47585

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN
SINIF SAYILARI

AYTEN PEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ANABİLİM DALI

TEZ YÖNETİCİSİ : Doç.Dr. HÜLYA İŞCAN

EDİRNE -1995

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYTEN PEKİN

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ANABİLİM DALI

TEZ YÖNETİCİSİ : Doç.Dr. HÜLYA İŞCAN

1995
EDİRNE

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN SINIF SAYILARI

AYTEN PEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ANABİLİM DALI

Bu tez 25/1./1995 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Doç.Dr. Hülya İŞCAN
Danışman

Prof.Dr.İ.Hakkı DURU
Üye

Yrd.Doç.Dr. Adem DALGIÇ
Üye

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerini belirleyebilmek için bazı kriterleri incelemeyi amaçlayan bu çalışmada izlenen plan aşağıdaki biçimdedir.

Konuyla ilgili gerekli ön bilgiler I. bölümde verilmektedir.

II. Bölümde kuadratik sayı cisimlerinin temel özellikleri , temel birimleri incelenmekte ve imajiner kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısı 1 olanları belirlenmektedir.

III. Bölümde beş farklı yöntemle sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimleri belirlenmektedir.

SUMMARY

The plan followed in this study, which aims to investigates some criterions for real quadratic number fields with class number 1, may be outlined as below.

Pertinent background material is given in Chapter I.

In Chapter II, basic properties, fundamental units of quadratic number fields are investigated. Moreover, imaginary quadratic number fields with class number 1 are determined.

In Chapter III, the real quadratic number fields with class number 1 are determined by using five different methods.

ÖNSÖZ

Bu tezin oluşturulmasında bana yol gösteren çalışmalarımı büyük bir sabır ve titizlikle takip eden Değerli Hocam Sayın Doç.Dr. Hülya İŞCAN ' a en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayten PEKİN

GİRİŞ

Cebir ve Sayılar Teorisinde , Q rasyonel sayılar cisminin sonlu genişlemeleri olan sayı cisimleri ve bu cisimlerin ideal sınıfları grubunun mertebesi olarak tanımlanan sınıf sayılarının belirlenmesi en önemli konulardan birisidir..

Bu çalışmada , Q rasyonel sayılar cisminin ikinci dereceden genişlemeleri olan kuadratik sayı cisimlerinden sınıf sayısı 1 olanlarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

1967 yılında H.M.Stark ve 1988 yılında R.A. Mollin tarafından sınıf sayısı 1 olan imajiner kuadratik sayı cisimlerinin sonlu ve tam 9 tane olduğu gösterilmiştir.

Reel kuadratik sayı cisimlerinden sınıf sayısı 1 olanların sonlu olup olmadığı henüz kesinlik kazanmamıştır. Bu yüzden reel kuadratik sayı cisimlerinde çalışmak daha önem kazanmıştır. Sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerini belirleyebilmek için bazı formüller ve yöntemler geliştirilmiştir. Bu formüllerden en bilineni , genellikle sınıf sayısı 1 den büyük olan reel kuadratik sayı cisimlerinin belirlenmesinde kullanılan " Dirichlet Sınıf Sayısı " formülüdür.

Bu tez çalışmasında , reel kuadratik sayı cisimlerinde sınıf sayısı 1 olmasını inceleyen beş farklı yöntem aşağıdaki biçimde irdelenmiştir.

Öncelikle , $K= Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık halkasının , Euclide Algoritması yardımıyla tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğu söylenerek, sınıf sayısı 1 olması için gerekli ve yeterli bir koşul elde edilmiştir. Euclide Algoritması kavramı genelleştirilerek , 1913 yılında sınıf sayısı 1 olan imajiner kuadratik sayı cisimleri Rabinowitsh tarafından belirlenmiştir. 1980 ' de Kutsuna tarafından storend kesirleri tanımlanarak , bu yöntemin benzer lemma ve kriterler yardımıyla reel kuadratik sayı cisimlerine uygulanması sağlanmıştır.

Ming ve Leu 1987 yılında , Minkowski sabitini ve Kronecker karakterini kullanarak tanımladıkları bir S_K kümesinden yararlanarak , sınıf sayısı 1 olan $K = Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cisimlerini belirlemişlerdir. Ayrıca $n \geq e^{16}$ sağlayan sınıf sayısı 1 olan en fazla 1 tane reel kuadratik sayı cisminin bulunabileceğini göstermişlerdir.

Sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerinin belirlenmesi için yapılan çalışmalar Richaut-Degert (R-D) tipinden olarak adlandırılan sayı cisimleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Özellikle dar (narrow) ve geniş (wide) R-D tipinden reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayılarının belirlenmesi için Louboutin , Mollin , Williams ve Yokoi çeşitli çalışmalar yapmıştır.

1990 yılında Yokoi asal diskriminantlı reel kuadratik sayı cisimlerinde , temel birime bağlı sabitler arasındaki bağıntıları kullanarak ve yeni bir p-invaryant tanımlayarak sınıf sayısı 1 olan cisimleri belirlemeye çalışmıştır. Y.Tanigawa bu asallık koşulunu kaldırarak sınıf sayısı 1 olan d diskriminantlı toplam 54 tane reel kuadratik cisim olduğunu göstermiştir.

Bu tez çalışmasında III. Bölümde , yukarıda bahsedilen yöntemler tüm ayrıntıları ile incelenmiş , tablolar yapılmış ve bu tablolar karşılaştırılarak verilen beş yöntemin çoğunun uygulanabildiği, sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimleri belirlenmiştir. Ayrıca beş farklı yöntemin hepsinin birden uygulanabildiği ve sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisminin $Q(\sqrt{29})$ cismi olduğu gözlenmiştir.

I. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1. CİSİM GENİŞLEMELERİ

1.1. Tanım : K cismi bir L cisminin alt cismi ise L'ye K cisminin bir " genişlemesi " denir ve L/K ile gösterilir.

1.2. Tanım : L/K bir cisim genişlemeri ve $a \in L$ olsun. Eğer $f(a)=0$ olacak biçimde sıfır polinomundan farklı bir $f(x) \in K[x]$ polinomu varsa a' ya K üzerinde bir cebirsel elemandır denir ve a ceb/K ile gösterilir.

1.3. Tanım : L/K bir cisim genişlemesi ise L nin K-vektör uzayı olarak boyutu genişlemenin derecesine eşittir. Boy$_K$ L = [L:K] biçiminde gösterilir.
$[L:K] < \infty$ ise genişlemeye " sonlu genişleme " denir.

1.1. Önerme : $[L:K] < \infty$ ise L/K cebirseldir. (Mc Carthy , 1966,s.3)

1.5. Tanım : i)- L/K bir cisim genişlemesi , $a \in L$ olsun. Eğer a ceb/K ve

$$\operatorname{Irr}(a,K) = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)$$

ise L ' nin $a= a_1$, a_2 , ... , a_n elemanlarına "a 'nın K üzerindeki eşlenikleri " denir.

ii)- L/K sonlu bir genişleme ve L'nin bir a elemanının minimal polinomunun bütün kökleri farklı ise a ' ya " ayrılabilir eleman" denir. L 'nin her elemanı ayrılabilir eleman ise genişlemeye " ayrılabilir genişleme " denir.

1.6. Tanım : Q rasyonel sayılar cisminin sonlu genişlemelerine cebirsel sayı cisimleri denir.

1.7. Tanım : K/Q cebirsel bir genişleme olsun. Eğer bir $a \in K$ 'nın Q üzerindeki minimal polinomu, katsayıları Z de olan bir polinom ise a ' ya "cebirsel tamsayı " denir.

1.2. Önerme : Bir rasyonel sayının cebirsel tamsayı olması için gerek ve yeter koşul tamsayı olmasıdır.

1.8. Tanım : Q cismi içindeki cebirsel tamsayılara " rasyonel tamsayı " denir. bunların asal olanları ise kısaca " rasyonel asal " olarak adlandırılır.

1.9. Tanım : K bir cebirsel sayı cismi olsun. K cisminin bir a elemanı Q üzerindeki eşlenikleri $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ olmak üzere, a' nın normu ve a'nın izi sırayla

$N(a) = \prod_{i=1}^{n} a_i$, $Tr(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ biçiminde tanımlanır.

2.DEĞERLENDİRMELER

2.1. Tanım : R çarpımsal (veya toplamsal) değişmeli bir grup < (veya >) R üzerinde bir bağıntı olsun. Her $\alpha, \beta, \gamma \in R$ için

i)- $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ ise $\alpha < \gamma$ (veya $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ ise $\alpha > \gamma$) dır.

ii)- $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$ (veya $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta > \alpha$) koşullarından sadece biri sağlanır.

iii)- $\alpha < \beta$, $\delta \in R$ ise $\alpha\delta < \beta\delta$ (veya $\alpha > \beta$, $\delta \in R$ ise $\alpha + \delta > \beta + \delta$) dır.

Koşulları gerçekleniyorsa ; R , üzerindeki < (veya >) bağıntısıyla sıralı bir gruptur denir.

2.2. Tanım :K bir cisim, R_+ pozitif reel sayılar kümesi olmak üzere; $| \ | : K \longrightarrow R_+$ biçiminde tanımlanan dönüşüm , her $a, b \in K$ için

i)- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

ii)- $|a.b| = |a|.|b|$

iii)- $|a+b| \leq |a| + |b|$

koşullarını gerçekliyorsa ;| | dönüşümüne K cisminin "arşimetsel bir değerlendirmesi " denir.

2.3. Tanım : K bir cisim ve R çarpımsal (veya toplamsal) sıralı bir grup olsun.
$| \ | : K \longrightarrow R \cup \{0\}$ (veya $| \ | : K \longrightarrow R \cup \{\infty\}$) biçiminde tanımlanan dönüşüm , her $a.b \in K$ için

i)- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (veya $|a| = \infty \Leftrightarrow a = 0$)

ii)- $|a.b| = |a| . |b|$ (veya $|a.b| = |a| + |b|$)

iii)- $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$ (veya $|a+b| \geq \min(|a|, |b|)$)

koşullarını gerçekliyorsa ; $| \ |$ dönüşümüne K cisminin arşimetsel olmayan değerlendirmesi, R sıralı grubuna da $| \ |$ değer lendirmesinin " değer grubu denir "

<u>*2.1. Önerme*</u> : $| \ |$, K üzerinde arşimetsel olmayan bir değerlendirme, s>1 bir gerçel sayı olmak üzere ;

i)- $$V(a) = \begin{cases} -\log s\,(a) , & a\in K - \{0\} \ \text{ise} \\ \infty , & a=0 \ \text{ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $V : K \text{----->} R\cup\{\infty\}$ dönüşümü bir değerlendirmedir.

ii)- $V : K \text{----->} R\cup\{\infty\}$ bir değerlendirme ise ;

$$|a| = \begin{cases} s^{-V(a)} , & a\in K - \{0\} \ \text{ise} \\ 0 , & a=0 \ \text{ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $| \ | : K \text{----->} R$ dönüşümü arşimetsel olmayan bir değerlendirmedir.

<u>*2.4. Tanım*</u> : $| \ |$, K üzerinde bir değerlendirme olmak üzere ,

$V = \{ a\in K : |a| \leq 1 \}$, değerlendirme halkası

$p = \{ a\in K : |a| < 1 \}$, V içindeki tek maximal ideal

$I = \{ a\in K : |a| = 1 \}$, V halkasının birim grubudur.

<u>*2.5. Tanım*</u> : $| \ |$, K cismi üzerinde bir değerlendirme , V, K ' nın değerlendirme halkası ve P maximal ideal ise V/P cismine , $| \ |$ değerlendirmesinin " rezidü cismi " denir.

<u>*2.6. Tanım*</u> : K bir cisim olsun. K 'nın her x elemanı için

$$|x| = \begin{cases} 1 , & x\neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı değerlendirmeye K cisminin " aşikar değerlendirmesi "denir.

2.7. Tanım : $|\ |_1$ ile $|\ |_2$ K cisminin aşikar olmayan iki değerlendirmesi ve $a \in K$ olsun.

$|a|_1 < 1$ iken $|b|_2 < 1$ oluyorsa, $|\ |_1$ ve $|\ |_2$ değerlendirmeleri "denk değerlendirmeler " olarak adlandırılır.

$|\ |_1 \sim |\ |_2$ ile gösterilir.

2.1.Teorem : $|\ |_1$ ve $|\ |_2$ K cismi üzerindeki değerlendirme ve $a \in K$ ise aşağıdakiler denktir;

i)- $|\ |_1 \sim |\ |_2$ dir.

ii)- $|a|_1 < 1$ iken $|b|_2 < 1$ dir.

iii)- s bir pozitif reel sayı olmak üzere $|\ |_1 = |\ |_2^s$ dir.

3.SAYI CİSİMLERİ

3.1. Sayı Cisimlerinin Asal Divizörleri

3.1.1. Tanım : K bir cisim φ, K üzerinde aşikar olmayan değerlendirme olsun. φ ' ye denk olan bütün değrlendirmelerin kümesi $P = \{ \varphi' : \varphi' \sim \varphi \}$ ye K 'nın bir " asal divizörü " denir.

3.1.2. Tanım : P , K ' nın asal divizörü olsun. Her $\varphi \in P$ için φ , arşimetsel değerlendirme ise P "arşimetsel asal divizör " aksi halde "arşimetsel olmayan asal divizör" olarak adlandırılır. K cisminin arşimetsel asal divizörlerinin kümesi. $M_\infty(K)$ arşimetsel olmayan asal divizörlerin kümesi ise $M_0(K)$ ile gösterilecektir.

3.1.3. Tanım : $M_0(K)$ 'nın ürettiği serbest grup F ye K 'nın " divizör grubu ", F grubunun elemanlarına da " sonlu divizörler " denir.

3.1.4. Tanım : $V\varphi$, φ asal divizörüne karşılık gelen üstel değerlendirme olsun. $\omega \in F$ sonlu divizörü hemen hemen her $\varphi \in M_0(K)$ için $V\varphi(\omega) = 0$ olmak üzere

$$\omega = \prod_{\varphi \in M_0(K)} \varphi^{V\varphi(\omega)}$$ biçiminde ifade edilir.

$a \in K^* = K - \{0\}$ alındığında $\prod_{\varphi \in Mo(K)} \varphi^{V\varphi(a)}$ divizörüne " esas divizör " denir ve (a) ile gösterilir.

Değer grubu toplamsal olan V değerlendirmesi için K cisminin tamlık halkası ,

$$O_K = \{ \alpha \in K : V\varphi(\alpha) \geq 0 \} \text{ dır .}$$

$\varphi \in M_0(K)$ ya karşılık gelen asal idealde aynı φ harfiyle gösterilirse ;

$$\varphi = \{ \alpha \in K : V\varphi(\alpha) > 0 \} \text{ biçiminde tanımlıdır.}$$

$O_K / \varphi = \overline{K}_\varphi$, K cisminin rezidü cismidir.

3.1.5..Tanım : L/K bir sayı cismi genişlemesi , $\varphi \in Mo(K)$ 'nın O_L halkası içinde ürettiği idel φO_L olsun . φO_L , L cisminin asal divizörlerinin tamsayı kuvvetlerinin çarpımı olarak

$$\varphi O_L = P_1^{e_1} . P_2^{e_2} ... P_r^{e_r}$$

biçiminde ifade edilir. Bu durumda L cisminin P_i asal divizörleri φ üzerinde kalıyor denir ve P_i / φ ile gösterilir.

3.1.6. Tanımlar : L/K sayı cismi genişlemesi olmak üzere ;

$$(V_L : V_{K\varphi}) = e(P_i / \varphi) \quad , \quad [\overline{L}_{p_i} : \overline{K}_{\varphi}] = f(P_i / \varphi)$$

ifadeleri sırasıyla P_i asal divizörünün dallanma indeksi ve rezidü derecesi olarak adlandırılır. Ayrıca ,

$$[L : K] = \sum_{i=1}^{r} e(P_i / \varphi) \cdot f(P_i / \varphi) \text{ ile } N(P_i) = \varphi^{f(P_i / \varphi)}$$ bağıntıları

sağlanır.

i)- Her i=1,2,....,r için $f(P_i / \varphi) = e(P_i / \varphi) = 1$ ise , φ L içinde "dallanmış divizördür " denir.

ii) - L cisminin $\varphi \in M_0(K)$ üzerinde kalan en az bir P_i asal divizörü için $e(P_i / \varphi) > 1$ ise φ , L içinde "dallanmış divizördür " denir.

iii)- L cisminin $\varphi \in M_0(K)$ üzerinde kalan tek asal divizörü P ve $e(P / \varphi) = [L : K]$ ise φ , L içinde " tümüyle dallanmış " divizördür denir.

iv)- L cisminin $\varphi \in M_0(K)$ üzerinde kalan arşimetsel divizörü P olsun. φ ve P asal divizörlerinin ikiside reel yada ikiside kompleks ise $e(P / \varphi) = 1$ dir ve φ divizörüne L içinde " dallanmamış divizör " denir. φ reel ; P kompleks ise $e(P / \varphi) > 1$ dir ve φ divizörüne L içinde " dallanmış divizördür " denir.

3.1.1. Önerme : L cisminin $\varphi \in M_{\infty}(K)$ üzerinde kalan reel arşimetsel asal divizörlerinin sayısı r_1 ve kompleks arşimetsel asal divizörlerinin sayısı r_2 ise $[L : K] = r_1 + 2r_2$ bağıntısı sağlanır.

3.1.1. Teorem : K bir sayı cismi , L/K sonlu ayrılabilir ve n. dereceden bir genişleme ise $L = K(\alpha)$ olacak biçimde bir $\alpha \in O_L$ vardır. $f \in O_K[x]$, α ' nın K üzerindeki miinimal polinomu olsun. Eğer $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$, O_L halkası için O_K üzerinde bir tamlık tabanı ise , $\varphi \in M_0(K)$ için f (mod φ) = $\overline{f}$ polinomunun $\overline{K_\varphi}$ [x] içinde asal çarpanlara ayrılışı

$\overline{f}(x) = G_1(x)^{e_1} \ldots\ldots\ldots G_r(x)^{e_r}$ ($i \neq j$, $G_i(x) \neq G_j(x)$) φ divizörünün L

içindeki çarpanlarına ayrılışını karakterize eder , şöyleki ; G_i asal polinomları φ zerindeki $P_i \in M_0(L)$ asal divizörleri ile bire-bir şekilde eşlenirler ve her $i=1,\ldots\ldots,r$ için $e_i = e(P_i/\varphi)$ ve $d^\circ G(x) = f(P_i/\varphi)$ dir. (Weiss , 1963,s.168) .

3.2. Sayı Cisimlerinin Sınıf Sayıları

K bir sayı cismi , $M_0K)$; K 'nın arşimetsel olmayan asal divizörlerinin kümesi ve $M^*_0(K)$; $M_0(K)$ içindeki esas asal divizörlerin kümesi olsun. $M^*_0(K)$ 'nın ürettiği F^* grubu , $M_0(K)$ 'nın ürettiği F çarpımsal grubunun bir alt grubudur. Yani ;

$$F = < M_0(K) > = \{ \varphi_1^{\alpha_1}, \varphi_2^{\alpha_2}, \ldots, \varphi_n^{\alpha_n} : \alpha_i \in Z, i=1,\ldots,n, \varphi_i \in M_0(K) \}$$

$$F^* = < M^*_0(K) > = \{ (a_1)^{\beta_1} . (a_2)^{\beta_2} \ldots\ldots (a_r)^{\beta_r} : (a_i) \in M_0(K), i=1,,2,\ldots\ldots\ldots,r, \beta_i \in Z, a_i \in K^* \}$$

biçiminde olmak üzere $F^* < F$ dir. $\mathfrak{a}, \omega \in F$ için

$\mathfrak{a} \sim \omega \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (a)\,\omega$ ($\exists a \in K^*$ için) şeklindeki denklik bağıntısı tanımlanır . Böylece F / F^* bölüm grubu elde edilir.

.2.1 Tanım : Yukarıdaki biçimde tanımlanmış olan $F/\ F^*$ grubuna K cisminin " divizör sınıfları grubu " bu grubun eleman sayısına K cisminin " sınıf sayısı " denir ve h_K ile gösterilir.

3.2.2. Tanım : $\varphi \in M_0(K)$ asal divizörüne karşılık gelen asal ideal de aynı φ ıarfiyle gösterilmek üzere ; K 'nın asal ideallerinin kümesi $I(K)$, $I(K)$ içindeki esas asal deallerin kümesi $I^*(K)$ olsun. Bu durumda ;

$$A^* = < I^*(K) > = \{(a_1)^{\beta_1} . (a_2)^{\beta_2} ...... (a_r)^{\beta_r} : (a_i) \in I(K) \text{ esas ideal}, i=1,2..,r, \beta_i \in Z , a_i \in K^* \}$$

kümesi

$$A = < I(K) > = \{\varphi_1^{\alpha_1} . \varphi_2^{\alpha_2} ....\varphi_n^{\alpha_n} : \varphi_i \in I(K) \text{ asal ideal}, i=1,2,........,r , \alpha_i \in Z , \}$$

kümesinin bir alt grubudur. $A\ /\ A^*$ grubuna K cisminin " ideal sınıfları grubu " denir ve $F\ /\ F^* \cong A\ /\ A^*$ dır.

3.2.1. Teorem : Sayı cisimlerinin divizör sınıfları grubu sonlu bir gruptur.
(Z .I.Borevich - I.R.Shafarevich , 1966, s.221)

3.2.3. Tanım : K/Q n. dereceden bir genişleme , r_2 ; K cisminin kompleks arşimetsel asal divizörlerinin sayısı ve $\Delta_{K/Q}$, K 'nın diskriminantı olmak üzere ;

$$M_K = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} \sqrt{|\Delta_K|}$$

sabitine " Minkowski sınırı " denir.

3.2.2. Teorem : K cisminin her divizör sınıfı , normu M_K sayısından küçük veya eşit olan en az bir divizör içerir. (Ribenboim,1973,s.282).

Bu teoremden faydalanarak Q üzerindeki derecesi küçük olan bazı sayı cisimlerinin sınıf sayısı belirlenmiştir.

II.BÖLÜM

KUADRATİK CİSİMLER

1. Temel Özellikler

1.1.Tanım : K/Q bir cebirsel genişleme olmak üzere, [K:Q] = 2 ise K cebirsel sayı cismine " Kuadratik Sayı Cismi " denir.

1.1. Önerme : Bir kuadratik sayı cismi , n kare çarpansız bir tamsayı olmak üzere $Q(\sqrt{n})$ biçiminde bir basit genişlemedir.

Kanıt: [K:Q] = 2 ise K=Q(α) biçiminde bir basıt genişlemedir. α , katsayıları Q da olan x^2+ax+b biçimiindeki asal bir polinomun köküdür. Öyleyse ;
$\alpha = (-b \pm \sqrt{b-4ac}\ )/2a$ ifadesinde $b^2-4ac = k$ alınırsa , K= Q(α) = $Q(\sqrt{k})$ olur. Polinom Q[x] de asal olduğundsan k 'nın tam-kare olmayan en az bir asal çarpanı vardır. Bu çarpana n dersek K= $Q(\sqrt{n})$ bulunur.

1.1. Sonuç : K= $Q(\sqrt{n})$ cisminin bir α elemanı $x,y \in Q$ olmak üzere $\alpha = x+y\sqrt{n}$ biçimindedir.

1.2.Sonuç : α' , K cisminin bir α elemanının eşleniği olmak üzere ;
$N(\alpha) = \alpha' . \alpha = (x+y\sqrt{n})\ (x-y\sqrt{n}) = x^2 - y^2 n$ ve
$T_{r(\alpha)} = \alpha' + \alpha = (x+y\sqrt{n}) + (x-y\sqrt{n}) = 2x$ olarak bulunur.

1.2.Tanım : K=$Q(\sqrt{n})$ kuadratik sayı cismi olsun.
$O_K = \{ \alpha \in K : \alpha$ tam/Z $\}$ kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır
O_K ya K cisminin " tamlık halkası " denir.

1.2. Önerme : $\alpha \in Q(\sqrt{n})$ olsun. Bu durumda $\alpha \in O_K \Leftrightarrow T_r(\alpha) \in Z$ ve $N(\alpha) \in \mathbf{Z}$ olmasıdır. (Ribenboim ,1973, s. 77)

1.? ...orem : K= Q($\sqrt{n}$) bir kuadratik sayı cismi olsun.

i)- n≡2,3 (mod 4) ise $O_K = Z \oplus Z(\sqrt{n})$

ii)- n≡1 (mod 4) ise $O_K = Z \oplus Z((1+\sqrt{n})/2)$ dir.

Kanıt : x,y∈Q olmak üzere $\varepsilon = (x+y\sqrt{n}) \in K$ olsun . 1.2. sonuç ve 1.2. önermeden 2x ∈Z dir. buna göre $\varepsilon = 2x+2y\sqrt{n}$ olarak alındığında $N(\varepsilon)= (2x)^2 - (2y)^2 n \in Z$ olur. En az bir k tamsayısı için $(2x)^2 - (2y)^2 n = k$ yazılabildiğinden $(2x)^2 = (2y)^2 n - k \in Z$ dir. n kare çarpansız bir tamsayı olduğundan 2y ∈Z bulunur. 2x=u , 2y = v olsun. Bu durumda $x^2 - y^2 n \in Z$ olması $u^2 - v^2 n \equiv 0 \pmod 4$ olmasını gerektirir. Buna göre ,

i)- n≡2,3 (mod 4) ise $u^2 - v^2 n \equiv u^2 + 2v^2 \pmod 4$ veya $u^2 - v^2 n \equiv 0 \pmod 4$ olacaktır. Her iki durumda ; $u^2 + 2v^2 \equiv 0 \pmod 4$ ve $u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod 4$ ifadelerinin u ve v ' nin ikisinde çift tamsayılar olması halinde sağlanacağı kolayca görülür. Bu ise x ve y 'nin birer tamsayı olması gerektiğini gösterir. O halde ,

$O_K \subseteq Z \oplus Z(\sqrt{n})$ dir.

ii)- n≡1 (mod 4) ise $u^2 - v^2 n \equiv u^2 - v^2 \pmod 4$ olur $u^2 - v^2 \equiv 0 \pmod 4$ olması u ve v 'nin ikisinin birden tek veya ikisinin birden çift sayı olduğunu gösterir. Bu durumda $O_K = \{ (u+v\sqrt{n})/2 : u \equiv v \pmod 2 \}$ şeklindedir. Diğer taraftan $(u+v\sqrt{n})/2 = (u-v)/2 + v(1+\sqrt{n})/2$ biçiminde yazılabileceğinden ve $(u-v)/2 \in Z$ olduğundan

$$O_K \subseteq Z \oplus Z((1+\sqrt{n})/2)$$

olacaktır.

$N(\sqrt{n}) = -n$, $T_r(\sqrt{n}) = 0$, $N((1+\sqrt{n})/2) = (1-n)/4$, $T_r((1+\sqrt{n})/2) = 1$ ifadeleri birer tamsayı olduklarından $\sqrt{n}$, $(1+\sqrt{n})/2 \in O_K$ bulunur. Böylece .

$$Z \oplus Z(\sqrt{n}) \subseteq O_K , \quad Z \oplus Z((1+\sqrt{n})/2) \subseteq O_K$$

olduğu görüleceğinden

$$O_K = Z \oplus Z(\sqrt{n}) \quad \text{veya} \quad O_K = Z \oplus Z((1+\sqrt{n})/2) \quad \text{olur}$$

1.3. Sonuç : i)- $n \equiv 2,3 \pmod 4$ ise $O_K = \{x+y\sqrt{n} : x,y \in Z\}$

ii)- $n \equiv 1 \pmod 4$ ise $O_K = \{(x+y\sqrt{n})/2 : x,y \in Z\}$ dir.

1.4. Sonuç : $K=Q(\sqrt{n})$ cisminin O_K tamlık halkası sonlu üretilmiş bir Z-modüldür ve üreteçleri

$n \equiv 1 \pmod 4$ ise $\{1, \sqrt{n}\}$

$n \equiv 2,3 \pmod 4$ ise $\{1, (1+\sqrt{n})/2\}$ dir.

1.3. Tanım :K= $Q(\sqrt{n})$ sayı cismi ise

$$V=\begin{cases} \sqrt{n}, & n \equiv 2,3 \pmod 4 \text{ ise} \\ (1+\sqrt{n})/2, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere, $\{1,v\}$ ikilisine O_K 'nın tamlık tabanı denir.

1.4. Tanım : O_K bir tamlık bölgesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $d: O_K \to Z$ dönüşümü varsa O_K 'ya bir Euclide bölgesidir denir.

i)- $\forall x \in O_K$ için $d(x) \geq 0$

ii)- $d(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

iii)- $\forall x,y \in O_K$ için $d(x.y) = d(x).d(y)$

iv)- $\forall x,y \in O_K$ için $y \neq 0$ olsun . $x= qy+r$ olacak biçimde en az bir $q.r \in O_K$ vardır. Burada $0 \leq d(r) < d(y)$ dır

1.5. Tanım : A , $K=Q(\sqrt{n})$ cisminin bir alt kümesi olsun. Eğer A kümesi,

i)- $a,b \in A$ için $a-b \in A$ dır.

ii)- $a \in A$, $c \in O_K$ için $a.c \in A$ dır.

iii)- $dA \subseteq O_K$ olacak biçimde bir $d \neq 0$, $d \in O_K$ vardır.

Koşullarını sağlıyorsa , A ya K 'nın bir " Kesirsel İdeali " denir. Özellikle O_K tamlık halkasının bütün idealleri de birer kesirsel idealdir. Bunlara " tam idealler " denir.

1.2. Teorem : (O) dan farklı kesirsel idealler, ideallerin çarpma işlemi altında bir grup oluştururlar. (Weiss ,1963, s.123)

1.6.Tanım : A ve B iki kesirsel ideal olsun. $A=(\alpha)$ B olacak biçimde $\exists \alpha \in Q(\sqrt{n})$ varsa , " A ile B denktir" denir ve $A \sim B$ ile gösterilir.

1.6. Tanım : A ve B $Q(\sqrt{n})$ 'nin tam idealleri olsun. Eğer (α) A = (β)B olacak biçimde α ,$\beta \in O_K$ varsa A ile B ye " denk idealler " denir.

2. Kuadratik Sayı Cisimlerinin Diskriminantı:

2.1. Tanım : $Q(\sqrt{n})$ cisminin tamlık halkasının bir tamlık tabanı $\{ V_i , V_j \}= \{1,V \}$, (i=1,2 için) biçiminde olsun. $\Delta_{K/Q} = \det (Tr (V_i \cdot V_j))$ ifadesine tamlık halkasının veya $K=Q(\sqrt{n})$ cisminin " diskriminantı " denir. Yada başka bir tanımla ; G(K/Q) , K/Q genişlemesinin Galois grubu olmak üzere , diskriminant ;

$$\Delta_{K/Q} = | \sigma_i (V_j)|^2 = [\det (\sigma_i (V_j))]^2 \text{ biçimindedir.}$$

G(K/Q) = 2 olduğundan i,j = 1,2 dir

2.1. Teorem : $K = Q(\sqrt{n})$, n kare-çarpansız bir tamsayı olmak üzere ,

$n \equiv 1 \pmod 4$ ise $\Delta_{K/Q} = 4n$

$n \equiv 2,3 \pmod 4$ ise $\Delta_{K/Q} = n$ dir.

Kanıt : $n \equiv 2,3 \pmod 4$ ise $Q(\sqrt{n})$ 'nin tamlık halkası O_K ' nın tabanı $\{1, \sqrt{n}\}$ dir.

$\Delta_{K/Q}(1, \sqrt{n}) = \Delta_{K/Q} =$ det ($Tr_{K/Q}$ ($1, \sqrt{n}$)) olduğundan

$$\Delta_{K/Q} = \begin{vmatrix} Tr_{K/Q}(1) & Tr_{K/Q}(\sqrt{n}) \\ Tr_{K/Q}(\sqrt{n}) & Tr_{K/Q}(\sqrt{n}^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2n \end{vmatrix} = 4n \quad \text{dır.}$$

Benzer biçimde $n \equiv 1 \pmod 4$ ise $K = Q(\sqrt{n})$ cisminin tamlık halkası O_K 'nın tabanı $(1, (1+\sqrt{n})/2)$ dir.

$\Delta_{K/Q}(1, (1+\sqrt{n})/2) = \Delta_{K/Q} =$ det ($Tr_{K/Q}(1, (1+\sqrt{n})/2)$ olduğundan

$$\Delta_{K/Q} = \begin{vmatrix} Tr_{K/Q}(1) & Tr_{K/Q}((1+\sqrt{n})/2) \\ Tr_{K/Q}((1+\sqrt{n})/2) & Tr_{K/Q}(((1+\sqrt{n})/2)^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & (1+n)/2 \end{vmatrix} = n$$

bulunur.

2.2. Teorem : $K = Q(\sqrt{n})$ cisminin tamlık halkasının elemanları $a,b \in Z$ olmak üzere ; $(a+b\sqrt{\Delta})/2$ biçiminde yazılabilir. Burada $a^2 \equiv \Delta b^2 \pmod 4$ dür . (Ribenboim 1973, s 77) .

3. Kuadratik Rezidüler.

3.1. Tanım Eğer $m,n \in Z^+$, $a \in Z$ ve $(a,m) = 1$ olmak üzere , $x^n \equiv a \pmod m$ kongrüansının en az bir çözümü varsa ; a ' ya " n. kuvvetten bir rezidü " denir.
a , mod m ' e göre n kuvvetten bir rezidü ise $a R_n m$, a mod m ' e göre n. kuvvetten bir rezidü değil ise $a N_n m$ ile gösterilir.

n = 2 alındığında, $x^2 \equiv a \pmod m$ kongrüansının bir çözüme sahip olması durumunda a'ya "kuadratik rezidü" aksi halde " non-kuadratik rezidü " denir.

3.2. Tanım : $P \neq 2$ bir asal sayı olmak üzere

$$(a/p) = \begin{cases} 1, & x^2 \equiv a \pmod p \text{ ise} \\ -1, & x^2 \not\equiv a \pmod p \text{ ise} \\ 0, & p \mid a \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan (a/p) sembolüne "Legendre Sembolü " denir. Ayrıca aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

i) - $a^{(p-1)/2} \equiv (a/p) \pmod p$
ii)- $(ab/p) = (a/p)(b/p)$
iii)- $a \equiv b \pmod p$ ise $(a/p) = (b/p)$ dir.
iv)- mod p ye göre kuadratik rezidülerin sayısı ile non-kkuadratik rezidülerin sayısı eşittir.

3.1. Teorem : (Kuadratik Reciprocity Kuralı)
a tek ve pozitif tamsayı , p tek bir asal sayı ve (a,p) = 1 ise ,
ya $(a/p) = (p/a) . (-1)^{(a-1)/2 \, . \, (p-1)/2}$ yada $(a/p) = (p/a) \; (-1)^{(a-1)/2 \, . \, (p-1)/2}$
dir.

4. Asalların Parçalanması

$K = Q(\sqrt{n})$ ve $[K:Q] = 2$ olmak üzere I.Bölüm 3.1.6. tanım kullanılarak

$$2 = \sum_{i=1}^{r} e_i \; f_i = \sum_{i=1}^{r} e(P_i/p) \; f(P_i/p)$$ olduğu görülür.

$N(P) = p^f$ olduğudan , K 'nın P asal divizörüne karşılık gelen asal ideal ayni P harfiyle , Q 'nun p asal divizörüne karşılık gelen asal ideal de ayni p harfiyle gösterilmek üzere $r=1,2$ için e_i, f_i sayıları 3 durumda irdelenerek, p idealini oluşturan p asal sayısı üst cisimde sırasıyla aşağıdaki şekillerde parçalanır.

$r=2$, $f_1 = f_2 = 1$, $e_1 = e_2 = 1$;
$p = P_1 . P_2$, ($P_1 \neq P_2$) , $N(P_1) = N(P_2) = p$, p tamamen parçalanmış (decomposed) asaldır.

$r=1$, $f=2$, $e=1$,
$p = P$, $N(P) = p^2$, p kalan (inert) asaldır.

$r=1$, $f=1$, $e=2$, $p=P^2$, $N(P)=p$,
p dallanmış (ramified) asaldır.

Ayrıca 3.1.1. Kummer teoreminden $f = \mathrm{Irr}(\sqrt{n}, Q) = (x^2 - n)$ (mod p) polinomunun asal çarpanları olan G_i polinomları ile p 'nin P_i asal divizörleri arasında 1-1 bir eşleme vardır. Buradan $d^\circ G_i(x) = f(P_i/p)$ dir. Buna göre;

$$(x^2 - n) \ (\mathrm{mod}\ p) = \begin{cases} (x-a)(x+a), \ n \equiv a^2 (\mathrm{mod}\ p) & \text{ise } (p, \text{tamamen parçalanmış}) \\ (x^2 - n), \ n \not\equiv a^2 (\mathrm{mod}\ p) & \text{ise } (p, \text{kalan}) \\ x, \ p \mid n & \text{ise } (p, \text{dallanmış}) \end{cases}$$

bulunduğundan ,
$p \nmid n$, p tamamen parçalanmış , $(n/p) = 1$ ise n mod p ' ye göre kuadratik rezidü ,
$p \nmid n$, p inert , $(n/p) = -1$ ise n mod p ' ye göre non-kuadratik rezidü ,
$p \mid n$, p dallanmış ise bu durumda n mod p ' ye göre ne kuadratik nede non-kuadratik rezidu olacaktır. χ_K , K cısminin karakter fonksiyonu olmak üzere,

$$\chi_K = \begin{cases} (\Delta_K / p) & , p \neq 2 , p \nmid \Delta_K \\ (-1)^{(\Delta_K - 1)/8} & , p = 2 , p \nmid \Delta_K \\ 0 & , \quad p \mid \Delta_K \end{cases}$$

4.1. Teorem : Δ , K cisminin diskriminantı ve p asal bir sayı olsun. Bu durumda ,

i)- $p \mid \Delta \Leftrightarrow p=P^2$, $N(P) = p$ dir.

ii)- $p \neq 2$ ve $p \nmid \Delta$ ise $p = P_1 . P_2$, ($P_1 \neq P_2$) , $N(P_1) = N(P_2) = p$ dir.

iii)- $p=2$ ve $2 \mid \Delta$ durumunda ,

$n \equiv 1$ (mod 8) ise , $2 = P_1 . P_2$, ($P_1 \neq P_2$) , $N(P_1) = N(P_2) = 2$ dir.

$n \equiv 5$ (mod 8) ise , $2 = P$, $N(P) = p^2 = 4$ olacaktır.

5. Kuadratik Sayı Cisimlerinde Temel Birimler.

$K = Q(\sqrt{n})$ bir kuadratik sayı cismi olmak üzere, eğer $n<0$ ise K 'ya " imajiner kuadratik sayı cismi " , $n>0$ ise K'ya " reel kuadratik sayı cismi " denir. r_1 ; reel arşimetsel asalların sayısını , r_2 ; kompleks arşimetsel asalların sayısını göstermek üzere birinci bölüm 3.1.1 önermeden $[K:Q] = 2 = r_1 + 2r_2$ olduğu kullanılarak reel kuadratik sayı cisimleri için ; $r_1 = 2$, $r_2 = 0$, imajiner kuadratik sayı cisimleri için $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ olduğu görülür.

5.1. Önerme : $\alpha \in O_K$ olmak üzere α ' nın birim olması için gerek ve yeter koşul $N(\alpha) = \pm 1$ olmasıdır.

Kanıt : $:\Rightarrow$ α birim $\Rightarrow$ $\alpha \mid 1$ dir. O halde bir α' cebirsel tamsayısı için , $\alpha . \alpha' = 1$ dir. $N(\alpha) . N(\alpha') = 1$ olduğundan $N(\alpha) = \pm 1$ bulunur.

$\Leftarrow$: $N(\alpha) = \pm 1$ ise α' , α ' nın K daki eşleniği olmak üzere $\alpha' . \alpha = \pm 1$ yazılabilir. ancak α' cebirsel tamsayı olduğundan , O_K cebirsel tamsayılar halkasında $\alpha \mid 1$ dir.
$\therefore$ α birimdir.

Bu önermeden faydalanarak $K = Q(\sqrt{n})$ kuadratik sayı cisminin birimleri aşağıdaki biçimde belirlenebilir.

$n<0$ olsun Eğer $n \equiv 2,3$ (mod 4) ise $\{1, \sqrt{n}\}$ K 'nın tamlık tabanı olmak üzere $\alpha \in O_K$ elemanı $x, y \in Z$ için $\alpha = x + y\sqrt{n}$) biçiminde ifade edileceğinden $N(\alpha) = (x + y\sqrt{n})(x - y\sqrt{n}) = x^2 - ny^2$ olur. 5.1.önerme kullanılarak $\alpha = x + y\sqrt{n}$ birim olduğundan $x^2 - ny^2 = \pm 1$ denkleminin sonlu sayıdaki çözümleri K imajiner kuadratik sayı cisminin birimlerini verecektir.

Eğer $n \equiv 1 \pmod 4$ ise, $(1, (1+\sqrt{n})/2)$ K 'nın tamlık tabanı olmak üzere $\alpha \in O_K$ elemanı $x,y \in Z$ için $\alpha = (x+y\sqrt{n})/2$ biçiminde ifade edilebileceğinden $N(\alpha) = (x+y\sqrt{n})/2 \,.\, (x-y\sqrt{n})/2 = (x^2 - ny^2)/2$ bulunur. 5.1.önermeden yararlanarak $\alpha = (x+y\sqrt{n})/2$ birim olduğu için $(x^2 - ny^2)/4 = \pm 1$ bulunur. $n<0$ olduğundan $(x^2 - ny^2) = \pm 4$ denkleminin sonlu sayıdaki çözümü K cisminin birimlerini verecektir.

Bu ifadelere göre imajiner kuadratik sayı cisimlerinin birimleri için aşağıdaki önerme verilebilir.

5.2.Önerme : $n \neq -1$, $n \neq -3$ ve $n<0$ ise $K = Q(\sqrt{n})$ cismin birimleri ± 1 dir. $n=-1$ ise $Q(\sqrt{-1})$ cisminin birimleri ± 1 , $\pm i$ ve $n=-3$ ise $Q(\sqrt{-3})$ cisminin birimleri ξ birimin küpkökü ve $\xi = (-1+\sqrt{-3})/2$ olmak üzere ; ± 1 , $\pm\xi$, $\pm\xi^2$ biçimindedir. Bundan sonraki kısımda reel kuadratik sayı cisimlerinin birimleri belirlenecektir. Öncelikle $n=2$ durumu alınarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

5.1.Lemma : $K = Q(\sqrt{2})$ cisminin 1 ile $1+\sqrt{2}$ arasında birimi yoktur.
Kanıt: $a,b \in Z$ için $\lambda = a+b\sqrt{2}$ birimi olsun. Buradan $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ eşitliğini sağlayan değerler 1 ve $1+\sqrt{2}$ dir. $1<\lambda< 1+\sqrt{2}$ olsun. 5.1. Önermeden $a-b\sqrt{2} = \pm 1 / (a+b\sqrt{2})$ yazılabilir. Buradan $-1<a-b\sqrt{2} < 1$ olduğundan bu ifade $1<\lambda< 1+\sqrt{2}$ ile toplandığında $0<2a<2+2\sqrt{2}$ bulunur. $a=1$ olacağı için $<1+b\sqrt{2}< 1+\sqrt{2}$ yazılabilir. Ancak bu ifadeyi sağlayan bir $b \in Z$ yoktur. O halde $K = Q(\sqrt{2})$ cismi 1 ile $1+\sqrt{2}$ arasında birime sahip değildir.

5.2.Teorem : $Q(\sqrt{2})$ reel kuadratik sayı cisminin sonsuz sayıda birimi vardır. Bunlar $a,b \in Z$ için $\varepsilon = a+b\sqrt{2}$ olmak üzere ε^s, $s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ biçimindedir.
Kanıt : λ , $Q(\sqrt{2})$ cisminin birimi olsun. $\lambda>0$ ise $\varepsilon = a+b\sqrt{2} > 1$ olduğundan $\varepsilon^s \leq \lambda < \varepsilon^{s+1}$ olacak biçimde bir s tamsayısı vardır. Eğer $\varepsilon^s < \lambda < \varepsilon^{s+1}$ ise ;
$1 < \lambda\varepsilon^{-s} < \varepsilon$ ve $1 < \lambda\varepsilon^{-s} < 1+\sqrt{2}$ yazılabilir.

Ancak λ , ε birim ve $N(\lambda\varepsilon^{-s}) = 1$ olacağından $\lambda\varepsilon^{-s}$, 1 ile $1+\sqrt{2}$ arasında bir birim olur. Bu da 5.1. Lemma ile çelişir . Öyleyse $\lambda=\varepsilon^{s}$ biçiminde olacaktır. λ birim olacağından $\lambda<0$ durumunda $-\lambda$ da birim olacağından $\lambda = \varepsilon^{s}$ yazılabilir.

5.1. Tanım : $\varepsilon= 1+\sqrt{2}$ olmak üzere , $S = \{\pm\varepsilon^{s} : s= 0,\pm1 , \pm2 , ... \}$ birim grubuna $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cisminin birimlerinin " temel sistemi " denir.

5.3. Önerme : $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi , $x,y\in Z$ için $\eta = (x+y\sqrt{n})/2\in K$ ise aşağıdakiler sağlanır.

i)- η bir birimdir $\Leftrightarrow$ $x^2 - ny^2 = \pm4$ olmasıdır. Ayrıca η bir birimse
$\eta >1$ $\Leftrightarrow$ $x >0$, $y >0$ dır.
ii)- Eğer $\eta_i = (x_i + y_i\sqrt{n})/2$, ($i=1,2$ ve $x_i , y_i \in Z$ için)
1 den büyük birimler ise,

$\eta_1 < \eta_2$ $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ dir. (Kanıt Weiss , s.239)
Sonuç olarak reel kuadratik sayı cisimlerinden $n\equiv 1 \pmod 4$ olması durumunda $x^2 - ny^2 = \pm4$ ile ifade edilen Diophantine denkleminin 1 den büyük en küçük (x_0, y_0) pozitif tamsayı çözümü esas birimi vermektedir.

6. Kuadratik Sayı Cisimlerinin sınıf Sayıları

6.1. Tanım : $K=Q(\sqrt{n})$ kuadratik sayı cisminin bütün kesirsel ideallerinin çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba G denirse , G 'nin bir alt grubu olan esas idealler grubu T olmak üzere G/T grubuna $(Q\sqrt{n})$ cisminin " sınıf grubu " bu grubun eleman sayısına da " sınıf sayısı " denir.

6.1. Teorem : Sınıf sayısı sonlu bir sayıdır. (Z.I.Borevich and I.R.Shafarevich, s.221)

6.2. Teorem $K=Q(\sqrt{n})$ kuadratik sayı cismi , M_K Minkowski sınırı olmak üzere $Q(\sqrt{n})$ cisminin ideal sınıfında

$$N(P) = \begin{cases} M_K = \sqrt{\Delta_K}/2, & n>0 \text{ ise} \\ M_K = 2\sqrt{\Delta_K}/\pi, & n>0 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak biçimde en az bir *P* tam ideali mevcuttur. Burada Δ_K , $K=Q(\sqrt{n})$ cisminin diskriminantıdır.Bu teoremden faydalanarak imajiner kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısı aşağıdaki önerme ile belirlenmiştir.

6.1.Önerme : $K=Q(\sqrt{n})$ imajiner kuadratik sayı cismi n, $n \equiv 1 \pmod 4$ biçiminde kare-çarpansız bir tamsayı olmak üzere, $h_K = 1$ olan sadece 9 tane cisim vardır. bunlar , n = -1 , -2 , -3 , -7 , -11 , -19 , -43 , -67 , -163 değerlerine karşılık gelen imajiner kuadratik sayı cisimleridir.

n = -163 için $K = Q(\sqrt{-163})$ cisminin sınıf sayısının 1 olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$M_K = (2\sqrt{4|(-163)|})/\pi = 2.\sqrt{|-625|}/\pi < 15$ olduğundan M_K , normu ≤ 15 olan en az bir tam ideali kapsayacaktır Buna göre p = 2,3,5,7,11,13 olur. Bu değerlerin tümü $Q(\sqrt{-163})$ de inert olacağından $h_K = 1$ bulunur. Sınıf sayısı 1 olan 9 tane imajiner kuadratik sayı cismı vardır. Ancak reel kuadratik sayı cısimlerinde sınıf sayısını bulmak oldukça zordur. Bundan sonraki kısımlarda reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısını veren kriterler incelencektir.

III. BÖLÜM

REEL KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNDE SINIF SAYISININ 1 OLMASI İLE İLGİLİ BAZI KRİTERLER

Sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerinin belirlenmesi imajiner olanlardan daha zordur ve bu cisimlerin sayısının sonlu olup olmadığı henüz kesinlik kazanmamıştır. Bu tür sayı cisimlerinin sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşulları veren bir takım kriterler elde edilmesine rağmen bu yöntemlerin tüm sayı cisimlerine uygulanması mümkün değildir. Değişik kriterlerle belli sayılarda sınıf sayısı 1 olan cisimler bulunmuştur. Burada bu kriterlerden bazıları incelenecektir. Bu konuda yapılacak çalışmalar şöyle özetlenebilir. İlk olarak çalışılan cismin tamlık halkasının Euclide Algoritması yardımıyla tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğu gösterilerek bu durumda sınıf sayısının 1 olacağı söylenecektir. Rabinowitsh 1913' te Euclide Algoritması kavramını genelleştirerek störend kesirlerini tanımlanmış ve imajiner kuadratik sayı cisimlerinde sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter şartları veren bazı kriterler elde etmiştir. Kutsuna 1980 yılında bu yöntemi reel kuadratik sayı cisimlerine uygulanmıştır. Daha sonra 1987 yılında Ming ve Leu ; Minkowski sabitini ve Kronecker karekterini kullanarak $K=Q(\sqrt{n})$ cismi için bu cisimde inert olmayacak ve Minkowski sınırından küçükeşit olacak biçimde P ile gösterilen rasyonel asallardan oluşan bir S_K kümesini tanımlayarak bu kümenin boş küme olması durumunda cismin sınıf sayısının 1 olacağını söylemişlerdir. Ayrıca $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi için $n \geq e^{16}$ olması durumunda sınıf sayısı 1 olan en fazla 1 tane cisim bulunabileceğini kanıtlamışlardır.

Richaut-Degert ikilisi " R-D tipinde sayı cismi " adını verdikleri sayı cisimlerini tanımlamışlar , Mollin ve Williams 1987 ' de R-D tipinden sayı cisimlerini inceleyerek sınıf sayısı 1 olan cisimleri belirlemişlerdir

Yokoi 1990 ' da sınıf sayısının olmasında önemli rol oynayan temel birimleri (fundamental units) kullanarak ve yeni bir invaryant tanımlayarak asal diskriminantlı reel kuadratik sayı cisimlerinden sınıf sayısı 1 olan çok sayıda cisim elde etmiştir.

ξ.1. EuclideAlgoritması Kullanılarak Sınıf Sayısı 1 Olan Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinin Belirlenmesi.

Bu kısımda O_K halkasının Euclide Algoritması yardımıyla bir Euclide halkası olduğu gösterilerek O_K ' nın tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge olacağı söylenecektir.

2.1. Teorem : $K=Q(\sqrt{n})$ bir reel kuadratik sayı cismi , h_K bu cismin sınıf sayısı olmak üzere ;
$h_K = 1 \Leftrightarrow O_K$ tamlık halkasının tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge olmasıdır. (Weiss , s.146 - 147) .

O_K tamlık bölgesinin bir esas ideal bölgesi olduğunu araştırmak kolay değildir. Fakat Z halkasındaki gibi bir Euclide algoritması mevcutsa , özel olarak tamlık bölgeleri esas ideal gölgesi olur. Her esas ideal bölgesi tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge olacağından Euclide algoritması tanımı kullanılarak Euclide cisimleri aşağıdaki biçimde belirlenebilir.

$\alpha \neq 0$, $\alpha \in O_K$ için $\lambda : O_K \to Z$,
$$\alpha \mapsto |N(\alpha)|$$
fonksiyonu
i)- $\lambda(\alpha) \geq 0$ dır
ii)- $\beta \in O_K$ için $\alpha | \beta \to \lambda(\alpha) \leq \lambda(\beta)$ dır.
iii)- $\alpha.\beta \neq 0$ ise $\alpha = \mu\beta + \varepsilon$ olacak biçimde tek şekilde tanımlı $\mu, \varepsilon \in O_K$ 'ardır.
Koşullarını sağlıyorsa , O_K , λ fonksiyonu ile bir Euclide Bölgesi olacaktır. Bu durmda ; $K=Q(\sqrt{n})$ cismi de " Euclide cismi " olarak adlandırılır. O_K Euclide Bölgesi olduğundan (iii) koşulu kullanılarak , $|N(\alpha/\beta - \mu)| < 1$ yazılabilir.

α/β değeri de K 'da olduğundan $\alpha/\beta = \delta \in K$, $\mu \in O_K$ alındığında $|N(\beta - \mu)| < 1$ olur. $n \equiv 2,3 \pmod 4$ durumu alınırsa ; $a,b \in Q$ olmak üzere ,

$\delta = a+b\sqrt{n} \in K$ ve $x,y \in Z$ olmak üzere $\mu = x+y\sqrt{n} \in O_K$ yazılabileceğinden

$$|N(\delta - \mu)| = |N((a+b\sqrt{n}) + (x+y\sqrt{n})| = |N((a - x) + (b-y)\sqrt{n}| < 1$$

olacaktır. $a - x = r$, $b-y = s$ konulduğunda yukarıdaki koşul

$$|N(\delta - \mu)| = |N(r+s\sqrt{n})| = |r^2 - s^2 n| < 1 \quad (1)$$

biçimine gelir. $|r| < 1/2$, $|s| \leq 1$ olarak seçmek mümkündür. Böylece (1) koşulu n= -2,-1 negatif , n=0,1,2,3 pozitif değerleri için sağlanmaktadır. $n \equiv 1 \pmod 4$ alındığında ,$a,b \in Q$ için $\delta = a+b(1+\sqrt{n})/2 \in K$ ve $x,y \in Z$ için $\mu = x+y(1+\sqrt{n})/2$ olduğundan benzer biçimde ,

$$|N(\delta - \mu)| = |N((a - x) + (b-y)(1+\sqrt{n})/2| = |N(r+s(1+\sqrt{n})/2)| < 1$$

bulunur.

Buradan ;

$$N(\delta - \mu)| = |(r+s/2)^2 - n(s/2)^2| < 1 \quad (2)$$

olacaktır. $|s| \leq 1/2$, $|r+s/2| = |a-x+(b-y)/2| = |a + b/2 - y/2 - x| \leq 1/2$ olarak seçilebileceğinden

(2) koşulu n= -11,-7,-3 negatif , n= 5,13 değerleri için sağlanacaktır. Bu sonuçlar kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

1.1. Önerme : $K = Q(\sqrt{n})$ cismi n= -11,-7, -3 , ±2 , -1 , 3 , 5 ,13 değerleri için bir Euclide cisimdir ve sınıf sayısı 1 dir. 1.1. önermede elde edilen cisimler dışında sınıf sayısı 1 olan Euclidien kuadratik cisimleri 1952 yılında Barnes ve Swinner tarafından belirlenmiştir. Bu çalışmaya göre $K=Q(\sqrt{n})$ kuadratik sayı cisimleri için ,
$h_K = 1 \Leftrightarrow$ n= -1 , ±2 , ±3 , 5, 6 , ±11 , ±7 ,±13, 17, 19 ,21 ,29, 33, 37, 41 ,57 , 73 olmasıdır

2. *Kutsuna'nın Yöntemiyle Sınıf Sayısı 1 Olan Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinin Belirlenmesi :*

ξ.1.de kullanılan Euclide Algoritması kavramı genelleştirilerek ve störend kesirleri tanımlanarak imajiner kuadratik sayı cisimlerinde sınıf sayısının 1 olması gerekli ve yeterli koşulu veren aşağıdaki teorem Rabinowitsh tarafından kanıtlanmıştır. Bu yöntem Kutsuna tarafından benzer kriterler ve lemmalar yardımıyla reel kuadratik sayı cisimlerine uygulanarak sınıf sayısı 1 olan cisimler aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

2.1. Teorem: $K=Q(\sqrt{n})$ imajiner kuadratik sayı cismi olmak üzere K cisminin sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşul , $n=1-4m$, $m>0$ olmak üzere, $1 \leq x \leq m-2$ sağlayan tüm x tamsayıları için $x^2 - x + m$ polinomunun bir asal sayı olmasıdır. (Rabinowitsh , 1913 , 154-164)

2.2.Teorem : $K = Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi olsun . K 'nın sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşul $\alpha/\beta \notin O_K$ $\beta/\alpha \notin O_K$ sağlayan α , $\beta \in K$ tamsayıları için $0 < | N(\alpha\zeta - \beta\eta) | < | N(\beta) |$ olacak biçimde ζ , $\eta \in K$ tamsayılarının bulunmamasıdır.

2.1. Tanım : α/β , K da $\alpha/\beta \notin O_K$ $\beta/\alpha \notin O_K$ olacak biçimde herhangi bir kesir olsun. $0 < | N((\alpha/\beta)\zeta - \eta) | < 1$ olacak biçimde ζ , $\eta \in K$ tamsayıları yoksa α/β 'a bir "störend kesri " denir. Bu tanıma göre önceki teorem aşağıdaki biçimde ifade edilir.

2.3. Teorem : K cisminin sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşul K daki kesirlerin störend kesri olmamasıdır.

2.1. Lemma : i)- α/β bir störend kesri ise herhangi bir $\zeta \in K$ tamsayısı için $\alpha/\beta + \zeta$ ve $\alpha/\beta . \zeta$ ($\notin O_K$) kesirleri de birer störend kesridir.

ii)- Herhangi bir $a,b\in Z$ için , $a/b\notin Z$ ise a/b kesri störend değildir.

__2.1. Önerme__ : K cisminin sınıf sayısı 1 değilse , $0 \le a < p$ olmak üzere $(a-V)/p$ biçiminde bir störend kesri vardır. Burada p bir rasyonel asaldır ve

$$V = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \equiv 2,3 \pmod 4 \text{ ise} \\ (1+\sqrt{n})/2, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

__2.2. Önerme__ : $n \equiv 1 \pmod 4$ ve $n = 1+4m$ olsun .$(a-V)/p$ störend kesri ve $0 \le a < p$ olmak üzere ,

$$p \leqslant \begin{cases} \sqrt{m}, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise} \\ \sqrt{n}, & n \equiv 2,3 \pmod 4 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. 2.1. ve 2.2 önermeleri birleştirilerek aşağıdaki önerme verilebilir.

__2.3. Önerme__ : $K = Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısı 1 den büyükse p rasyonel asal ve

$$0 \le a < p \leqslant \begin{cases} \sqrt{m}, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise} \\ \sqrt{n}, & n \equiv 2,3 \pmod 4 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak biçimde bir $(a-V)/p$ störend kesri vardır.

2.4. Önerme . $N(a-V)$ ile p aralarındas asal yada $|N(a+kp-V)| < p^2$ olacak biçimde $K=Q(\sqrt{n})$ cisminin bir rasyonel k tamsayısı varsa $(a-V)/p$ kesri störend kesri değildir.

2.2 ve 2.3. önermeler kullanılarak $K=Q(\sqrt{n})$ cisminin sınıf sayısının 1 olması için *aşağıdaki gibi bir kriter verilebilir.*

__*2.4. Teorem*__ : $K=Q(\sqrt{n})$ bir reel kuadratik sayı cismi olsun.

1Durum : $n\equiv 1 \pmod 4$, $n=1+4m$ olmak üzere $1 < p \leq \sqrt{m}$ biçimindeki herhangi bir p rasyonel asalı ve $0\leq a < p$ biçimindeki herhangi bir a rasyonel tamsayısı için ya N(a-V) ile p aralarında asal yada $|N(a+kp-V)| < p^2$ olacak biçimde bir k rasyonel tamsayısı varsa K daki kesirler störend kesri değildir ve $h_K = 1$ dir.

__*2.Durum*__ : $n\equiv 2,3 \pmod 4$ olmak üzere , $1 < p \leq \sqrt{m}$ biçimindeki herhangi bir p rasyonel asalı ve $0\leq a < p$ biçimindeki bir a rasyonel tamsayısı için ya N(a-V) ile p aralarında asal yada $|N(a+kp-V)| < p^2$ olacak biçimde bir k rasyonel tamsayı varsa , K daki kesirler störend değildir ve $h_K = 1$ dir. Bu lemmaların ve teoremlerin sonucu olarak Rabinowitsh 'nin imajiner kuadratik sayı cisimleri için verdiği teoremin reel kuadratik sayı cisimleri için ifadesi aşağıdaki gibidir.

__*2.1. Sonuç*__ : $n \equiv 1 \pmod 4$, $n= 1+4m$ olmak üzere :

i)- $1 \leq x \leq \sqrt{m} -1$ olacak biçimdeki herhangi bir x tamsayısı için $-x^2 + x + m$ polinomu asal bir sayı ise $Q(\sqrt{n})$ cisminin sınıf sayısı 1 dir.

ii)- Eğer m bir tek sayı ve $2 < p \leq \sqrt{m}$ biçimindeki p rasyonel asalları için $(n/p) = -1$ ise $Q(\sqrt{n})$ cisminin sınıf sayısı 1 dir.

__*Kanıt*__ : i)- 2.1. , 2.2 ve 2.3. önermelerden hemen elde edilir.

ii)- p=2 ise 2.3. teoremden a=0 ve a=1 , m tek sayı olduğundan N(a-V) = m ile p aralarında asaldır.

$p > 2$ ise $(n/p) = -1$ dir. Çünkü p asal ve m tek olduğundan $n=1+4m$ ifadesinden , n sayısınında bir tek sayı olduğu ve $n \equiv a^2 \pmod p$ olamayacağı açıktır.

Diğer taraftan , $N(a-V) \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow n \equiv (2a-1)^2 \pmod p \Leftrightarrow (n/p) \neq -1$ olmasıdır. Bu da $N(a-v)$ ile p aralarında asal olduğu sonucunu verir. Böylece 2.4. teoreminden $K=Q(\sqrt{n})$ cisminin sınıf sayısı 1 olduğu görülür. 2.1. sonucun (i) yada (ii) şıkkını kullanarak $n<2000$ sağlayan sınıf sayısı 1 olan sadece 9 tane $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cisminin olduğu gözlenmiştir.

$n=5, 13, 21, 29, 53, 77, 173, 293, 437$ olduğunda

$K=Q(\sqrt{n})$ cisminin sınıf sayısı $h_K = 1$ olacaktır. Burada çalışılan yöntemden faydalanarak ve bilgisayar kullanılarak $2000 < n < 15000$ sağlayan n sayıları için sınıf sayısı 1 olan $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cisimlerinin bulunamadığı gözlenmiştir. Bu çalışmada da $n > 2000$ olduğunda yöntemin sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerini belirlemede çok yararlı olamayacağı sonucu elde edilmiştir. Bunun nedeni , sayı büyüdükçe verilen aralıklara düşen değerler artacağından teoremlerin varsayımının tüm bu değerler için gerçekleşme olasılığının azalmasıdır.

n	5	13	21	29
h_K	1	1	1	1
$K=Q(\sqrt{n})$	$Q(\sqrt{5})$	$Q(\sqrt{13})$	$Q(\sqrt{21})$	$Q(\sqrt{29})$
	*	*	*	*

n	53	77	173	293	437
h_K	1	1	1	1	1
$K=Q(\sqrt{n})$	$Q(\sqrt{53})$	$Q(\sqrt{77})$	$Q(\sqrt{173})$	$Q(\sqrt{293})$	$Q(\sqrt{437})$

2.1. Tablo

* : Tamlık Halkası tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölge olan Euclide cismi.

3. Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinde Leu ' nun Konjektörü

$K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi , r_2 ,kompleks arşimetsel asal divizörleri sayısı e $M_K = (4/\pi)^{r_2} \cdot (n!/n^n)\sqrt{|\Delta_K|}$ Minkowski sınırını göstermek üzere bir ,

$$S_K = \{\ p \text{ rasyonel asal } :\ p \leq M_K \ ,\ \chi_K(p) \neq -1\ \}$$

ümesi tanımlanabilir. K ' nın h_K ideal sınıfları grubu $P \mid p$ ve $p \in S_K$ sağlayan asal idealleri ile üretilmiştir. Buna göre aşağıdaki konjektör verilebilir.

3.1. Önerme : $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi, h_K sınıf sayısı olsun .

$S_K = \varnothing \Rightarrow h_K = 1$ dir.

u ifadenin tersi imajiner kuadratik sayı cisimlerinde doğru olmasına rağmen reel kuadratik sayı cisimlerinde tersi genellikle doğru değildir.

Örneğin ; $K=Q(\sqrt{6})$ cisminde $h_K = 1$ dir. Ancak $M_K = \sqrt{6}$ için $p=2$ olacağından $\chi_K(p) = 0 \neq -1$ dir ve $S_K = \{2\}$ dir buradan $S_K \neq \varnothing$ bulunur.

no , $S_K = \varnothing$ sağlayan dolayısıyla sınıf sayısı 1 olan en fazla 11 tane $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik cismi varolduğunu iddia etmiştir. Bu cisimler

n= 2,3,5,13,21, 29,53,77, 173,293,437 biçimindeki $Q(\sqrt{n})$ cisimleridir.

3.1. Teorem : $S_K = \varnothing$ olacak biçimde en fazla 12 tane $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi vardır. (Leu , 1990) . Bir K cisminin karakter foksiyonu ;

$$\chi_K = \begin{cases} (\Delta_K / p) & ,\ p \neq 2 \ ,\ p \nmid \Delta_K \ \text{ ise} \\ (-1)^{(\Delta_K - 1)/8} & ,\ p = 2 \ ,\ p \nmid \Delta_K \ \text{ ise} \\ 0 & ,\ p \mid \Delta_K \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. n=2 ve n=3 için $S_K = \emptyset$ olduğu açıktır. Çünkü , bu sayılar alındığında $p \leq M_K$ olacak biçimde p asalları bulunamadığından $S_K = \emptyset$ olacaktır. $n \equiv 2,3 \pmod 4$ durumunda $\Delta_K = 4n$ olduğundan $2 \mid 4n$ bulunur. Buradan $\chi(2) = 0$ dolayısıyla $2 \in S_K$ olacağından $S_K \neq \emptyset$ dir. $n \equiv 1 \pmod 4$ durumunda $\Delta_K = n$ dir. n, en az bir k tamsayısı için $n = 4k+1$ biçiminde yazılabileceğinden ,

$$\chi(2) = (-1)^{(\Delta^2_K-1)/8} = (-1)^{(16k^2+8k)/8} = (-1)^{2k^2+k} = 1 \text{ bulunur.}$$

Buradan $2 \in S_K$ olacağından $S_K \neq \emptyset$ dir. $n \equiv 1 \pmod 8$ durumunda $\chi(2) = 1$ olduğundan $2 \in S_K$ yani , $S_K \neq \emptyset$ dir.Bu yüzden bundan sonra $n \equiv 5 \pmod 8$ durumu gözönüne alınacaktır.

3.2. Önerme : $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi olsun .
Eğer $n < e^{16}$ ve $n = 2,3,5,13,21,29,53,77,173,293,437$ ise $S_K = \emptyset$ dir.

n=2 ve n=3 için $h_K = 1$ olduğu görüldü . Bu n değerlerinden 29 , 77 , 437 seçildiğinde $Q(\sqrt{29})$, $Q(\sqrt{77})$, $Q(\sqrt{437})$ cisimlerinin sınıf sayısının 1 olacağı aşağıdaki gibi gösterilebilir.
n= 29 için $M_K = \sqrt{29}/2 \cong 2,6$ bulunur. $p \leq 2,6$ olan p= 2 asalı , $2 \nmid 29$ ve

$$\chi(2) = (-1)^{(29^2-1)/8} = (-1)^{105} = -1$$ olduğundan $Q(\sqrt{29})$ da inerttir. Böylece

$2 \notin S_K$ olur. $S_K = \emptyset$ dir . $\therefore$ $K = Q(\sqrt{29})$ için $h_K = 1$ dir.

n=77 için $M_K = \sqrt{77}/2 \cong 4,3$ bulunur. $p \leq 4,3$ olan p= 2 ve p = 3 asalları için

$2 \nmid 77$ ve $3 \nmid 77$ olduğundan

$\chi(2) = (-1)^{(77^2-1)/8} = (-1)^{741} = 1$ ve $\chi(2) = (77/3) = (2/3) = -1$ olacaktır.

Böylece $2 \in S_K$, $3 \in S_K$ olacağından $S_K = \emptyset$ bulunur. $K = Q(\sqrt{77})$ cismi için $h_K = 1$ dir. $n = 437$ için $M_K = \sqrt{437}/2 \cong 10{,}4$ bulunur. $p \leq M_K$ sağlayan p asalları p= 2,3,5,7, dir.

p= 2 ise $2 \nmid 437$, $\chi(2) = (-1)^{(437^2-1)/8} = (-1)^{23871} = -1$

p= 3 ise $3 \nmid 437$, $\chi(3) = (437/3) = (2/3) = -1$

p= 5 ise $5 \nmid 437$, $\chi(5) = (437/5) = (2/5) = -1$

p= 7 ise $7 \nmid 437$, $\chi(7) = (437/7) = (3/7) . (-1)^{(7-1)/2 . (3-1)/2} = -1$

olduğundan 2,3,5,7 asalları , S_K 'nın elemanları değildir. Bu durumda $S_K = \emptyset$ olacağındsan $K = Q(\sqrt{437})$ cisminin sınıf sayısı $h_K = 1$ dir. O halde $n < e^{16}$ sağlayan tüm $K = Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cisimleri yukarıdaki biçimde irdelenerek, sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerinin önermede verilen n değerleri ile belirlenen cisimler olduğu görülür.

3.1. Lemma : $K = Q(\sqrt{n})$ olsun. $S_K = \emptyset$ ise p . p_1, p_2 asal sayılar olmak üzere , n=p yada $n = p_1 . p_2$ dir.

Kanıt : $n = p_1 . p_2 . p_3 \ldots\ldots p_r$, $r \geq 3$ olsun. $i = 1,2,\ldots\ldots,r$ için p_i 'ler asaldır. Genelliği bozmadan $p_1 = \min\{ p_1 , p_2 , p_3 \ldots\ldots\ldots , p_r \}$ alınabilir.

Bu durumda $p_1^2 < (p_1 . p_2 . p_3 \ldots\ldots p_r)/4$ yazılabileceğinden $p_1^2 < n/4$ ve $p_1 < \sqrt{n}/2 = M_K$ bulunur. $p_1 \mid \Delta_k$ olduğundan $\chi_K(p_1) = 0$, $p_1 \in S_K$ elde edilir. $\therefore$ $S_K \neq \emptyset$ oluşu bir çelişkidir. O halde n=p yada $n = p_1 . p_2$ dır.

3.2. Lemma : $n = a^2 + b^2$, $a, b \in Z^+$ ve $S_K = \emptyset$ ise q asal bir sayı yada 1 olmak üzere $n = q^2 + 4$ dür.

__*Kanıt :*__ n= 5 için $M_K < 2$ olduğundan $S_K = \emptyset$ ve q= 1 olduğu söylenebilir.

n > 5 olsun . Bu takdirde 2 durum sözkonusudur;

__*1.Durum*__ :b= 1 ise $n \equiv 5 \pmod 8$ ve $n = a^2 + b^2$ olduğundan $a^2 + 1 \equiv 5 \pmod 8$ dolayısıyla $a^2 \equiv 4 \pmod 8$ olacaktır. Bu ifadeden a çift ve $n > a^2 \equiv 4 \pmod 8$ olduğu görülür. Buradan $1 < a/2 < \sqrt{n}/2 = M_K$ ve a/2 tek olacağından $r \mid a/2$ ve $r \leq M_K$ olacak biçimde bir r asal sayısı vardır. O halde $\chi_K(r) = (n/r) = (\Delta_K/r) = 1$ olacağından $r \in S_K$ bulunur. Bu da $S_K = \emptyset$ olmasıyla çelişir.

2.Durum : $b \neq 1$ olsun. Bu durumda , a çift ve b tek olarak alınabileceğinden $a/2 < M_K$ dır. $a/2 \neq 2^s$ ve $s \geq 0$ olması iki durumda incelenebilir.

i)- $r \mid a/2$ olacak biçimde bir r asalı varsa $r \in S_K$ olacağından $S_K = \emptyset$ olmasıyla çelişir.

ii)- b bir asal sayı değilse , b= r.t , $t \geq 3$ olacak biçimde en az bir r asal sayısı bulunabilir. Buradan $r < M_K$ yazılabileceğinden $r \in S_K$ olacaktır. Bu bir çelişkidir. $\therefore$ $S_K = \emptyset$ bulunur. b=q bir asal sayı ise ;

$$n = \begin{cases} 2^2 + q^2, s = 1 & \text{ise} \\ (2^s)^2 + q^2, s > 1 & \text{ise} \end{cases}$$

olacağından $n \equiv 5 \pmod 8$ ifadesinden yararlanarak $n = 2^2 + q^2$ olması gerektiği görülür. $n = q^2 \equiv 1 \pmod 8$ alındığından , $n = 2^2 + q^2 \equiv 5 \pmod 8$ bulunur

3.3. Lemma : $n = p_1 \cdot p_2$ ve $S_K = \emptyset$ ise, $p_1 - p_2 = \pm 4$ ve $i=1,2$ için $p_i \equiv 3 \pmod 4$ olur.

3.2. Teorem : Eğer $S_K = \emptyset$ ise, $n \geq e^{16}$ olan en fazla bir tane n sayısı vardır.

Kanıt : 3.1. Lemma ve 3.1. Önerme kullanılarak bir tane $n \geq e^{16}$ sağlayan n sayısının var olacağı söylenebilir.. $n = p_1 . p_2$ olması durumunda (Kim , Leu ve Ono , 1987) 1.teoremindeki gibi düşünülerek , $n = p_1 . p_2 = 4m+3$ ($m \geq 0$) ve 3.3. Lemmadan $p_1 - p_2 = \pm 4$ yazılabilir. $p_1 - p_2 = -4$ ise $p_2 = 4 + p_1$ olacağından $n = p_1 . p_2 = p_1 \ (4 + p_1) = 4p_1 + p_1^2$ ifadesi kullanılarak $n = q^2 + 4 = 4p_1 + p_1^2$ yazılır. Dolayısıyla $q^2 + 4 + 4 = 4p_1^2 + p_1^2 + 4$ ve buradan $q^2 + 8 = (p_1 + 2)2$ olduğudan $q^2 \equiv (p_1 + 2)^2 \pmod 4$ elde edilir.

$K = Q(\sqrt{n})$ cisminin temel birimi olan $\varepsilon = (q + \sqrt{n})/2$ ifadesi yukarıdaki işlemlerden faydalanılarak ve $q = p_1 + 2$ kullanılarak $\varepsilon = (p_1 + 2 + \sqrt{n})/2$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda Dirichlet' in sınıf sayısı formülü ;

$$h_K = \sqrt{n}/2\log\varepsilon \ . \ L(1, \chi_K)$$

biçiminde verilebilir. $n \geq e^{16}$ alındığından K cisminin L-fonksiyonu ;

$L(1, \chi_K) > (0.655) . n^{-1/16} / 16$ biçiminde yazılabilir. (Kim , Leu ve Ono, 1987) ' den

$$\begin{aligned} \varepsilon < 2\sqrt{n} \text{ olacağından } h_K &= \sqrt{n}/2\log\varepsilon . L(1, \chi_K) > \sqrt{n}/2\log(2\sqrt{n}) . 1/16 . (0,655) n^{-1/16} \\ &= \sqrt{n}/\log(2\sqrt{n})^2 \ . 1/16 . (0,655) n^{-1/16} \\ &= n^{1/2} . n^{-1/16} \ (0,655) = 0,655/16 \ . \ n^{7/16} / \log 4n \end{aligned}$$

bulunur.

$f(x) = (x^{7/16} / \log 4x)$ fonksiyonu $[e^{16}, \infty)$ aralığında artan olduğundan ,

$h_K > 0,655/16 . (e^{16})^{17/16} / \log 4 . e^{16} = 0,655/16 . e^7 / \log 4+16$

$> 0,655/16 . e^7 / 20 = 2,24\ldots$,

olacaktır. Bu da $h_K > 2$ olması demektir. O halde $n \geq e^{16}$ olacak biçimde sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisminin en fazla bir tanedir.

Sonuç olarak bu kısımda elde edilen sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimleri ile ξ.1 ve ξ.2 bölümlerinde elde edilen cisimlerin karşılaştırılması aşağıdaki tablodan görülür.

n	5	13	21	29
h_K	1	1	1	1
$K=Q(\sqrt{n})$	$Q(\sqrt{5})$	$Q(\sqrt{13})$	$Q(\sqrt{21})$	$Q(\sqrt{29})$
	* +	* +	* +	* +

n	53	77	173	293	437
h_K	1	1	1	1	1
$K=Q(\sqrt{n})$	$Q(\sqrt{53})$	$Q(\sqrt{77})$	$Q(\sqrt{173})$	$Q(\sqrt{293})$	$Q(\sqrt{437})$
	+	+	+	+	+

3.1.Tablo

* : Tamlık Halkası tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölge olan Euclide cismi.

+ : Kutssuna ' nın yönteminin uygulanabildiği reel kuadratik sayı cismi .

Bu tablodan analşılacağı gibi $Q(\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{3})$ ve $Q(\sqrt{173})$ cisimlerinin sınıf sayısı 1 olduğu Kutsuna 'nın Kriterleriyle gösterilmemiştir. Ayrıca $Q(\sqrt{173})$ ciminin tamlık halkası tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölge değildir. ξ.1 , ξ.2 ve ξ.3 bölümlerindeki kriterlerin hepsinin uygulanabildiği ve sınıf sayısı 1 olan cisimler sadece $Q(\sqrt{5})$, $Q(\sqrt{13})$, $Q(\sqrt{21})$ ve $Q(\sqrt{29})$ reel kuadratik sayı cisimleridir.

ξ.4. *Richaut-Deget (R-D) Tipinden reel Kuadratik Sayı Cisimleri*

4.1. Tanımlar : $K=Q(\sqrt{n})$ reel kuadratik sayı cismi ve h_K , K ' nın sınıf sayısı olsun. $n = m^2 + r$ bir kare- çarpansız tamsayı , $r \mid 4m$ ve $-m < r \leq m$ ise $Q(\sqrt{n})$ cismine " R-D tipinde bir sayı cismi " denir.
Eğer $|r| \in \{1,4\}$ ve $n \neq 5$ ise $Q(\sqrt{n})$ cismine " Dar (Narrow) R-D tipınden bir sayı cismi " ,
$|r| \neq \{1,4\}$ ve $n \neq 1 \pmod 4$ ise $Q(\sqrt{n})$ cismine " Geniş (Wide) R-D tipinden bir sayı cismi "denir .

4.1. Teorem : $Q(\sqrt{n})$ R-D tipinden her reel kuadratik sayı cismi , $n = m^2 + r$ ve ε bu cismin temel birimi olsun .
i)- $n \neq 5$ ve $|r| = 1$ ise , $\varepsilon = n + \sqrt{m}$ ve $N(\varepsilon) = -\mathrm{sgn} r$ dir.
ii)- $|r| = 4$ ise , $\varepsilon = (n + \sqrt{m})/2$ ve $N(\varepsilon) = -\mathrm{sgn} r$ dir.
iii)- $|r| \neq 4$ ise , $\varepsilon = ((2n + r)+2\sqrt{m}) / |r|$ ve $N(\varepsilon) = 1$ dir.

Burada sgn(r) , r 'nin işaret fonksiyonudur.

4.1. Dar (Narrow) R-D Tipinden Reel Kuadratik Sayı Cisimleri.

$Q(\sqrt{n})$ cisminin temel birimi $\varepsilon =(T+U\sqrt{n})/2$ olarak alınırsa , bu kısımdaki lemma ve teoremlerin kanıtında kullanılacak olan bir A sayısı

$$A=\frac{(2T/\sigma)-\sigma-1}{U^2} \quad \text{biçimindedir. ve} \quad \sigma = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise} \\ 2, & n \equiv 2,3 \pmod 4 \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilir.

4.1.1 Lemma : n , kare-çarpansız bir tamsayı olsun.
Eğer $h_K = 1$ ise tüm $p < A$ sağlayan p asalları $Q(\sqrt{n})$ cisminde inerttir.
Bu lemmanın tersinin doğru olmadığı bir örnekle açıklanacak olursa , n= 34 alındığında $34 \equiv 2 \pmod 4$ olduğundan $\sigma=1$ dır. $x^2 - 34y^2 = 1$ denkleminden $T = 35$ ve $U = 6$ bulunur. Buradan $A = 68/36 < 2$ olacağından A sayısından küçük ve inert olacak biçimde bir p asalı yoktur ve bu cisim için $h_K = 2$ dir.

4.1.1Teorem (Temel Teorem) : $n \equiv 1 \pmod 4$ ve n , $\sqrt{n-1}\,/\,2 \leq A$ olacak biçimde bir kare çarpansız tamsayı ise , aşağıdaki ifadeler denktir.

i)-$h_K = 1$ dir.

ii)- Tüm $p < A$ sağlayan p asalları $Q(\sqrt{n})$ cisminde inerttir

iii)- $0 < x < p < (\sqrt{n-1})/2$ sağlayan tüm x tamsayıları ve p asalları için $f(x) = -x^2+x+(n-1)/4 \not\equiv 0 \pmod p$ dir.

iv) f(x) , $0 < x < (\sqrt{n-1})/2$ sağlayan tüm x tamsayıları için bir asala eşittir.

Kanıt : (i) $\Rightarrow$ (ii) : Önceki lemmadan sağlanır.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Bunun kanıtı için (ii) ifadesinin sağlandığı varsayılabilir. Bu durumda herhangi bir $0 < x < p < (\sqrt{n-1})/2$ biçimindeki x tamsayısı ve p asalı için $f(x) \equiv 0 \pmod p$ ise , $f(x) = -x^2+x+(n-1)/4 \equiv 0 \pmod p$ olacaktır. Bu da , $4x^2+4x+(n-1) \equiv 0 \pmod p$ olması demektir. Dolayısıyla $n = 4x^2+4x+(n-1) \equiv 0 \pmod p \equiv (2x-1)^2 \pmod p$ dir. Buradan $2x-1 = q \in Z$ alındığından $n \equiv q^2 \pmod p$ olacağından $(n/p) \neq -1$ bulunur. $\therefore$ p , $Q(\sqrt{n})$ cisminde inert değildir. p , inert olmadığından $p > A$ ve $p < (\sqrt{n-1})/2$ den $(\sqrt{n-1})/2 > A$ olacaktır. Bu bir çelişkidir. $\therefore$ $f(x) \not\equiv 0 \pmod p$ olmalıdır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : (iii) sağlansın.
Eğer (n-1)/4 bölünebilir ancak bir asalın karesi biçiminde olmayan bir sayı ise ; $0 < 1 < p < (\sqrt{n-1})/2$ için $f(x) \equiv 0 \pmod p$ olacak biçimde (n-1)/4 'ü bölen bir p asalı vardır.

Buda (iii) ifadesinin doğruluğu ile çelişeceğinden $(n-1)/4 = p$ veya $(n-1)/4 = p^2$ alınmalıdır.

$0 < x < (\sqrt{n-1})/2$ sağlayan en az bir x tamsayısı için $f(x) \equiv 0 \pmod{p_1 . p_2}$ oldun. Burada p_1 ve p_2 kesinlikle farklı olmaları gerekmeyen asallardır.

$(n-1)/4 = p^2$ alındığında $p_1 . p_2 \geq (n-1)/4$ ise $-x^2+x+(n-1)/4 \geq (n-1)/4$ olur. Ancak $x \leq 1$ olması durumunda bu bir çelişkidir. Bununla beraber genelliği bozmadan $p_1 < (\sqrt{n-1})/2$ almak mümkündür. Eğer $p \mid x$ ise $p_1 = p$ olduğundan $p_1 \mid (n-1)/4$ olur. Burada en az bir x tamsayısı için $x = p_1 .k$ olacağından

$p = p_1 < x < (\sqrt{n-1})/2 \leq p$ bulunur. Bu da $0 < x < p < (\sqrt{n-1})/2$ olmasıyla çelişir. $\therefore$ $0 < x < p_1$ genelliğinin dışına çımadan $f(x) \equiv 0 \pmod{p_1}$ ifadesi gözönüne alınabilir. Burada $0 < x < p_1 < (\sqrt{n-1})/2$ ile $f(x) \equiv 0 \pmod{p_1}$ yazılabilir. Bu da (iii)'e çelişkidir. Çelişki $f(x) \equiv 0 \pmod{p_1 . p_2}$ varsayılmasından elde edilmiştir. O halde $f(x)$, $1 < x < (\sqrt{n-1})/2$ aralığındaki tüm x tamsayıları için bir asala eşittir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : (iv) ifadesinin sağlandığı varsayılsın.

Eğer $h_K > 1$ ise ξ.1 'in 2.4. teoreminden $0 \leq x < p \leq (\sqrt{n-1})/2$ olacak biçimde ve aşağıdaki (a) ile (b) ifadelerini sağlayan x tamsayısı ile bir p asalı vardır.

(a) $N((2x-1-\sqrt{n})/2) \equiv \pmod{p}$ dir ve

(b) $|\, N((2x+2kp-1-\sqrt{n})/2) \,| < p^2$ olacak biçimde bir k tamsayısı vardır.

(a) ifadesinden $(2x-1-\sqrt{n})/2 \,.\, (2x-1-\sqrt{n})/2 = (4x^2-4x-n+1)/4 \equiv 0 \pmod{p}$ ise $-x^2+4x+(n-1)/4 \equiv 0 \pmod{p_1}$ bulunur. Bu ifadeyi $-x^2+4x+(n-1)/4 \equiv 0 \pmod{p}$ biçiminde yazmak mümkündür. Buradan eğer $1 < x < (\sqrt{n-1})/2$ ise (iv) 'ün sağlandığı düşünüldüğünden $f(x) = -x^2+x+(n-1)/4 = p$ yazılabilir. Ayrıca $x < p \leq (\sqrt{n-1})/2$ olduğundan $p^2 = (n-1)/4$ alınabilir.

Bu durumda ;

$f(x) = -x^2 + x + p^2 = p$ olacağından , $-x^2 + x = p - p^2$, $x(x-1) = p(p-1)$ olur.
Dolayısıyla , $p = x(x-1) + (n-1)/4 > p(1-p) + p^2 = p$ bulunur. Bu da bir çelişkidir.
$\therefore$ $x = 0$ yada $x = 1$ olmalıdır. Bu durumda $p \mid (n-1)/4$ olacaktır.
$f(p) = -p^2 + p + (n-1)/4$ ifadesi $f(p) = p(-p+1+(n-1)/4p)$ biçiminde yazılabilir.
Eğer $0 < p < \sqrt{n-1}/2$ ise varsayımdan $f(p) = p$ sağlanır . Oysaki bu ifade $p = \sqrt{n-1}/2$ durumunda sağlanmaktadır. $0 < p < \sqrt{n-1}/2$ durumu bir çelişkidir.
(b) ifadesinde $x=0$ veya $x=1$ için $k=1$ konulduğunda ;
$p^2 \le \mid N(2p \pm 1 - \sqrt{n})/2 \mid = \mid (4p^2 \pm 4p + 1 - n)/4 \mid = p$ olur. Bu bir çelişkidir. Çelişki $h_K > 1$ kebul edilmesinden kaynaklandı. O halde $h_K = 1$ olmalıdır.

Bu temel teoremin R-D tipindeki reel kuadratik sayı cisimlerine uygulanışı aşağıdaki gibidir. Bu tipteki sayı cisimlerinin sınıf sayıları hakkında Louboutin ve Yokoi 1986) , çeşitli çalışmalar yapmışlardır.

4.1.1.Sonuç : $n = 4q^2 + 1$ biçiminde kare-çarpansız bir tamsayı olmak üzere , n yada q bölünebilir sayılar ise , $h_K > 1$ dir . Eğer n ve q asal sayılar ise bu durumda aşağıdakiler denktir,

i)- $h_K = 1$ dir.
ii)- Tüm $p<q$ biçimindeki p asalları $Q(\sqrt{n})$ cisminde inerttir.
iii)- $0 < x < p < q$ sağlayan tüm x tamsayıları ve p asalları için
$f(x) = -x^2 + x + q^2 \not\equiv 0 \pmod p$ dir.
iv)- $1 < x < q$ sağlayan tüm x tamsayıları için f(x) polinomu bir asala eşittir.

Kanıt : $n = 4q^2 + 1$ olduğundan $n \equiv 1 \pmod 4$ tür. $\varepsilon = (T + U\sqrt{n})/2$ ifadesindeki T ve U değerleri $x^2 - ny^2 = -4$ biçimindeki Diophantine denkleminin bir (x_0, y_0) çözümüne karşılık gelmektedir.

Buradan $x_0^{\,2} - (4q^2+1)\, y_0^2 = -4$ yazılabilir ve $x_0^{\,2} - 4q^2 y_0^2 - y_0^2 = -4$ denkleminin bir çözümünün $x_0 = 49$ ve $y_0 = 2$ olacağı açıktır. Bu durumda $T = 49$ ve $u=2$ değerleri için $A = \sqrt{n-1}/2 - 3/4$ olur. Bu $p < A$ sağlayan p asallarının belirlenmesini etkilemeyeceğinden $A = \sqrt{n-1}/2 = 9$ olarak alınabilir. 4.1.1. temel teorem kullanılarak sonuç elde edilir. $n = 4q^2 + 1$, n ve q asal sayılar ise sınıf sayısı $h_K = 1$ olan cisimler sadece $Q(\sqrt{37})$, $Q(\sqrt{101})$, $Q(\sqrt{197})$, $Q(\sqrt{677})$ sayı cisimleridir.

Bunlardan, n=101 alınarak teoreim işleyişi aşağıdaki gibi görülür.

$n=101 = 4.5^2 + 1$ ifadesinde q=5 bulunur ve q asaldır. $Q(\sqrt{101})$ için $h_K = 1$ olduğundan $p < 5$ sağlayan asallar p=2 ve p= 3 bulunur. Buradan p=2 için $2 \nmid \Delta_k$ olduğundan

$$\chi(2) = (-1)^{(101^2-1)/8} = -1 \quad , \; P=3 \text{ için } 3 \nmid \Delta_k$$

$\chi(2) = (3/101) = (101/3) \, . \, (-1)^{50} = (2/3) = -1$ bulunacağından 2 ve 3 $Q(\sqrt{101})$

cisminde inerttir. Öyleyse $0 < x < p < q = 5$ sağlayan x= 1,2 ve p=2,3 değerleri için ,

p=2 , x=1 alındığında , $f(1) = -1+1+(101-1)/4 = 25 \not\equiv 0 \pmod 2$

p=3 , x=2 alındığında , $f(2) = -4+2+(101-1)/4 = 23 \not\equiv 0 \pmod 3$

p=3 , x=1 alındığında , $f(1) = -1+1+(n-1)/4 = 25 \not\equiv 0 \pmod 3$

bulunur. Buradan $1 < x < 5$ sağlayan x= 2,3,4 değerleri için $f(x) = -x^2 + x + 5$ polinomu sırasıyla 23,19,13 asal değerlerine eşit olacağından $Q(\sqrt{101})$ cisminin sınıf sayısı $h_K = 1$ dir. Ayrıca $n = 4q^2 + 1$ biçimindeki reel kuadratik sayı cisimleri için $n \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan $N(T+U\sqrt{n})/2 = (4q+2\sqrt{n})/2$ ifadesinden yararlanarak $N(\varepsilon) = -1$ olacağı söylenebilir.

S Chowla , m>26 olmak üzere $n= m^2 + 1$ asal ise $h_K > 1$ olacağını iddia etmiştir. Onun bu iddiasını Mollin ve Williams 1988 de analitik metodları ve genelleştirilmiş Riemann hipotezini kullanarak kanıtlamışlardır.
4.1.1. Sonucunun " n ve q bölünebilir sayılar ise $h_K > 1$ dir " ifadesinden bu sonuç m= 2o durumuna indirgenmiş olur. O halde $q > 13$ sağlayan q değerleri için $h_K > 1$ olacağı söylenebilir. 4.1.1. temel teoremin bir diğer ilginç sonucu aşağıdaki gibi olacaktır.

4.1.2.Sonuç : $n= m^2 \pm 4 > 5$ kare- çarpansız bir tamsayı olzun. p asal bir sayı olmak üzere , n= 4p+1 olmadıkça $h_K > 1$ olacaktır. bu durumda aşağıdakiler denktir.

i)- $h_K = 1$ dir.

ii)- $q < \begin{cases} m, & n = m + 4 \text{ ise} \\ m - 2, & n = m - 4 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tüm q asalları $Q(\sqrt{n})$ de inerttir.

iii)- $0 < x < q < \sqrt{p}$ 'yi sağlayan tüm x tamsayıları ve q asalları için $f(x) = -x^2 + x + p \not\equiv 0 \pmod q$ olur.

iv)- $1 < x < \sqrt{p}$ biçimindeki tüm x tamsayıları için $f(x) = -x^2 + x + p$ polinomu bir asala eşittir.

Kanıt : 4.1.1. sonucun kanıtna benzer şekilde düşünüldüğünde , $x^2 - n y^2 = \pm 4$ Diophantine denklemi $x^2 - (m^2 \pm 4)y^2 = \pm 4$ biçiminde yazılabilir. Bu denklemin bir (x_0, y_0) çözümüne karşılık T = m ve u = 1 değerlerinin bulunabileceği açıktır. Bu değerler $A = (2T/\delta - \delta - 1) / u^2$ formülünde yerine yazıldığında, A = m-3 bulunur. Buradan $\frac{\sqrt{n-1}}{2} \leq A$ olacağı kolayca görülür . Bu durumda sonuç , 4.1.1. temel teoremin varsayımına benzeyeceğinden ifadelerin denkliğinin kanıtı benzer biçimde olacaktır.

$n= m^2 +4 = 4p+1$ sağlandıkça $h_K > 1$ olacağı aşağıdaki gibi elde edilir. $(n-1)/4$ bölünebilir bir sayı , $h_k = 1$ ve (iii) 'nin sağlandığı varsayılsın. Bu durumda $x= 1$ için $0 < 1 < p < \sqrt{n-1}$ sağlayan $f(1) \equiv 0 \pmod p$ olacak biçimde ve $(n-1)/4$ 'ü bölen bir p asalı vardır. Bu ise (iii) ifadesiyle çelişir. O halde en az bir p asalı için $(n-1)/4 = p$ veya $(n-1)/4 = p^2$ alınmalıdır. $(n-1)/4 = p^2$ olsun

$n= m^2 +4$ olduğundan $m^2 -4p^2 = 5$ durumunda $m+2p = 5$, $m-2p = 1$ olur. Bunlar taraf tarafa toplandığında , $m=3$ olur. Oysaki $m\geq 3$ durumu p 'nin asal olmasıyla bir çelişkidir. Benzer biçimde $m^2 -4p^2 = -3$ alındığında $m= -1$ bulunur. $m\geq 1$ durumunda p 'nin asallığı ile çelişeceğinden , $(n-1)/4 = p^2$ olamaz. $(n-1)/4 = p$ olmalıdır. Buradan $n= 4p+1$ olacaktır.

4.1.1. Uyarı : $n= m^2 + 4$ kare-çarpansız tamsayıları için $m>17$ olduğunda $K = Q(\sqrt{n})$ cisminin sınıf sayısı $h_K > 1$ olacağı 1986 yılında Yokoi tarafından ddia edilmiştir.

4.1.2. Uyarı : p bir asal sayı ve m bir pozitif tamsayı olmak üzere , $n= m^2 + 4 = 4p+1$ olsun. Eğer , $s < \sqrt{p}$ sağlayan s bir tek asal sayı ise ; $0 \leq t < s$ için $p \equiv t \pmod s$ dir. Ayrıca $1+4t \equiv (2u-1)^2 \pmod s$ olacak biçimde bir $u>0$ tamsayısı varsa , $1+4t \equiv 4u^2 -4u+1 \pmod s$ olacağından $-u^2 +u+1 \equiv 0 \pmod s$ olur. $p \equiv t \pmod s$ olduğundan $0 <u < s\sqrt{p}$ için $f(u) = -u^2 +u+1 \equiv 0 \pmod s$ yazılabilir. Bu 4.1.2. sonucun (iii). koşulunu bozacağından $h_K > 1$ olacaktır. $\therefore$ $n= m^2 - 4 = 4p+1$ eşitliği için $m> 17$ değerleri alındığında bunlara karşılık gelen $Q(\sqrt{n})$ cisimlerinin sınıf sayısı daima 1 den büyük bulunur.

4.1.1. ve 4.1.2. sonucu sağlayan reel kuadratik sayı cisimleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

m	r	n	h_K	
6	1	37	1	
10	1	101	1	
14	1	197	1	
26	1	677	1	
5	4	29	1	* + o
7	4	53	1	+ o
13	4	173	1	+ o
17	4	293	1	+ 0
5	-4	21	1	* + o
9	-4	77	1	+ o
21	-4	437	1	+ o

4.1. Tablo

* : Tamlık halkası tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen $Q(\sqrt{n})$ Euclid cismi

: Kutsuna 'nın yönteminin uygulanabildiği reel kuadratik sayı cismi

o : Leu 'nun yönteminin uygulanabildiği reel kuadratik sayı cismi

4.1. Tabloda yer almayan sınıf sayısı 1 den büyük yada sınıf sayısı 1 olmasına ağmen bu yöntemle sınıf sayısının 1 olduğu gösterilemeyen dar R-D tipindeki reel kuadratik sayı cisimleri vardır. Örneğin ; sınıf sayısı 1 olup tabloya alınmayan $Q(\sqrt{17})$ cismi gözönüne alındığında , $17 = 4^2 + 1$, $1 \mid 16$, $-4 < 1 \leq 4$ sağlanır. $x^2 - 17y^2 = -1$ ifadesinden $T=4$, $U=1$ bulunur.Buradan $A=1$ olacağından $p<A$ olacak biçimde bir p asalının bulunamadığı görülür. 4.1. tablo incelenirse , $\xi.1$, $\xi.2$, $\xi.3$, ve $\xi\,4.1$ de verilen kriterlerin tümünü sağlayan cisimlerin sadece $Q(\sqrt{29})$ ve $Q(\sqrt{21})$ reel kuadratik sayı cisimleri olduğu görülmektedir.

4.2. Geniş (Wide) R-D Tipinden Reel Kuadratik Sayı Cisimleri :

Bu kısımda geniş (wide) R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısının 1 olması için kriterler incelenecektir.

4.2.1. Teorem : $K = Q(\sqrt{n})$, $n = m^2 + r > 7$ ve $n \equiv 1 \pmod 4$ olacak biçimde R-D tipinden bir reel kuadratik sayı cismi olsun. Eğer $h_K = 1$ ise , aşağıdakiler denktir.

i)- $|r| = 2$ dir.
ii)- $p \mid m$ biçimindeki tüm p tek asalları $Q(\sqrt{n})$ cisminde inerttir.
iii)- $r = 2$ ise , $m \equiv 0 \pmod 3$ dır.
(iv)- $r = -2$ ise , $m \not\equiv 0 \pmod 3$ dır.

Kanıt : $K = Q(\sqrt{7})$ cisminin sınıf sayısı 1 olmasına rağmen $n = 3^2 - 2$ den $m = 3$ olmak üzere $p \mid 3$ ifadesini sağlayan $p = 3$ asalı $Q(\sqrt{7})$ de inert olmadığından $n > 7$ olmalıdır. $n \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan $n \equiv 2$ yada $3 \pmod 4$ olur. Bu durumda $\Delta_K = 4n$ ve $2 \mid 4n$ olacağından $2 = P^2$ $N(P) = p$ olacaktır. O halde 2 asalı $Q(\sqrt{n})$ de dallanmıştır ve $x^2 - n y^2 = \pm 2$ olacak biçimde x ve y tamsayıları vardır. $|r| \leq 2$ dir. (Mollin 1988) . Wide R-D tipindeki sayı cisimlerinin özelliğinden dolayı $|r| \neq 1$ olması gerektiğinden $|r| = 2$ olduğu sonucu elde edilir. $\therefore$ (i) sağlanır.

(ii) : Bir p tek asalı için $p \mid m$ ve p 'nin $Q(\sqrt{n})$ de inert olmadığı varsayılırsa , $u^2 - n v^2 = \pm p$ olacak biçimde u ve v tamsayıları bulunabilir. (Mollin, 1988) . Bu eşitlik $n=7$ ve $n= 3$ durumunda gerçeklenir. $n= 7$ durumu $n> 7$ varsayımıyla bir çelişkidir. O halde p , $p \mid m$ sağlayan ve $Q(\sqrt{n})$ de inert olacak biçimde bir asaldır.

(iii) , (iv) : 3 , $Q(\sqrt{n})$ de inert değilse , $x^2 - n y^2 = \pm 3$ olacak biçimde en az bir x,y tamsayıları vardır. Bu denklemin $x > 0$ ve $y > 0$ biçiminde bir en küçük tamsayı çözümünün olduğu varsayılabilir. Bu durumda ξ.4. deki 4.1. tanımı ullanılarak $x_1 = (2m^2 + r) / | r |$ ve $y_1 = 2m / | r |$ olacağından

$x^2 - n y^2 = 3$ durumunda $0 \le y \le y_1 \sqrt{3} / \sqrt{2(x_1 - 1)}$ eşitsizliği gerçeklenir.

$x^2 - n y^2 = -3$ durumunda $0 < y \le y_1 \sqrt{3} / \sqrt{2(x_1 - 1)}$ eşitsizliği gerçeklenir.

$^2 - n y^2 = \pm 3$ denkleminde $y = 1$ alındığında $x^2 - n = \pm 3$ olacaktır. $n = m^2$ $+ r$ olduğundan $x^2 - m^2 - r = \pm 3$ elde edilir. Buradan $x^2 - m^2 = r \pm 3$ olur. u denklemin uygun çözümleri $r=m=2$ yada $m=3$, $r=-2$ dir. Bu çözümler $n > 7$ varsayımıyla çelişecektir. $\therefore$ $y \neq 1$ olmalıdır. Böylece $n \equiv 2 \pmod 3$ olduğundan $r = 2$ durumunda $n > 6$, $r = -2$ durumunda $n > 7$ ise 3 , $Q(\sqrt{n})$ de inerttir. uradan $r = 2$ ise $m \equiv 0 \pmod 3$ ve $r = -2$ ise $m \not\equiv 0 \pmod 3$ olmalıdır.

__2.1. Uyarı__ : 4.2.1. teoreminin tersinin yanlış olduğu aşağıdaki örnekle görülebilir. n= 146 için $K = Q(\sqrt{146})$ cismi alındığında , $146 = 12^2 + 2$ biçiminde yazılır. $| r | = 2$ olacağından 4.2.1 teoreminin (i) şıkkı sağlanır. $m = 12 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan (iii) ifadesinde sağlanır. Ancak $K = Q(\sqrt{146})$ cisminin sınıf sayısı 2 dir. Teorem 4.2.1. 'in sonucu olarak 4.2.. Tablo verilecektir.

p/m ve $Q(\sqrt{n})$ de inert asallar	m	r	n	h_K
p=3	3	2	11	1
p=3	6	2	38	1
p=3	9	2	83	1
p=3,5	15	2	227	1
p=2	4	-2	14	1
p=5	5	-2	23	1
p=7	7	-2	47	1
p=2	8	-2	62	1
p=5	20	-2	398	1

4.2 Tablo

4.2.2. *Teorem* : $n = m^2 + r$ olmak üzere $K = Q(\sqrt{n})$ cismi $r \mid 2m$ ve $n \equiv 1 \pmod 4$ içiminde tanımlı olan genel (wide) R-D tipinden reel kuadratik sayı cismi olsun. Eğer $h_K = 1$ ise aşağıdakiler sağlanır .

i)- $n \equiv 1 \pmod 8$ ise n=33 tür.

ii)- $n \equiv 5 \pmod 8$ ise $r < 0$ dır . -r bir asal sayı ve $p < |r|/4$ ifadesini ağlayan p asalları $Q(\sqrt{n})$ de inerttir.

Kanıt : $n \equiv 1 \pmod 8$ olduğundan en az bir k tamsayısı için $n = 8k+1$ yazılabilir. p = 2 asalı için $2 \nmid \Delta_K$ olduğundan

$$\chi(2) = (-1)^{(\Delta_K^2-1)/8}$$

ifadesinde $\Delta_K^2 = 64k^2 + 64k + 1$ konulduğunda

$$\chi(2) = (-1)^{2(4k^2+2)} = 1$$

olarak bulunur. Öyleyse , 2 , $Q(\sqrt{n})$ de inert lmadığından $a^2 - nb^2 = \pm 8$ olacak biçimde a,b tamsayıları vardır. $|r| \le 8$ ir. (Mollin ,1988) . 4.2.2. teoreminin kanıtındaki gibi b= 1 alındığında $a^2 - n = \pm 8$ lur .

$n = m^2 + r$ olduğundan $a^2 - m^2 - r = \pm 8$, buradanda $a^2 - m^2 = r \pm 8$ bulunur. urada $|r| \le 8$ dir. Bununla beraber $n \equiv 1 \pmod 8$ ve $|r| \ne 1,4$ lduğundan

$r \in \{-7, -3, 5\}$ tir. r 'nin bu değerleri için $a^2 - m^2 = r \pm 8$ ifadesi sadece m= 6 ve r= -3 olması durumunda sağlanır. Buradan n= 33 bulunur. Böylece (i) ğlanımş olur

$n \equiv 5 \pmod 8$ olsun. Eğer $|r|$ asal değilse , $2 < p < |r|$ ve $p \mid |r|$ yı ğlayan , $Q(\sqrt{n})$ de inert olacak biçimde bir p asalı vardır. $n \equiv 5 \pmod 8$ lduğundan p asalı Δ_K 'yı böler bu da p 'nin $Q(\sqrt{n})$ de dallanmış olmasıdır. Bu denle $c^2 - nd^2 = \pm p$ ve $|r| \le 4p$ olacak biçimde c.d tamsayıları vardır lollin , 1988) . $|r| = 2p$ ve $|r| = 4p$ durumları $n \equiv 5 \pmod 8$ olmasıyla bir işkıdır.

$|r| = 4p$ olsun. ξ.3 deki 3.1. lemmadan $h_k = 1$ ise $n = s$ yada $n = p.q$ biçiminde olacaktır. Burada s bir asal sayı p ve q , $p=2$, $p \equiv 3 \pmod 4$ yada $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$ biçiminde tanımlanmış asallardır. $n = m^2 + |r|$ ifadesinde $|r| = 3p$ alındığında $r = 3p$ için $n = m^2 + 3p = p.q$ ise $m^2 = p.q - 3p = p(q-3)$ olur. $p = 2$

$q \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan $m^2 \equiv 0 \pmod 4$ bulunur. Bu $m \neq 0$ olması ile çelişir. $r = -3p$ için $n = m^2 - 3p = p.q$ ise $m^2 = p.q + 3p = p(q+3)$ bulunur. Benzer biçimde $p=2$, $q \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan $m^2 \equiv 0 \pmod 4$ bulunur. Bu da bir çelişkidir. Bu durumda n , iki asal sayının çarpımı biçiminde yazılamadığından $|r| = 3p$ olamaz. Öyeyse $|r|$ bir asal sayıdır. Buradan $|r| \equiv 3 \pmod 4$ bulunur. $n = m^2 + r \equiv 5 \pmod 8$ ve $|r| \equiv 3 \pmod 4$ ifadelerinden en az bir k , d tamsayıları için $n = 8k+5$ ve $|r| = 4d + 3$ yazılabilir. Böylece , $(8k+5)/(4d+3) = (m^2 + r)/|r| \equiv 3 \pmod 4$ olduğu görülür. Eğer $r > 0$ ise , $(m^2 + r)/|r| \equiv 3 \pmod 4$ ifadesinden $(m^2 + r) \equiv 3|r| \pmod 4$ olur ve buradan $m^2 \equiv 2r \pmod 4$ yazılarak r 'nin çift olması gerektiği bulunur. $\therefore$ $m^2 \equiv 0 \pmod 4$ olur. Bu bir çelişkidir. Öyleyse $r < 0$ olmalıdır. Eğer $p < |r|/4$ biçimindeki p asalı $Q(\sqrt{n})$ de inert değilse $e^2 - n f^2 = \pm 4$ olacak biçimde e,f tamsayıları vardır ve $|r| > 4p$ dir. Oysaki $|r| \leq 4p$ olmalıdır. Bu da bir çelişkidir. Öyleyse $p < |r|/4$ biçimindeki p asalları $Q(\sqrt{n})$ de inerttir. Bu teoremi sağlayan ve $h_k = 1$ olan cisimler sadece $Q(\sqrt{141})$ ve $Q(\sqrt{1757})$ reel kuadratik sayı cisimleridir. $n=141 \equiv 5 \pmod 8$ ve $141 = 12^2 - 3$ olduğundan $|r| = 3$ bulunur. $-r = 3$ bir asaldır.

Tüm $p < -3/4$ asallarının 4.2.2. teoremin kanıtından $Q(\sqrt{141})$ cisminde inert olacağı görülür. $n=1757 \equiv 5 \pmod 8$ ve $1757 = 42^2 - 7$ olduğundan $|r| = 7$ bulunur. -7 bir asal sayıdır ve tüm $p < -7/4$ biçimindeki asallar $Q(\sqrt{1757})$ cisminde inerttir.

§.5: Asal Diskriminantlı Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinden Sınıf Sayısı 1 Olanların Temel Birimler Yardımıyla Belirlenmesi :

5.1. Temel Birimler :

p , $p \equiv 1 \pmod 4$ olacak biçimde bir asal sayı , (t_p, u_p) , $x^2 - p\,y^2 = -4$ Diophantine denkleminin bir en küçük pozitif tamsayı çözümü olmak üzere , asal iskriminantlı $K=Q(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi ;

$\varepsilon_p = (t_p + u_p\sqrt{p})/2$ (>1) ile gösterilecektir ve $N(\varepsilon_p) = -1$ dir.

5.1.1. Teorem : $p \equiv 1 \pmod 4$ ve $p \neq 5$ olsun. $t > 0$, $u > 0$ olmak üzere ; $(x, y) = (t, u)$, $x^2 - n\,y^2 = -4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü ,

i)- $t/u^2 > 1/2$
ii)- $t < 2p$
iii)- $u^2 < 4p$

koşullarından herhangi birini gerçekliyorsa , $K=Q(\sqrt{p})$ cisminin temel birimi $= (t + u\sqrt{p})/2$ biçimindedir. Bu teoremin kanıtına geçmeden aşağıdaki lemmalar verilebilir.

1.1.Lemma : $p \equiv 1 \pmod 4$ ve (t, u) $x^2 - p\,y^2 = -4$ denkleminin bir tam çözümü ise aşağıdakiler denktir,

i)- $t/u^2 > 1/2$
ii)- $t < 2p$
iii)- $u^2 < 4p$

Kanıt : $u = 1$ olsun . $(x,y) = (t,u)$ alınırsa , $x^2 - p\,y^2 = -4$ denkleminden . $t^2 - p\,u^2 = -4$ yazılır $u = 1$ olduğundan $t^2 = p-4$ ifadesinden $t = \sqrt{p-4}$ bulunur

$p \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan en az bir $k \in Z$ için $p = 4k+1$ yazılabileceğinden $= \sqrt{4k+1-4} = \sqrt{4k-3} < 2(4k+1)$ olur. Buradan $t < 2p$ olduğu sonucu çıkar.
> 0, $t \in Z$ olduğundsan $u = 1$ durumunda $t / u^2 \geq 1$ olmasından $t / u^2 > 1/2$ ve $p \equiv 1 \pmod 4$ biçimindeki p asalı için $u^2 < 4p$ olacağı açıktır

$u=2$ olsun. $x^2 - p y^2 = -4$ denkleminde $u = 2$ konularak $t^2 - p\,4 = -4$ eşitliğinden $t=2\sqrt{p-1}$ bulunur. $p \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan en az bir $k \in Z$ için
$n= 4k+1$ yazılabilir ve $t = 2\sqrt{4k+1-1} = 4\sqrt{k}$ bulunur. Buradan,
$/ u^2 = 4\sqrt{k} / 4 \geq 1$ olduğundan $t / u^2 > 1/2$ ve $4\sqrt{k} < 2(4k+1)$ifadesinden $< 2p$ sağlanır. $u = 2$ için $u^2 = 4 < 4p$ olacağı açıktır.

$u > 2$ olsun. Bu durumda $t^2 - pu^2 = -4$ denklemi için $t \neq 2p$, $0 < 8 / u^2 < 1$ ve $p > p - 1/ u^2 = t^2/ u^2$ ifadeleri sağlanır. Çünkü $t = 2p$ alınırsa $x^2 - p y^2 = -4$ denkleminin çözümünün pozitif tamsayı olmasıyla çelişir. $\therefore$ $t \neq 2p$ olmalıdır.
$t^2 - p u^2 = -4$ ifadesinden $t = \sqrt{pu-4}$ yazılır. $t > 0$ olduğudan $p u^2 - 4 > 0$ ve $p u^2 > 4$ ve $2p u^2 > 8$ olur. Buradan da $2p > 8 / u^2$ olacaktır.
$p \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan $0 < 8 / u^2 < 1$ elde edilir.Ayrıca $p - t / u^2 = t^2 / u^2$ lduğundan $t / u^2 < 1/2 \Leftrightarrow p - 4 / u^2 < t/2$ ifadesinin sağlandığı açıktır. $p \geq 5$ lduğu için $0 < 4 / p < 1$ ifadesi sağlanır. Bu durumda öncelikle,

$t > 2p \Leftrightarrow p u^2 - 4 > 4p^2$ sağlandığını görmek gerekir.

$> 2p$ ise, $t^2 = pu^2 - 4$ ifadesinden $t = \sqrt{pu-4}$ olur. $\sqrt{pu-4} > 2p$ lduğundan her iki yanın karesi alınarak $pu^2 - 4 > 4 p^2$ bulunur.Bu da $pu^2 > 4$ ^{2} ve $u^2 > 4p$ olması demektir. Tersine, $pu^2 - 4 > 4 p^2$ ise $\sqrt{pu-4} > 2p$ lacağından $t > 2p$ elde edilir.

5.1.2. Lemma : $P \equiv 1 \pmod 4$ sağlayan her p asalı için $(x,y) = (t_o, u_o)$; $x^2 - p y^2 = -4$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. Eğer, $_o + u_o \sqrt{p})^{2n+1} / 2 = (t_n + u_n \sqrt{p}) / 2$, $(n=1,2, \ldots)$ alınırsa $\{t_n\}$ $\{u_n\}$ dizileri monoton artan dizilerdir.

Kanıt : $(t + u\sqrt{p})/2 = (t_0 + u_0\sqrt{p})^{2n}/2 = [(t_0^2 + u_0^2 p + 2t_0 u_0\sqrt{p})/2]/2$

$= [(t_0^2 + u_0^2 p)/2 + t_0 u_0\sqrt{p}]/2$

fadesinden $t = (t_0^2 + u_0^2 p)/2$ ve $u = t_0 u_0$ olarak bulunur.

$t_0^2 - u_0^2 p = -4$, $t_0^2 + u_0^2 p = 2t$ ifadelerini taraf tarafa toplandığında ;

$2t_0^2 = -4+2t$ elde edilir ve . $t_0^2 = -2+t$, $t = t_0^2 + 2$ bulunur. $t_0 \neq 0$, $t > 0$

olduğundan $t = (t_0^2 + u_0^2 p)/2 \geq 3$ olur. $\therefore$ $t/2 > 1$ dir.
Diğer taraftan teoremin varsayımından :

$(t_{n+1} + u_{n+1}\sqrt{p})/2 = (t_n + u_n\sqrt{p})/2 \cdot (t + u\sqrt{p})/2$ yazılabileceğinden

$(t_{n+1} + u_{n+1}\sqrt{p})/2 = [(t\,t_n + pu\,u_n) + (t\,u_n + u\,t_n)\sqrt{p}]/4$
olacaktır

Buradan $\forall$ $n = 1,2,3,.....$ için

$$t_{n+1} = (t/2)\, t_n + (p/2)\, u\, u_n > t_n$$

$$u_{n+1} = (t/2)\, u_n + (u/2)\, t\, t_n > u_n$$

fadeleri elde edilir $\therefore$ $\{t_n\}$, $\{u_n\}$ dizileri monoton artandır.

5.1.3. Lemma : $p \equiv 1 \pmod 4$ biçimindeki herhangi bir p asalı için , $K = Q(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_p = (t_p + u_p\sqrt{p})/2$ (>1) olsun . $\varepsilon_p^3 = (t^-_p + u^-_p\sqrt{p})/2$ konulursa , p= 5 dışındaki değerler için $t^-_p > 2p$ ve $u^-_p > 4p$ dır

Kanıt : $(t^{-}_{p}+u^{-}_{p}\sqrt{p})/2 = (t_p+u_p\sqrt{p})^3/2$ olduğundan

$$t^{-}_{p}+u^{-}_{p}\sqrt{p})/2 = [\,(t_p^3+3t_p^2u_p\sqrt{p}+3t_pu_p^2p+pu_p^3\sqrt{p})/4\,]/2$$

$$=[\,((t_p^3+3t_pu_p^2p)+(3.t_pu_p+pu_p^3)\sqrt{p})/4\,]/2$$

bulunur. Burada $t^{-}_{p}=(t_p^3+3t_pu_p^2p)/4$, $u^{-}_{p}=(3t_p^2u_p+pu_p^3)/4$

olacaktır. $\therefore$ $2p<t^{-}_{p}$ olması için gerek ve yeter koşul $p(8-3t_pu_p^2)<t_p^3$ olmasıdır. $p>0$ olduğundan, $p(8-3t_pu_p^2)<t_p^3$ olması için $8-3t_pu_p^2<0$ olmalıdır. $3t_pu_p^2)>8$ ifadesinden $t_pu_p^2\geq 3$ olması için gerek ve yeter koşul $u_p\neq 1$ veya $t_p\neq 1,2$ olmasıdır. Bu da $p\neq 5$ olmasını gerektirir. Çünkü $t_p^2-5u_p^2=-4$ denklemini sağlayan başka u_p ve t_p değerleri yoktur. Diğer taraftan, (t^{-}_{p}, u^{-}_{p}), $x^2-py^2=-4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü olduğundan 1.1. lemma kullanılarak $t^{-}_{p}>2p$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $u^{-}_{p}{}^2>4p$ olması gerektiği sonucu elde edilir.

5.1.1. Toeremin Kanıtı : Teoremin ilk üç koşulu 5.1.1. lemma kullanılarak gerçeklenir. $\varepsilon=(t+u\sqrt{p})/2$, $Q(\sqrt{p})$ ' nin temel birimi olsun ve $\varepsilon_p=(t_p+u_p\sqrt{p})/2$ 've eşit olmasın. Ayrıca $(t_p+u_p\sqrt{p})^{2n-1}/2 = (t_p+u_p\sqrt{p})/2$ $(n=1,2,\ldots)$ olsun. Bu durumda $t=t_m$ ve $u=u_m$ olacak biçimde tek şeklinde belirlenmiş olan bir m pozitif tamsayısı vardır. 5.1.2. lemmadan;

$t_n<t_1\leq t_m$ ve $u_n<u_1\leq u_m$ yazılabilir.

$(t_p+u_p\sqrt{p})^{2n-1}/2 = (t_p+u_p\sqrt{p})/2$ eşitliğinde $n=1$ alınırsa,

$(t^{-}_{p}+u^{-}_{p}\sqrt{p})/2 = (t_p+u_p\sqrt{p})^3/2$ bulunur ve 5.1.3. lemmadan

$t^{-}_{p}>2p$ ve $u^{-}_{p}>4p$ bulunur. Bu teoremin varsayımıyla çelişkidir.

$\therefore$ $\varepsilon=(t+u\sqrt{p})/2 = (t_p+u_p\sqrt{p})/2$, $Q(\sqrt{p})$ cisminin temel birimidir.

5.2. Sınıf Sayısı 1 Olan Asal Diskriminantlı Cisimlerin Belirlenmesi ;

$p \equiv 1 \pmod 4$ biçiminde bir p asalı için $K = Q(\sqrt{p})$ cisminin temel birimi ;

$$\varepsilon_p = (t_p + u_p\sqrt{p})/2 \quad (>1) \text{ dir.}$$

Bu kısımda öncelikle bir p-invaryant tanımalanacak ve temel birimlerin 5.1. deki özellikleri kullanılarak sınıf sayısı 1 olan asal diskriminantlı reel kuadratik sayı cisimleri belirlenecektir. p-invaryant mod 4 ' e göre 1 ' e denk olan asalların kümesinden negatif olmayan tamsayıların kümesine bir dönüşüm olarak tanımlanmasına rağmen bu kısımda $| t_p / u_p - n_p | < 1/2$ eşitsizliğini sağlayan n_p pozitif tamsayıların p-invaryantlar olarak alınacaktır (Yokoi , 1990) .

Yokoi , 1989 yılında yaptığı bir çalışmasında $n_p \neq 0$ olmassı durumunda sınıf sayısı 1 olan $p \equiv 1 \pmod 4$ sağlayan $Q(\sqrt{p})$ cisımlerinin sadece sonlu sayıda olacağını göstermiştir. Burada daha genel olan aşağıdaki teorem kanıtlanacaktır.

5.2.1. Teorem : $K = Q(\sqrt{p})$ cismi ve $p \equiv 1 \pmod 4$ sağlayan her p asalı için $p > 4{,}1 \times 10^6$ ve $n_p \neq 0$ ($\varepsilon_p < 2p$) ise p 'nin uygun bir değeri dışında sınıf sayısı $h_K > 1$ dır. Teoremin kanıtına geçmeden aşağıdaki lemma verilebilir.

5.2.1.Lemma : $p \equiv 1 \pmod 4$ olan her asal için $n_p \neq 0$ sağlanırsa , $m \geq 11{,}2$ olmak üzere , p 'nin uygun bir değeri dışındaki $p > e^m$ sağlayan her değeri için $\varepsilon_p < 2p$ ve $h_K > 0{,}3275/m \cdot p^{(m-2)/2m} / \log 2p$ olacaktır.

Kanıt : 5.1.1. lemmadan $t^2_p - u^2_p\, p = -4$ olduğu bilinmektedir. $t < 2p \Rightarrow t/2 < p$

$u^2 < 4p \Rightarrow u < 2\sqrt{p} \Rightarrow u\sqrt{p} < 2p \Rightarrow u\sqrt{p}/2 < p$ olacağından

$\varepsilon_p = t/2 + u\sqrt{p}/2 < 2p$ bulunur. Lemmanın 2. kısmının doğruluğu ξ.3 deki 3.2 teoreminin kanıtına benzer biçimde gösterilir.

5.2.1. Teoreminin Kanıtı : $f_m(\chi) = x^a / \log 2x$, $a = a(m) = (m-1)/2m$,

($m \geq 11{,}2$ için) alınırsa ,

$$f'_m(\chi) = (a.x^{a-1} . \log 2x - x^a 1/x) / (\log 2x)^2$$
$$= (a.x^{a-1} . \log 2x - x^{a-1}) / (\log 2x)^2$$
$$= x^{a-1} (a.\log 2x - 1) / (\log 2x)^2$$
$$= (a.\log 2x - 1) / x^{1-a} . (\log 2x)^2 > 0$$ bulunur.

O halde her $x \geq 6$ için f(x) , $[6 , \infty)$ aralığında artandır. Çünkü x= 5 alındığında og10 = 1 olacağından $f'_m(\chi) = 0$ olur. Bu da f(x) 'in artan fonksiyon olmasıyla çelişir. Buradan $g_m(\chi) = 0{,}3275/m . f_m(\chi)$ konulduğunda ξ.3 deki 3.2. eoreminden " $n \geq e^{16}$ olacak biçimde , sınıf sayısı 1 olan sadece 1 tane cisim vardır " fadesinden $m = 15$ için $g_{15} (4{,}1 \times 10^6 > 1$ ve $e^m = e^{15} < 4{,}1 \times 10^6$ olduğu görülür. O halde 5.2.1. lemmadan $h_K > 1$ dir. $5 \leq p \leq 3533$ sağlayan ve $n_p \neq 0$ sınıf sayısı $h_K = 1$ olan $p \equiv 1$ (mod 4) olmak üzere 30 tane $Q(\sqrt{p})$ cisminin varolduğu 5.1. tabloda görülür. $n_p \geq 1$ ve $h_K = 1$ olan $p \equiv 1$ (mod 4) sağlayan asallar uygun bir p değeri dışında 5.1. tablodan görülecektir.

$K=Q(\sqrt{p})$	P	t_p	u_p	n_p	h_K	
$Q(\sqrt{5})$	5	1	1	1	1	* + o
$Q(\sqrt{13})$	13	3	1	3	1	* + o
$Q(\sqrt{17})$	17	8	2	2	1	*
$Q(\sqrt{29})$	29	5	1	5	1	* + o
$Q(\sqrt{37})$	37	12	2	3	1	* x
$Q(\sqrt{41})$	41	64	10	1	1	*
$Q(\sqrt{53})$	53	7	1	7	1	+ o x
$Q(\sqrt{61})$	61	39	5	2	1	
$Q(\sqrt{101})$	101	20	2	5	1	x
$Q(\sqrt{149})$	149	61	5	1	1	
$Q(\sqrt{157})$	157	213	17	2	1	
$Q(\sqrt{173})$	173	13	1	13	1	
$Q(\sqrt{197})$	197	28	2	7	1	
$Q(\sqrt{269})$	269	164	10	2	1	
$Q(\sqrt{293})$	293	17	1	17	1	+ o x
$Q(\sqrt{317})$	317	89	5	4	1	
$Q(\sqrt{461})$	461	365	17	1	1	
$Q(\sqrt{509})$	509	925	41	1	1	
$Q(\sqrt{557})$	557	236	10	2	1	
$Q(\sqrt{677})$	677	52	2	13	1	x
$Q(\sqrt{773})$	773	139	5	6	1	
$Q(\sqrt{797})$	797	367	13	2	1	
$Q(\sqrt{941})$	941	1135	37	1	1	
$Q(\sqrt{1013})$	1013	923	29	1	1	
$Q(\sqrt{1493})$	1493	2357	61	1	1	
$Q(\sqrt{1613})$	1613	2972	74	1	1	
$Q(\sqrt{1877})$	1877	1603	37	1	1	
$Q(\sqrt{2477})$	2477	647	13	4	1	
$Q(\sqrt{2693})$	2693	4411	85	1	1	
$Q(\sqrt{3533})$	3533	2437	41	1	1	

5.1 Tablo

* : Tamlık halkaları tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen Euclide cismi
- : Kutsuna 'nın yöntemiyle elde edilebilen reel kuadratik sayı cismi
o : Lue ' nun yöntemini sağlayan reel kuadratik sayı cismi
x : $p \equiv 1 \pmod 4$, $p = m + r$. biçiminde Norrow R-D tipinde ξ.4 deki 4.1.1 ve 4.1.2. lammaları sağlayan cisimler.

Bu tabloda ; p , $P \equiv 1 \pmod 4$ ile tanımlı asal sayıyı $\varepsilon_p = (t_p + u_p\sqrt{p})/2 > 1$ $Q(\sqrt{p})$ cisminin temel birimi n_p , $|\, t_p / u_p^2 - n_p \,| < 1/2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif tamsayıları (p-invaryantları) h_K , $K = Q(\sqrt{p})$ cisminin sınıf sayısını göstermektedir.

5.2. Sonuç : Tablo 5.1. den anlaşılıdığı gibi , III. bölümde incelenmiş olan ; Euclide Algoritması yardımıyla sınıf sayısı 1 olan cisimleri belirlenmesi , bu isimlerin belirlenmesinde Kutsuna ve Leu 'nun yöntemleri R-D tipinden reel uadratik sayı cisimleri ve son olarak da asal diskriminantlı reel kuadratik sayı isimlerinde sınıf sayısı 1 olan cisimlerin belirlenmesi biçimindeki yöntemlerin tümünü sağlayan cismin $Q(\sqrt{29})$ reel kuadratik sayı cismi olacağı tespit dilmiştir. Buna göre , $Q(\sqrt{29})$ cismi için aşağıdakilerin tümü söylenebilir.

$Q(\sqrt{29})$ cismi, tamlık halkası tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bir Euclide cismidir.

$\alpha / \beta \in K = Q(\sqrt{29})$ kesirleri için $0 < |\, N(\alpha / \beta . \xi - n) \,| < 1$ sağlayan tek ekilde ξ , $n \in K$ tamsayıları var olduğundan K cismindeki kesirlerin hiçbiri störend kesri değildir.

$K = Q(\sqrt{29})$ için tanımlı $S_K = \{p$ rasyonel asal : $p \le M_K = \sqrt{29}/2$, $X(p) \neq -1 \}$ kümesi için $p \le \sqrt{29}/2$, $X(2) \neq -1$ ve $2 \notin S_K$ olacağından S_K bir boş kümedir.

$Q(\sqrt{29})$ cismi $\varepsilon = (t + u\sqrt{29})/2$ olmak üzere , $N(\varepsilon) = -1$ sağlayan bir norrow R-D tıpından reel kaudratik sayı cismidir. $K = Q(\sqrt{29})$ cisminin temel iriminin t=5 ve u=1 katsayıları . $t > 1/2$, $t < 2p$, $u^2 < 4p$ eşitsizliklerini sağlar.

Bu katsayılara göre ; $| t/u^2 - n_p | < 1/2$ olacak biçimde $n_p = 5$ pozitif p-invaryantına sahip asal diskriminantlı bir reel kuadratik sayı cismidir.

5.2. sonucundan faydalanarak $K = Q(\sqrt{29})$ reel kuadraik sayı cismi için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.2.2. Teorem : $K=Q(\sqrt{n})$, $n = m^2+4$ ve $n \equiv 1 \pmod 4$ olacak biçimde sınıf sayısı $h_K = 1$ olan reel kuadratik sayı cismi olsun. Bu durumda ,

i)- K 'nın tamlık halkası tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bir bölgedir.

ii)- Her $\alpha / \beta \in K$ için $0 < | N(\alpha / \beta . \xi - \eta) | < 1$ olacak biçimde tek şekilde ξ, η tamsayıları vardır.

iii)- $S_K = \{ p$ rasyonel asal : $p \leq M_K = \sqrt{\Delta_K}/2$, $X(p) \neq -1 \}$ kümesi bir boş kümedir.

iv)- $\varepsilon = (t+u\sqrt{\Delta_K})/2$, K 'nın temel birimi olmak üzere ; $| t/u^2 - n_p | < 1/2$ sağlayan sıfırdan farklı bir n_p pozitif tamsayısı vardır.

Koşullarının tümünün gerçeklenmesi için gerekli ve yeterli koşul n=29 olmasıdır.

Kanıt : 5.2. sonuç kullanılarak hemen elde edilir.

Y.Tanigawa ; d , $Q(\sqrt{d})$ reel kuadraik sayı cisminin diskriminantını göstermek üzere; d diskriminantlı $Q(\sqrt{d})$ cisimleri için aşağıdaki teoremi vermiştir. 5.1. tabloda asal diskriminantlı reel kuadratik sayı cisimlerinin 30 tane olduğu gözlenmiştir. Ancak Y. Tanigawa bu teoremde asallık şartını kaldırarak $\varepsilon_d < 2d$ sağlayan ve sınıf sayısı $h_K = 1$ olan 24 cisim daha elde ederek bu sayıyı 54 e çıkarmıştır.

5.2.3. Teorem : $d \equiv 1 \pmod 4$ ve $Q(\sqrt{d})$ d diskriminantlı reel kuadratik sayı cismi olmak üzere , d 2nin uygun bir değeri dışında $\varepsilon_d < 2d$ ve $h_K = 1$ sağlayan tam 54 tane $Q(\sqrt{d})$ cismi vardır.

Y.Tanigawa tarafından verilen bu teoremi sağlayan değerler aşağıdaki 5.2. tabloda gösterilmiştir.

$Q(\sqrt{d})$	d	t_d	u_d	t_d/u_d^2	n_d	n_K
$Q(\sqrt{21})$	21=3.7	5	1	5	5	1
$Q(\sqrt{33})$	33=3.11	46	8	0.71	1	1
$Q(\sqrt{69})$	69=3.23	25	3	2.77	3	1
$Q(\sqrt{77})$	77=7.11	9	1	9	9	1
$Q(\sqrt{93})$	93=3.37	29	3	3.20	3	1
$Q(\sqrt{133})$	133=7.19	173	15	0.76	1	1
$Q(\sqrt{141})$	141=3.47	190	16	0.74	1	1
$Q(\sqrt{213})$	213=3.71	73	5	2.92	3	1
$Q(\sqrt{237})$	237=3.79	77	5	3.08	3	1
$Q(\sqrt{341})$	341=11.31	277	15	1.23	1	1
$Q(\sqrt{413})$	413=7.59	61	3	6.77	7	1
$Q(\sqrt{437})$	437=19.23	21	1	21	21	1
$Q(\sqrt{453})$	453=3.151	149	7	3.04	3	1
$Q(\sqrt{573})$	573=3.191	766	32	0.74	1	1
$Q(\sqrt{717})$	717=3.239	241	9	2.97	3	1
$Q(\sqrt{917})$	917=7.131	1181	39	0.77	1	1
$Q(\sqrt{1077})$	1077=3.359	361	11	2.98	3	1
$Q(\sqrt{1133})$	1133=11.103	101	3	11.22	11	1
$Q(\sqrt{1253})$	1253=7.179	177	5	7.08	7	1
$Q(\sqrt{1293})$	1293=3.431	1726	48	0.74	1	1
$Q(\sqrt{1757})$	1757=7.251	1006	24	1.74	2	1
$Q(\sqrt{2453})$	2453=11.223	3566	72	0.68	1	1
$Q(\sqrt{3053})$	3053=43.71	3481	63	0.87	1	1
$Q(\sqrt{3317})$	3317=31.107	5241	91	0.63	1	1

5.2. Tablo

($d \neq p$, $t_d/u_d^2 > 1/2$ Yani ; $n_d \geq 1$, $h_K = 1$)

Bu tabloda d , $Q(\sqrt{n})$ cisminin diskriminantını , ε_d ; $\varepsilon_d = (t_d + u_d\sqrt{d})/2 > 1$ $Q(\sqrt{d})$ cisminin temel birimini , n_d ; $| t_d/u_d^2 - n_d | < 1/2$ eşitsizliğini sağlayan d-invaryantı göstermektedir .

$Q(\sqrt{d})$	d	t_d	u_d	t_d/u_d^2	n_d	n_K
$Q(\sqrt{21})$	21=3.7	5	1	5	5	1
$Q(\sqrt{33})$	33=3.11	46	8	0.71	1	1
$Q(\sqrt{69})$	69=3.23	25	3	2.77	3	1
$Q(\sqrt{77})$	77=7.11	9	1	9	9	1
$Q(\sqrt{93})$	93=3.37	29	3	3.20	3	1
$Q(\sqrt{133})$	133=7.19	173	15	0.76	1	1
$Q(\sqrt{141})$	141=3.47	190	16	0.74	1	1
$Q(\sqrt{213})$	213=3.71	73	5	2.92	3	1
$Q(\sqrt{237})$	237=3.79	77	5	3.08	3	1
$Q(\sqrt{341})$	341=11.31	277	15	1.23	1	1
$Q(\sqrt{413})$	413=7.59	61	3	6.77	7	1
$Q(\sqrt{437})$	437=19.23	21	1	21	21	1
$Q(\sqrt{453})$	453=3.151	149	7	3.04	3	1
$Q(\sqrt{573})$	573=3.191	766	32	0.74	1	1
$Q(\sqrt{717})$	717=3.239	241	9	2.97	3	1
$Q(\sqrt{917})$	917=7.131	1181	39	0.77	1	1
$Q(\sqrt{1077})$	1077=3.359	361	11	2.98	3	1
$Q(\sqrt{1133})$	1133=11.103	101	3	11.22	11	1
$Q(\sqrt{1253})$	1253=7.179	177	5	7.08	7	1
$Q(\sqrt{1293})$	1293=3.431	1726	48	0.74	1	1
$Q(\sqrt{1757})$	1757=7.251	1006	24	1.74	2	1
$Q(\sqrt{2453})$	2453=11.223	3566	72	0.68	1	1
$Q(\sqrt{3053})$	3053=43.71	3481	63	0.87	1	1
$Q(\sqrt{3317})$	3317=31.107	5241	91	0.63	1	1

5.2 Tablo

($d \neq p$, $t_d/u_d^2 > 1/2$ Yani ; $n_d \geq 1$, $h_K = 1$)

Bu tabloda d , $Q(\sqrt{n})$ cisminin diskriminantını , ε_d ; $\varepsilon_d = (t_d + u_d\sqrt{d})/2 > 1$ $Q(\sqrt{d})$ cisminin temel birimini , n_d ; $| t_d/u_d^2 - n_d | < 1/2$ eşitsizliğini sağlayan d-invaryantı göstermektedir .

5.2. tablodaki $Q(\sqrt{21})$ ve $Q(\sqrt{437})$ cisimlerine Kutsuna ve Leu ' nun yöntemi uygulanabilir.

III. Bölümde incelediğimiz ξ.1. , ξ.2. , ξ.3. , ξ.4. ve ξ.5. kısımlarındaki yöntemlerin incelenmesi sonucunda belirlenen tablolardan yararlanarak sınıf sayısı $h_K = 1$ olan ve $2 \leq n < 5000$ sağlayan cisimlerin aşağıdaki 68 tane n değerine karşılık gelen $K=Q(\sqrt{n})$ reel sayı cisimleri olduğu belirlenmiştir. Bu n değerleri ;

=2,3,5,6,7,11,13,14,17,21,23,29,33,37,78,41,47,53,57,61,62,69,77,83,94,101,133,14
,149,157,173,197,213,227,237,269,293,317,341,398,413,437,453,461,509,557,573,
77,717,773,797,917,941,1013,1077,1133,1253,1293,1493,1613,1757,1877,2453,24
7,2693,3053,3317,3533

içimindedir.

Reel kuadratik sayı cisimlerinde sınıf sayısı 1 olan cisimlerin belirlenmesi için apılan çalışmalar R-D tipinden olan sayı cisimleri üzerinde yoğunlaştırılmıştır. unun için özellikle kuadratik formlar ve bunların sürekli kesirlere açılımından yararlanılmakta ve yukarıda belirtilen cisimlerden farklı , sınıf sayısı 1 olan reel uadratik sayı cisimlerinin belirlenmesi için çalışmalar , bu konuda çalışan kişlerce sürdürülmektedir.

KAYNAKLAR

AZUHATA T. ; 1984, On the Fundamental Units and the Class Number of the Real Quadratic Fields , Nagoya Math. J. Vol. 95 , 125-135.

BOREVICH Z.I. and SHAFAREVICH I.R. ; 1966 , Number Theory, Newyork ; Acedemic Press.

KIM K. , LEU M.G. and ONO T. ; 1987 , On Two Conjectures on Real Quadratic fields , Proc. Japan Acad., 63 A , 222-224.

KUTSUNA M. ; 1980 , On a Criterion for Class Number of a Quadratic Field to be One , Nagoya Math. J. Vol. 79, 123-129.

LANG S. ; 1970 , Number Theory , Reading Addison -Wesley.

LEU M.G. ; 1987 ,On a Conjecture of Ono on the Real Quadratic Fields , Proc.Japan Acad. Ser. 63 A , 323-326.

Mc. CARTY P. ;1966 , Algebraic Extensions of Fields. Blaisdell Publishing Company, London

MOLLIN R.A. ; 1987 ,On the Insolubility of a Class Numbers of Diophantine Equations and the Nontrivially of the Class Numbers of Related Real Quadratic Fields of Richaut- Degert type, Nagoya Math.J.,Vol . 105, 39-47.

MOLLIN R.A. ; 1987, Class Number One Criteria for Real Quadratic Fields I , Proc. Acad. Vol 63 A, 121-125.

MOLLIN R.A. ; 1987 , Class Number One Criteria for Real Quadratic Fields II , Proc Japan Acad Vol 63A ,

MOLLIN R.A.and WILLIAMS H.C. ; 1988 , A Conjecture of S.Chowla Via the Generalized Rieman Hypothesis. Proc.American Math. Soc. Vol. 102-4 , 794-796.

MOLLIN R.A and WILLIAMS H.C. ; 1988 , On Prime Valued Polynomials and Class Numbers of Real Quadratic Fields . Nagoya Math. J. Vol .112, 143-151.

STARK H.M. ; 1967 , A Complete ,Determination of the Complex Quadratic Fields of Class-Number one . Michigan Math. J. Vol. 14 , 1-27.

RIBENBOIM P.T. ; Algebraic Numbers , Quenn's University Kingsston , Ontario , Canada.

WEISS E. ; 1963 , Algebraic Number Theory , Chelsa Publishing Company . New York.

YOKOI H. ; 1986 , Class Number One Problem for Certain Kinds of Real Quadratic Fields. Preprint Series #7 , Nagoya University

YOKOI H. ; 1990 , The Fundamental Unit and Class Number One Problem of Real Quadratic Fields with Prime Discriminant , Nagoya Math. J. Vol. 120 , 51-59.

ÖZGEÇMİŞ

6.4.1969 tarihinde Adapazarı 'nda doğdum. İkokulu Adapazarı Atatürk İlkokulunda , Ortaokulu Edirne Atatürk Ortaokulunda , Liseyi ise Edirne Lisesi ' nde tamamladım.

1987 yılında T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 1991 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl eylül ayında açılan Yüksek Lisans sınavını kazanarak Yüksek Lisansa başladım .

1994 yılında şubat ayında T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Araştırma Görevliliği sınavını kazandım. Halen Matematik Bölümünde görev yapmaktayım.