ a_2(1+l)\ (w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \dots)^2$$
$$+ a_3(1+2l)(w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \dots)^3$$
$$+ a_4(1+3l)(w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + b_4 w^4 + \dots)^4 + \dots$$

ifadesi elde edilir. Son bulunan bu ifadede

$w = F(z) = z + a_2(1+l)z^2 + a_3(1+2l)z^3 + a_4(1+3l)z^4 + \dots$

yazilip düzenlenirse ;

$$z + a_2(1+l)z^2 + a_3(1+2l)z^3 + a_4(1+3l)z^4 + \dots$$
$$= z + \left(a_2(1+l) + b_2 + a_2(1+l)\right)z^2$$
$$+ \left(a_3(1+2l) + 2b_2a_2(1+l) + b_3 + 2a_2^2(1+l)^2 + 2a_2(1+l)b_2 + a_3(1+2l)\right)z^3$$
$$+ \begin{pmatrix} 2a_4(1+3l) + b_2a_2(1+l) + b_2a_3(5+12l) + b_3a_2(5+5l) + b_4 \\ + a_2^2(1+l)^2 + 2a_2a_3(1+l)(1+3l) + a_2b_2^2(1+l) + 6a_2^2b_2(1+l)^2 \\ + 3a_2a_3(1+l)(1+2l) \end{pmatrix} z^4 + \dots$$

ifadesi elde edilir. Burada karsilikli katsayilar esitlenerek;

$b_2 = -a_2(1+l)$

$b_3 = 2a_2^2(1+l)^2 - a_3(1+2l)$

$b_4 = 5a_2(a_3(1+l)(1+2l) - a_2^2(1+l)^3) - a_4(1+3l)$

katsayilari elde edilir.

O halde verilen bu fonksiyonun tersi;

$$F^{-1}(w) = w - a_2(1+l)w^2 + (2a_2^2(1+l)^2 - a_3(1+2l))w^3$$
$$+ (5a_2(a_3(1+l)(1+2l) - a_2^2(1+l)^3) - a_4(1+3l))w^4 + \dots$$

olur.

Özel olarak $l = 0$ degeri için bakilacak olursa;

$$F(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$

fonksiyonu olur. Bu fonksiyonun terside;

$$F^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 + (5a_2(a_3 - a_2^2) - a_4)w^4 + \dots$$

olur.

Benzer sekilde $l = 1$ degeri için ;

$$F(z) = z + 2a_2 z^2 + 3a_3 z^3 + 4a_4 z^4 + \dots$$

fonksiyonu olur. Bu fonksiyonun terside

$$F^{-1}(w) = w - 2a_2 w^2 + (8a_2^2 - 3a_3)w^3 + (5a_2(6a_3 - 8a_2^2) - 4a_4)w^4 + \dots$$

olur.

## 4. ARASTIRMA BULGULARI

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ seklindeki ünivalent ve analitik olan bir fonksiyonun ters katsayilarinin olusturulmasi saglanmistir. Fonksiyonun tersini $g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n$ ile gösterilirse buradaki $b_n$ katsayilarinin ayri ayri yollarla bulunabilecegi gösterilmistir.

Bizde bu çalismada genellestirilmis Koebe fonksiyonunun ters katsayilarini hesapladik. Ayrica J.G.Krzyz, R.J.Libera nin sonuçlarini genellestirdik. Elde ettigimiz sonuçlarin $l = 0$ özel durumu için J.G.Krzyz nin ve R.J.Libera nin sonuçlari oldugunu gördük.

## 5. SONUÇ

Degisik analitik fonksiyonlarin tersleri için katsayi esitlikleri elde edildi. Bu esitliklere ilave olarak

$$k(z,c)=\frac{1}{2c}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{c}-1\right]$$

biçiminde ifade edilen genellestirilmis Koebe fonksiyonunun tersi için katsayi esitlikleri elde edildi. Elde edilen bu esitliklerin $c=2$ özel durumu için Libera'nin sonuçlarinin elde edildigi görüldü. Ayrica, $E=\{z:|z|<1\}$ açik birim diskinde analitik olan ve $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ biçiminde ifade edilen fonksiyonlari kümesi $A(n)$ ile gösterilsin. Bazi $a\,(0\leq a<1)$, $l\,(0\leq l\leq 1)$ ve tüm $z\in E$ degerleri için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)+l z^2 f''(z)}{l zf'(z)+(1-l)f(z)}\right)>a$$

esitsizligini saglayan fonksiyonlarin sinifida $P_*(n,l,a)$ ile gösterilsin. Bu sinifa ait fonksiyonlarin tersleri için katsayi esitlikleri elde edildi. Elde edilen bu esitliklerin $l=0$ özel durumu için Jan G,Krzyz ve Richard Libera'nin sonuçlarinin elde edildigi görüldü.

**KAYNAKLAR**

Ali, R., 2003. Coefficients of the Inverse of Strongly Starlike Functions. Bull. Malaysian. Math. Sc. Soc., (26), 63-71

Altintas, Osman., 1990. On a subclass of certain starlike functions with negative Coefficients Math. Japanica (36), 1-7

Balci, M., 1997. Matematik Analiz, I.Cilt. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayinlari, Ankara

Baskan, T., 2005. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Nobel Yayin Dagitimi, Yayin No:33,Ankara

Bozkurt, D., 2002. Genel Matematik I, Selçuk Üniversitesi Yayinlari, Ikinci Baski, Konya

Branges, L.De., 1985. A proof of the Bieberbach conjecture,Acta Math., 137-152

Choudhury, M., 1995. A class of multivalent functions with negative Taylor Coefficients, Demonstratio Math,XXVIII,223-234

Das, M.K., 1996.Fractional integral operators and distortion theorems for a class of Multivalent functions with negative coefficients, J.Anal.,4,185-199

Dönmez, A., 1985. Karmasik Fonksiyonlar Kurami, Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayinlari, Yayin No:10, Diyarbakir

Duren, P.L., 1983. Univalent Functions, Sipringer-Verlag, New York

Goodman, A.W., 1983. Univalent Functions, United States of America, Florida

Hamzaoglu, M., 2000. Çözümlü Difarensiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Yayinlari, Yayin No:661, Istanbul

Kadioglu, E., Kamali, M., 1998. Genel Matematik, 400-420., Erzurum

Krzyz, J.G., Libera, R. J., Zlotkiewichz, E., 1979. Coefficients of inverses of regular starlike functions. Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska.(33), 103-110

Kumar, V., 1987. Quasi-Hadamard product of certain ünivalent functions, J.Math. Anal. Appl,126,70-77

Lowner, K., 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I,Math.Ann,89,103-121

Mishra, A.K., Gochhayat, P., 2006. Coefficients of Inverse Functions in a Nested Class of Starlike Functions of Positive Order, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics.(7), 1-15

Orhan, H., Kamali, M., Frasin, B., Darus, Maslina., 2003. A Coefficient Inequality for Certain Classes of Analytic Functions. Intern. Math. Journal. (4) 127-135

Polatoglu, Y., 2004. Konu ve Problemleriyle Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, ITÜ Yayinlari, Yayin No:44, Istanbul

Sabuncuoglu, A., 2005. Analitik Geometri, Nobel Yayinlari,Yayin No:341, Ankara

# ÖZGEÇMIS

10.09.1979 yilinda Erzincan' da dogdu. Ilk ve orta ögrenimini Erzincan' da tamamladi. 1999 yilinda Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandi. 2003 yilinda mezun oldu. Bir kaç yil özel kurumlarda çalistiktan sonra 2006 yilinda Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü nde arastirma görevlisi olarak göreve basladi, halen bu görevi sürdürmektedir.