ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALTSINIFLARINA AİT MAJORASYON PROBLEMLERİ

Hüseyin BABA

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU
2008

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALTSINIFLARINA AİT MAJORASYON PROBLEMİ

Hüseyin BABA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2008

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Hüseyin BABA tarafından hazırlanan bu çalışma 13 / 08 / 2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU.......... İmza: ....

Üye : Prof. Dr. Muhammet KAMALİ.......... İmza: ....

Üye : Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR.......... İmza: ....

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

Prof. Dr. Mehmet Ertuğrul

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALTSINIFLARINA AİT MAJORASYON PROBLEMLERİ

Hüseyin BABA

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

Bu çalışmada biz ilk olarak majorasyonun tarihçesi ve bazı önemli tanımlar, teoremler ve lemmaları verdik. Daha sonra bazı özel sınıflar hakkında bilgi verildi ve bazı çeşitli kaynaklardan yararlanarak bu sınıflar için majorasyon problemlerinin çözümü bulundu. Sonuç olarak bizde $Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfı için majorasyon problemlerinin çözümünü elde ettik.

2008, 72 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lindelöf prensibi, starlike ve konveks fonksiyonlar, Salagean operatörü, subordinasyon ve majorasyon.

ABSTRACT

Master Thesis

IN SOME SUBCLASSES OF UNIVALENT FUNCTIONS
MAJORIZATION PROBLEMS

Hüseyin BABA

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

In this study, we first give the short history of majorization and some important definitions, theorems and lemmas. Later information about some certain classes is given and solution of majorization problems for this classes is found by utilizing some various references. Finally, we also obtain solution of majorization problems for $Q(j,\lambda,\alpha,n)$ class.

2008, 72 pages

Keywords : Lindelöf prenciple, starlike and convex functions, Salagean operator, subordination and majorization.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sürdürdüğüm bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen başta bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere kaynak bulmamda yardımcı olan Sayın Prof. Dr. Muhammet KAMALİ, Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT, Sayın Doç. Dr. Halit ORHAN'a, Sayın Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR'e ve tez yazımında yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Aydın GEZER ile Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKÇI'ya ve matematik bölümündeki diğer tüm öğretim elemanlarına en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisansı okumam için elinden gelen her türlü yardımı esirgemeyen başta Hülya ablam olmak üzere çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı eniştem Özgür BABA'ya, biricik abim Mehmetşah BABA'ya, Ali ACAR'a, Kader GÜZEL'e, Selma BABA'ya, Semra BABA'ya, anneme ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hüseyin BABA
TEMMUZ 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

D	$D=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|<1\}$ birim disk
$D^n f(z)$	Salagean operatörü ($n\in\mathbb{N}_0$)
$f(z)\ll g(z)$	$f(z)$, $g(z)$ tarafından majorize edilmiştir.
$f(z)\prec g(z)$	$f(z)$, $g(z)$' ye subordinatedir.
$M(r;f)$	$\max\left\|f\left(re^{i\theta}\right)\right\|$, r sabit ve $0\le\theta\le 2\pi$
$m(r;f)$	$\min\left\|f\left(re^{i\theta}\right)\right\|$, r sabit ve $0\le\theta\le 2\pi$
$p(z)$	P sınıfına ait fonksiyon
U_α	α*.mertebeden* üniversal lineer invariant fonksiyonların ailesi ($1\le\alpha<\infty$)
$w(z)$	Ω sınıfına ait fonksiyon
$\varphi(z)$	sınırlı ve analitik bir fonksiyon

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonlar 20.yy başlarında katsayı tahminleri ile yoğun olarak çalışılmaya başlanmıştır. Bu amaçla tanımlanan çeşitli sınıflarda ünivalent fonksiyonların bazı özellikleri D birim diskinde incelenmiştir. Bu diskte tanımlanan fonksiyon sınıflarında majorasyon (majorization) için çalışmalar yapılmıştır.

1936 yılında Biernacki majorasyon-subordinasyon (majorization-subordination) teorisi ile ilgili ilk çalışmaları yapmıştır. Bu çalışmada $F(z) \in$ S ve $f(z) \prec F(z)$ ise, o zaman $|z| < \frac{1}{4}$ diskinde $f(z) \ll F(z)$ olduğunu gösterdi. 1957 yılında Goluzin bu sonucun $|z| < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ diskinde de geçerli olduğunu söyledi. Aynı yıl, Tao Shah Goluzin' den habersiz aynı sonucu elde etti (Campbell, 1971).

1951 yılında Goluzin, D' de $f(z)$, ünivalent olan bir $F(z)$ fonksiyonu tarafından majorize edilirse $|z| < 0{,}12$ de $f'(z) \ll F'(z)$ olduğunu gösterdi. 1958 yılında Tao Shah tarafından bu varsayımın $|z| < 3-\sqrt{8}$ için sağlandığını ispatladı (Campbell, 1974).

1983 yılında Salagean tarafından D^n differensiyel operatörü kullanılarak negatif katsayılı starlike fonksiyonların $P(j,\lambda,\alpha,n)$ alt sınıfını tanımlandı. Bu sınıf ile ilgili sonuçları ve teoremleri ortaya çıkardı (Aouf, 1996).

Bizde Salagean tarafından tanımlanan pozitif katsayılı starlike fonksiyonların $Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfı üzerinde çalıştık.

Majorasyon ile ilgili yapılan sonraki araştırmalar üç problem üzerine odaklandı: $F(z)$ S' de keyfi bir fonksiyon olmak üzere;

1-) Eğer D' de $f(z) \ll F(z)$ ise, $|z| < r$ de $f'(z) \ll F'(z)$ sağlayan en büyük r ($0 \leq r \leq 1$) değerinin belirlenmesi

2-) Eğer D' de $f(z) \prec F(z)$ ise, $|z| < r$ de $f'(z) \ll F'(z)$ sağlayan en büyük r ($0 \leq r \leq 1$)değerinin belirlenmesi

3-) Eğer D' de $f(z) \ll F(z)$ ise, $|z| < r$ de $f(z) \prec F(z)$ sağlayan en büyük r ($0 \leq r \leq 1$) değerinin belirlenmesi (Campbell, 1971)

Tezimizde bu üç problemi U_α (α*.mertebeden* üniversal lineer invariant fonksiyonların ailesi) taşıdık ve r yarıçapını α ' nın bir fonksiyonu olarak bulduk. U_1, normalize edilmiş bütün konveks fonksiyonların ailesidir. S sınıfında bilinen her bir sonucun U_2 ailesine özgü sonuçlar olduğunu gösterdik.

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu. Bu tezde D ile $D=\{z:|z|<1\}$ birim diskini göstereceğiz.

2.1. İç Nokta: $A\subset\mathbb{C}$ ve $z_0\in A$ olsun. z_0 noktasının en az bir $\varepsilon-$*komşuluğu* tamamen A kümesine ait ise, z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

2.2. Açık Küme: A kümesinin her noktası bir iç nokta ise, bu kümeye açık küme denir.

2.3. Kapalı Küme: $A\subset\mathbb{C}$ olsun. A kümesinin tümleyeni açık ise, A kümesine kapalı küme denir.

2.4. Kapanış Noktası: $A\subset\mathbb{C}$ alt kümesi ve bir $z\in\mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer z noktasının her $\varepsilon-$*komşuluğunda* A kümesinin en az bir elemanı varsa, z noktasına A kümesinin kapanış noktası denir.

2.5. Bağlantılı Küme: $A,B,C\subset\mathbb{C}$ altkümeleri verilsin. Eğer

1-) $A\subset B\cup C$

2-) $A\cap B\neq\phi$, $A\cap C\neq\phi$

3-) $A\cap B\cap C=\phi$

olacak şekilde B ve C gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunmaz ise, $A\subset\mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

2.6. Bölge: Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı olan bir kümeye $\mathbb{C}$' de bir bölge denir.

2.7. Differensiyellenebilme: $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A' nın bir iç noktası olsun.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.1}$$

limiti varsa, $f(z)$ fonksiyonuna z_0' da differensiyellenebilirdir denir. Bu limit değerine $f(z)$' nin z_0' daki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

2.8. Analitik Fonksiyon (Holomorfik Fonksiyon): $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının uygun bir $\varepsilon - \textit{komşuluğunda}$ differensiyellenebiliyorsa, $f(z)$' ye z_0 noktasında analitiktir denir.

Bir başka ifadeyle; z_0 noktasının uygun bir $\varepsilon - \textit{komşuluğunda}$ $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{2.2}$$

oluyorsa, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir.

2.9. Tam Fonksiyon: Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

2.10. Laurent Teoremi: $0 \le r_1 \le r_2$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ bölgesinde $f(z)$ fonksiyonu analitik olsun. Bu halde Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.3}$$

olarak yazılır.

2.11. Ayrık Tekil Nokta: $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik değil, ancak z_0 noktasının uygun bir delinmiş komşuluğunda analitik ise, z_0 noktasına ayrık tekil nokta denir.

2.12. Kutup Noktası: z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Eğer Laurent açılımındaki b_n katsayılarının sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise, z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutbu (kutup noktası) denir.

2.13. Meromorf Fonksiyon: Bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A ' da meromorf fonksiyon denir (Pommerenke, 1975).

2.14. Harmonik Fonksiyon (Potansiyel Fonksiyon): A, $\mathbb{R}^2$ ' de bir bölge olsun. $u : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ birinci ve ikinci dereceden sürekli kısmi türevlere sahip u fonksiyonu

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.4}$$

denklemini gerçekleştiriyorsa, u fonksiyonuna A bölgesinde harmoniktir denir.

2.15. Ünivalent Fonksiyon: H, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kümesinde bir bölge olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu H bölgesinde meromorfik ve birebir ise, $f(z)$ fonksiyonuna H bölgesinde ünivalent fonksiyon denir (Pommerenke, 1975).

2.16. Schwarz Lemması: $f : D \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon, $z \in D$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ şartlarını sağlasın. Bu durumda $z \in D$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ olur. Üstelik $z_0 \in D$ ($z_0 \neq 0$) için $|f(z_0)| \leq |z_0|$ ise, $|c| = 1$ olmak üzere $f(z) = c\, z$ dir.

2.17. Maksimum Prensibi: $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde maksimum değer almaz.

2.1. Sonuç: A sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli içinde ise analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

2.18. Minimum Prensibi: $f(z)$ fonksiyonu A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer almaz.

2.2.Sonuç: A sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

2.19. Subordinate: $f(z)$ ve $g(z)$, D bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. $f(z) = g(v(z))$ olacak şekilde D bölgesinde $v(0) = 0$ ve $|v(z)| < 1$ şartlarını sağlayan bir $v(z)$ analitik (ünivalent değil) fonksiyonu varsa $f(z)$**,** $g(z)$ fonksiyonuna subordinatedir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir (Pommerenke, 1975).

2.20. Quasi-Ordinate: Eğer $|f(z)| \leq |g(v(z))|$, $|v(z)| \leq |z|$ $(|z| < 1)$ olacak şekilde $v(z)$ fonksiyonu var ise, $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna quasi-subordinatetir denir (Pommerenke, 1975).

2.21. Lindelöf Prensibi: D bölgesinde $f(z) \prec F(z)$ olsun. O zaman her bir $r \in [0,1]$ için, $f(E_r) \subset F(E_r)$ dir.

2.22. Majorasyon (Majorization) : $f(z)$ ve $g(z)$ D bölgesinde analitik olsun. Eğer D bölgesinde $|v(z)| \leq 1$ ve $f(z) = v(z)\, g(z)$ olacak şekilde analitik bir $v(z)$ analitik fonksiyonu varsa $f(z)$, D bölgesinde $g(z)$ tarafından majorize edilmiştir denir ve $f(z) \ll g(z)$ ile gösterilir.

2.23. P Sınıfı: D bölgesindeki z için $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$ ve D bölgesinde analitik (ünivalent olması gerekmiyor) olan

$$p(z) = \ 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots p_n z^n + \ldots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \tag{2.5}$$

biçimindeki bütün fonksiyonların kümesi P sınıfı olarak adlandırılır (Goodman, 1983).

2.24. S Sınıfı: $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ formuna sahip ve D bölgesinde ünivalent olan $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak adlandırılır (Goodman, 1983).

2.25. Ω Sınıfı: Ω,

$$w(0) = 0 \text{ ve } |w(z)| \leq |z| \ , \qquad (z \in D) \tag{2.6}$$

şartlarını sağlayan D bölgesindeki sınırlı analitik olan $w(z)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak adlandırılır.

Ayrıca bir $p(z) \in P$ ve $w(z) \in \Omega$ fonksiyonu arasında,

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \tag{2.7}$$

veya

$$w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \tag{2.8}$$

bağıntılarını yazabiliriz (Goodman, 1983).

2.26. Bieberbach Conjecture: S sınıfındaki bütün fonksiyonlar arasında en büyük katsayılı olan Koebe fonksiyonudur. Yani $|a_n| \leq n$ dir.

S sınıfına ait

$$f(z) = \frac{z}{\left(1+e^{i\beta}z\right)^2} \quad , \qquad (\ \beta \in \mathbb{R}\ ) \tag{2.9}$$

fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| = n$ ’ dir.

2.27. Liouville Teoremi: Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise, sabittir.

2.28. Starlike (Yıldızıl) Bölge: $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $y \in B$ olsun. Eğer y noktasını B bölgesinin herhangi bir x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B bölgesinin içinde kalıyorsa B bölgesine y noktasına göre starlike (yıldızıl) bölge denir (Goodman, 1983).

Daha açık bir ifadeyle B bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir.

2.29. Starlike Fonksiyon: $f(z) \in S$ olsun. $f(D)$ orjine göre starlike ise, bu $f(z)$ fonksiyonuna starlike fonksiyon denir ve S sınıfına ait starlike fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Eğer $f(D)$ w_0 noktasına göre starlike ise, o zaman w_0 noktasına bağlı starlike bir fonksiyon olur. Örneğin; $K(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ koebe fonksiyonu olmak üzere, $\log K(z)$ starlike bir fonksiyondur (Goodman, 1983).

2.30. Starlike Fonksiyonların Sınıfı: $f(z)$, D birim diskinde ünivalent bir fonksiyon $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olsun. Eğer D ’de

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq \alpha \quad , \qquad (0 \leq \alpha \leq 1) \tag{2.10}$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α.mertebeden starliketır denir. $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ olması ile birlikte α.mertebeden starlike fonksiyonların sınıfı S_α^* ile gösterilir (Lehankani, 1985).

2.31. Konveks Bölge: B bir bölge olsun. B' deki her nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine B bölgesinde kalıyorsa B' ye konveks bölge denir (Goodman, 1983).

2.32. Konveks Fonksiyon: B bir bölge, $f(z)$ bu bölgede analitik bir fonksiyon olsun. $f(B)$ konveks bir bölge ise, $f(z)$' ye B bölgesinde konveks fonksiyon denir (Goodman, 1983).

S sınıfına ait konveks fonksiyonların oluşturduğu kümeyi K ile göstereceğiz. Örneğin; $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ ve $f(z)=\log\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|$ fonksiyonları konvekstir.

Herhangi bir konveks bölge her bir noktasına göre starlike olduğundan $S^* \subset K$ yazılır.

2.33. Konveks Fonksiyonların Sınıfı: $f(z)$, D birim diskinde ünivalent bir fonksiyon $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ olsun. Eğer D'de

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad , \qquad (0 \leq \alpha \leq 1) \tag{2.11}$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna α.mertebeden konvekstir denir. α.mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı K_α ile gösterilir (Lehankani, 1985).

$\alpha = 0$ için bu fonksiyonlar ilk kez Nevanlinne tarafından ispatlandı (Lehankani, 1985).

3. METERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanımlar ve İfadeler

3.1.1. $S(\gamma), C(\gamma)$ ve $R(\lambda,\gamma)$ sınıfları:

3.1.1.1. Tanım: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D birim diskinde analitik olsun. $f(z)=\varphi(z)\, g(z)$ $(z\in D)$ olacak şekilde $|\varphi(z)|\leq 1$ şartını sağlayan D' de analitik $\varphi(z)$ fonksiyonu varsa, $f(z)$ D' de $g(z)$ tarafından majorize edilmiştir denir ve $f(z)\ll g(z)$ ile gösterilir.

3.1.1.2. Tanım: $f(z)$, D' de analitik bir fonksiyon ve $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olsun.

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)\right\}>0, \qquad (z\in D;\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}) \tag{3.1}$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonu γ kompleks mertebeli starlike fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S(\gamma)$ ile gösterilir (Altıntaş, 2001).

3.1.1.3. Tanım: $f(z)$, D' de analitik bir fonksiyon ve $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olsun.

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\gamma}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0\ , \qquad (z\in D;\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}) \tag{3.2}$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonu γ kompleks mertebeli konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $C(\gamma)$ ile gösterilir (Altıntaş, 2001).

3.1.1.1. Sonuç: Bu sınıflar arasında $S(1-\alpha)=S^*(\alpha)$ ve $C(1-\alpha)=K(\alpha)$ eşitlileri vardır.

3.1.1.2. Sonuç: $f(z) \in C(\gamma)$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in S(\gamma)$ ($\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) olmasıdır.

3.1.1.3. Sonuç: $f(z) \in S(\gamma)$ olması için gerek ve yeter şart

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \gamma\{p(z)-1\}+1 \quad , \qquad (z \in D \,;\, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \tag{3.3}$$

olacak şekilde $p(z) \in P$ olmasıdır.

3.1.1.4. Sonuç: $f(z) \in S(\gamma)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = z\left(\frac{f_1(z)}{z}\right)^{\gamma} \quad , \qquad (z \in D \,;\, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \tag{3.4}$$

olacak şekilde $f_1(z) \in S^*$ olmasıdır ve $S^* = S^*(0) = S(1)$ eşitliği vardır.

3.1.1.4. Tanım: $h(z)$, D ' de analitik ve

$$h(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad , \qquad (c_n \geq 0) \tag{3.5}$$

olsun.

$$|h(z) + \lambda z h'(z) - 1| < |\gamma| \quad , \qquad (z \in D \,;\, \mathrm{Re}\{\lambda\} \geq 0 \,;\, 0 < |\gamma| \leq 1) \tag{3.6}$$

şartını sağlayan $h(z)$ fonksiyonlarının sınıfı $R(\lambda, \gamma)$ olarak tanımlanır (Altıntaş, 2001).

3.1.2. $S_{p,q}(\gamma)$ ve $C_{p,q}(\gamma)$ sınıfları:

3.1.2.1. Tanım: D 'de $p-değerli$ ve analitik olan

$$f(z) = z^p + \sum_{j=p+1}^{\infty} a_j z^j \quad , \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}) \tag{3.7}$$

şeklindeki $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı A_p olarak tanımlanır.

$p=1$ için, A_1 yerine A yazacağız.

3.1.2.2. Tanım: $f(z)\in A_p$ olsun. $S_{p,q}(\gamma)$ sınıfı

$$S_{p,q}(\gamma)=\left\{f(z):\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf^{(q+1)}(z)}{f^{(q)}(z)}-p+q\right)\right\}>0\right\} \tag{3.8}$$

$(z\in D;\ p\in\mathbb{N}=\{1,2,...\};\quad q\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\};\quad \gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\};\quad |2\gamma-p+q|\le p-q)$

olarak tanımlanır (Altıntaş, 2001).

3.1.2.3. Tanım: $f(z)\in A_p$ olsun. $C_{p,q}(\gamma)$ sınıfı

$$C_{p,q}(\gamma)=\left\{f(z):\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf^{(q+2)}(z)}{f^{(q+1)}(z)}-p+q\right)\right\}>0\right\} \tag{3.9}$$

$(z\in D;\ p\in\mathbb{N}=\{1,2,...\};\quad q\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\};\quad \gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\};\quad |2\gamma-p+q|\le p-q)$

olarak tanımlanır (Altıntaş, 2001).

3.1.2.1. Sonuç: $S_{1,0}(\gamma)=S(\gamma)$ ve $C_{1,0}(\gamma)=C(\gamma)$ eşitlikleri vardır.

3.1.2.2. Sonuç: $S_{1,0}(1-\alpha)=S(1-\alpha)=S^*(\alpha)$ ve $C_{1,0}(1-\alpha)=C(1-\alpha)=K(\alpha)$ eşitlikleri vardır.

3.1.3. $S_{p,q}^{n}(\gamma)$ sınıfı:

3.1.3.1. Tanım:

$$
\left.
\begin{array}{l}
D^0 f(z) = f(z) \\
D^1 f(z) = zf'(z) \\
. \\
. \\
. \\
D^n f(z) = D\left(D^{n-1} f(z)\right)
\end{array}
\right. , \qquad (\, n \in \mathbb{N}\,) \tag{3.10}
$$

şeklindeki D operatörüne Salagean operatörü denir.

Eğer $f(z) \in A_p$ olursa, bu durumda

$$
D^n f(z) = p^n z^p + \sum_{j=p+1}^{\infty} j^n a_j z^j \tag{3.11}
$$

elde edilir

3.1.3.2. Tanım: $f(z) \in A_p$ olsun. $S_{p,q}^n(\gamma)$ sınıfı

$$
S_{p,q}^n(\gamma) = \left\{ f(z) : \operatorname{Re}\left\{ 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1} f^{(q)}(z)}{D^n f^{(q)}(z)} - p + q + n \right) \right\} > 0 \right\} \tag{3.12}
$$

($z \in D$; $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$; $q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $|2\gamma - p + q + n| \le p - q - n$)

olarak tanımlanır (Kadıoğlu, 2004).

Buradaki $f^{(q)}(z)$ fonksiyonu $f(z)$ fonksiyonunun *q.mertebeden* türevidir.

3.1.3.1. Sonuç: $S_{1,0}^0(\gamma) = S(\gamma)$ ($\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $S_{1,0}^0(1-\alpha) = S(1-\alpha) = S^*(\alpha)$ $(0 \le \alpha < 1)$ ve $S_{p,q}^0(\gamma) = S_{p,q}(\gamma)$ ($\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) olur.

3.2. Majorasyon Problemleri ve Teoremler

3.2.1. $S(\gamma), C(\gamma)$ ve $R(\lambda, \gamma)$ sınıflarının majorasyon problemleri:

3.2.1.1. Teorem : $f(z)$ fonksiyonu, D' de analitik ve $g(z)\in S(\gamma)$ olsun. Eğer $f(z)$ D' de $g(z)$ tarafından majorize edilmiş ise,

$$r=r_1(\gamma)=\frac{3+|2\gamma-1|-\sqrt{9+2|2\gamma-1|+|2\gamma-1|^2}}{2|2\gamma-1|} \tag{3.13}$$

olmak üzere

$$|f'(z)|\leq|g'(z)| \quad , \qquad (|z|\leq r_1(\gamma)) \tag{3.14}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $g(z)\in S(\gamma)$ olmasından dolayı, (3.3)'e göre bir $p(z)\in P$ fonksiyonu için

$$z\frac{g'(z)}{g(z)}=\gamma\{p(z)-1\}+1 \quad , \qquad (z\in D\,;\gamma\in\mathbb{C}\backslash\{0\}) \tag{3.15}$$

veya

$$p(z)=1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-1\right) \quad , \qquad (z\in D) \tag{3.16}$$

yazılır. Burada (2.7) ifadeden

$$p(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)} \quad , \qquad (w\in\Omega) \tag{3.17}$$

yazabiliriz. (3.16) ve (3.17) ifadelerinden

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\frac{1+(2\gamma-1)w(z)}{1-w(z)} \tag{3.18}$$

elde edilir. (2.6) eşitsizlik göz önüne alındığında

$$g(z)=\frac{|1+(-w(z))||z|}{|1-(1-2\gamma)w(z)|}|g'(z)| \tag{3.19}$$

$$\Rightarrow\ |g(z)|\leq\frac{(1+|z|)|z|}{1-|1-2\gamma||z|}|g'(z)| \tag{3.20}$$

eşitsizliği bulunur.

D' de $f(z) \ll g(z)$ olduğundan dolayı, $|\varphi(z)| \le 1$ ve $f(z) = \varphi(z)\, g(z)$ $(z \in D)$ olacak şekilde D'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$f'(z) = \varphi'(z) g(z) + \varphi(z) g'(z) \tag{3.21}$$

dir. $\varphi(z) \in \Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)| \le |z|$ olup,

$$|\varphi'(z)| \le \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} \quad , \qquad (z \in D) \tag{3.22}$$

olur ve (3.20), (3.21) ve (3.22)' den $z \in D$ için

$$|f'(z)| \le \frac{(1-|z|)(1-|2\gamma-1||z|)|\varphi(z)| + \left(1-|\varphi(z)|^2\right)|z|}{(1-|z|)(1-|2\gamma-1||z|)} |g'(z)| \tag{3.23}$$

bulunur. $|z| = r$ ve $|\varphi(z)| = \rho$ $(0 \le \rho \le 1)$ alınıp yerine yazıldığında

$$|f'(z)| \le \frac{Q(\rho)}{(1-r)(1-|2\gamma-1|r)} |g'(z)| \tag{3.24}$$

olur. Burada

$$Q(\rho) = -r\rho^2 + (1-r)(1-|2\gamma-1|r)\rho + r \quad , \qquad (0 \le \rho \le 1) \tag{3.25}$$

şeklindedir.

$$A(\rho) = -\sigma\rho^2 + (1-\sigma)(1-|2\gamma-1|\sigma)\rho + \sigma \quad , \qquad (0 \le \sigma \le r_1(\gamma)) \tag{3.26}$$

ile tanımlanan $A(\rho)$ fonksiyonu $0 \le \rho \le 1$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$A(\rho) = A(1) \le (1-\rho)(1-|2\gamma-1|\sigma) \quad , \ (0 \le \rho \le 1 ; 0 \le \sigma \le r_1(\gamma)) \tag{3.27}$$

olur. Bu halde $Q(\rho)$ fonksiyonu $\rho = 1$ ve (3.13)' deki $r = r_1(\gamma)$ de maksimum değerini alır.

Şimdi $r = r_1(\gamma)$ değerini bulalım. $Q'(\rho) = 0$ ve $\rho = 1$ yazıp denklemi çözersek (3.13)' deki $r = r_1(\gamma)$ değerini buluruz.

Sonuç olarak $|z| \leq r_1(\gamma)$ eşitsizliği durumunda (3.14)' deki ifadenin sağladığını göstermiş olduk. Bu da teoremi ispatlar.

3.2.1.1.Teoremde $\gamma = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.1.1. Sonuç (Mac Gregor): $f(z)$ D' de analitik bir fonksiyon ve

$$g(z) \in S^* = S^*(0) \subset S \tag{3.28}$$

olsun. Eğer D' de $f(z) \ll g(z)$ ise,

$$|f'(z)| \leq |g'(z)| \ , \qquad (|z| \leq 2 - \sqrt{3} \ ) \tag{3.29}$$

dir.

3.2.1.2. Sonuç (Mac Gregor): $f(z)$ D' de analitik bir fonksiyon ve $g(z) \in K$ olsun. Eğer D' de $f(z) \ll g(z)$ ise,

$$|f'(z)| \leq |g'(z)| \ , \qquad (|z| \leq \frac{1}{3} \ ) \tag{3.30}$$

dir.

Eğer 3.2.1.1.Teorem ' den $\gamma \to \frac{1}{2}$ iken,

$$f(z) \in K = K(0) \subset S \Rightarrow f(z) \in S^*\left(\frac{1}{2}\right) \ , \tag{3.31}$$

yazılır.

3.2.1.1. Lemma: $f(z) \in C(\gamma)$ ise, bu durumda $f(z) \in S\left(\frac{1}{2}\gamma\right)$ dır. Yani,

$$C(\gamma) \subset S\left(\frac{1}{2}\gamma\right) \ , \qquad (\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \tag{3.32}$$

olur.

İspat: Biz (3.31) ifadesini (3.1), (3.2) ve (3.3) kullanarak tekrar yazarsak;

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0 \Rightarrow \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\frac{1}{2} \ , \qquad (z \in D) \tag{3.33}$$

ve

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{1-w(z)}{1+w(z)} \Rightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1}{1+w(z)} \ , \qquad (w\in\Omega) \tag{3.34}$$

elde edilir. Şimdi (3.34) kullanılarak

$$1+\frac{1}{\gamma}\frac{zf''(z)}{f(z)}=\frac{\gamma+(\gamma-2)w(z)}{\gamma\left[1+w(z)\right]} \Rightarrow 1+\frac{2}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)=\frac{\gamma+(\gamma-2)w(z)}{\gamma\left[1+w(z)\right]} \tag{3.35}$$

olur. (3.32) ifadesi (3.35)'den elde edilir.

3.2.1.2. Teorem: $f(z)$ D'de analitik bir fonksiyon ve $g(z)\in C(\gamma)$ olsun. Eğer D'de $f(z)\ll g(z)$ ise,

$$r=r_2(\gamma)=\frac{3+|\gamma-1|-\sqrt{9+2|\gamma-1|+|\gamma-1|^2}}{2|\gamma-1|} \ , \tag{3.36}$$

olmak üzere

$$|f'(z)|\le|g'(z)| \ , \qquad (|z|\le r_2(\gamma)) \tag{3.37}$$

dir.

3.2.1.1.Teoremde γ yerine $\frac{\gamma}{2}$ yazarsak $r=r_2(\gamma)$ elde edilir.

3.2.1.2.Lemma ve 3.2.1.3.Lemmayı verdikten sonra $R(\lambda,\gamma)$ sınıfı için majorization problemini kuracağız.

3.2.1.2. Lemma: Eğer (3.5) da tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu $R(\lambda,\gamma)$ sınıfında ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\le\frac{|\gamma|}{1+\mathrm{Re}\{\lambda\}} \ , \qquad (c_n\ge 0) \tag{3.38}$$

dir.

İspat: (3.5) da tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu $R(\lambda,\gamma)$ sınıfında olmasından dolayı (3.6) ifadesinde gerekli işlemler yapıldığında

$$\left|-\sum_{n=1}^{\infty}(1+\lambda n)c_n z^n\right|<|\gamma| \quad , \qquad (z\in D) \tag{3.39}$$

elde edilir.

Herhangi bir $z\in D$ için $|\mathrm{Re}\{z\}|\leq|z|$ olmasından dolayı (3.39) ifadesinden

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(1+\lambda n)c_n z^n\right\}<|\gamma| \tag{3.40}$$

bulunur. Şimdi reel eksen üzerinden z değeri seçilsin ve reel eksen boyunca $z\to 1^-$ olsun. O zaman (3.40) eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+n\,\mathrm{Re}\{\lambda\}\right]c_n\leq|\gamma| \quad , \qquad (\mathrm{Re}\{\lambda\}\geq 0\,;\, \mathrm{n}\in\mathbb{N}\,;\ \gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0\}) \tag{3.41}$$

elde edilir. $\mathrm{Re}\{\lambda\}\geq 0$ ve $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ olduğundan, kolaylıkla (3.41) ifadesinden (3.38) eşitsizliğini buluruz.

3.2.1.3. Lemma: Eğer (3.5) de tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu $R(\lambda,\gamma)$ sınıfında ise,

$$1-\frac{|\gamma|}{1+\mathrm{Re}\{\lambda\}}|z|\leq|h(z)|\leq 1+\frac{|\gamma|}{1+\mathrm{Re}\{\lambda\}}|z| \quad , \qquad (z\in D) \tag{3.42}$$

dir.

İspat: (3.5) da tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu $R(\lambda,\gamma)$ sınıfında olduğundan 3.2.1.2.Lemmasını da sağlayacaktır. $|h(z)|$ için

$$1-|z|\sum_{n=1}^{\infty}c_n\leq|h(z)|\leq 1+|z|\sum_{n=1}^{\infty}c_n \quad , \qquad (z\in D) \tag{3.43}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.38) eşitsizliğinden (3.42) eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.1.3. Teorem: $f(z)$ ve $g(z)$ D' de analitik ve $g(z)$ fonksiyonu

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} \in R(\lambda,\gamma) \tag{3.44}$$

özelliğini sağlayan normalleştirilmiş fonksiyon olsun. Eğer D' de $f(z) \ll g(z)$ ise,

$$|\gamma| r^3 - [1+\mathrm{Re}\{\lambda\}] r^2 - [2+|\gamma|+\mathrm{Re}\{\lambda\}] r + 1 + \mathrm{Re}\{\lambda\} = 0 \tag{3.45}$$

eşitliğinin kökü olan $r = r_3(\lambda,\gamma)$' de

$$|f'(z)| \leq |g'(z)| \quad , \qquad (|z| \leq r_3(\lambda,\gamma)\,;\; r_3(\lambda,\gamma) \in (0,1)) \tag{3.46}$$

dir.

İspat: $\dfrac{zg'(z)}{g(z)} \in R(\lambda,\gamma)$ olduğundan $h(z)$ fonksiyonunu $h(z) = \dfrac{zg'(z)}{g(z)}$ olarak alırsak (3.42) ifadesinden

$$\left|\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| \geq 1 - \frac{|\gamma|}{1+\mathrm{Re}\{\lambda\}} r \quad , \qquad (|z| = r\,;\; 0 < r < 1;\; \mathrm{Re}\{\lambda\} \geq 0) \tag{3.47}$$

veya

$$|g(z)| \leq \frac{(1+\mathrm{Re}\{\lambda\})r}{1+\mathrm{Re}\{\lambda\} - |\gamma| r} |g'(z)| \tag{3.48}$$

olur.

D' de $f(z) \ll g(z)$ olduğundan dolayı, $|\varphi(z)| \leq 1$ ve $f(z) = \varphi(z)\, g(z)$ $(z \in D)$ olacak şekilde D'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$f'(z) = \varphi'(z) g(z) + \varphi(z) g'(z) \tag{3.49}$$

dir. $\varphi(z) \in \Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)| \leq |z|$ olup,

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} \quad , \qquad (z \in D) \tag{3.50}$$

eşitsizliği vardır. (3.48), (3.49) ve (3.50)' de

$$\left|f'(z)\right| \le \left[\frac{1-\left|\varphi(z)\right|^2}{1-r^2}\frac{\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}\right)r}{1+\mathrm{Re}\{\lambda\}-|\gamma|r}+\left|\varphi(z)\right|\right]\left|g'(z)\right|$$

$$=\frac{Q(\rho)}{\left(1-r^2\right)\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}-|\gamma|r\right)}\left|g'(z)\right| \quad , \; (z\in D;\; 0<r<1) \quad (3.51)$$

olur. Burada $\left|\varphi(z)\right|=\rho$ ($0\le\rho\le r_3(\lambda,\gamma)$), $|z|=r$ ve

$$Q(\rho)=1+\mathrm{Re}\{\lambda\}r+\left(1-r^2\right)\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}-|\gamma|r\right)\rho-\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}\right)r\rho^2 \quad (3.52)$$

olarak aldık. $0\le\sigma\le r_3(\lambda,\gamma)$ için

$$A(\rho)=\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}\right)\sigma+\left(1-\sigma^2\right)\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}-|\gamma|\sigma\right)\rho-\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}\right)\sigma\rho^2 \quad (3.53)$$

ile tanımlanan $A(\rho)$ fonksiyonu $0\le\rho\le1$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$A(\rho)\le A(1)=\left(1-\sigma^2\right)\left(1+\mathrm{Re}\{\lambda\}-|\gamma|\sigma\right) \;,\; (0\le\rho\le1\,;0\le\sigma\le r_3(\lambda,\gamma)) \quad (3.54)$$

olur. Bu halde $Q(\rho)$ fonksiyonu $\rho=1$ ve (3.45)' deki $r=r_3(\lambda,\gamma)$ de maksimum değerini alır.

Şimdi $r=r_3(\lambda,\gamma)$ değerini bulalım. $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$ yazıp denklemi çözersek (3.45)' deki $r=r_3(\lambda,\gamma)$ değerini buluruz.

Sonuç olarak $|z|\le r_3(\lambda,\gamma)$ eşitsizliği durumunda (3.46)' deki ifade sağladığını göstermiş olduk. Bu da teoremi ispatlar.

3.2.2. $S_{p,q}(\gamma)$ ve $C_{p,q}(\gamma)$ sınıflarının majorasyon problemleri:

3.2.2.1. Teorem: $f(z)$ fonksiyonu A_p sınıfında ve $g(z)\in S_{p,q}(\gamma)$ olsun. $q\in\mathbb{N}_0$ için $f^{(q)}(z)\ll g^{(q)}(z)$ ise,

$$r=r_1(p,q;\gamma)=\frac{k-\sqrt{k^2-4(p-q)|2\gamma-p+q|}}{2|2\gamma-p+q|} \quad (3.55)$$

olmak üzere

$$\left|f^{(q+1)}(z)\right| \leq \left|g^{(q+1)}(z)\right| \quad , \qquad (\ |z| \leq r_1(p,q;\gamma)\ ) \tag{3.56}$$

($k = 2 + p - q + |2\gamma - p + q|; |2\gamma - p + q| \leq p - q$; $p \in \mathbb{N}$; $q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

dır.

İspat: $g(z) \in S_{p,q}(\gamma)$ olduğundan,

$$p(z) = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zg^{(q+1)}(z)}{g^{(q)}(z)} - p + q\right) \quad , \qquad (\ \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ ) \tag{3.57}$$

yazarsak, o zaman $\mathrm{Re}\{p(z)\} > 0$ ve $p(z) = 1 + \ldots$ (z$\in D$) olup,

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \quad , \qquad (\ w(z) \in \Omega\ ) \tag{3.58}$$

dir. (3.57) ve (3.58) kullanarak,

$$\frac{zg^{(q+1)}(z)}{g^{(q)}(z)} = \frac{p - q + (2\gamma - p + q)w(z)}{1 - w(z)} \quad , \qquad (|w(z)| \leq |z|) \tag{3.59}$$

ve buradan

$$\left|g^{(q)}(z)\right| \leq \frac{(1 + |z|)|z|}{p - q - |2\gamma - p - q||z|}\left|g^{(q+1)}(z)\right| \tag{3.60}$$

eşitsizliği bulunur.

$f^{(q)}(z) \ll g^{(q)}(z)$ olmasından dolayı, $|\varphi(z)| \leq 1$ ve $f^{(q)}(z) = \varphi(z)g^{(q)}(z)$ ($z \in D$) olacak şekilde D'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$f^{(q+1)}(z) = \varphi'(z)g^{(q)}(z) + \varphi(z)g^{(q+1)}(z) \tag{3.61}$$

dir. $\varphi(z) \in \Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)| \leq |z|$ olup,

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2} \quad , \qquad (\ z \in D\ ) \tag{3.62}$$

eşitsizliği vardır. (3.60), (3.61) ve (3.62) ifadelerinden

$$\left|f^{(q+1)}(z)\right| \le \left[\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\frac{(1+|z|)|z|}{p-q-|2\gamma-p+q||z|}+|\varphi(z)|\right]\left|g^{(q+1)}(z)\right| \tag{3.63}$$

elde edilir. $|z|=r$ ve $|\varphi(z)|=\rho$ ($0\le\rho\le1$) yerine yazarsak

$$\left|f^{(q+1)}(z)\right| \le \frac{Q(\rho)}{(1-r)\left(p-q-|2\gamma-p+q|r\right)}\left|g^{(q+1)}(z)\right| \tag{3.64}$$

olur. Burada

$$Q(\rho)=-r\rho^2+(1-r)\left(p-q-|2\gamma-p+q|r\right)\rho+r \quad , \qquad (0\le\rho\le1) \tag{3.65}$$

şeklindedir.

$$A(\rho)=-\sigma\rho^2+(1-\sigma)\left(p-q-|2\gamma-p+q|\sigma\right)\rho+\sigma \tag{3.66}$$

ile tanımlanan $A(\rho)$ fonksiyonu $0\le\rho\le1$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu durumda $0\le\sigma\le r_1(p,q;\gamma)$ için, $A(\rho)\le A(1)=(1-\sigma)\left(p-q-|2\gamma--p+q|\sigma\right)$ olur. Bu halde $Q(\rho)$ fonksiyonu $\rho=1$ ile $r=r_1(p,q;\gamma)$ de maksimum değerini alır.

Şimdi $r=r_1(p,q;\gamma)$ değerini bulalım. $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$ yazıp denklemi çözersek (3.55)' deki $r=r_1(p,q;\gamma)$ değerini buluruz.

Sonuç olarak $|z|\le r_1(p,q;\gamma)$ eşitsizliği durumunda (3.56)' deki ifade sağladığını göstermiş olduk. Bu da teoremi ispatlar.

3.2.2.1. Sonuç : $f(z)$ fonksiyonu $A=A_1$ sınıfında ve $g(z)\in S_{1,0}(\gamma)=S(\gamma)$ olsun. Eğer D' de $f(z)\ll g(z)$ ise, o zaman (3.13)' deki $r=r_1(\gamma)$ da

$$|f'(z)|\le|g'(z)| \quad , \qquad (|z|\le r_1(\gamma)) \tag{3.67}$$

olur (Altıntaş, 2001).

3.2.2.1. Lemma: Eğer $f(z) \in C_{p,q}(\gamma)$ ise, o zaman $f(z) \in S_{p,q}\left(\frac{1}{2}\gamma\right)$ dir. Yani,

$$C_{p,q}(\gamma) \subset S_{p,q}(\gamma) \quad , \qquad (\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}) \tag{3.68}$$

dir (Altıntaş, 2001).

3.2.2.1.Teoremde γ yerine $\frac{1}{2}\gamma$ yazarsak aşağıdaki teorem elde edilir.

3.2.2.2. Teorem: $f(z)$ fonksiyonu A_p sınıfında ve $g(z) \in C_{p,q}(\gamma)$ olsun. $q \in \mathbb{N}$ için $f^{(q)}(z) \ll g^{(q)}(z)$ ise, o zaman

$$r = r_2(p,q;\gamma) = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4(p-q)|\gamma - p + q|}}{2|\gamma - p + q|} \tag{3.69}$$

olduğu yerde

$$\left|f^{(q+1)}(z)\right| \le \left|g^{(q+1)}(z)\right| \quad , \qquad (\ |z| \le r_2(p,q;\gamma)\ ) \tag{3.70}$$

($\mu = 2 + p - q + |\gamma - p + q|$; $|2\gamma - p + q| \le p - q$; $p \in \mathbb{N}$; $q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$)

olmasıdır (Altıntaş, 2001).

3.2.2.2. Sonuç : $f(z)$ fonksiyonu $A = A_1$ sınıfında ve $g(z) \in C_{1,0}(\gamma) = C(\gamma)$ olsun. Eğer D' de $f(z) \ll g(z)$ ise, (3.36)' deki $r = r_2(\gamma)$ da

$$|f'(z)| \le |g'(z)| \quad , \qquad (|z| \le r_2(\gamma)) \tag{3.71}$$

olur (Altıntaş, 2001).

3.2.3. $S^n_{p,q}(\gamma)$ sınıfının majorasyon problemi:

3.2.3.1. Teorem: $f(z)$ A_p sınıfında ve $g(z) \in S^n_{p,q}(\gamma)$ ($\gamma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$) olsun. Eğer D' de $D^n f(z) \ll D^n g(z)$ ise,

$$r = r_1\left(p,q,n;\gamma\right) = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\left(p-q-n\right)\left|2\gamma - p + q + n\right|}}{2\left|2\gamma - p + q + n\right|} \tag{3.72}$$

olmak üzere

$$\left|D^{n+1} f^{(q)}\left(z\right)\right| \le \left|D^{n+1} g^{(q)}\left(z\right)\right| \quad , \qquad (\left|z\right| \le r_1\left(p,q,n;\gamma\right)) \tag{3.73}$$

($\tau = 2 + p - q - n + \left|2\gamma - p + q + n\right|$; $\left|2\gamma - p + q + n\right| \le p - q - n$; $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \left\{0\right\}$)

olur.

İspat: $g\left(z\right) \in S_{p,q}^{n}\left(\gamma\right)$ olmasından dolayı,

$$p\left(z\right) = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{D^{n+1} g^{(q)}\left(z\right)}{D^{n} g^{(q)}\left(z\right)} - p + q + n\right) \quad , \qquad (\gamma \in \mathbb{C} \setminus \left\{0\right\}) \tag{3.74}$$

yazarsak, bu durumda $\operatorname{Re}\left\{p\left(z\right)\right\} > 0$ ve $p\left(z\right) = 1 + \ldots$ ($z \in D$) olup,

$$p\left(z\right) = \frac{1 + w\left(z\right)}{1 - w\left(z\right)} \quad , \qquad (w\left(z\right) \in \Omega) \tag{3.75}$$

dir. (3.74) ve (3.75) kullanarak,

$$D^{n} g^{(q)}\left(z\right) = \frac{1 - w\left(z\right)}{p - q - n + \left(2\gamma - p + q + n\right) w\left(z\right)} D^{n+1} g^{(q)}\left(z\right) \tag{3.76}$$

olur ve

$$\left|D^{n} g^{(q)}\left(z\right)\right| \le \frac{\left|1 + (-w\left(z\right))\right|}{\left|p - q - n + \left(2\gamma - p - q\right) w\left(z\right)\right|}\left|D^{n+1} g^{(q)}\left(z\right)\right| \quad , \ (\ \left|2\gamma - p + q + n\right| \le p - q - n\ )$$

$$\le \frac{1 + \left|w\left(z\right)\right|}{\left|p - q - n\right| - \left|2\gamma - p + q + n\right|\left|w\left(z\right)\right|}\left|D^{n+1} g\left(z\right)\right| \quad , \ (\ \left|w\left(z\right)\right| \le \left|z\right| ;\ z \in D\ )$$

$$\le \frac{1 + \left|z\right|}{p - q - n - \left|2\gamma - p + q + n\right|\left|z\right|}\left|D^{n+1} g^{(q)}\left(z\right)\right| \tag{3.77}$$

eşitsizliği bulunur.

$D^{n}\ f^{(q)}\left(z\right) \ll D^{n}\ g^{(q)}\left(z\right)$ olmasından dolayı, $\left|\varphi\left(z\right)\right| \le 1$ ve

$$D^{n}\ f^{(q)}\left(z\right) = \varphi\left(z\right) D^{n} g^{(q)}\left(z\right) \quad , \qquad (z \in D) \tag{3.78}$$

olacak şekilde D'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$D^{n+1}f^{(q)}(z)=z\varphi'(z)D^{n}g^{(q)}(z)+\varphi(z)D^{n+1}g^{(q)}(z) \quad , \qquad (z\in D) \qquad (3.79)$$

dir. $\varphi(z)\in\Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)|\le|z|$ olup,

$$|\varphi'(z)|\le\frac{1-|\varphi(z)|^{2}}{1-|z|^{2}} \quad , \qquad (z\in D) \qquad (3.80)$$

eşitsizliği vardır. (3.77), (3.79) ve (3.80) ifadelerinden

$$\left|D^{n+1}f^{(q)}(z)\right|\le\left[\frac{1-|\varphi(z)|^{2}}{1-|z|^{2}}\frac{(1+|z|)|z|}{p-q-n-|2\gamma-p+q+n||z|}+|\varphi(z)|\right]\left|D^{n+1}g^{(q)}(z)\right| \qquad (3.81)$$

elde edilir. $|z|=r$ ve $|\varphi(z)|=\rho$ ($0\le\rho\le1$) yerine yazarsak

$$\left|D^{n+1}f^{(q)}(z)\right|\le\frac{Q(\rho)}{(1-r)\left(p-q-n-|2\gamma-p+q+n|r\right)}\left|D^{n+1}g^{(q)}(z)\right| \qquad (3.82)$$

olur. Burada

$$Q(\rho)=-r\rho^{2}+(1-r)\left(p-q-n-|2\gamma-p+q+n|r\right)\rho+r \quad , \qquad (0\le\rho\le1) \qquad (3.83)$$

şeklindedir. $0\le\sigma\le r_1(p,q,n;\gamma)$ için,

$$A(\rho)=-\sigma\rho^{2}+(1-\sigma)\left(p-q-n-|2\gamma-p+q+n|\sigma\right)\rho+\sigma \qquad (3.84)$$

fonksiyonu $0\le\rho\le1$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$A(\rho)\le A(1)=(1-\sigma)\left(p-q-n-|2\gamma-p+q+n|\sigma\right) \qquad (3.85)$$

olur. Bu halde $Q(\rho)$ fonksiyonu $\rho=1$ ile $r=r_1(p,q,n;\gamma)$ da maksimum değerini alır.

Şimdi $r=r_1(p,q,n;\gamma)$ değerini bulalım. $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$ yazıp denklemi çözersek (3.72)' deki $r=r_1(p,q,n;\gamma)$ değerini buluruz.

Sonuç olarak $|z|\le r_1(p,q,n;\gamma)$ eşitsizliği durumunda (3.73)' deki ifade sağladığını göstermiş olduk. Bu da teoremi ispatlar.

3.2.3.1.Teoeremde $n=0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.3.1. Sonuç : $f(z)$ A_p sınıfında ve $g(z) \in S_{p,q}(\gamma)$ olsun. $q \in \mathbb{N}_0$ için $f^{(q)}(z) \ll g^{(q)}(z)$ ise,

$$r = r_1(p,q;\gamma) = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4(p-q)|2\gamma - p + q|}}{2|2\gamma - p + q|} \tag{3.86}$$

olmak üzere

$$\left|f^{(q+1)}(z)\right| \le \left|g^{(q+1)}(z)\right| \ , \qquad (\ |z| \le r_1(p,q;\gamma) \ ) \tag{3.87}$$

$(k = 2 + p - q + |2\gamma - p + q|; |2\gamma - p + q| \le p - q; \ p \in \mathbb{N}; \ q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}; \ \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$

olmasıdır (Kadıoğlu, 2004).

3.2.3.1.Teoremde $n = q = 0$ ve $p = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.3.2. Sonuç : $f(z)$ D’ de analitik ve $g(z) \in S(\gamma)$ olsun. Eğer $f(z)$ D’ de $g(z)$ tarafından majorize edilmiş ise,

$$r = r_1(\gamma) = \frac{3 + |2\gamma - 1| - \sqrt{9 + 2|2\gamma - 1| + |2\gamma - 1|^2}}{2|2\gamma - 1|} \tag{3.88}$$

olmak üzere

$$|f'(z)| \le |g'(z)| \ , \qquad (|z| \le r_1(\gamma)) \tag{3.89}$$

eşitsizliği vardır (Kadıoğlu, 2004).

3.2.3.1.Teoremde $n = q = 0$, $p = 1$ ve $\gamma = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.3.3. Sonuç : $f(z)$ fonksiyonu D’ de analitik ve

$g(z) \in S^* = S^*(\gamma)$ olsun. S, D’ de analitik ve ünivalent olan normalize edilmiş fonksiyonların sınıfıdır. Eğer $f(z)$ D’de $g(z)$ tarafından majorize edilmiş ise,

$$|f'(z)| \le |g'(z)| \ , \qquad (|z| \le 2 - \sqrt{3}) \tag{3.90}$$

eşitsizliği vardır (Kadıoğlu, 2004).

3.3. Mac Gregor' un Ünivalent Fonksiyonlar için Majorasyon Problemi

3.3.1. Tanım: $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks düzlemdeki bir H kümesinde analitik olsun. Eğer her $z \in H$ için $|f(z)| \le |g(z)|$ eşitsizliğini sağlanırsa, H' de $f(z)$ $g(z)$ tarafından majorize ediliyor denir.

3.3.1. Sonuç: D' de $g(0)=0$ ve $f(z) \ll g(z)$ olsun. $0 \le r \le \sqrt{2}-1$ aralığındaki her bir r değeri için

$$\max_{|z|=r} |f'(z)| \le \max_{|z|=r} |g'(z)| \tag{3.91}$$

olur.

3.3.2 Sonuç : $g(z)=z$ olarak tanımlayıp ve $f(z)$ fonksiyonu $f(0)=0$, $|f(z)| \le 1$ ve $|z| \le 1$ için analitik ise, bu durumda $|z| \le \sqrt{2}-1$ için $|f'(z)| \le 1$ olur (MacGregor, 1967).

3.3.3. Sonuç: $g(z)$ ünivalent ise, $|z| \le 2-\sqrt{3}$ de $f'(z) \ll g'(z)$ dir. Ayrıca $g(z)$ fonksiyonu $|z|<1$ kümesini konveks bir küme üzerine bire bir dönüştürürse, o zaman $|z| \le \dfrac{1}{3}$ de $f'(z) \ll g'(z)$ olur.

3.3.1. Lemma: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $H \subset \mathbb{C}$' de analitik ve $f(z) \ll g(z)$ olsun.

A) H' de öyle bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ki; $f(z)=\varphi(z)\, g(z)$ ve $|\varphi(z)| \le 1$ dir.

B) Eğer $\dot{H} \subset H$ ise, $\dot{H}$' de $f(z) \ll g(z)$ dir.

C) Eğer $H=\mathbb{C}$ ise, o zaman uygun bir $|\varepsilon| \le 1$ değeri için $f(z)=\varepsilon\, g(z)$ dir.

İspat: A) z_0, $g(z)$ fonksiyonun bir sıfırı olsun. Bu durumda z_0 komşuluğundaki z için $g(z)$=0 durumunu sağlayan sıfırlarının dışında, $k \geq 1$ ve $b_k \neq 0$ olduğu yerde

$$g(z) = b_k (z - z_0)^k + b_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + ... = \sum_{m=k}^{\infty} b_m (z - z_0)^m \tag{3.92}$$

kuvvet serisi açılımı vardır. Bu yüzden r yeteri kadar küçük alınırsa, $|z - z_0| < r$ için

$$|g(z)| \leq 2b_k |z - z_0|^k \tag{3.93}$$

dir. z_0 komşuluğundaki z için $f(z)$ fonksiyonunu

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.94}$$

kuvvet serisine açabiliriz ve o zaman yeteri kadar küçük p ' ler için

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=p} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \tag{3.95}$$

olur. Böylece $p \leq r$ ise,

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=p} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{|z-z_0|=p} |f(z)|}{p^{n+1}} 2\pi p \quad , \quad (\max_{|z-z_0|=p} |f(z)| \leq \max_{|z-z_0|=p} |g(z)|) \\
&\leq \frac{1}{p^n} \max_{|z-z_0|=p} |g(z)| \\
&\leq \frac{1}{p^n} 2|b_k| p^k = 2|b_k| p^{k-n}
\end{aligned} \tag{3.96}$$

dir. $n < k$ için $p \to 0$ iken $a_n = 0$ olduğunu buluruz. Yani z_0 $f(z)$' nin, $g(z)$' de olduğu gibi, en az bir sıfırıdır. Bu yüzden $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu H ' de analitiktir. $|\varphi(z)| \leq 1$ olduğu için bu, (A)' yı ispatlar.

B) H ' de $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu $|\varphi(z)|\leq 1$ özelliğni sağlarsa, buna benzer özellik $\dot{H}$ ' de $|\varphi(z)|\leq 1$ sağlar.

C) Sonuç olarak $H=\mathbb{C}$ olursa, $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ tam ve sınırlı bir fonksiyondur. Bu yüzden Liouville Teoremine göre; $|\varepsilon|\leq 1$ ve kompleks sayı olan ε sayısı $\varphi(z)=\varepsilon$ ' dur.

3.3.1. Teorem: $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D ' de analitik, $g(0)=0$ ve $f(z)\ll g(z)$ olsun.

A) Eğer $0\leq r\leq\sqrt{2}-1$ ise, o zaman

$$\max_{|z|=r}|f'(z)|\leq \max_{|z|=r}|g'(z)| \tag{3.97}$$

dir.

B) Eğer D ' de $g(z)$ fonksiyonu ünivalent ise, o zaman $0\leq r\leq 2-\sqrt{3}$ de $f'(z)\ll g'(z)$ olur.

C) Eğer $g(z)$ fonksiyonu D bölgesini konveks bir bölgeye bire bir olarak dönüştürür ise, o zaman $|z|\leq\dfrac{1}{3}$ de $f'(z)\ll g'(z)$ dir.

İspat: A) Kabulümüzden D ' de $f(z)\ll g(z)$ olduğundan dolayı, $|\varphi(z)|\leq 1$ ve $f(z)=\varphi(z)\, g(z)$ ($z\in D$) olacak şekilde D 'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$f'(z)=\varphi'(z)g(z)+\varphi(z)g'(z) \tag{3.98}$$

dir. $\varphi(z)\in\Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)|\leq|z|$ olup,

$$\left|\varphi'(z)\right| \le \frac{1-\left|\varphi(z)\right|^2}{1-|z|^2} \quad , \qquad (z \in D) \tag{3.99}$$

olur.

Kabulümüzden $g(0)=0$ göz önüne alarak, 0' dan z ' ye doğru parçası göz önüne alınarak $g(z)=\int_0^z g'(w)\,dw$ yazabiliriz. $w=tz$, $0\le t\le 1$ parametre dönüşümü ile $g(z)=z\int_0^1 g'(tz)\,dt$ olur. Buradan

$$\left|g(z)\right| \le |z| \max_{|w|\le|z|} \left|g'(w)\right| \tag{3.100}$$

yazabiliriz. (3.98), (3.99) ve (3.100) kullanarak,

$$\left|f'(z)\right| \le \left|\varphi(z)\right|\left|g'(z)\right| + \left|\varphi'(z)\right|\left|g(z)\right| \tag{3.101}$$

$$\le \left|\varphi(z)\right| \max_{|w|\le|z|}\left\{\left|g'(w)\right|\right\} + \frac{1-\left|\varphi(z)\right|^2}{1-|z|^2}|z| \max_{|w|\le|z|}\left\{\left|g'(w)\right|\right\}$$

$$\le \frac{\left(1-|z|^2\right)\left|\varphi(z)\right| + \left(1-\left|\varphi(z)\right|^2\right)|z|}{1-|z|^2} \max_{|w|\le|z|}\left|g'(w)\right|$$

$$\le \frac{|z| + \left(1-|z|^2\right)\left|\varphi(z)\right| - |z|\left|\varphi(z)\right|^2}{1-|z|^2} \max_{|w|\le|z|}\left|g'(w)\right| \tag{3.102}$$

dir. $\left|\varphi(z)\right|=\rho$ ve $|z|=r$ ($0\le\rho\le 1$ ve $0\le r<1$) dersek,

$$Q(\rho) = r + \left(1-r^2\right)\rho - r\rho^2 \tag{3.103}$$

olur ve $0\le\rho\le 1$ aralığında artan olduğundan

$$Q(\rho) \le Q(1) = 1-r^2 \tag{3.104}$$

$1-r^2$ geçemez. O halde $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$ ' de maksimum değerini alır. Buradan r yarıçapını hesaplarsak, $r=\sqrt{2}-1$ bulunur. Böylece $|z|<\sqrt{2}-1$ de, $\left|f'(z)\right| \le \max_{|w|=|z|}\left|g'(w)\right|$ olur. Şimdi $|z|\le r$ ' de analitik fonksiyonunun Maksimum Modüllüğünden $|z|=r$ üzerinden (3.97) ifadesini elde ederiz.

B) D' de $g(z)$ fonksiyonu ünivalent olduğundan aynı zaman da sınırlıdır. O halde $g(z)$ fonksiyonu starlike bir fonksiyondur. Bu durumda her $z \in D$ için , $\text{Re}\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} > 0$ dır. $p(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)}$ dersek, $\text{Re}\{p(z)\} > 0$ ve $p(z) = 1 + ...$ olduğundan P sınıfındadır. O halde $p(z) = \frac{1-w(z)}{1+w(z)}$ olacak şekilde $w(z) \in \Omega$ fonksiyonu vardır. Buradan

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \Rightarrow g(z) = \frac{z(1+w(z))}{1-w(z)} g'(z) \tag{3.105}$$

ve $|w(z)| \le |z|$ olmasından

$$|g(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} |z| |g'(z)| \tag{3.106}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.99) ve (3.106) ifadelerini (3.101)' de yerine yazarsak,

$$|f'(z)| \le \frac{|z| + (1-|z|)^2 |\varphi(z)| - |z| |\varphi(z)|^2}{(1-|z|)^2} \tag{3.107}$$

elde edilir. Burada $|\varphi(z)| = \rho$ ve $|z| = r$ ($0 \le \rho \le 1$ ve $0 \le r < 1$) dersek,

$$Q(\rho) = r + (1-r)^2 \rho - r\rho^2 \tag{3.108}$$

olur ve $0 \le \rho \le 1$ aralığında artan olduğundan

$$Q(\rho) \le Q(1) = (1-r)^2 \tag{3.109}$$

$(1-r)^2$ yi geçemez. O halde $Q'(\rho) = 0$ ve $\rho = 1$ ' de maksimum değerini alır. Buradan r yarıçapını hesaplarsak, $r = 2 - \sqrt{3}$ bulunur. Böylece $0 \le r \le 2 - \sqrt{3}$ için, $|f'(z)| \le |g'(z)|$ sağlamış oluruz.

C) $g(z)$ fonksiyonu D bölgesini konveks bir bölge üzerine bire bir olarak dönüştürsün. $g(z)$ fonksiyonu D' de analitik olduğundan aynı zamanda ünivalenttir.

$g(z)$ fonksiyonu ünivalent ve konveks olduğundan, $g(z) \in C(1) = K(0)$ olur. Bu durumda $g(z) \in S^*\left(\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right)$ olacağından 3.1.1.3.Sonuçtan,

$$|g(z)| \leq |z|(1+|z|)|g'(z)| \tag{3.110}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.99) ve (3.110) ifadelerini (3.101)'de yerine yazarsak,

$$|f'(z)| \leq \frac{|z| + (1-|z|)|\varphi(z)| - |z||\varphi'(z)|^2}{1-|z|}|g'(z)| \tag{3.111}$$

bulunur. Burada $|\varphi(z)| = \rho$ ve $|z| = r$ ($0 \leq \rho \leq 1$ ve $0 \leq r < 1$) dersek,

$$Q(\rho) = r + (1-r)\rho - r\rho^2 \tag{3.112}$$

olur ve $0 \leq \rho \leq 1$ aralığında artan olduğundan

$$Q(\rho) \leq Q(1) = (1-r) \tag{3.113}$$

$(1-r)$ geçemez. O halde $Q'(\rho) = 0$ ve $\rho = 1$ ' de maksimum değerini alır. Buradan r yarıçapını hesaplarsak, $r = \frac{1}{3}$ bulunur. Böylece $|z| \leq \frac{1}{3}$ için, $|f'(z)| \leq |g'(z)|$ elde edilir. Bir başka değişle $|z| \leq \frac{1}{3}$ ' de $|f'(z)| \leq |g'(z)|$ ise, $f(z) \ll g(z)$ olur.

Bir başka majorasyon problemide; D 'de $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \ll g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ majorize edildiğinde $|a_n|$ ' nin en büyük sınırını bulma problemidir. Bununla ilgili sadece teorem ve lemma ifedelerini vereceğiz.

3.3.2. Lemma: $f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}$ fonksiyonu D ' de analitik olsun ve $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \frac{1}{2}$ sağlasın. O zaman $k = 1,2,3...$ için,

$$|c_{2k+1}| \leq \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2k} \tag{3.114}$$

olur (MacGregor, 1967).

3.3.2. Teorem: D' de analitik $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu $g(z)=\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ analitik fonksiyonu tarafından majorize edilmiş olsun.

A) D' de $g(z)$ ünivalent ise, o zaman her $n=1,2,3...$ için $|a_n| \le n$ olur.

B) D' de $g(z)$ spiral-like ise, o zaman her $n=1,2,3...$ için $|a_n| \le n$ olur.

C) Eğer $g(z)$ D bölgesini konveks bir bölgeye bire bir dönüştürür ise, o zaman her n için,

$$|a_n| \le 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+...+\left(\frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n-2)}\right)^2 \tag{3.115}$$

olur (MacGregor, 1967).

3.3.4. Sonuç : D' de $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1}$ fonksiyonu analitik olsun. Bu durumda

$$1+|c_3|^2+|c_5|^2+...+|c_{2k-1}|^2 \le k \tag{3.116}$$

dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde önce bilinen bazı teoremleri verdik. Daha sonra majorasyon ile subordinasyon arasındaki bağıntıyı araştırdık. $\left|\varphi'(z)\right| \le \dfrac{1-\left|\varphi(z)\right|^2}{1-|z|^2}$ eşitsizliğini gösterdik. Ayrıca $Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfımızdaki fonksiyonların majorize edilebilmeleri için en büyük r ($0<r<1$) yarıçapını bulduk ve bazı sonuçlar elde ettik.

4.1. Bazı Teoremler ve Majorasyon ile Subordinasyon Arasındaki İlişki

4.1.1. Teorem: Eğer $f(z)\in S$ ise,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le \left|f'(z)\right| \le \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad , \qquad (z\in D) \tag{4.1}$$

dir (Hille, 1959).

4.1.2. Teorem: Farz edelim ki $f(z)$ basit bağlantılı D bölgesinde analitik olsun. D' nin sınırı olan ∂D' de E_0 ve E_1 ayrık iki kümenin birleşimi olsun. Farz edelim ki;

A) Burada öyle bir sabit $C>0$ sayısı vardır ki; her $\varepsilon>0$ için, $z\in D$ ve z' nin E_0' a uzaklığı yeteri kadar küçük olması şartıyla $\left|f(z)\right|\le C+\varepsilon$ olur.

B) D' de holomorfik ve $0<\left|w(z)\right|<1$ olan öyle bir $w(z)$ fonksiyonu vardır ki; herhangi bir $\varepsilon>0$, $\eta>0$ için, $z\in D$ ve z' nin E_1' e mesafesi yeterince küçük olması şartıyla $\left|f(z)\left[w(z)\right]^{\eta}\right|\le C+\varepsilon$ olur.

Bu durumda her $z\in D$ için,

$$\left|f(z)\right|\le C \tag{4.2}$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik işareti D' nin herhangi bir yerinde sağlarsa, o zaman her yerde sağlanır ve $|f(z)| = C$ olur (Hille, 1959).

4.1.1. Sonuç: Yukarıdaki teorem S'de $|f(z)| \leq C$ olduğunu gösterir. Bu sonuç hem Liouville teoreminin genelleştirmesini verir hemde tam fonksiyonların teorileri üzerine taşınması açısından önemi vardır.

4.1.3. Teorem: D bölgesi π/α genişliğinde bir şeriti içine alsın. $f(z)$ D' de holomorfik ve z D' nin bütün sınır noktalarında 4.1.2.Teoreminin (A) durumunu sağlasın. Eğer her $\varepsilon > 0$ için aynı z ile ilgili olarak D' de $z \to \infty$ iken,

$$\lim \exp(-\varepsilon e^{\alpha|z|})|f(z)| = 0 \tag{4.3}$$

ise, o zaman $f(z)$ D'de sınırlandırılmış ve $|f(z)| \leq C$ olur (Hile, 1959).

4.1.4. Teorem: D z-düzleminde bir alan, G w-düzleminde bir alan ve her ikisi de sonlu sayıda birleştirilebilir Jordan eğrileri tarafından sınırlandırılmış olsun. $w = f(z)$ D'de holomorfik bir fonksiyon ve D' den G' ye değerler alan bir fonksiyon olsun. O zaman G' de z_1, z_0 gibi herhangi iki nokta seçersek $z \neq z_0$ için,

$$g\left[f(z), f(z_0); G\right] \geq g(z, z_0; D) \tag{4.4}$$

olur.

Eğer eşitlik işareti bir tek (z, z_0) çifti için sağlanırsa, o zaman eşitlik işareti hepsi için sağlanır.

İSPAT: $z_0 \neq 0$ olduğu farz edelim. Green fonksiyonunun tanımı ile D' de harmonik olan $g\left[f(z), f(z_0); G\right] + \log|f(z) - f(z_0)|$ ve $g(z, z_0; D) + \log|z - z_0|$ iki fonksiyon vardır. Bu yüzden onları farkı olan

$$g\left[f\left(z\right),f\left(z_0\right);G\right]-g\left(z,z_0;D\right)+\log\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \tag{4.5}$$

fonksiyonu da D ’ de harmoniktir.

$$\delta\left(z,z_0\right)=g\left[f\left(z\right),f\left(z_0\right);G\right]-g\left(z,z_0;D\right) \tag{4.6}$$

muhtemelen $+\infty$ ’ a ulaşabileceği $f\left(z\right)-f\left(z_0\right)$ sıfırlarının dışında D ’de harmonik olduğunu gösterir. z , ∂D ’ nin bir noktasına bağlı olduğu zaman, $\delta\left(z,z_0\right)$ fonksiyonu sıfırdan daha küçük sınırlandırılmaksızın yaklaşılır. D ’ deki bütün $\left(z,z_0\right)$ için $\delta\left(z,z_0\right)\geq 0$ olduğunu gösterir. Minimum Prensibi bütün $\left(z,z_0\right)$ için ya $\delta\left(z,z_0\right)>0$ yada $\delta\left(z,z_0\right)=0$ olduğunu gösterir.

Yani bütün $\left(z,z_0\right)$ için $\delta\left(z,z_0\right)\geq 0$ ise, $g\left[f\left(z\right),f\left(z_0\right);G\right]\geq g\left(z,z_0;D\right)$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

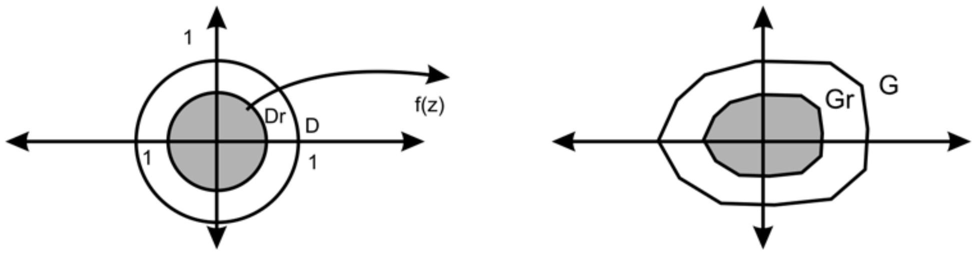
D ve G basit bağlantı olması durumunda özel bir durumdur. $F\left(u\right)$ ve $G\left(u\right)$iki yardımcı fonksiyonlar D ve G üzerine sırasıyla $|u|<1$’i

$$F\left(0\right)=z_0,\ F'\left(0\right)>0,\ G\left(0\right)=f\left(z_0\right),\ G'\left(0\right)>0$$

biçiminde görüntülenmiş olsun. D_r ve G_r ’ de ($0<r<1$) $|u|\leq r$ ’ nin görüntüleri olsun.

Lindelöf Prensibi aşağıdaki sonucu ima etmektedir.

4.1.2. SONUÇ: Değerler D_r ’den G_r ’ye ait olan $f\left(z\right)$ tarafından alınır ve bu değerlerden biri ∂G_r üzerinden alınırsa, o zaman $w=f\left(z\right)$ D uygun bir biçimde G üzerine alınır.



Şekil 4.1. Lindelöf Prensibinin geometrik gösterimi

Bu prensibin kullanımının bir örneği olarak, reel kısımları pozitif olan birim diskte holomorfik $f(z)$ fonksiyonlarının P sınıfını düşünebiliriz. $f(0)>0$ olduğunu farz edelim. Burada D birim disktir, G sağ yarı düzlem ve $z_0=0$, $w_0=f(0)$ alabiliriz. (4.4) eşitsizlikten

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{f(z)+f(0)}\right| \leq |z| \tag{4.7}$$

dir.

Bu $|t|\leq r$ olduğu yerde

$$f(z)=f(0)\frac{1+t}{1-t} \tag{4.8}$$

$|z|\leq r$ ise, ve bu yüzden

$$f(0)\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq f(0)\frac{1+r}{1-r} \ , \ f(z)\in P \ , \ |z|\leq r \tag{4.9}$$

çift yönlü eşitsizlik elde edilir. $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}\in P$ fonksiyonu birim diski sağ yarı düzlem üzerine görüntüler $z=-r$ olduğu zaman (4.9) deki 1. ve 2. ifadedeki eşitliği sağlarken, $z=r$ olduğu zaman (4.9) deki 2. ve 3. ifadedeki eşitliği sağlar. Yani,

$$z=-r \text{ ise, } f(0)\frac{1-r}{1+r}=|f(-r)|$$

$$z=r \text{ ise, } |f(r)|=f(0)\ \frac{1+r}{1-r}$$

dir.

Subordination, Lindelof Prensibinin arkasındaki izi gibidir. Daha kesin bir şekilde 4.1.4.Teoremin sonucuna göre D birim diskteki durumudur.

4.1.1. TANIM: $F(z)$, D birim diskinde analitik ve ünivalent $G = F(D)$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu da D' de analitik (ünivalent olması gerekmez) ve $f(D) \subset G$ olarak verilsin. Bu durmda $f(z)$, $F(z)$' ye D' de subordinatedir denir ve $f(z) \prec F(z)$ ile gösterilir.

4.1.5. TEOREM: Eğer D' de $f(z) \prec F(z)$ ise,

$$f(z) = F[w(z)] \quad , \qquad (z \in D) \tag{4.10}$$

olacak şekilde D'de analitik ve $|w(z)| < 1$ şartını sağlayan $w(z)$ fonksiyonu vardır. $f(0) = F(0)$ ise, $w(0) = 0$ ve $|w(z)| \le |z|$ olur.

İSPAT: $f(z) \prec F(z)$ bağıntısından, $f(D) \subset F(D)$' dir. O halde D' de $f(z)$' nin aldığı her değeri, bir de $F(z)$ alır. $w_0 \in f(D)$ olsun. O zaman D' de öyle z_0 ve z_1 noktaları vardır ki;

$$w_0 = F(z_0) = f(z_1) \tag{4.11}$$

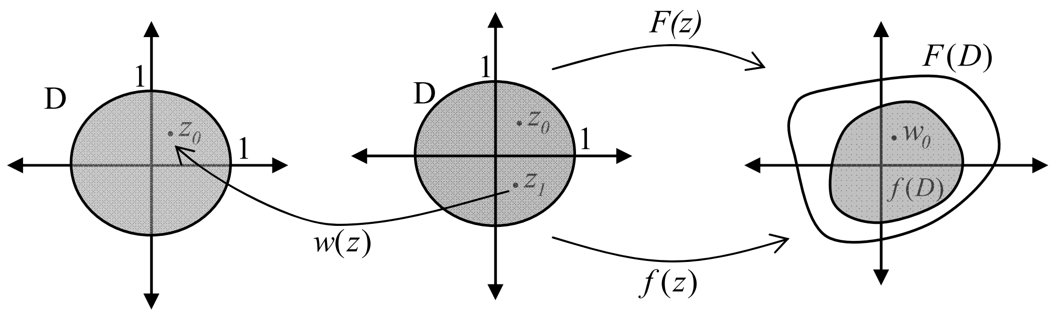
olacak şekilde w_0 noktasını z_0, z_1 tarafından bir tek şekilde belirtilir. Bu durumda z_0, z_1 noktasının tek değerli fonksiyonu olarak yazılabilir. Yani

$$z_0 = F^{-1}[f(z_1)] = w(z_1) \tag{4.12}$$

olur. Buna göre

$$f(z_1) = F[w(z_1)] \tag{4.13}$$

elde edilir. Buradan $w(z)$ fonksiyonunun D' de analitik ve $|w(z)| < 1$ olduğu görülür.



Şekil 4.2. $F(z)$, $f(z), w(z)$ fonksiyonların geometrik olarak gösterilmesi

Eğer $f(0)=F(0)$ ise, o zaman $f(0)=F(w(0))=F(0)$ dır. $F(z)$ ünivalent fonksiyon olduğu için $w(0)=0$ dır. Bu durumda Schwarz Lemmasına göre $|w(z)|\leq|z|$ olur.

Ayrıca 4.1.4.Teoreminin sonuçlarından

$$M(r;f)\leq M(r;F) \text{ veya } |f(z)|\leq \max_{|z|=r<1}|F(z)| \tag{4.14}$$

olduğuna dikkat ediniz.

Yukarıdaki $M(r;f)$, r yarıçaplı çemberde $|f(z)|$’ nin aldığı en büyük değerdir. Ayrıca $m(r;f)$ de r yarıçaplı çemberde $|f(z)|$’ nin aldığı en küçük değerdir.
4.1.4.Teoremin sonucu gerçekten daha güçlü bir sonuç veren teorem olarak yeniden belirtilebilir.

4.1.6. Teorem: D’ de $f(z)\prec F(z)$ ve $f(0)=F(0)$ olsun. $f(z)=F(cz)$, $|c|=1$ olmadıkça $D_r=\{z:|z|<r\}$ ve $G_r=F(D_r)$ olmak üzere $f(D_r)\subset G_r$ dir (Hile, 1959).

Ayrıca

$$f'(0)=F'(0)w'(0), \quad |w'(0)|\leq 1 \tag{4.15}$$

olduğu için,

$$|f'(0)| \le |F'(0)| \tag{4.16}$$

vardır.

Majorant ve Subordinate arasındaki bağıntılar 1943'te Werner Rogusinski tarafından keşfedildi. Bu teoremlerin bazılarını verelim.

4.1.7. Teorem: D'de $f(z) \prec F(z)$ ve $p > 0$ ise, o zaman

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta \quad , \qquad r < 1 \tag{4.17}$$

'dir (Hille, 1959).

4.1.3. Sonuç: Yukarıdaki teoremden süreklilik, $|z| = R$ $(0 < R < 1)$ için $F(z) \neq 0$ sınırını ortadan kaldırılabileceğini gösterir. Bu sonucu analiz fonksiyonel analiz diliyle de yorumlayabiliriz. $g(z)$ fonksiyonu eğer D birim diskte analitik ve

$$\limsup_{r} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} = \|g\|_p \tag{4.18}$$

sınırlı ise, $H_p(D)$ $(p \ge 1)$ sınıfında olduğunu söyleyebiliriz. Bununla ilgili olarak aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

4.1.4. Sonuç: Eğer $F(z) \in H_p(D)$ ünivalent bir fonksiyon ve D' de $f(z) \prec F(z)$ oluyorsa, o zaman $f(z) \in H_p(D)$ ve

$$\|f\|_p \le \|F\|_p \tag{4.19}$$

dir.

Aynı metodu kullanarak; sınırında veya içerisinde $f(z) \prec F(z)$ olması şartıyla

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f| re^{i\theta} | \, d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})| \, d\theta \tag{4.20}$$

sağlatabiliriz.

(4.17) eşitsizliğine geri dönelim. D ' de $f(z) \prec F(z)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} | f(re^{i\theta}) | \, d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} | F(re^{i\theta}) |^{p} \, d\theta \ , \ r < 1, \ p > 0 \tag{4.21}$$

dir. Eğer $p = 2$ ve $F \in H_2(D)$ olursa, eşitsizlik

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{ve} \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \tag{4.22}$$

olduğu yerde

$$\sum_{k=0}^{\infty} | a_k |^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} | A_k |^2 \tag{4.23}$$

olduğunu gösterir.

Daha kesin bir sonuç için aşağıdaki teoremde verilmiştir.

4.1.8. Teorem: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$, $f(0) = F(0)$ ve $f(z) \prec F(z)$ ise, her bir n için

$$\sum_{k=0}^{n} | a_k |^2 = \sum_{k=0}^{n} | A_k |^2 \tag{4.24}$$

dir.

İSPAT:

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{ve} \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k \tag{4.25}$$

olmak üzere $f(z) = s_n(z) + r_n(z), \quad F(z) = S_n(z) + R_n(z)$ yazabiliriz. $f(z) = F[w(z)]$ olduğu için

$$f(z) = S_n[w(z)] + R_n[w(z)] \tag{4.26}$$

dır. İkinci taraftaki $R_n[w(z)]$ ifadesi z 'nin $n+1$ ' den küçük dereceli hiçbir kuvvetini ihtiva etmez. Aynı şekilde.

$$S_n[\omega(z)] = s_n(z) + T_n(z) \tag{4.27}$$

ikinci taraftaki $T_n(z)$ ifadesi de $n+1$' den küçük dereceli hiçbir kuvvet ihtiva etmez. $w(0)=0$ olduğuna dikkat edelim. $s_n(z)$ ve $T_n(z)$ birbirlerine dik olduklarını kullanacağız. Şimdi genel anlamda $|w(z)| \leq |z|$ olduğundan

$$S_n[w(z)] \prec S_n(z) \tag{4.28}$$

demek,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(z)|^2 d\theta &\geq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n[w(z)]|^2 d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(z)|^2 \, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(z)|^2 \, d\theta \quad , \quad (S_n(z) \perp Tn(z)) \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} |s_n(z)|^2 \, d\theta \end{aligned} \tag{4.29}$$

olması anlamına gelir. Buda her $r<1$ için

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 r^{2k} \geq \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} \tag{4.30}$$

olur ve bundan dolayı $r=1$ için,

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k|^2 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \tag{4.31}$$

ispatlanmış olur.

4.1.9. Teorem: $f(0)=F(0)=0$, $F'(0)=1$ olacak şekilde $R(z)$ ve $F(z)$ birim diskte analitik fonksiyonlar olsun. Ayrıca $F(z)$ ünivalent ve $f(z) \prec F(z)$ olarak verilsin. Bu durumda

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2} \quad , \quad |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{4.32}$$

olur. Eşitlik sadece

$$f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)^2} \quad , \quad |\eta| = 1 \tag{4.33}$$

olmasıyla sağlanır.

İSPAT: $f(z)=F(w(z))$ olduğundan $|f'(z)|=|F'[w(z)]|.|w'(z)|$ eşitliği vardır. $F(w)$ ünivalent olduğu için, 4.1.1.Teorem' den

$$\left|F'(w)\right| \leq \frac{1+|w|}{(1-|w|)^3} \quad , \quad |w|<1 \tag{4.34}$$

yazılır. Burada (4.33) eşitliğini sağlayan extremal fonksiyondur. D' de $|w(z)|\leq|z|$ eşitsizliği varsa $|w'(0)|\leq 1$ dir. Eğer $w(z)$ fonksiyonu $|z_1-z_2|=|w(z_1)-w(z_2)|$ olarak tanımlanırsa, her z için $\left(1-|z|^2\right)|w'(z)|\leq 1-|w(z)|^2$ eşitsizliğini sağlar (Hille, 1959). Bu da

$$\frac{|w'(z)|}{1-|w(z)|^2}\leq\frac{1}{1-|z|^2} \tag{4.35}$$

olduğunu gösterir. Buradan da

$$|f'(z)|\leq\left(\frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|}\right)^2.\frac{1}{1-|z|^2} \tag{4.36}$$

yazılır. $|w(z)|\leq|z|$ ve (0,1) açık aralığında

$$\frac{1+x}{1-x} \tag{4.37}$$

fonksiyonu artan olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{1+|w(z)|}{1-|w(z)|}\leq\frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{4.38}$$

olur. Bu eşitsizlik (4.36)'de yerine yazılırsa, (4.32)' nin 2. eşitsizliği elde edilir. Bunu integre ederek 1. eşitsizliğe ulaşılır.

Verilen bir z için (4.32)'deki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart (4.34)'deki eşitliğin var olması ve ek olarak $|w(z)|\leq|z|$ olmasıdır. Bu $|\eta|$ = 1 ile $w(z)=\eta z$ eşit olduğunu gösterir. Ayrıca $F(z)$, (4.34)' de eşitliği sağlanması için (2.9)' daki extremal fonksiyonudur.

$G = F(D)$ bölgesi üzerinde özel varsayımlar altında subordinate fonksiyonları katsayılarının hesaplanması ele alınabilir.

4.1.10. Teorem: $f(z)$ ve $F(z)$ $f(0) = F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ olması şartıyla, D' de analitik; $F(z)$ ünivalent ve $f(z) \prec F(z)$; $G = F(D)$ konveks ise, bütün bu şartlar altında her n için $|a_n| \leq 1$' dir.

İSPAT: $g_m(z) = \dfrac{1}{m}[f(z) + f(\eta z) + f(\eta^2 z) + ... + f(\eta^{m-1} z)]$ fonksiyonunu düşünelim ve $\eta = \exp\dfrac{2\pi i}{m}$ olsun. Her $z \in D$ için, $f(z)$, $f(\eta z)$, … , $f(\eta^{m-1} z)$ hepsi G'de ve G konveks olduğundan $g_m(z) \in G$' dir. Bu $g_m(z) \prec F(z)$ olması demektir. Şimdi $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ve $g_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{km} z^{km}$ olsun. Bu sonuçtan $g_m(z^{1/m}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{km} z^k$ D' de analitik ve $g_m(z^{1/m}) \in G$' dir. Bu $g_m(z^{1/m}) \prec F(z)$ demektir. Şimdi $n = 1$ için 4.1.8.Teoremi kullanılarak her m için $|a_m| \leq |F'(0)| = 1$ olduğu görülür.

4.2. Yeral Olarak Majorasyon-Subordinasyon Teoremleri

Bu başlık altında majorasyon ile ilgili bazı teoremler verilecektir. Özellikle $|\varphi'(z)| \leq \dfrac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}$ olduğunu da gösterdik.

4.2.1. Tanım: D' de normalize edilmiş bütün fonksiyonların kümesini S ile gösterelim. $f(z)$, $F(z)$ ve $\varphi(z)$ $E = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < r \}$ kümesinde analitik olsun.

i) Eğer her $z \in E$ için $|f(z)| \leq |F(z)|$ oluyorsa E' de $f(z) \ll F(z)$' dir denir.

ii) Eğer her $z \in E$ için $|\varphi(z)| \le |z|$ iken $f(z) = F(\varphi(z))$ oluyorsa E ' de $f(z) \prec F(z)$ ' dir denir.

U_α ' daki fonksiyonlar için majorasyon yarıçapı $1,65 \le \alpha < \infty$ için $\alpha + 1 - (\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ olarak elde edilir.[6] Bu $\alpha = 2$ için 3-$\sqrt{8}$ bulunur. α=1 değeri için 2-$\sqrt{3}$ değeri bulunur ki; bu değer ünivalent konveks fonksiyonlarının türevinin majorasyon yarıçapıdır.

4.2.1. Lemma: $a \ge 0$, $|\varphi(z)| \le 1$ ve $\varphi(z) = az + ...$, olmak üzere D ' de analitik olsun. Bu durumda D 'de analitik ve $|w(z)| \le |z|$ olan $w(z)$ fonksiyonu için,

$$\varphi(z) = z\frac{a + w(z)}{1 + aw(z)} \tag{4.39}$$

dir. Üstelik D 'deki herhangi bir z_0 için $w(z_0) = c$ ise,

$$|\varphi'(z_0)| \le \left|\frac{a + 2c + ac^2}{(1 + ac)^2}\right| + \frac{1 - a^2}{|1 + ac|^2}\frac{|z_0|^2 - |c|^2}{1 - |z_0|^2} \tag{4.40}$$

dir.

İspat: D 'de $|\varphi(z)/z| \le 1$ olduğu için,

$$w(z) = \frac{\varphi(z)/z - a}{1 - a\varphi(z)/z} \tag{4.41}$$

fonksiyonu Schwarz lemmasını sağlar. (4.41) ifadesinden $\varphi(z)$ fonksiyonu çözülürse (4.39) ifadesi elde edilir.

D 'de bir z_0 noktası belirleyelim ve $w(z_0) = c$ olsun. $\varphi(z)$ ' nin z_0 noktasındaki türevi

$$\varphi'(z_0) = \left(z_0 w'(z_0) - c\right)\frac{\left(1-a^2\right)}{\left(1+ac\right)^2} + \frac{a+c}{1+ac} + \frac{c\left(1-a^2\right)}{\left(1+ac\right)^2} \tag{4.42}$$

dir. Burada

$$\left|z_0 w'(z_0) - c\right| \le \frac{\left|z_0\right|^2 - \left|c\right|^2}{1-\left|z_0\right|^2} \tag{4.43}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$|\zeta| < 1$ de Schwarz lemmasını ve $f(-z_0) = -c$ şartını sağlayan

$$f(\zeta) = \left\{ w\left(\frac{\zeta + z_0}{1+\overline{z}_0\zeta}\right) - w(z_0) \right\} / \left\{ 1 - \overline{w(z_0)}\, w\left(\frac{\zeta + z_0}{1+\overline{z}_0\zeta}\right) \right\} \tag{4.44}$$

fonksiyonu verilsin. $g(\zeta) = f(\zeta)/\zeta$ ve

$$h(\zeta) = \left(g(\zeta) - f'(0)\right)\left(1 - \overline{f'(0)}\, g(\zeta)\right)^{-1} \tag{4.45}$$

olsun. $h(\zeta)$ Schwarz lemmasını sağladığı için,

$$\left|h(-z_0)\right| = \left|\frac{c - z_0 f'(0)}{z_0 - c\overline{f'(0)}}\right| \le \left|z_0\right| \tag{4.46}$$

olur. Ayrıca $f'(0) = \left(1-\left|z_0\right|^2\right)\left(1-\left|c\right|^2\right)^{-1} w'(z_0)$ olduğunu göz önüne alıp, (4.46) ifadesinin her iki tarafının karesi alınıp ve

$$\left|z_0\right|^2 \left|w'(z_0)\right|^2 + \left|c\right|^2 - \left|z_0 w'(z_0) - c\right|^2 = \overline{w'(z_0)}\,\overline{z}_0 c + \overline{c} z_0 w'(z_0) \tag{4.47}$$

olduğu kullanılarak

$$\left(1-\left|z_0\right|^2\right)^2 \left(\left|z_0 w'(z_0) - c\right|^2 - \left|c\right|^2\right) \le \left(1-\left|c\right|^2\right)\left(\left|z_0\right|^4 - \left|c\right|^2\right) \tag{4.48}$$

elde edilir. Buradan da

$$\left(1-\left|z_0\right|^2\right)^2 \left(\left|z_0 w'(z_0) - c\right|^2\right) \le \left(\left|z_0\right|^2 - \left|c\right|^2\right)^2 \tag{4.49}$$

veya buna denk olarak

$$\left|z_0 w'(z_0) - c\right| \le \left(\left|z_0\right|^2 - \left|c\right|^2\right) / \left(1-\left|z_0\right|^2\right) \tag{4.50}$$

dir. (4.42) ifadesine (4.50) ifadesi yerine yazılırsa lemma ispatlanmış olur.

4.2.2. Lemma: 4.2.1.Lemma şartları altında

$$\left|\frac{\varphi(z)-z}{1-\bar{z}\varphi(z)}\right| \le \frac{|z|(1-a)}{1+|z|^2-|z|(1-a)} \quad , \qquad (z \in D) \tag{4.51}$$

ve

$$|\varphi'(z)| \le \frac{a\left(1+|z|^2\right)+2|z|}{1+|z|^2+2a|z|} \cdot \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} \quad , \qquad (z \in D) \tag{4.52}$$

dir (Campbell, 1974).

4.2.1. Sonuç: $a = f'(0) = 1$ alınırsa, $|\varphi'(z)| \le \dfrac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}$ bulunur. Buradaki $f(z)$ fonksiyonu çalıştığınız sınıftaki fonksiyondur.

4.2.3. Lemma: Eğer $1.65 \le \alpha \le 2$ ve $2 \le a \le 3$ veya $2 \le \alpha \le 3$ ve $1/6 \le a \le 1$ veya $3 \le \alpha \le \infty$ ve $1/10 \le a \le 1$ ise, o zaman θ' nın bir fonksiyonu olarak

$$\frac{\left(\left|1+ac-r_0^2(a+c)\right|+r_0(1-a)|1-c|\right)^{\alpha-1}}{\left(\left|1+ac-r_0^2(a+c)\right|-r_0(1-a)|1-c|\right)^{\alpha+1}}\left\{\left|a+2c+ac^2\right|\left(1-r_0^2\right)+\left(r_0^2-|c|^2\right)\left(1-a^2\right)\right\} \tag{4.53}$$

ifadesi maksimum değerini $\theta = 0$' da alır. Burada $0 \le r \le r_0 \le \alpha+1-\left(\alpha^2+2\alpha\right)^{1/2}$ ve $c = re^{i\theta}$ şeklindedir.

İspat: (4.53)'deki ifadeyi $I(\theta) = \dfrac{A^{\alpha-1}}{B^{\alpha+1}}C$, $D = \left|1-ar_0^2+c\left(a-r_0^2\right)\right|$ ve $E = r_0(1-a)|1-c|$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{A^{\alpha-2}}{B^{\alpha+2}}\left[\left\{AB\frac{dC}{d\theta}+2C\left(\frac{EdE}{d\theta}-\frac{DdD}{d\theta}\right)\right\}+2\alpha C\left(\frac{DdE}{d\theta}-\frac{EdD}{d\theta}\right)\right] \tag{4.54}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{dC}{d\theta}=\frac{-2ar\sin\theta}{\left|a+2c+ac^2\right|}\left(1-r_0^2\right)\left(1+r^2+2ar\cos\theta\right) \tag{4.55}$$

$$\frac{dD}{d\theta}=\frac{-r\sin\theta}{D}\left(1-ar_0^2\right)\left(a-r_0^2\right) \tag{4.56}$$

ve

$$\frac{dE}{d\theta}=\frac{r\sin\theta}{E}r_0^2\left(1-a\right)^2 \tag{4.57}$$

bulunur. Buradan da

$$AB=D^2-E^2=\left(1-r_0^2\right)\left[1-a^2r_0^2+r^2\left(a^2-r_0^2\right)+\left(1-r_0^2\right)2ar\cos\theta\right] \tag{4.58}$$

$$E\frac{dE}{d\theta}-D\frac{dD}{d\theta}=a\left(1-r_0^2\right)^2 r\sin\theta \tag{4.59}$$

$$D\frac{dE}{d\theta}-E\frac{dD}{d\theta}==\frac{rr_0\sin\theta\left(1-a^2\right)}{DE}\left(1-r_0^2\right)\left(1-ar_0^2+r^2\left(a-r_0^2\right)\right) \tag{4.60}$$

dir. O halde bulduğumuz bu ifadeleri (4.53)' de yerine yazarsak,

$$\frac{dI}{d\theta}=\frac{A^{\alpha-2}}{B^{\alpha+2}}\left(\frac{-2ar\sin\theta(1-r_0^2)^2(1-a^2)}{\left|a+2c+ac^2\right|}\right)\left\{I_1+I_2+I_3\right\} \tag{4.61}$$

olur. Buradan $I_1=\left(1-r^2\right)\left(1+r^2r_0^2\right)-2r^2\left(1-r_0^2\right)+2ar\left(r_0^2-r^2\right)\cos\theta$,

$I_2=-\left(r_0^2-r^2\right)\left|a+2c+ac^2\right|$ ve

$$I_3=\frac{-\alpha r_0}{a\left(1-r_0^2\right)}.\left\{\frac{1-ar_0^2+r^2\left(a-r_0^2\right)}{\left|1-c\right|.\left|1-ar_0^2+c\left(a-r_0^2\right)\right|}\right\}$$

$$.\left\{\left(1-a^2\right)\left(r_0^2-r\right)\left|a+2c+ac^2\right|+\left|a+2c+ac^2\right|\left(1+r_0^2\right)\right\}$$

ifadeleri bulunur.

Açıkçası $I\left(\theta\right)$' nın $\theta=0$' da maksimum değer aldığını göstermek için $I_1+I_2+I_3>0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Yani $\frac{dI}{d\theta}$' yı sıfır yapan tek değer $\sin\theta=0$ olmuş olur. Buradan $\theta=0$ bulunur. Böylece $\frac{dI}{d\theta}\leq 0$ olduğu için $I\left(\theta\right)$ azalan bir fonksiyon olup, $\theta=0$' da maksimum değerini aldığını göstermiş oluruz.

Önce I_3 için değer belirleyelim. I_3' ün paydası için

$$\left|1-c\right|\left|1-ar_0^2+c\left(a-r_0^2\right)\right|\geq\left(1-r\right)\left(1-ar_0^2+r\left(a-r_0^2\right)\right) \tag{4.62}$$

sağlanır. Buradan da

$$I_3 \le \frac{\alpha r_0}{a\left(1-r_0^2\right)} \frac{\left[1-ar_0^2+r^2\left(a-r_0^2\right)\right]\left(a+2r+ar^2\right)}{\left(1-r\right)\left(1-ar_0^2+r\left(a-r_0^2\right)\right)}\left\{\left(1-a^2\right)\left(r_0^2-r^2\right)+\left(a+2r+ar^2\right)(1-r_0^2)\right\}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade r' nin artan bir fonksiyonudur. $0 \le r \le r_0$ olduğundan, r yerine r_0 yazarsak ifadeyi daha da büyütmüş oluruz. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$I_3 \le \frac{\alpha r_0}{a} \frac{\left(1+r_0^2\right)\left(1+r_0\right)\left[a\left(1+r_0^2\right)+2r_0\right]^2}{\left(1-r_0\right)\left(1+r_0^2+r_0\left(a+1\right)\right)} = J_1 \tag{4.63}$$

elde edilir. Bununla beraber

$$\frac{d}{dr_0}\left(\frac{a\left(1+r_0^2\right)+2r_0}{1+r_0^2+r_0\left(1+a\right)}\right) = \frac{\left(1-r_0^2\right)\left[2-a\left(1+a\right)\right]}{\left(1+r_0^2+r_0\left(1+a\right)\right)^2} \tag{4.64}$$

dir. Bu yüzden J_1, r_0 ' da monoton artan bir fonksiyonun sonucudur ve böylece $J_1 \le J_1 |_{r_0=m}$, $m = m\left(\alpha\right) = \alpha + 1 - \left(\alpha^2 + 2\alpha\right)^{1/2}$ ($0 \le r \le r_0 \le m$) dir. Bu şartlar altında J_1 'deki $r_0 = m$ değeri için ve $1+m^2 = 2\left(\alpha+1\right)m$ olduğuna dikkat edersek,

$$\left|I_3\right| \le \frac{8\left(1+\alpha\right)}{a} \alpha m^3 \frac{\left(1+m\right)\left[1+a\left(\alpha+1\right)\right]^2}{\left(1-m\right)\left(3+a+2\alpha\right)} = J_2 \tag{4.65}$$

elde ederiz.

Şimdi $I_1 + I_2$ değerini daha küçülterek hesaplayalım. Bunun içinde $\theta = 0$ ve $a = 1$ aldık. Açıkça

$$I_1 + I_2 \ge \left(1-r^2\right)\left(1+r_0^2 r^2\right) - 2r^2\left(1-r_0^2\right) - \left(r_0^2 - r^2\right)\left(1+4r+r^2\right) = J_3 \tag{4.66}$$

dir. J_3 ' den daha küçüğünü elde etmek için,

$$\frac{dJ_3}{dr} = -4\left[r_0^2 + r\left(1 - r^2 - r_0^2 + r^2 r_0^2 - 3r\right)\right] < -4\left[r\left(1 - 2r_0^2 - 3r_0\right) + r_0^2\right] \tag{4.67}$$

ifadesine dikkat edelim. $1 - 2r_0^2 - 3r_0 \ge 1 - 2m^2 - 3m > 0.03$ olduğu için J_3, r' nin azalan fonksiyonudur. Bu yüzden $\left(1-m\right)^2 = 2\alpha m$ ve $\left(1-m^2\right)^2 = 4m^2\left(\alpha^2 + 2\alpha\right)$ dikkat edilirse,

$$J_3\left(r\right) \ge J_3\left(r_0\right) = \left(1-r_0^2\right)^3 \ge \left(1-m^2\right)^3 = \left[\left(1-m\right)\left(1+m\right)\right]^3 = \left(1-m\right)^4\left(1+m\right)^2 \frac{1+m}{1-m}$$

$$= 4m^2\alpha^2 2m\left(\alpha+2\right)\frac{1+m}{1-m} = 8m^3\left(\alpha^3 + 2\alpha^2\right)\frac{1+m}{1-m} = 8\alpha m^3 \frac{1+m}{1-m}\left(\alpha^2 + 2\alpha\right)$$

elde edilir. Bu yüzden

$$I_1 + I_2 + I_3 \ge J_3 - J_2$$

$$= \frac{8\alpha m^3\left(1+m\right)}{\left(1-m\right)a\left(3+a+2\alpha\right)}\left[a^2\left(-\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha - 1\right) + a\left(2\alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\right) - \left(\alpha+1\right)\right]$$

$$= \frac{8\alpha m^3\left(1+m\right)}{\left(1-m\right)a\left(3+a+2\alpha\right)} Q\left(a,\alpha\right) \tag{4.68}$$

olur. Lemmanın hipotezindeki α ve a' nın bütün pozitif durumları için $Q(a,\alpha)$' nın pozitif olduğunu göstermek zorundayız.

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \alpha^2\left(6a-3a^2\right)+\alpha\left(10a-4a^2\right)+2a-a^2-1$$
$$>0.57\alpha^2+0.96\alpha-0.81$$
$$>0$$

olduğu için $Q(a,\alpha)$' nın α' nın artan bir fonksiyonu olduğuna dikkat edelim.

$Q(a,\alpha)$ negatif temel katsayıları ile a' nın ikinci dereceden fonksiyonudur ve $Q(1,\alpha)=\alpha^3+3\alpha^2-4\geq 0$ dır. Bu yüzden, eğer (0,1) aralığındaki a_0 için $Q(a_0,\alpha)>0$ ise, o zaman bütün $a_0 \leq a \leq 1$ aralığındaki a' lar için $Q(a,\alpha)$>0 dır. Böylece $Q(3/20,1.65)$, $Q(1/6,2)$ ve $Q(1/10,3)$ her birinin pozitif olduğunu göstermiş olduk. Bu da lemmanın ispatını tamamlar.

4.3. $Q(j,\lambda,\alpha,n)$ Sınıfının Majorasyon Problemleri

Bu kısımda daha önceki majorasyon problemlerini $Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfında da sağlandığını gösterdik.

4.3.1. Tanım: D açık birim diskinde analitik olan

$$f(z)=z+\sum_{k=j+1}^{\infty} a_k z^k \quad , \qquad (\, j\in\mathbb{N};\ a_k\geq 0\,) \tag{4.69}$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı A_j olarak tanımlanır.

4.3.2. Tanım: A_j sınıfında olan $f(z)$ fonksiyonunun pozitif katsayılı $Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\lambda)z\left(D^n f(z)\right)'+\lambda z\left(D^{n+1} f(z)\right)'}{(1-\lambda)D^n f(z)+\lambda D^{n+1} f(z)}\right\}>\alpha \tag{4.70}$$

($j\in\mathbb{N}$; $0\leq\alpha<1$; $0\leq\lambda<1$; $n\in\mathbb{N}_0$; her $z\in D$)

olmasıdır. Burada D^n Salagean operatörüdür (Aouf, 1996).

4.3.1. Teorem: $f(z)\in A_j$ ve $g(z)\in Q(j,\lambda,\alpha,0)$ sınıfında olduğunu farz edelim. Eğer D kümesinde $f(z)\ll g(z)$ ise, o zaman

$$r=r(\lambda,\alpha)=\frac{2(1+\lambda\alpha)-\sqrt{4(1+\lambda\alpha)^2-(1-\lambda)^2}}{1-\lambda} \qquad (4.71)$$

olduğu yerde

$$|Df(z)|\le|Dg(z)| \ , \qquad (\ |z|<r\ )$$

veya

$$|f'(z)|\le|g'(z)| \qquad (4.72)$$

$$(\ j\in\mathbb{N};\ 0\le\alpha<1;\ 0\le\lambda<1; n\in\mathbb{N}_0;\ z\in D\ )$$

olur.

İspat: $g(z)\in Q(j,\lambda,\alpha,0)$ sınıfında olduğundan dolayı, her $z\in D$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\lambda)zg'(z)+\lambda z\big(Dg(z)\big)'}{(1-\lambda)g(z)+\lambda zg'(z)}\right\}>\alpha \qquad (4.73)$$

dir. $k(z)=\dfrac{(1-\lambda)zg'(z)+\lambda z\big(Dg(z)\big)'}{(1-\lambda)g(z)+\lambda zg'(z)}$ tanımlayıp,

$$p(z)=\frac{k(z)-\alpha}{1-\alpha} \qquad (4.74)$$

yazarsak, o zaman $\operatorname{Re}\{p(z)\}>0$ ve $p(z)=1+\ldots$ ($z\in D$) olup, buradan da

$$p(z)=\frac{1-w(z)}{1+w(z)} \ , \qquad (\ w(z)\in\Omega\ ) \qquad (4.75)$$

dir. (4.74) ve (4.75) kullanarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\lambda\big(1+w(z)\big)z^2g''(z)+\Big[(1-\lambda\alpha)\big(1+w(z)\big)-(1-\alpha)\big(1-w(z)\big)\lambda\Big]zg'(z)$$

$$=\Big[(1-\alpha)(1-\lambda)\big(1-w(z)\big)+\alpha(1-\lambda)\big(1+w(z)\big)\Big]g(z)$$

olur ve bu son eşitlikten

$$\big(1+|w(z)|\big)(1+\lambda+2\lambda\alpha)|z||g'(z)|\ge\big(1-|w(z)|\big)(1-\lambda)|g(z)|$$

veya

$$\left(1-|w(z)|\right)(1-\lambda)|g(z)| \le \left(1+|w(z)|\right)(1+\lambda+2\lambda\alpha)|Dg(z)| \tag{4.76}$$

eşitsizliğini bulabiliriz. $|w(z)| \le |z|$ olduğundan

$$|g(z)| \le \frac{(1+|z|)(1+\lambda+2\lambda\alpha)}{(1-|z|)(1-\lambda)}|Dg(z)| \tag{4.77}$$

olur.

D' de $f(z) \ll g(z)$ olduğundan dolayı, $|\varphi(z)| \le 1$ ve $f(z) = \varphi(z)\, g(z)$ $(z \in D)$ olacak şekilde D'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$\begin{aligned} Df(z) &= D\left(\varphi(z)g(z)\right) \\ Df(z) &= \varphi'(z)zg(z)+\varphi(z)Dg(z) \\ |Df(z)| &\le |\varphi'(z)||z||g(z)|+|\varphi(z)||Dg(z)| \end{aligned} \tag{4.78}$$

dir. $\varphi(z) \in \Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)| \le |z|$ olup,

$$|\varphi'(z)| \le \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} \quad , \qquad (z \in D) \tag{4.79}$$

olur. (4.77), (4.78) ve (4.79) ifadelerindeki eşitsizliklerden,

$$|Df(z)| \le \left[\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\frac{(1+|z|)(1+\lambda+2\lambda\alpha)}{(1-|z|)(1-\lambda)}|z|+|\varphi(z)|\right]|Dg(z)| \ , \quad (z \in D) \tag{4.80}$$

bulunur. $|z| = r$ ve $|\varphi(z)| = \rho$ $(0 \le \rho \le 1)$ alınıp yerine yazıldığında

$$|Df(z)| \le \frac{Q(\rho)}{(1-r)^2(1-\lambda)}|Dg(z)| \tag{4.81}$$

olur ki, burada $Q(\rho)$ fonksiyonu

$$Q(\rho) = \left(1-\rho^2\right)(1+\lambda+2\lambda\alpha)r+(1-r)^2(1-\lambda)\rho \ , \qquad (0 \le \rho \le 1) \tag{4.82}$$

şeklindedir. Dahası

$$A(\rho) = \left(1-\rho^2\right)(1+\lambda+2\lambda\alpha)\sigma+(1-\sigma)^2(1-\lambda)\rho \ , \quad (0 \le \sigma \le r) \tag{4.83}$$

ile tanımlanan $A(\rho)$ fonksiyonu $0 \le \rho \le 1$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$A(\rho)=A(1)\leq(1-\sigma)^2(1-\lambda)\quad,\quad(0\leq\rho\leq1\,;0\leq\sigma\leq r\,) \tag{4.84}$$

olur. Bu halde $Q(\rho)$ fonksiyonu $\rho=1$ ve (4.71)' deki $r=r(\lambda,\alpha)$ de maksimum değerini alır.

Şimdi $r=r(\lambda,\alpha)$ değerini bulalım. $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$ yazıp denklemi çözersek (4.71)' deki $r=r(\lambda,\alpha)$ değerini buluruz.

Sonuç olarak $|z|\leq r(\lambda,\alpha)$ eşitsizliği durumunda (4.72)' deki ifade sağladığını göstermiş olduk. Bu da teoremi ispatlar.

4.3.2. Teorem: $f(z)\in A_j$ ve $g(z)\in Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfında olduğunu farz edelim. Eğer D kümesinde $D^n\ f(z)\ll D^n\ g(z)$ ise, o zaman

$$r=r(\lambda,\alpha)=\frac{2(1+\lambda\alpha)-\sqrt{4(1+\lambda\alpha)^2-(1-\lambda)^2}}{1-\lambda} \tag{4.85}$$

olduğu yerde

$$\left|\left(D^n f(z)\right)'\right|\leq\left|\left(D^n g(z)\right)'\right|\quad,\qquad(\ |z|<r\ )$$

veya

$$\left|D^{n+1}f(z)\right|\leq\left|D^{n+1}g(z)\right| \tag{4.86}$$

$$(\ j\in\mathbb{N}\,;\ 0\leq\alpha<1;\ 0\leq\lambda<1;n\in\mathbb{N}_0\,;\ z\in D\ )$$

olur.

İspat: $g(z)\in Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfında olduğundan dolayı, her $z\in D$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\lambda)z\left(D^n g(z)\right)'+\lambda z\left(D^{n+1}g(z)\right)'}{(1-\lambda)D^n g(z)+\lambda D^{n+1}g(z)}\right\}>\alpha \tag{4.87}$$

dir. $k(z)=\dfrac{z\left(D^n g(z)\right)'+\lambda z^2\left(D^n g(z)\right)''}{(1-\lambda)D^n g(z)+\lambda z\left(D^n g(z)\right)'}$ tanımlayıp,

$$p(z)=\frac{k(z)-\alpha}{1-\alpha} \tag{4.88}$$

yazarsak, o zaman $\operatorname{Re}\{p(z)\}>0$ ve $p(z)=1+\ldots$ ($z\in D$) olup, buradan da

$$p(z)=\frac{1-w(z)}{1+w(z)} \quad , \qquad (w(z)\in\Omega) \tag{4.89}$$

dir. (4.88) ve (4.89) kullanarak gerekli işlemler yapıldığında1

$$\lambda(1+w)z^2\left(D^n g\right)''+\left[(1+\lambda\alpha)(1+w)-(1-\alpha)(1-w)\lambda\right]z\left(D^n g\right)'=$$
$$\left[(1-\alpha)(1-\lambda)(1-w)+\alpha(1-\lambda)(1+w)\right]D^n g$$

olur ve bu son eşitlikten

$$\left(1-|w(z)|\right)(1-\lambda)\left|D^n g(z)\right|\leq\left(1+|\mathrm{w}(\mathrm{z})|\right)(1+\lambda+2\lambda\alpha)\left|D^{n+1}g(z)\right| \tag{4.90}$$

eşitsizliğini bulabiliriz. $|w(z)|\leq|z|$ olduğundan

$$\left|D^n g(z)\right|\leq\frac{\left(1+|\mathrm{z}|\right)(1+\lambda+2\lambda\alpha)}{\left(1-|z|\right)(1-\lambda)}\left|D^{n+1}g(z)\right| \tag{4.91}$$

olur.

D’ de $D^n f(z)\ll D^n g(z)$ olduğundan dolayı, $|\varphi(z)|\leq 1$ ve $D^n f(z)=\varphi(z)\, D^n g(z)$ ($z\in D$) olacak şekilde D’de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$\begin{aligned}
&D\left(D^n f(z)\right)=D\left(\varphi(z)D^n g(z)\right)\\
&D^{n+1}f(z)=\varphi'(z)zD^n g(z)+\varphi(z)D^{n+1}g(z)\\
&\left|D^{n+1}f(z)\right|\leq|\varphi'(z)||z|\left|D^n g(z)\right|+|\varphi(z)|\left|D^{n+1}g(z)\right|
\end{aligned} \tag{4.92}$$

dir. $\varphi(z)\in\Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)|\leq|z|$ olup,

$$|\varphi'(z)|\leq\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} \quad , \qquad (z\in D) \tag{4.93}$$

olur. (4.91), (4.92) ve (4.93) ifadelerindeki eşitsizliklerden,

$$\left|D^{n+1}f(z)\right|\leq\left[\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\frac{\left(1+|\mathrm{z}|\right)(1+\lambda+2\lambda\alpha)}{\left(1-|z|\right)(1-\lambda)}|z|+|\varphi(z)|\right]\left|D^{n+1}g(z)\right| \ , \ (z\in D) \tag{4.94}$$

bulunur. $|z|=r$ ve $|\varphi(z)|=\rho$ $(0\leq\rho\leq 1)$ alınıp yerine yazıldığında

$$\left|D^{n+1}f(z)\right| \le \frac{Q(\rho)}{(1-r)^2(1-\lambda)}\left|D^{n+1}g(z)\right| \tag{4.95}$$

olur ki, burada $Q(\rho)$ fonksiyonu

$$Q(\rho)=\left(1-\rho^2\right)\left(1+\lambda+2\lambda\alpha\right)r+\left(1-r\right)^2\left(1-\lambda\right)\rho \ , \ (0\le\rho\le1) \tag{4.96}$$

şeklindedir.

$$A(\rho)=\left(1-\rho^2\right)\left(1+\lambda+2\lambda\alpha\right)\sigma+\left(1-\sigma\right)^2\left(1-\lambda\right)\rho \ , \ (0\le\sigma\le r) \tag{4.97}$$

ile tanımlanan $A(\rho)$ polinomu $0\le\rho\le1$ aralığında artan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$A(\rho)=A(1)\le\left(1-\sigma\right)^2\left(1-\lambda\right) \ , \qquad (0\le\rho\le1\,;0\le\sigma\le r) \tag{4.98}$$

olur. Bu halde $Q(\rho)$ fonksiyonu $\rho=1$ ve (4.95)' deki $r=r(\lambda,\alpha)$ de maksimum değerini alır.

Şimdi $r=r(\lambda,\alpha)$ değerini bulalım. $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$ yazıp denklemi çözersek (4.95)' deki $r=r(\lambda,\alpha)$ değerini buluruz.

Sonuç olarak $|z|\le r(\lambda,\alpha)$ eşitsizliği durumunda (4.96)' deki ifade sağladığını göstermiş olduk. Bu da teoremi ispatlar.

4.3.3. Teorem: $f(z)\in A_j$ ve $g(z)\in Q(j,\lambda,\alpha,0)$ sınıfında olduğunu ve $f(z)\ll g(z)$ olsun.

A) Eğer $0\le r\le\sqrt{2}-1$ ise, o zaman

$$\max_{|z|=r}\left|Df(z)\right|\le\max_{|z|=r}\left|Dg(z)\right| \tag{4.99}$$

dir.

B) $Q(j,\lambda,\alpha,0)$ sınıfında $\lambda=0$ için, $0\le r\le2-\sqrt{3}$ de $Df(z)\ll Dg(z)$ olur.

C) Eğer $g(z)$ D bölgesini konveks bir bölgeye bire bir olarak dönüştürür ise, o zaman $|z|\le\frac{1}{3}$ de $Df(z)\ll Dg(z)$ dir.

İspat: A) Kabulümüzden D' de $f(z)\ll g(z)$ olduğundan dolayı, $|\varphi(z)|\le 1$ ve $f(z)=\varphi(z)\,g(z)$ ($z\in D$) olacak şekilde D'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$Df(z)=\varphi'(z)zg(z)+\varphi(z)Dg(z) \tag{4.100}$$

dir. $\varphi(z)\in\Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)|\le|z|$ olup,

$$|\varphi'(z)|\le\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\quad,\qquad (z\in D) \tag{4.101}$$

olur.

0' dan z' ye doğru parçası üzerinden integrasyon yolunu seçerek

$$g(z)=\int_0^z\frac{Dg(w)}{w}dw=\int_0^z g'(w)\,dw \tag{4.102}$$

yazabiliriz. $w=tz$, $0\le t\le 1$ parametre dönüşümü ile $g(z)=z\int_0^1 g'(tz)\,dt$ olur. Buradan

$$|g(z)|=|z|\left|\int_0^1 g'(w)\,dt\right|$$

$$\Rightarrow |g(z)|\le|z|\max_{|w|\le|z|}|g'(w)|=\max_{|z|\le r}|Dg(z)| \tag{4.103}$$

yazabiliriz. (4.78), (4.100), (4.101) ve (4.103) ifadelerini kullanarak,

$$|Df(z)|\le|\varphi'(z)||z||g(z)|+|\varphi(z)||Dg(z)|$$

$$\le\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}|z|\max_{|z|\le r}\{|Dg(z)|\}+|\varphi(z)|\max_{|w|\le|z|}\{|Dg(z)|\}$$

$$\le\frac{|z|+\left(1-|z|^2\right)|\varphi(z)|-|z||\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\max_{|w|\le|z|}|g'(w)| \tag{4.104}$$

dir. $|\varphi(z)|=\rho$ ve $|z|=r$ ($0\le\rho\le 1$ ve $0\le r<1$) dersek,

$$Q(\rho)=r+\left(1-r^{2}\right)\rho-r\rho^{2} \tag{4.105}$$

olur ve $0\leq\rho\leq1$ aralığında

$$Q(\rho)\leq Q(1)=1-r^{2} \tag{4.106}$$

artandır ve bu yüzden $1-r^{2}$ geçemez. O halde $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$' de maksimum değerini alır. Buradan r yarıçapını hesaplarsak, $r=\sqrt{2}-1$ bulunur. Böylece $|z|<\sqrt{2}-1$ de, $|f'(z)|\leq\max_{|w|=|z|}|g'(w)|$ olur. Şimdi $|z|\leq r$' de analitik fonksiyonunun Maksimum Modüllüğünden $|z|=r$ üzerinden (4.99) ifadesini elde ederiz.

B) 4.3.1.Teorem' de $\lambda=0$ için $|z|\leq2-\sqrt{3}$ de $|Df(z)|\leq|Dg(z)|$ olduğundan, $Df(z)\ll Dg(z)$ olur.

C) $g(z)$ fonksiyonu D bölgesini konveks bir bölge üzerine bire bir olarak dönüştürsün. $g(z)$ D' de analitik olduğundan aynı zamanda ünivalenttir. $g(z)$ fonksiyonu ünivalent ve konveks olduğundan, 3.3.2.Teoremin (C) ispatındaki aynı muhakeme ile

$$|g(z)|\leq|z|(1+|z|)|g'(z)|$$

$$\Rightarrow|g(z)|\leq(1+|z|)|Dg(z)| \tag{4.107}$$

eşitsizliğini kullanabiliriz. (4.101) ve (4.107) ifadelerini (4.100)'de yerine yazarsak,

$$|Df(z)|\leq\frac{|z|+(1-|z|)|\varphi(z)|-|z||\varphi'(z)|^{2}}{1-|z|}|Dg(z)| \tag{4.108}$$

bulunur. Burada $|\varphi(z)|=\rho$ ve $|z|=r$ ($0\leq\rho\leq1$ ve $0\leq r<1$) dersek,

$$Q(\rho)=r+(1-r)\rho-r\rho^{2} \tag{4.109}$$

olur ve $0\leq\rho\leq1$ aralığında

$$Q(\rho)\leq Q(1)=(1-r) \tag{4.110}$$

artandır ve bu yüzden $(1-r)$ geçemez. O halde $Q'(\rho)=0$ ve $\rho=1$' de maksimum değerini alır. Buradan r yarıçapını hesaplarsak, $r=\frac{1}{3}$ bulunur. Böylece $|z|\leq\frac{1}{3}$ için, $|Df(z)|\leq|Dg(z)|$ elde edilir. Bir başka değişle $|z|\leq\frac{1}{3}$' de $|Df(z)|\leq|Dg(z)|$ ise, $Df(z)\ll Dg(z)$ olur.

4.3.4. Teorem: $f(z)\in A_j$ ve $g(z)\in Q(j,\lambda,\alpha,n)$ sınıfında olduğunu ve $D^n\ f(z)\ll D^n\ g(z)$ olsun.

A) Eğer $0\leq r\leq\sqrt{2}-1$ ise, o zaman

$$\max_{|z|=r}\left|D^{n+1}f(z)\right|\leq\max_{|z|=r}\left|D^{n+1}g(z)\right| \tag{4.111}$$

dir.

B) $Q(j,\lambda,\alpha,0)$ sınıfında $\lambda=0$ için, $0\leq r\leq 2-\sqrt{3}$ de $D^{n+1}f(z)\ll D^{n+1}g(z)$ olur.

C) Eğer $g(z)$ D bölgesini konveks bir bölgeye bire bir olarak dönüştürür ise, o zaman $|z|\leq\frac{1}{3}$ de $D^{n+1}f(z)\ll D^{n+1}g(z)$ dir.

İspat: A) Kabulümüzden D' de $D^n\ f(z)\ll D^n\ g(z)$ olduğundan dolayı, $|\varphi(z)|\leq 1$ ve $f(z)=\varphi(z)\ g(z)$ ($z\in D$) olacak şekilde D'de analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır ve

$$D^{n+1}f(z)=\varphi'(z)zD^n g(z)+\varphi(z)D^{n+1}g(z) \tag{4.112}$$

dir. $\varphi(z)\in\Omega$ olduğuna dikkat edilirse $|\varphi(z)|\leq|z|$ olup,

$$|\varphi'(z)|\leq\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\ , \qquad (z\in D) \tag{4.113}$$

olur.

0' dan z ' ye doğru parçası üzerinden integrasyon yolunu seçerek

$$D^n g(z) = \int_0^z \frac{D^{n+1}g(w)}{w}\,dw = \int_0^z \left(D^n g(w)\right)' dw \tag{4.114}$$

yazabiliriz. $w = tz$, $0 \le t \le 1$ parametre dönüşümü ile $D^n g(z) = z\int_0^1 \left(D^n g(tz)\right)' dt$ olur.

Buradan

$$\left|D^n g(z)\right| = |z|\left|\int_0^1 \left(D^n g(w)\right)' dt\right|$$

$$\Rightarrow \left|D^n g(z)\right| \le |z| \max_{|w|\le|z|} \left|\left(D^n g(w)\right)'\right| \le \max_{|z|\le r} \left|D^{n+1} g(z)\right| \tag{4.115}$$

yazabiliriz. (4.112), (4.113) ve (4.115) ifadelerini kullanarak,

$$\left|D^{n+1} f(z)\right| \le \left|\varphi'(z)\right||z|\left|D^n g(z)\right| + \left|\varphi(z)\right|\left|D^{n+1} g(z)\right|$$

$$\le \frac{1-\left|\varphi(z)\right|^2}{1-|z|^2}|z| \max_{|z|\le r}\left\{\left|D^{n+1} g(z)\right|\right\} + \left|\varphi(z)\right| \max_{|w|\le|z|}\left\{\left|D^{n+1} g(z)\right|\right\}$$

$$\le \frac{|z| + \left(1-|z|^2\right)\left|\varphi(z)\right| - |z|\left|\varphi(z)\right|^2}{1-|z|^2} \max_{|z|\le|r|}\left|D^{n+1} g(z)\right| \tag{4.116}$$

dir. $\left|\varphi(z)\right| = \rho$ ve $|z| = r$ ($0 \le \rho \le 1$ ve $0 \le r < 1$) dersek,

$$Q(\rho) = r + \left(1-r^2\right)\rho - r\rho^2 \tag{4.117}$$

olur ve $0 \le \rho \le 1$ aralığında

$$Q(\rho) \le Q(1) = 1 - r^2 \tag{4.118}$$

artandır ve bu yüzden $1-r^2$ geçemez. O halde $Q'(\rho) = 0$ ve $\rho = 1$ ’ de maksimum değerini alır. Buradan r yarıçapını hesaplarsak, $r = \sqrt{2} - 1$ bulunur. Böylece $|z| < \sqrt{2} - 1$ de, $\left|f'(z)\right| \le \max_{|w|=|z|}\left|g'(w)\right|$ olur. Şimdi $|z| \le r$ ’ de analitik fonksiyonunun Maksimum Modüllüğünden $|z| = r$ üzerinden (4.111) ifadesini elde ederiz.

B) 4.3.2.Teorem’ de $\lambda = 0$ için $|z| \le 2 - \sqrt{3}$ de $\left|D^{n+1} f(z)\right| \le \left|D^{n+1} g(z)\right|$ olduğundan, $D^{n+1} f(z) \ll D^{n+1} g(z)$ olur.

C) $D^n\ g(z)$ fonksiyonu D' de ünivalent ve konveks olduğundan, 3.3.2.Teoremin (C) ispatındaki aynı muhakeme ile

$$\left|D^n g(z)\right| \le |z|(1+|z|)\left|\left(D^n g(z)\right)'\right|$$

$$\Rightarrow \left|D^n g(z)\right| \le (1+|z|)\left|D^{n+1} g(z)\right| \tag{4.119}$$

eşitsizliğini kullanabiliriz. (4.113) ve (4.119) ifadelerini (4.92)'de yerine yazarsak,

$$\left|D^{n+1} f(z)\right| \le \frac{|z|+(1-|z|)|\varphi(z)|-|z||\varphi'(z)|^2}{1-|z|}\left|D^{n+1} g(z)\right| \tag{4.120}$$

bulunur. Burada $|\varphi(z)| = \rho$ ve $|z| = r$ ($0 \le \rho \le 1$ ve $0 \le r < 1$) dersek,

$$Q(\rho) = r + (1-r)\rho - r\rho^2 \tag{4.121}$$

olur ve $0 \le \rho \le 1$ aralığında

$$Q(\rho) \le Q(1) = (1-r) \tag{4.122}$$

artandır ve bu yüzden $(1-r)$ geçemez. O halde $Q'(\rho) = 0$ ve $\rho = 1$' de maksimum değerini alır. Buradan r yarıçapını hesaplarsak, $r = \frac{1}{3}$ bulunur. Böylece $|z| \le \frac{1}{3}$ için, $\left|D^{n+1} f(z)\right| \le \left|D^{n+1} g(z)\right|$ elde edilir. Bir başka değişle $|z| \le \frac{1}{3}$' de $\left|D^{n+1} f(z)\right| \le \left|D^{n+1} g(z)\right|$ ise, $D^{n+1} f(z) \ll D^{n+1} g(z)$ olur.

5. SONUÇLAR

Bu bölümde, giriş bölümünde verdiğimiz üç problemle ilgili teorem ve sonuçları verdik. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçlarında sağlandığı kolayca görülebilir.

5.1. Tanım: M fonksiyonlar ailesi, eğer aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa lineer invariant olarak adlandırılır.

i) M ’de her $f(z)$ fonksiyonu D’ de analitik, yerel olarak ünivalent (yani $f(z) \neq 0$) ve $f(z) = z + a_2 z^2 + ...$ formuna sahip

ii) $\varphi(z): D \to D$ bilineer ve $f(z) \in M$ ise, bu durumda

$$\Lambda_{\varphi}\left[f(z)\right] = \frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{\varphi'(0) f'(\varphi(0))} = z + ... \tag{5.1}$$

fonksiyonu da M ’ de olmalıdır (Campbell, 1971).

5.2. Tanım: M lineer bağımsız ailesinin mertebesi

$$\alpha = \sup_{f \in M}\left[\frac{f''(0)}{2}\right] \tag{5.2}$$

ile tanımlanır. Her zaman $\alpha \geq 1$’ dir (Campbell, 1971).

5.3. Tanım: U_{α} ($1 \leq \alpha < \infty$) *α.mertebeden* üniversal lineer invariant fonksiyonların ailesidir. Yani, *α.mertebeden* bütün lineer invariant ailelerin birleşimidir. $F(z) \in U_{\alpha}$ ise, bu durumda

$$F(z) = \frac{1}{2\alpha}\left\{1 - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}\right\} \tag{5.3}$$

şeklindedir (Pommerenke, 1964).

5.4. Tanım: $f(z)$, $F(z)$ ve $\varphi(z)$ fonksiyonları $E=\{z:|z|<r\}$ diskinde analitik fonksiyonlar olmak üzere;

i) Eğer $|f(z)|\leq|F(z)|$ ise, E' de $f(z)$ fonksiyonu $F(z)$ tarafından majorize edilmiştir denir ve $f(z)\ll F(z)$ ile gösterilir.

ii) Eğer $|\varphi(z)|\leq|z|$ olduğu yerde $f(z)=F(\varphi(z))$ oluyorsa E' de $f(z)$ fonksiyonu $F(z)$' ye subordinatedir denir ve $f(z)\prec F(z)$ ile gösterilir (Campbell, 1971).

5.1. Teorem: D diskinde $f(z)\ll F(z)$ olsun. Eğer $F(z)\in U_\alpha$ $(1\leq\alpha<\infty)$ ise, o zaman

$$|z|\leq\frac{(1+\alpha)^{1/\alpha}-1}{(1+\alpha)^{1/\alpha}+1}=\tanh\left(\frac{\ln(\alpha+1)}{2\alpha}\right) \tag{5.4}$$

olduğu yerde $f'(z)\ll F'(z)$ dir (Campbell, 1971).

5.1. Sonuç: D diskinde $f(z)\ll F(z)$ olsun. Eğer $F(z)\in U_1$ ise, o zaman $|z|\leq\frac{1}{3}$ diskinde $f'(z)\ll F'(z)$ dir. Eğer $F(z)\in U_2$ ise, o zaman $|z|\leq 2-\sqrt{3}$ diskinde $f'(z)\ll F'(z)$ dir.

5.2. Teorem: D' de $f'(0)\geq 0$ ve $f(z)\ll F(z)$ olsun. $R_1(\alpha)$

$$\frac{2x}{1+x^2}-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2\alpha}\right)^{1/2}=0 \tag{5.5}$$

eşitliğinin $[0,1]$ aralığındaki kökü ve $R_2(\alpha)$da

$$x(1+x)^{\alpha}-(1-x)^{\alpha}=0 \tag{5.6}$$

eşitliğinin $[0,1]$ aralığındaki kökü olsun. Eğer $F(z)\in U_\alpha$ $(1\leq\alpha\leq 2.88)$ ise, bu durumda her $\alpha\geq 1$ için $R_1(\alpha)\leq R(\alpha)\leq R_2(\alpha)$ $|z|\leq R(\alpha)$ diskinde $f(z)\prec F(z)$ dir (Campbell, 1971).

5.2. Sonuç: D' de $f'(0)\geq 0$ ve $f(z)\ll F(z)$ olsun. Eğer $F(z)\in U_1$ ise, o zaman $0.28\leq R\leq \sqrt{2}-1$ için $|z|<R$ diskinde $f(z)\prec F(z)$ dir. Eğer $F(z)\in U_2$ ise, ozaman $0.21\leq R<3$ için $|z|<R$ diskinde $f(z)\prec F(z)$ dir.

5.1. Lemma: M *α.mertebeden* lineer invariant fonsiyonları ailesi olsun. $f(z)\in M$ ve $z_1, z_2\in D$ ise, bu durumda

$$\left|\log\left(1-|z_2|^2\right)|f'(z_2)|-\log\left(1-|z_1|^2\right)|f'(z_1)|\right|.\left|2\arg(1-\overline{z}_1 z_2)+\arg f'(z_2)-\arg f'(z_1)\right|$$

$$\leq \alpha \log\frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|} \tag{5.7}$$

dir (Pommerenke, 1964).

5.3. Teorem: D' de $f(z)\prec F(z)$ olsun. Eğer $F(z)\in U_\alpha$ $(1.65\leq\alpha<\infty)$ ve $f'(0)\geq 0$ ise, o zaman

$$|z|\leq \alpha+1-\left(\alpha^2+2\alpha\right)^{1/2} \tag{5.8}$$

olduğu yerde $f'(z)\ll F'(z)$ dir.

İspat: D' de $f(z)\prec F(z)$ ve $f'(0)\geq 0$ olduğundan, $f(z)=F(\varphi(z))$ olacak şekilde 4.2.1.Lemma' yı sağlayan $\varphi(z)$ vardır. (5.8)' de keyfi uygun bir z_0 ($z_0\neq 0$) noktası seçelim. Amacımız (5.8)' de $\left|\dfrac{f'(z_0)}{F'(z_0)}\right|\leq 1$ olduğunu göstermektir. Daha sonrada $m_1>m(\alpha)=\alpha+1-\left(\alpha^2+2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$ olan herhangi bir reel sayı için $|z|<m_1$' de $|f'(z)|\leq|F'(z)|$ ifadesinin yanlış olduğunu göstereceğiz.

$f(z)=F(\varphi(z))$ olduğundan

$$\left|\frac{f'(z_0)}{F'(z_0)}\right| = \left|\frac{F'(\varphi(z_0))}{F'(z_0)}\right|.\left|\varphi'(z_0)\right| \tag{5.9}$$

dir. $F(z)\in U_\alpha$ ve $a,b\in D$ için, 5.1.Lemma' dan

$$\left|\frac{F'(a)}{F'(b)}\right| \le \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}.\left(\frac{|1-\overline{a}b|+|a-b|}{|1-\overline{a}b|-|a-b|}\right)^\alpha \tag{5.10}$$

eşitsizliği bulunur. (5.9) ve (5.10) ifadelerden

$$\left|\frac{f'(z_0)}{F'(z_0)}\right| \le \frac{1-|z_0|^2}{1-|\varphi(z_0)|^2}.\left(\frac{\left|1-\overline{\varphi(z_0)}z_0\right|+|\varphi(z_0)-z_0|}{\left|1-\overline{\varphi(z_0)}z_0\right|-|\varphi(z_0)-z_0|}\right)^\alpha.\left|\varphi'(z_0)\right| \tag{5.11}$$

elde edilir.

Şimdi $f'(0)$' ın α ile ilgili olarak küçük veya büyük olup olmamasına bağlı olarak iki farklı yönden sürdüreceğiz. Biz ilkin $f'(0)$' ın α ile ilgili olarak küçük olması durumunu düşüneceğiz. Yani 4.2.3.Lemma' da $a=f'(0)$ alınırsa

$0\le f'(0)\le 3/20=0.15$ $\quad$ $(1.65\le\alpha\le 2$ ise)

$0\le f'(0)\le 1/6=0.1\overline{6}$ $\quad$ $(2\le\alpha\le 3$ ise)

$0\le f'(0)\le 1/10=0.10$ $\quad$ $(3\le\alpha<\infty$ ise)

dir. Eğer (5.11) eşitliğinde $a=f'(0)$ ve $b=\dfrac{1+|z_0|^2}{2|z_0|}$ alınarak 4.2.2.Lemması uygulanırsa

$$\left|\frac{f'(z_0)}{F'(z_0)}\right| \le \frac{a\left(1+|z_0|^2\right)+2|z_0|}{1+|z_0|^2+2a|z_0|}.\left(\frac{\left|1-\overline{\varphi(z_0)}z_0\right|+|\varphi(z_0)-z_0|}{\left|1-\overline{\varphi(z_0)}z_0\right|-|\varphi(z_0)-z_0|}\right)^\alpha$$

$$\leq \frac{a\left(\dfrac{1+|z_0|^2}{2|z_0|}\right)+1}{\dfrac{1+|z_0|^2}{2|z_0|}+a}\cdot\left(\frac{\left|\dfrac{1-\overline{\varphi(z_0)}z_0}{z_0-\varphi(z_0)}\right|+1}{\left|\dfrac{1-\overline{\varphi(z_0)}z_0}{z_0-\varphi(z_0)}\right|-1}\right)^{\alpha}$$

$$\leq \frac{ab+1}{b+a}\cdot\left(\frac{\dfrac{1+|z_0|^2-|z_0|(1+a)}{|z_0|(1-a)}+1}{\dfrac{1+|z_0|^2-|z_0|(1+a)}{|z_0|(1-a)}-1}\right)^{\alpha}$$

$$\leq \frac{ab+1}{b+a}\cdot\left(\frac{\dfrac{b-\dfrac{a+1}{2}}{\dfrac{1-a}{2}}+1}{\dfrac{b-\dfrac{a+1}{2}}{\dfrac{1-a}{2}}-1}\right)^{\alpha}$$

$$\leq \frac{ab+1}{b+a}\cdot\left(\frac{b-a}{b-1}\right)^{\alpha}=k(a,\alpha,b) \tag{5.12}$$

bulunur. Burada $r_0=|z_0|\leq \alpha+1-\left(\alpha^2+2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$ ile sınırlandırılmasından dolayı her zaman $b\geq \alpha+1$ ile sınırlandırıldığına dikkat ediniz.

$k(a,\alpha,b)$ fonksiyonunun pozitif azalan iki fonksiyon ile oluşturulduğunu kolayca gösterebiliriz. b, azalan bir fonksiyondur. Şimdi $k(a,\alpha,\alpha+1)$' in a' da artan olduğunu gösterelim. Burada

$$\frac{\partial k(a,\alpha,\alpha+1)}{\partial a}=\frac{(\alpha+1-a)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha}}\cdot\frac{p(a,\alpha)}{(\alpha+1+a)^2} \tag{5.13}$$

$p(a,\alpha)=-\alpha(\alpha+1)a^2-\left(\alpha^3+3\alpha^2+4\alpha\right)a+\alpha(\alpha+1)^2$ yazabiliriz. $p(a,\alpha)\geq 0$ azalan bir fonksiyondur. Ayrıca $p(a,\alpha)\leq p(0,\alpha)$ ve $p(0,\alpha)>0$ dır. Eğer $p(0.4,\alpha)$ sıfırdan büyük olursa, $p(a,\alpha)$ fonksiyonu da $[0,0.4]$ aralığındaki herhangi bir a için sıfırdan büyük olup $p(0.4,\alpha) \le p(a,\alpha)$ dir. Bu yüzden $p(a,\alpha)$, $a = f'(0)$' ın α ile ilgili olarak küçük değeri için negatif değildir. Dolayısıyla $k(a,\alpha,\alpha+1)$ a' nın artan bir fonksiyonudur. $\left|\frac{f'(z_0)}{F'(z_0)}\right| \le k(a,\alpha,b) \le k(a,\alpha,\alpha+1)$ ve $k(a,\alpha,\alpha+1)$ a' da artan olduğundan $a = f'(0)$' ın α ile ilgili olarak küçük değerleri için teoremi ispatlayabilmemiz için

i) $1.65 \le \alpha \le 2$ iken $k(3/20,\alpha,\alpha+1)$

ii) $2 \le \alpha \le 3$ iken $k(1/6,\alpha,\alpha+1)$

iii) $3 \le \alpha < \infty$ iken $k(1/10,\alpha,\alpha+1)$

olduğunu göstermemiz gerekir.

i.durumda $1.65 \le \alpha \le 2$ için

$$\frac{dk(0.15,\alpha,\alpha+1)}{d\alpha} = \left(\frac{\alpha+1-0.15}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \left[\frac{(0.15)^2-1}{(\alpha+0.15+1)^2} + \frac{(\alpha+1)0.15+1}{\alpha+0.15+1}\left(\frac{0.15-1}{\alpha+1-0.15} + \log\frac{\alpha+1-0.15}{\alpha}\right)\right]$$

$$\le \left(\frac{\alpha+1-0.15}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \left[\frac{(0.15)^2-1}{(2+0.15+1)^2} + \frac{(2+1)0.15+1}{2+0.15+1}\left(\frac{0.15-1}{2+1-0.15}\right) + \frac{(1.65+1)0.15+1}{1.65+0.15+1}\left(\log\frac{1.65+1-0.15}{1.65}\right)\right]$$

$$< 0$$

olup, bu yüzden $k(0.15,\alpha,\alpha+1)$ fonksiyonu bu aralıktai a' nın azalan bir fonksiyonudur.

$$k(0.15,\alpha,\alpha+1) \le \frac{(1.65).(0.15)+1}{1.65+0.15}\left(\frac{2-0.15}{2-1}\right)^2 < 1$$

dir.

ii. durumda her $\alpha > 0$ ve $b > 0$ için, $\frac{(\alpha+1)a+1}{\alpha+a+1}$ fonksiyonu azalan ve $\left(\frac{\alpha+b}{\alpha}\right)^{\alpha}$ fonksiyonu da artan olmasından dolayı

$$k(a,\alpha,\alpha+1) \le \frac{(2+1).(1/6)+1}{2+1/6+1} . \left(\frac{3+1-1/6}{3}\right)^3 < 1$$

dir.

iii. durumda yukarıdaki gibi

$$k\left(1/10,\alpha,\alpha+1\right)\leq\frac{\left(3+1\right).\left(0.10\right)+1}{3+0.10+1}.e<1$$

bulunur.

Sonuç olarak $f'\left(0\right)$' ın α ile ilgili olarak küçük değerleri için (5.8)' de $f'\left(z\right)\ll F'\left(z\right)$ olduğunu gösterir.

$f'\left(0\right)$' ın α ile ilgili olarak büyük değerleri için de sağlandığını gösterelim. (5.11) eşitsizliğine geri dönüyoruz. 4.2.1.Lemma' da ki ifadeleri $\varphi\left(z_0\right)=\dfrac{z_0\left(a+c\right)}{1+ac}$, $c=w\left(z_0\right)=re^{i\theta}$, $\left|z_0\right|=r_0$ ve

$$\left(1-\left|z_0\right|^2\right).\left(1-\left|\varphi\left(z_0\right)\right|^2\right)=\frac{A.B}{\left|1+ac\right|^2}=\frac{\left(D+E\right).\left(D-E\right)}{\left|1+ac\right|^2}\tag{5.14}$$

bulabiliriz. (5.11), (5.14) ve 4.2.1.Lemma' dan

$$\left|\frac{f'\left(z_0\right)}{F'\left(z_0\right)}\right|\leq\left(1-r_0^{\,2}\right).\frac{A^{\alpha-1}}{B^{\alpha+1}}.C\tag{5.15}$$

bulunur. 4.2.3.Lemma da A, B, C, D, E ifadelerini ve $c=re^{i\theta}$ fonksiyonu olarak $\theta=0$ da maksimum değer aldığını göstermiştik. (5.15) ifadesinin sağ tarafı $f'\left(0\right)$' ın α ile ilgili olarak büyük değerler aldığını gösterir. Bunu gösterdikten sonra $f'\left(0\right)$' ın α ile ilgili olarak büyük değeri için (5.8)' de $\left|\dfrac{f'\left(z_0\right)}{F'\left(z_0\right)}\right|\leq 1$ olduğunu gösterelim.

$$1+ar-r_0^2\left(a+r\right)\pm r_0\left(1-a\right)\left(1-r\right)=\left(1\pm r_0\right)\left[1+ar\mp r_0\left(a+r\right)\right]\tag{5.16}$$

olmasından dolayı

$$\left|\frac{f'\left(z_0\right)}{F'\left(z_0\right)}\right|\leq\left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^{\alpha}.\frac{\left[1+ar-r_0\left(a+r\right)\right]^{\alpha-1}}{\left[1+ar+r_0\left(a+r\right)\right]^{\alpha+1}}.\left[\left(1-r_0^2\right)\left(a+2r+ar^2\right)+\left(r_0^2-r^2\right)\left(1-a^2\right)\right]$$

olup, bu ifadenin sağ tarafı $L(r, r_0, a)$ olarak tanımlayalım. Majorasyonun ispatı $L(r, r_0, 1) = 1$ olduktan sonra L' nin a' nın artan fonksiyonu olduğunu gösterebildiğimizde tamamlanır. Bu yüzden

$$\frac{dL}{da} = \left(\frac{1+r_0}{1-r_0}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\left[1+ar-r_0(a+r)\right]^{\alpha-2}}{\left[1+ar+r_0(a+r)\right]^{\alpha+2}} \cdot R(a) \tag{5.17}$$

bulunur.Burada

$$R(a) = \left[(1+ar)^2 - r_0(a+r)^2\right] \cdot \left[1 - r_0^2 r^2 - (2a+1)\left(r_0^2 - r^2\right)\right] - \left[\left(1-r_0^2\right)\left(a+2r+ar^2\right)\right.$$
$$\left. + \left(1-a^2\right)\left(r_0^2 - r^2\right)\right] \cdot \left[2r\left(1-r_0^2\right) + 2\alpha r_0\left(1-r^2\right) - 2a\left(r_0^2 - r^2\right)\right]$$

dir. Sorun $R(a)$' nın negatif olmadığını göstermektir. Bundan dolayı

$$R'(a) = 2\left(r_0^2 - r^2\right)\left[2\alpha a r_0\left(1-r^2\right) + (1-r)^2\left(1-r_0^2\right)(a-1)\right] - 2\alpha r_0\left(1-r_0^2\right)\left(1-r^4\right)$$
$$\leq 2\alpha r_0\left[2r_0^2 - \left(1-r_0^2\right)\left(1-r_0^4\right)\right]$$

olup, $r_0 \leq \alpha + 1 - \left(\alpha^2 + 2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$ olduğunda $2r_0^2 - \left(1-r_0^2\right)\left(1-r_0^4\right) < 0$ olmasından dolayı $R(a)$ azalan bir fonksiyondur. Bu yüzden $R(a) \geq R(1)$ dir. Bununla birlikte $r_0 \leq \alpha + 1 - \left(\alpha^2 + 2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$ için $\left(1-r_0^2\right) - 2\alpha r_0 \geq 0$ olmasından dolayı

$$R(1) = (1+r)^2\left(1-r_0^2\right)(1-r)\left[(1-r)\left(1-r_0^2\right) - 2\alpha r_0(1+r)\right]$$
$$\geq (1+r)^2\left(1-r_0^2\right)(1-r)(1+r_0)\left[1-r_0^2-2\alpha r_0\right]$$
$$\geq 0$$

bulunur.

Sonuç olarak $f'(0)$' ın α ile ilgili olarak büyük değeri için $\left|\frac{f'(z_0)}{F'(z_0)}\right| \leq 1$, yani $|z| \leq \alpha + 1 - \left(\alpha^2 + 2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}$ de $f'(z) \ll F'(z)$ dir.

En son olarak (5.8)' deki yarıçapın geliştirilemeyeceğini göstereceğiz. Yani,

$$m_1 > m(\alpha) = \alpha + 1 - \left(\alpha^2 + 2\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.18}$$

olan herhangi bir reel sayı olmak üzere; D' de $f(z)$ ve $F(z)$ fonksiyonları $f'(0) \geq 0$, $F(z) \in U_\alpha$ ve $f(z) \prec F(z)$ olacak şekilde analitik iki fonksiyon olsun. Her $|z| < m_1$ için $|f'(z)| \leq |F'(z)|$ ifadesinin yanlış olduğunu göstereceğiz.

$F(z) \in U_\alpha$ ve $f(z) \prec F(z)$ olduğundan $\varphi(z) = \dfrac{z(a+z)}{1+az}$ $(0 \leq a \leq 1)$ olmak üzere $F(z) = \dfrac{1}{2\alpha}\left[1 - \left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^\alpha\right]$ ve $f(z,a) = F(\varphi(z))$ dir. Bu durumda D' deki her a için $f(z,a) \prec F(z)$ olur.

$$\left.\frac{\partial f(z,a)}{\partial z}\right|_{z=r} = \left.\frac{\left[1-\varphi(z)\right]^{\alpha-1}}{\left[1+\varphi(z)\right]^{\alpha+1}}.\varphi'(z)\right|_{z=r} = \frac{\left(1-r^2\right)^{\alpha-1}}{2^\alpha r^\alpha}.\frac{ab+1}{(a+b)^{\alpha+1}} = f'(r,a)$$

ve $b = \dfrac{1+r^2}{2r}$ olup,

$$\left.\frac{\partial f'(r,a)}{\partial a}\right|_{a=1} = \frac{\left(1-r^2\right)^{\alpha-1}}{2^\alpha r^\alpha}.\frac{b-(\alpha+1)}{(b+1)^{\alpha+1}} \tag{5.19}$$

elde edilir. Eğer $z = r$ ve $m(\alpha) < r < m_1$ ise, bu durumda $b = \dfrac{1+r^2}{2r} < \alpha + 1$ olur. Ayrıca (5.19) ifadesindeki $f'(r,a)$ fonksiyonunun r' nin öyle bir değeri için a' nın azalan bir fonksiyonudur. Bu yüzden a, 1' e yeterince yakın olmak üzere

$$f'(r,a) > f'(r,1) = F'(r) = \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \tag{5.20}$$

bulunur. Bu yüzden $|z| < m_1$ de $f'(z)$, $F'(z)$ tarafından majorize edilemez.

5.3. Sonuç: D' de $f(z) \prec F(z)$ ve $f'(0) \geq 0$ olsun. Eğer $F(z) \in U_2$ ise, o zaman $|z| < 3 - \sqrt{8}$ diskinde $f'(z) \ll F'(z)$ dir. Ayrıca $S \subset U_2$' dir. Aynı sonuçlar U_2' deki sonsuz değerli (valentli) fonksiyonlar için de geçerlidir. Eğer $F(z) \in U_3$ ise, o zaman $|z| < 4-\sqrt{15}$ diskinde $f'(z) \ll F'(z)$ dir.

5.4. Sonuç: Herhangi bir sınıfa ait $f(z)$ fonksiyonunun $F(z)$ fonksiyonu tarafından majorize edilebilmesi için $f'(0) \geq 0$ olması gerekir.

KAYNAKLAR

Altıntaş, O., Özkan Ö., and Srivastava H.M., 2001. Majorization by Starlike Functions of Complex Order. Complex Variables Theory Applied., 46, 207-218.

Altıntaş, O., and Srivastava H.M., 2001. Some Majorization Problems Associated $p-valently$ Starlike and Convex Functions of Complex Order. East Assian Math. J., 17 (2), 175-183.

Aouf, M.K., and Srivastava H.M., 1996. Some Families of Starlike Functions with Negative Coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications., 203, 762-790.

Başkan, T., 2000. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayın No:162, 356s, Bursa.

Campbell, D.M., 1971. Majorization-Subordination Teorems for Locally Univalent Functions. Bulletin of the American Mathematical Society., 78 (4), 535-538.

Campbell, D.M., 1974. Majorization- Subordination Teorems for Locally Univalent Functions-III. Transactions of the American Mathematical Society., 198, 297-306.

Dönmez, A., 1985. Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı. Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Yayın No:10, Diyarbakır.

Dönmez, A., 2000. Metrik ve Topolojik Uzaylar. Beta Yayınları Yayın No:995, 359s, İstanbul.

Goodman, A.W., 1983. Univalent Functions-I. Mariner Publishing Company., 245p, Tapma, Florida.

Goodman, A.W., 1983. Univalent Functions-II. Mariner Publishing Company., 311p, Tapma, Florida.

Hille, E., 1959. Majorization. Analytic Function Theory, Part 18, Chelsea Publishing Company, New York, 393-428.

Kadıoğlu, E., 2004. On Majorization Problems Associated with $p-valently$ Functions of Complex Order. Applied Mathematics and Computation, 153, 261-265.

Lahenkanı, J., 1985. Coefficients of Power of Some Subclasses of Univalent Functions and Convulutions of Some Classes of Polynomials and Analytic Functions. Ph.D.Thesis, Graduate School of Natural and Applied Sciences, London.

MacGregor, T.H., 1967. Majorization by Univalent Functions. Duke Mathematical Journal., 34 , 95-102.

Pommerenke, Ch., 1964. Linear-invariante Familien Analytischer Funktionen-I. Math. Annalen., 155 , 108-154.

Pommerenke, Ch., 1964. Linear-invariante Familien Analytischer Funktionen-II. Math. Annalen., 156 , 226-262.

Pommerenke, Ch., 1975. Univalent functions.Vandenhoeck and Ruprecht Company, 376p, Göttingen, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Erzurum' da doğdu. Öğrenimine Cemal Gürsel İlkokulu, 23 Temmuz Orta Okulu ve Atatürk Lisesi' nde başladı. Bu okullarda başarılı ve örnek öğrenci oldu. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne girerek lisans öğrenimine başladı ve okul birinciliği ile mezun oldu. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Bir sene İngilizce hazırlık okuduktan sonra 2006 yılında tez çalışmasına başladı.