ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

B-MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Murat İŞCAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2008

Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN ve Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Murat İŞCAN tarafından hazırlanan bu çalışma 02.01.2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Yusuf YAYLI *İmza :*

Üye : Prof. Dr. Arif SALİMOV *İmza :*

Üye : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU *İmza :*

Üye : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN *İmza :*

Üye : Prof. Dr. Muhammet KAMALİ *İmza :*

Üye : Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN *İmza :*

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nejmi CENGİZ *İmza :*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

(imza)

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

B-MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Murat İŞCAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN
Ortak-Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde, pür Riemannian metrik tensörlerinin uygulanabildiği Tachibana operatörler teorisi kullanılmış ve paraholomorfik B-manifold incelenmiştir. Bu amaçla ilk olarak hemen hemen B-manifoldun paraholomorfik B-manifold olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. Sonra paraholomorfik B-manifoldlar için eğrilik tensörüne bakıldı. İlk önce eğrilik tensörünün pür olduğu gösterildi. Pür olan Riemannian eğrilik tensörüne Tachibana operatörü uygulanarak Riemannian eğrilik tensör alanının paraholomorfik tensör alanı olduğu ispatlandı. Ayrıca paraholomorfik B-manifoldun R skaler eğriliğinin lokal holomorfik fonksiyon olduğu gösterildi. Son olarak tanjant demette (1,1) tipli I birim tensör alanının ${}^{D}I$ diagonal liftinin ve ${}^{S}g$ Sasakian metriğinin vasıtasıyla $(T(V_n), {}^{D}I, {}^{S}g)$ üçlüsünün bir hemen hemen B-manifold olduğu ve $(T(V_n), {}^{D}I, {}^{S}g)$ hemen hemen B-manifoldunun paraholomorfik olması için baz manifoldun lokal Euclidean olması gerektiği ispatlandı.

2008, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Pür tensör, Tachibana operatörü, diagonal lift, Sasakian metrik

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

GEOMETRY OF B-MANIFOLDS

Murat İŞCAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN
Co-Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV

In this thesis, The theory of Tachibana operators, which pure Riemannian metric tensors can be implemented, has been used and paraholomorphic B-manifold has been investigated. For this reason, firstly, it has been proved that almost B-manifold is paraholomorphic B-manifold on which necessary and sufficient conditions. Then, curvature tensor for paraholomorphic B-manifold has been investigated. As a first, it has been shown that curvature tensor is pure. It has been proved that Riemannian curvature tensor field is paraholomorphic tensor field by means of Tachibana operator by being implemented to Riemannian curvature tensor which is pure. Moreover, it has been shown that R curvature scalar of paraholomorphic B-manifold is locally holomorphic function. Finally, it has been proved that $(T(V_n), {}^D I, {}^S g)$ is almost B-manifold by means of diagonal lift of identity tensor field with (1,1) type , ${}^D I$, in tangent bundle and ${}^S g$ Sasakian metric and that $(T(V_n), {}^D I, {}^S g)$ almost B-manifold is palaholomorphic if the manifold is locally euclidean.

2008, 63 pages

Keywords : Pure tensor, Tachibana operator, diagonal lift, Sasakian metric

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, Hocalarım Sayın Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN'e, Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a teşekkür eder şükranlarımı ifade etmek isterim. Ayrıca çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nejmi CENGİZ'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKÇI'ya şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendisinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güveninden dolayı eşime teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Murat İŞCAN

Ocak 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu Üzerinde (p,q) tipli Tensör Demeti
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
$\Gamma_{ij}^{\ h}$	Cristoffel Sembolü
R_{ijk}^h	Eğrilik Tensörü
S_{ij}^h	Burulma Tensörü
T_{km}^i	Afin deformasyon (gerilme) tensörü
$\mathcal{A}_m$	$m-$boyutlu cebir
$C_{\alpha\beta}^{\gamma}$	Cebirin yapı sabitleri
ϕ	Tachibana operatörü
D	Diagonal Lift
V	Dikey Lift
H	Yatay Lift
N_φ	φ 'in Nijenhuis Tensörü
${}^S g$	Sasakian metriği

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Manifoldlar üzerindeki yapılar teorisi, modern diferensiyel geometrinin çok ilginç bir konusu olmuştur.

Hemen hemen product uzaylar Walker (1955) tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Fukami (1959) hemen hemen product manifoldlarda bazı yapılara göre afin konneksiyonlarını araştırmış ve aynı yıl Yano hemen hemen product uzayda afin konneksiyonlarını çalışmıştır.

Tachibana (1960) lokal product Riemannian manifoldları üzerine bazı teoremler ortaya atmıştır.

Norden (1960) M_n diferensiyellenebilir Riemannian manifoldunda φ hemen hemen product yapısına göre g metrik tensörü

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y), \qquad X, Y \in \Im_0^1(M_n),\ n = 2k,$$

şartını sağladığında g'yi B-tensör olarak adlandırmıştır. g Riemannian metrik tensörü yukarıdaki şartı sağlarsa g ye pür tensör de denir. Vishnevskii (1970) hemen hemen product yapıya göre pür olan g Riemannian metriğini, Norden'in (1960) çalışması doğrultusunda, B-metrik olarak adlandırmıştır. (M_n, φ) B-metriğine sahip hemen hemen product manifold ise (M_n, φ, g) ye hemen hemen B-manifold denir. (M_n, φ, g) hemen hemen B-manifoldunda (1,1) tipli φ tensör alanı integrallenebilirse (M_n, φ, g)'ye B-manifold denir.

Kruchkovich (1972) manifoldlar üzerinde hiperkompleks yapıları ve özel durum gibi paracomplex yapıları incelerken, (M_n, φ, g) B-manifoldu üzerinde

$$(\phi_\varphi g)(X, Y, Z) = (L_{\varphi X} g - L_X(g \circ \varphi))(Y, Z) + g(Y, \varphi L_X Z) - g(\varphi Y, L_X Z)$$

şartını sağlayan g pür tensör alanına uygulanan

$$\phi_{\varphi} : g \to \Im_3^0(M_n)$$

operatörü için B-manifoldunda g B-metriğinin $\phi_{\varphi} g = 0$ şartını sağlarsa paraholomorfik (analitik) olduğunu görmüştür.

Adati (1981) hemen hemen product Riemannian manifoldlarının alt manifoldlarını incelerken Mihai ve Nicolau (1982) hemen hemen paracontact manifoldlarının tanjant demeti üzerinde hemen hemen product yapılarını incelemiştir. Ivanavo (1989) hemen hemen B-manifoldlar üzerine örnekler sunmuştur. Cruceanu, Fornuty ve Gadea (1996) Parakompleks geometri üzerine bir derleme çalışması yapmışlardır.

Sunulan bu tezde holomorfik B-manifoldların üzerine çalışılmış, eğrilik tensörünün ve skaler eğriliklerinin holomorfluğu incelenmiştir. Bu amaçla ikinci ve üçüncü bölümlerde çalışmamızın anlaşılabilmesi için diferensiyellenebilir manifoldlar, cebirsel yapılar ve yapıların özellikleri hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sırasıyla paraholomorfik B-manifold ile Kahlerian manifoldları arasındaki benzerlik incelenmiş, bununla ilgili bir diyagram verilmiştir. Daha sonra eğrilik tensörünün pür ve holomorfik olma şartı araştırılmıştır. Ayrıca skaler eğriliğinin de holomorfluğu araştırılmış ve son olarak B-manifoldlarla ilgili örnekler sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

2.1.1. Tanım: X Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1, ..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

2.1.2. Tanım: Eğer X Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \quad \text{(A-indisler kümesi)}$$

ise X'e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

2.1.3. Tanım: X Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X i örter, yani X, n-boyutlu topolojik manifolddur.
2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,\dots,n\right)$ denir. Burada u_β^i, $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

2.1.4. Tanım: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

2.1.5. Tanım: X Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k $(1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞-yapılara bakılacaktır.

2.1.6. Tanım: *M*, sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, *M* üzerinde *n*-boyutlu C^{∞} atlaslarının C^{∞} yapısı verilmişse *M* uzayına *n*-boyutlu C^{∞} sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.

2.2.Tensör Alanları

2.2.1. Tanım: B_n, $n-$boyutlu reel vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j=1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*$, $i=1,...,p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\omega = t(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında *p* dereceden kontravaryant, *q* dereceden kovaryant tensör adı verilir ve bu şekildeki tüm tensörlerin uzayı $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere *s = p+q* sayısına ise tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. (p,0) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (0,q) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $T_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım;

$$g(\vec{x},\vec{y}) = 0,\ \forall\vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartında $\vec{x}=0$ olursa, bu taktirde *g* tensörüne regüler tensör denir.

(2.1) eşitliği koordinatlarla

$$g_{ij}x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından

$$g_{ij}x^i = 0\,,\ j = 1,\ldots,n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\widetilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$\widetilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik}x^k,\ (\eta_i = g_{ik}y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümü, (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \widetilde{g}^{ki}\xi_i,\ (y^k = \widetilde{g}^{ki}\eta_i) \tag{2.4}$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invaryant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j$$

şeklinde yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini dikkate alırsak

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x^i\eta_i = \widetilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$$

olur. Yani, g esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenlerinin $\omega = \widetilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$ invaryant bilineer formunu buluruz. Buna göre de $\widetilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\widetilde{g}(\eta,\xi) = \widetilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j = \eta_i x^i = g_{ik}y^k x^i,$$
$$\widetilde{g}(\xi,\eta) = \widetilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i = \xi_j y^j = g_{jk}x^k y^j$$
$$= g_{ki}x^i y^k = g_{ki}y^k x^i = \widetilde{g}(\eta,\xi)$$

olduğundan $\widetilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n uzayında g tensörü verildiğinde B_n'den B_n^*'a bir izomorfizm bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k = g_{ki}x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{ik}x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $\left(x^i \to x_k\right)$ ve yükseltilmesi $\left(x_k \to x^i\right)$ işlemleri denir. Buna göre, $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörü göz önüne alınırsa

$$S^{p}_{.\,j} = \tilde{g}^{pi}S_{ij}, \quad S_{i\,.}^{\;p} = \tilde{g}^{pj}S_{ij}, \quad S^{pq}_{..} = \tilde{g}^{pi}\tilde{g}^{pj}S_{ij}$$

ifadelerinin herbiri S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemi,

$$S_p^{\cdot\, j} = g_{pi}S^{ij}, \quad S^{i\,\cdot}_{\;p} = g_{pj}S^{ij}, \quad S^{\cdot\,\cdot}_{pq} = g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

ifadelerinin herbiri ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x},\vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, her $\vec{x},\vec{y}\in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x},\vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$\vec{x}\vec{y} = g\left(\vec{x},\vec{y}\right) = g_{ij}x^iy^j = x_jy^j \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $Det(g_{ij}) \neq 0$ olursa bu taktirde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

2.2.2. Tanım: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p, her $p\in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p\in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 1999).

f, M_n manifoldunda bir dönüşüm ise Xf de M_n manifoldunda

$$(Xf)(p) = X_pf$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. $U\subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i,\ldots,x^n\right), \quad i = 1,\ldots,n$$

olur.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

2.2.3. Tanım: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Eğer $p = 1,\ q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise her $x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ $(0,1)$ tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(m)=T_m\left(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m)\right)$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}=T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q},\partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop ve Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.2.4. Tanım: $\omega=(\omega_{ij})$, $(0,2)$ tipli bir tensör olsun. $\omega=(\omega_{ij})$ tensöründe i ve j indislerine göre antisimetriklik varsa $\omega=(\omega_{ij})$ tensörüne 2-form veya dış form denir. Bir k-forma dış diferensiyel uygulanırsa sonuçta k+1-form elde edilir. Yani ω, k-form ise $d\omega\in T_{k+1}(M_n)$ olup k+1-form oluşur. Böyle k+1 formlara tam form denir.

$$d^2\omega=d(d\omega)=0$$

olması tam formların en önemli özelliğidir. Yani tam formlara dış diferensiyel uygulanırsa sonuç sıfır olur.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma:u^i=u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilen konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına uygulanan vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{k}{a}^i,\ k = 1,...n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$'nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını ifade etmiş olsun. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d\underset{k}{a}^i \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i v^i \tag{2.7}$$

eşitliği yazılır. Burada $\underset{k}{a}^i$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\underset{k}{a}^i \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) eşitliğinde kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.8) denkleminde ω_i^k,

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i\, d\underset{s}{a}^k \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde tanımlanan ω_i^k objelerine konneksiyon formları (bağlantı objeleri) denir.

2.3.1. Teorem: 1. Konneksiyon formları $\left\{\underset{k}{a}^i\right\}$, $k = 1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmezler.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ farklı iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0, \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

şartlarını yazabiliriz. (2.10) ve (2.11) şartlarından ve v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralı

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12) deki ikinci eşitliğin diferensiyelini alırsak,

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.9) denkleminde (2.12) nin birinci eşitliği ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

ve gerekli işlemlerden sonra

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.14}$$

bulunur. (2.14) eşitliği, ω_j^i konneksiyon formlarının, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

2.3.1. Tanım: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa, ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i \omega_i\right) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \tag{2.15}$$

eşitliği yazılabilir. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

yazılır. (2.16) eşitliğini (2.15) ifadesinde kullanılırsa,

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right) v^i = 0$$

eşitliği bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

biçiminde olur. Vektörün ve kovektörün (1-form) γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün de paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

şeklinde verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$dZ = dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\, d \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

$$+ \ldots + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots d\, \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.18}$$

$$= \left(dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q} \right) \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q} \tag{2.19}$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.20}$$

elde edilir. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli bir tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \qquad \delta \omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli bir tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta^j_i\right) = 0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ-skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$- tensör çarpımını gösterir.

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

2.3.2. Tanım: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyonu verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Bu tanımdaki lineerlik şartı şu şekilde ifade edilir:
X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın komşuluğunda keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v^i_k, v^i'ye ve noktaya bağlı fonksiyon, du^k ise her bir vektöre teğet vektörün koordinatlarıdır. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + \omega^i_k v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega^i_k v^k = (v^i_s - \partial_s v^i) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. v^k, $\partial_s v^i$ 'nin ve v_s^i 'ler ise u^i 'lerin fonksiyonlarıdır. ω_k^i formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω_k^i formları du^k nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega_k^i = \Gamma^i_{sk}\, du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada Γ^i_{sk} katsayıları afin uzayın bir noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ^i_{sk} afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma^{i'}_{k'j'}\, du^{k'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} A_k^{k'} du^k$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) du^k \tag{2.25}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğin her iki tarafının ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\partial_k \left(A_j^{j'} A_{j'}^i\right) = \partial_k \left(\delta_j^i\right) = 0$$

$$\left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i + A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = 0$$

$$A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = -\left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i$$

olur. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i \left(\partial_k A_j^{j'}\right) du^k \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) , (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma^i_{kj} = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma^{i'}_{k'j'} + A_{i'}^i A_{kj}^{i'} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'} = \partial_k A_j^{i'}$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i = (\partial_k v^i + \Gamma^i_{ks} v^s)\, du^k \tag{2.28}$$

biçiminde olur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{ks} v^s \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür.

Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^s_{kj} \omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür.

(2.24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (\partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q})\, du^k \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q} \tag{2.32}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türevi tanımından, (p,q) tipli tensörün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensör olduğu görülür. Yani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık mertebesini bir artırır.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikleri yazabiliriz:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \underset{2}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = \nabla_k \underset{1}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \nabla_k \underset{2}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \lambda \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}, \quad \lambda \in F(M_n)$

3. $\nabla_k (t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q}) = \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q} + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin (lineer) konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

2.3.3. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $T_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y):\ T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z(fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ’ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop ve Goldberg 1968).

2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1,\dots,u^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olmasıdır (Yano 1968).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.36}$$

elde edilir. Burada

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli tensör olduğundan S^k_{ij} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensörün bileşenlerini ifade eder. Bu tensöre A_n uzayının burulma (torsion) tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^i vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sm} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}
\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\
&= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm} (\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\
&= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.39}$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$R^i_{rsk} = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \tag{2.40}$$

$$= 2(\partial_{[r}\Gamma^{i}_{s]k} + \Gamma^{i}_{[r|m|}\Gamma^{m}_{s]k})$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi $(1,3)$ tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının Eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılabilir:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k = -R^m_{rsk}\omega_m - 2S^m_{rs}\nabla_m\omega_k \ , \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^j_i = R^j_{rsm}\varphi^m_i - R^m_{rsi}\varphi^j_m - 2S^k_{rs}\nabla_k\varphi^j_i \ , \tag{2.42}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = R^{i_1}_{rsm}t^{mi_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \ldots + R^{i_p}_{rsm}t^{i_1\ldots m}_{j_1\ldots j_q} \tag{2.43}$$

$$- R^m_{rsj_1}t^{i_1\ldots i_p}_{mj_2\ldots j_q} - \ldots - R^m_{rsj_q}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots m} - 2S^k_{rs}\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \ .$$

(2.42) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma, konneksiyonların birinden diğerine geçmeye, konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Aynı manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür. M_n manifoldu üzerinde Γ^k_{ij} ve $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{km}v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}^i_{km}v^m$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T^i_{km} v^m \tag{2.45}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$T^i_{km} = \overline{\Gamma}^i_{km} - \Gamma^i_{km} \tag{2.46}$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T^i_{km}, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon (gerilme) tensörü denir.

2.3.2. Teorem: T^i_{km}, (1,2) tipli tensör ve Γ^i_{km} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}^i_{km}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij}$$

yazılır. Γ^k_{ij} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \left(\overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} - T^{k'}_{i'j'} \right) + A^k_{k'} A^{k'}_{ij} \tag{2.47}$$

olur. Burada T^k_{ij} tensör olduğundan,

$$T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j T^{k'}_{i'j'} \tag{2.48}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} + A^k_{k'} A^{k'}_{ij}$$

olduğu bulunur. Bu ise, $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim;

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^{k}=\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}+\frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}-\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılabilir. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 2.3.2.Teoremine göre Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon olur. Yani iki farklı konneksiyon kullanılarak yeni bir konneksiyon oluşturulmuş olur.

Özel halde $\lambda=1$ alırsak,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}+\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{2} \tag{2.51}$$

bulunur. $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ_{ij}^{k} afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S_{ij}^{k}=\Gamma_{[ij]}^{k}=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^{k}-\Gamma_{ji}^{k}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}+2S_{ij}^{k}, \quad \tilde{\Gamma}_{ji}^{k}=\Gamma_{ji}^{k} \tag{2.52}$$

yazılır. 2.3.2. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ ve Γ_{ji}^{k} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.3.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma_{ji}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} = \tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^{1},...,\overset{\circ}{u}{}^{n}$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^{i})$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta_{k}^{i'}$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_{k}^{i'}\{(u^{k} - \overset{\circ}{u}{}^{k}) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{pq}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p})(u^{q} - \overset{\circ}{u}{}^{q})\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. Bu ifade u^{i} den $u^{i'}$ ne bir dönüşümdür. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^{i} koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_{i}^{i'} = \delta_{i}^{i'} + \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ip}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p}), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği O noktasında ve civarında $\det\left(A_{i}^{i'}\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A_{i}^{i'} = \delta_{i}^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.55}$$

olur.

Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^{i} = \delta_{j}^{j'}\delta_{k}^{k'}\delta_{i'}^{i}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^{i}\delta_{l}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{kj}^{l}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle bir koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği), (Bianchi'nin 2. özdeşliği)

eşitlikleri geçerlidir.

Bu eşitliklerin her üçünün de invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere, a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

şeklinde olsun. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek

$$\begin{aligned} \partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} &= \nabla_k a_{ij}, \\ \partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} &= \nabla_i a_{jk}, \\ \partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} &= \nabla_j a_{ki}. \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır.

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

eşitliği bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma^r_{ij} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

biçimindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Riemannian konneksiyon katsayıları, Levi-Civita konneksiyonu veya Christoffel sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

2.3.4. Tanım : Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}, e = e_{12\dots n}$ n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \dots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \dots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_1 \dots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_1 \dots i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_1 \dots i_n} - \Gamma^s_{k i_1} e_{s i_2 \dots i_n} - \dots - \Gamma^s_{k i_n} e_{i_1 \dots s} = 0 \tag{2.62}$$

biçiminde yazılabilir. n-vektörün antisimetrikliğine göre (2.62) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12\dots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2\dots n} - \dots - \Gamma^s_{kn} e_{12\dots s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12\dots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. Eş afin uzay bu şart ile de karakterize edilebilir. (2.64) eşitliğindeki eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edilebilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0$ ve $R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını göz önüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

2.3.5. Tanım: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik, (0,2) tipli g tensörü, tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaya metrik uzay denir. Burada simetrik, (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör denir.

2.3.6. Tanım: Metrik uzayın g metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ ise uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

2.3.7. Tanım: Eğer Weyl uzayı eş-afin uzay olursa, bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

şartı ile karekterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ olmak üzere

1. $R_{(ij)kl} = 0$
2. $R_{[ijk]l} = 0$
3. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$
4. $R_{ij(kl)} = 0$
5. $R_{ijkl} = R_{klij}$

eşitlikleri geçerlidir.

2.3.5. Riemannian manifoldu

Her bir $x \in M_n$ noktasında her $Y \in T_x(M_n)$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y) = 0$ eşitliğinde $X = 0$ olursa g'ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $Det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g'nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n, g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right)$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian veya Levi-Civita konneksiyonu denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$' nin herhangi bir $\widetilde{p}$ noktası, yani $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet projeksiyonu $\widetilde{p} \mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\widetilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T_p(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının p noktasındaki fibre denir.

M_n baz uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü kabul edelim. Burada (x^h), U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times \mathbb{R}^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizmdir. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ reel sayılar alanı üzerindeki n- boyutlu vektör uzayı olur. $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ $(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $\left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\widetilde{p}$ nın $(y^h) = (x^{\overline{h}})$ $\overline{h} = n+1,...,2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\widetilde{p})$ nin koordinatları (x^h) $h = 1,..,n$ ile gösterilirse $\widetilde{p}$ noktası uygun $(x^h, x^{\overline{h}}) \mapsto \widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Biz $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\overline{h}})$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Burada $(x^h, x^{\overline{h}})$'ye (x^h)'dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p=\pi(\tilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U^{'},x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U^{'})$ koordinat komşuluğu $\tilde{p}$ 'yı ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U^{'})$ 'ne göre $\tilde{p}$ 'nın indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'},y^{h'}\right)$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'}=x^{h'}\left(x\right), \\ y^{h'}=\dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}}y^{h} \end{cases} \tag{3.2}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındaki $x^1,x^2,...,x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}}=y^h$, $x^{\bar{h}'}=y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'}=x^{p'}\left(x\right),\quad p^{'}=1,...,2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobian matrisi

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h}\partial x^{i}}y^{i} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

matrisi ile verilir. (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^{h}=x^{h}\left(x'\right), \\ y^{h}=\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^{p}=x^{p}\left(x'\right),\quad p=1,...,2n \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jacobian matrisi ise

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'}\partial x^{i'}}y^{i'} & \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir, çünkü, $Det\left(\dfrac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}\right)>0$ $\left(Det\left(\dfrac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}\right)>0\right)$ şeklindedir.

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfında (r,s) tipli tensör alanını $T_s^r\left(M_n\right)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının direkt toplam kümesini ise $T\left(M_n\right)=\sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r\left(M_n\right)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanını ve tensör alanlarının direkt toplam kümelerini ise sırasıyla $T_s^r\left(T(M_n)\right)$ ve $T(T(M_n))$ olarak göstereceğiz .

3.2. Diferensiyel Geometrik Cebirsel Yapılar

M_n $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun $(n=2m)$. $\varphi \in T_1^1(M_n)$ olmak üzere, $\psi=\{1,\varphi\}$, $\varphi^2=-I$ kümesine M_n üzerinde bir kompleks yapı denir.

3.2.1. m-boyutlu cebir

$\mathcal{A}_m$, $m-$boyutlu cebirini alalım. Bu cebirin birleşimli ve birimli olduğunu kabul edelim.

Her $a,b,c \in \mathcal{A}_m$ için $(ab)c=a(bc)$ şartını sağlarsa $\mathcal{A}_m$ cebirine birleşimli cebir, her $a \in \mathcal{A}_m$ ve $\exists e$ için $ea=ae=a$ şartını sağlarsa e elemanına $\mathcal{A}_m$ cebirinin birim elemanı, cebire ise birimli cebir denir.

$\mathcal{A}_m$ cebir olduğundan aynı zamanda bir vektör uzayıdır. Dolayısıyla $\vec{e}_\alpha \in \mathcal{A}_m$, $\alpha=1,...,n,$ $\{\vec{e}_\alpha\}$ şeklindeki baza sahiptir ve

$$\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = C_{\alpha\beta}^{\gamma}\vec{e}_\gamma \tag{3.8}$$

şeklinde yazılır.

$C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ya cebirin yapı sabitleri denir. Yapı sabitlerinin en önemli özelliği (1,2) tipli tensörün koordinatları olmasıdır.

Şimdi ise $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ yapı sabitlerinin tensör olduğunu gösterelim:

$C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ yapı sabitleri $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ bazında, $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$ yapı sabitleri ise $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ bazında olsun. $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ yapı sabitinin tensör olduğunu göstermek için $\vec{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ kuralı verildiğinde $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ve $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$ yapı sabitleri arasında $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = A_{\gamma}^{\gamma'} A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\beta'}^{\beta} C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ şeklindeki bağıntının olduğunu ispat etmemiz gerekir. $\mathcal{A}_m$ cebirinin $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ bazının yardımıyla

$$\vec{e}_{\alpha'}\vec{e}_{\beta'} = C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}\vec{e}_{\gamma'} \tag{3.9}$$

eşitliğini yazabiliriz. Baz dönüşüm kuralından, $\vec{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$, $\vec{e}_{\beta'} = A_{\beta'}^{\beta}\vec{e}_{\beta}$ ve $\vec{e}_{\gamma'} = A_{\gamma'}^{\gamma}\vec{e}_{\gamma}$ eşitliklerini yazabileceğimizden bu eşitlikleri (3.9) eşitliğinde yerine yazarsak ve (3.8) eşitliğini de kullanırsak

$$C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = A_{\gamma}^{\gamma'} A_{\alpha'}^{\alpha} A_{\beta'}^{\beta} C_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ yapı sabitleri (1,2) tipli tensörün koordinatları olur.

$\forall a,b,c \in \mathcal{A}_m$ için $(ab)c = a(bc)$ olduğundan, $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ bazı için

$$\begin{aligned}
(\vec{e}_{\alpha}\vec{e}_{\beta})\vec{e}_{\gamma} &= \vec{e}_{\alpha}(\vec{e}_{\beta}\vec{e}_{\gamma}),\\
(C_{\alpha\beta}^{\sigma}\vec{e}_{\sigma})\vec{e}_{\gamma} &= \vec{e}_{\alpha}(C_{\beta\gamma}^{\sigma}\vec{e}_{\sigma}),\\
C_{\alpha\beta}^{\sigma}C_{\sigma\gamma}^{\varepsilon}\vec{e}_{\varepsilon} &= C_{\beta\gamma}^{\sigma}C_{\alpha\sigma}^{\varepsilon}\vec{e}_{\varepsilon}
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Baza göre lineer terkibe ayrılma tek olduğundan dolayı son eşitlikteki katsayılar eşittir. Yani birleşimli olma şartı

$$C_{\alpha\beta}^{\sigma}C_{\sigma\gamma}^{\varepsilon} = C_{\beta\gamma}^{\sigma}C_{\alpha\sigma}^{\varepsilon}$$

şeklindeki tensör eşitliğiyle ifade edilebilir. Bu kurala $\mathcal{A}_m$ cebirinin birleşimli olma şartı denir.

En az bir $e=1$ elemanı ($(e.a=a.e=a)$ ve her $a\in\mathcal{A}_m$ için benzer işlemlerle $\mathcal{A}_m$ cebirinin tensör ile yazılmış birimli olma şartı

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}\varepsilon^{\alpha}=\delta_{\beta}^{\gamma}\quad \text{ve}\quad C_{\alpha\beta}^{\gamma}\varepsilon^{\beta}=\delta_{\alpha}^{\gamma}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $1=\varepsilon^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ şeklindedir.

$\mathcal{A}_m$ cebirinin tensör ile yazılmış değişimli olma şartı ise

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}=C_{\beta\alpha}^{\gamma}$$

eşitliği ile verilir. Son eşitlikten yapı sabitlerinin aşağı indislere göre simetrik olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi de kompleks ve parakompleks cebir için yapı sabitlerinin hangi formda olduğuna bakalım.

Kompleks cebir (2-boyutlu cebir) boyutu 2 ve bazı $\{1,i\}$ olan cebirdir. Kompleks cebir birleşimli, değişimli ve birimli bir cebir olduğundan, $1.i=i.1=i$, $i^2=-1$ ve $1.1=1$ eşitliklerini sağlar.

Kompleks cebir, $1.i=i.1=i$ olmasından

$$C_{12}^{1}=C_{21}^{1}=0,\ \ C_{12}^{2}=C_{21}^{2}=1,$$

$i^2=-1$ olmasından

$$C_{22}^{1}=-1,\ \ C_{22}^{2}=0$$

ve $1.1=1$ olmasından ise

$$C_{11}^{1}=1,\ \ C_{11}^{2}=0$$

şeklindeki sekiz tane yapı sabitine sahiptir. Kompleks cebir değişmeli olduğundan aşağı indislere göre simetriktir. Kompleks cebirin birimi ise $\{\varepsilon^{\alpha}\}=\{1,0\}$ şeklinde ifade edilir.

Parakompleks cebir (iki kat sayılar cebiri) ise boyutu 2 ve bazı $\{1,e\}$ olan cebir olduğundan, $e^2=1$, $1.1=1$ ve $1.e=e.1=e$ eşitliklerini sağlar.

Parakompleks cebir için, $e^2=1$ eşitliğinden

$$C_{22}^{1}=1,\ \ C_{22}^{2}=0\,,$$

$1.1=1$ eşitliğinden

$$C_{11}^{1}=1,\ \ C_{11}^{2}=0$$

ve $1.e=e.1=e$ eşitliğinden ise

$$C_{12}^{1}=C_{21}^{1}=0,\ \ C_{12}^{2}=C_{21}^{2}=1$$

şeklindeki sekiz tane yapı sabitine sahip olmuş olur. Parakompleks cebirin birimi ise $\{\varepsilon^{\alpha}\}=\{1,0\}$ şeklinde ifade edilir.

Cebirimizin değişme özelliğinin olmadığını ve birimli olduğunu kabul edelim. Yapı sabitlerinin matris dilinde yazılımı

$$C_{\alpha}=\left(C_{\alpha\beta}^{\gamma}\right) \text{ ve } \tilde{C}_{\beta}=\left(C_{\alpha\beta}^{\gamma}\right)$$

şeklindedir. $\text{Boy}\mathcal{A}_m=m$, $\gamma=1,...,m$ olmak üzere C_{α}, $m\times m$ tipinde bir kare matris olur. $m\times m$ tipindeki tüm kare matrislerin kümesi (genelde) vektör uzayıdır. Kare matrislerde değişme özelliği dışındaki diğer tüm özellikler vardır ve boyutu da m^2 dir.

$\vec{a}\in\mathcal{A}_m$ olmak üzere,

$$\vec{a}=a^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\rightarrow a^{\alpha}C_{\alpha}=C(\mathcal{A})$$

$$\vec{a}=a^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\rightarrow a^{\alpha}\tilde{C}'_{\alpha}=\tilde{C}'(\mathcal{A}) \qquad a^{\alpha}\in\mathbb{R}$$

şeklindeki birebir örten dönüşümlerine bakalım. Bu gösterimlerden $C_{\alpha}(\mathcal{A})$'ya 1. regüler tasvir veya regüler matris, $\tilde{C}'_{\alpha}(\mathcal{A})$'ya ise 2. regüler tasvir veya transpoz regüler matris denir.

Bu aşamadan sonra cebiri değişmeli ($\vec{e}_\alpha.\vec{e}_\beta = \vec{e}_\beta.\vec{e}_\alpha$) olarak alacağız. Değişme özelliği yapı sabitleri için,

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = C^\gamma_{\beta\alpha}$$

şeklinde olur. Son eşitlik matris dilinde, $C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ şeklinde yazılır ve $C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ eşitliğine cebirin değişmeli olma durumu denir.

Şimdi kompleks cebir için sırasıyla regüler ve transpoz regüler matrislere bakalım. C_α,

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} C^1_{\alpha 1} & C^1_{\alpha 2} \\ C^2_{\alpha 1} & C^2_{\alpha 2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğundan C_1,

$$C_1 = \begin{pmatrix} C^1_{11} & C^1_{12} \\ C^2_{11} & C^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

şeklindeki birim matris, C_2 ise

$$C_2 = \begin{pmatrix} C^1_{21} & C^1_{22} \\ C^2_{21} & C^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki bir matris olacaktır. Kompleks cebir için regüler tasvir $\{C_1, C_2\}$ şeklinde gösterilir. 1. regüler matris bütün cebirlerde birim matristir. 2. regüler tasvirin elemanları

$$C_1^T = C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C_2^T = C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve 2. regüler tasvir (transpoz regüler matris) $\{C_1^T, C_2^T\}$ şeklinde gösterilir.

Parakompleks cebir için regüler ve transpoz regüler matrislere bakalım. C_α matrisi

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} C^1_{\alpha 1} & C^1_{\alpha 2} \\ C^2_{\alpha 1} & C^2_{\alpha 2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğundan, C_1 ve C_2 matrisleri de sırasıyla,

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 \\ C_{11}^2 & C_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_{21}^1 & C_{22}^1 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Parakompleks cebirin regüler tasviri $\{C_1, C_2\}$, transpoz regüler matrisi de $C_1^T = C_1$, $C_2^T = C_2$ olduğundan dolayı $\{C_1^T, C_2^T\} = \{C_1, C_2\}$ şeklinde yazılabilir. Dolayısı ile parakompleks cebir için 1. ve 2. regüler tasvirler birbirine denk olur.

3.2.2. Cebirsel yapılara göre holomorfluk

Bundan sonra ki aşamalarda cebirimizin birimli, birleşimli ve değişmeli olduğunu kabul edeceğiz.

$\mathcal{A}_m$, $m-$boyutlu cebir (hiperkompleks cebir) olsun. Cebirin bazını $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m\}$ olarak alalım. $\vec{e}_1 = 1$, yani $\vec{e}_1$ adi birim ile özdeşleşsin. $x = x^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ifadesine cebirsel değişken veya hiperkompleks değişken denir.

$f^\alpha(x^1, x^2, ..., x^m)$, $x^\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2, ..., m$ için cebirsel fonksiyonumuzu

$$F = f^\alpha \vec{e}_\alpha$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonun $dF = df^\alpha \vec{e}_\alpha$ diferensiyeli en az bir $g(x) = F'(x)$ olacak şekilde $dF = F'(x)dx$ şeklinde yazılabilirse, F fonksiyonuna x'e göre diferensiyellenebilir (holomorf) fonksiyon denir. 2-boyutlu kompleks cebir için holomorfluk analitikliğe denktir. 2 den fazla boyutta analitiklik yerine holomorfluk ifadesi kullanılır.

3.2.1. Teorem: F fonksiyonunun x'e göre holomorf olması için gerek ve yeter şart

$$C_\alpha D = DC_\alpha \tag{3.10}$$

olmasıdır.

İspat: $F'(x) = \tilde{F}^\alpha \vec{e}_\alpha$, $df = df^\alpha \vec{e}_\alpha$, $dx = dx^\alpha \vec{e}_\alpha$ eşitliklerini

$$dF = F'(x)dx$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$dF = \tilde{F}^\alpha \vec{e}_\alpha dx^\beta \vec{e}_\beta = df^\alpha \vec{e}_\alpha \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir. $df^\alpha = (\partial_\beta f^\alpha)dx^\beta$ olduğundan bu ifadeyi (3.11) eşitliğinde yerine yazarsak ve $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} \vec{e}_\gamma$ eşitliğini de göz önünde bulundurursak,

$$(\partial_\beta f^\alpha)dx^\beta \vec{e}_\alpha = \tilde{F}^\alpha C^\gamma_{\alpha\beta} \vec{e}_\gamma dx^\beta \tag{3.12}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada toplama indisini keyfi harfle işaretlememiz mümkün olduğundan (3.12) eşitliğinin sol tarafındaki α toplama indisi yerine γ harfini kullanırsak,

$$\partial_\beta f^\gamma = \tilde{F}^\alpha C^\gamma_{\alpha\beta} = \tilde{F}^\alpha C_\alpha \tag{3.13}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\partial_\beta f^\gamma$ matrisi, C_α'nın lineer terkibi olarak yazılmıştır. (3.13) yazılımı holomorfluk şartının diğer denk yazılım şartıdır (Vishnevskii *et al.* 1985). Yani,

$$(\partial_\beta f^\gamma)C_\alpha = C_\alpha(\partial_\beta f^\gamma)$$

$$C_\alpha D = DC_\alpha$$

şeklinde yazılmış olur.

Şimdi ise tersini ispat etmeye çalışalım. (3.10) şartının açık şekilde yazılmış hali,

$$C^\beta_{\alpha\gamma} \partial_\beta f^\sigma = \partial_\gamma f^\beta C^\sigma_{\alpha\beta} \tag{3.14}$$

şeklinde olduğundan, (3.14) eşitliğinin her iki tarafını ε^γ ile işleme tabi tutarsak $\partial_\beta f^\sigma$, C_α'nın lineer terkibi olarak,

$$\partial_\beta f^\sigma = \varepsilon^\gamma \partial_\gamma f^\beta C_\alpha = \tilde{F}^\alpha C_\sigma$$

$$\partial_\beta f^\sigma = \tilde{F}^\alpha C_\sigma \tag{3.15}$$

şeklinde yazılmış olur. Bu son eşitlik bizim için holomorfluk şartıdır.

$C_\alpha = C^\gamma_{\alpha\beta}$ şeklindeki bir matrisler, D ise $D = \left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ şeklindeki bir Jacobian matrisi olduğundan, kompleks cebir için C_α regüler matrisleri $(\alpha = 1,2)$ ve D Jacobian matrisi sırasıyla

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$ şeklinde ifade edilir. Bu değerleri (3.10) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

eşitliğini elde ederiz. Kompleks cebirde $\omega = u(x,y) + i.v(x,y)$ olduğundan, yukarıdaki son ifadenin kompleks dilindeki eşitliği

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} & -\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial v}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ve buradan da $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad U_x = V_y$, $U_y = -V_x$ şartları elde edilir. Bu ifadelere Cauchy-Riemannian şartları denir. Burada $C_\alpha D = DC_\alpha$ Cauchy-Riemannian şartı, yani holomorfluk şartıdır. (3.10) ile verilen şarta Scheffers şartı da denir. Scheffers şartının kompleks cebir için özelleştirilmesi yapılır ve sonuçta Cauchy-Riemannian şartı elde edilir.

Paracompleks cebir için Cauchy-Riemannian şartını bulalım. $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan, bu ifadeleri (3.10) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikten de $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ eşitlikleri elde edilirki, bu şarta ise, Parakompleks cebir için para-Cauchy –Riemannian şartı denir.

Şimdi de holomorf bir fonksiyonun keyfi mertebeden türevinin de holomorf fonksiyon olduğunu göstermeye çalışalım. $F'(x) = \varepsilon^{\gamma} \partial_{\gamma} f^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ eşitlini yazabildiğimizden, yani $F'(x)$'i $\vec{e}_{\alpha}$'nın lineer terkibi olarak yazabildiğimizden, $F'(x)$ de bir fonksiyondur. Bu $F'(x)$ fonksiyonunun "türev fonksiyonu var mı?"(Yani $F(x)$ fonksiyonunun 2. türevi var mı?) "şartları nelerdir?"onları araştıralım.

$F(x)$ fonksiyonu için $F'(x)$ fonksiyonu var ise $F(x)$ fonksiyonuna holomorf fonksiyon demiştik. Eğer $F'(x)$ fonksiyonu için $F''(x)$ fonksiyonu varsa $F'(x)$ fonksiyonu da holomorf fonksiyon olacaktır. $\varepsilon^{\beta} \partial_{\beta} f^{\alpha}$ nın Jacobian matrisini alalım. (3.14), yani

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} \partial_{\gamma} f^{\sigma} = \partial_{\beta} f^{\gamma} C^{\sigma}_{\alpha\gamma}$$

eşitliğinin her iki tarafını $\partial_{\theta} = \frac{\partial}{\partial x^{\theta}}$ ile işleme tabi tutulursa,

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f^{\sigma}}{\partial x^{\theta} \partial x^{\gamma}} = \frac{\partial^2 f^{\gamma}}{\partial x^{\theta} \partial x^{\beta}} C^{\sigma}_{\alpha\gamma}$$

eşitliği elde edilir. Burada f'ler reel fonksiyonlar, x'ler ise reel değişkenler olduğundan, ∂x türevlerinin yerleri değiştirilebilir. Ayrıca, son eşitliğin her iki tarafını ε^{θ} ile işleme tabi tutulursa,

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\varepsilon^{\theta}\frac{\partial f^{\sigma}}{\partial x^{\theta}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\varepsilon^{\theta}\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial x^{\theta}}\right)C_{\alpha\gamma}^{\sigma},$$

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}\partial_{\gamma}\left(\varepsilon^{\theta}\partial_{\theta}f^{\sigma}\right)=\partial_{\beta}\left(\varepsilon^{\theta}\partial_{\theta}f^{\gamma}\right)C_{\alpha\gamma}^{\sigma}$$

eşitliği, yani $F'(x)$'in $\varepsilon^{\theta}\partial_{\theta}f^{\sigma}$'nun Jacobian matrisinin C_{α} ile değişmeli olduğu bulmuş olur. Dolayısıyla $F'(x)$ fonksiyonu holomorftur. O halde bir fonksiyonun istenilen mertebeden diferensiyelleri (türevleri) vardır. Yani holomorf fonksiyonların keyfi mertebeden türevi de holomorftur.

İki holomorf fonksiyonun toplamı, çarpımı ve çarpımının türevi holomorf fonksiyondur. Holomorf fonksiyonun skaler ile çarpımı holomorftur. Holomorf fonksiyonların bileşkelerinin neticesi de holomorftur.

3.3. Nijenhuis Tensörü

Nijenhuis tensörü yapıların integrallenebilme şartlarının incelenmesinde gerekli olan tensördür. A ve B afinorlarının verildiğini kabul edelim ve $X,Y\in T_0^1(M_n)$ için $N_{AB}(X,Y)$ Nijenhuis tensörünü

$$\begin{aligned}N_{AB}(X,Y)=&[AX,BY]+[BX,AY]+AB[X,Y]+BA[X,Y]\\&-A[X,BY]-A[BX,Y]-B[X,AY]-B[AX,Y]\end{aligned}\tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır (Yano, 1965). $N_{AB}\in T_2^1(M_n)$ olduğu açıktır, yani N_{AB} (1,2)-tipli bir tensör alanıdır.

Bazı kaynaklarda Nijenhuis tensörüne A,B afinorlarının torsion'u denir. $A=B$ alınırsa bir tek afinor için Nijenhuis tensörü ifadesi kullanılır. Bir afinor yapı için Nijenhuis tensörü, $A=B=\varphi$ olmak üzere

$$N_{\varphi}(X,Y)=2N(X,Y)=[\varphi X,\varphi Y]+[\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]+\varphi^2[X,Y]$$

$$-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]$$
$$=2([\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y])$$

şeklinde olup,

$$N_\varphi(X,Y)=N(X,Y)=[\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y] \tag{3.17}$$

alarak alınır.

Eğer φ afinoru için $\varphi^2=-I$ ise yapıya hemen hemen kompleks yapı, $\varphi^2=I$ ise hemen hemen product yapı, $\varphi^2=0$ ise dual yapı denir. Bu yapılar için $N(X,Y)=0$ olması yapıların integrallenebilme şartıdır.

Şimdi de Nijenhuis tensörünü lokal koordinatlarda yazmaya çalışalım:

Bunun için Lie parantezinin

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X \tag{3.18}$$

özelliğinden faydalanacağız. $X=\partial_i$, $Y=\partial_j$ eşitliklerini (3.17) ve (3.18) eşitliklerinde yerine yazalım. İlk önce (3.18) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$[f\partial_i,g\partial_j]=fg[\partial_i,\partial_j]+f(\partial_i g)\partial_j-g(\partial_j f)\partial_i$$

eşitliği elde edilir. $[\partial_i,\partial_j]=0$ olduğundan

$$[f\partial_i,g\partial_j]=f(\partial_i g)\partial_j-g(\partial_j f)\partial_i \tag{3.19}$$

olur. (3.17) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$N_\varphi(\partial_i,\partial_j)=N^k_{(\varphi)ij}\partial_k=N^k_{ij}\partial_k$$
$$N^k_{ij}\partial_k=[\varphi\partial_i,\varphi\partial_j]+\varphi^2[\partial_i,\partial_j]-\varphi[\partial_i,\varphi\partial_j]-\varphi[\varphi\partial_i,\partial_j]$$
$$=[\varphi^s_i\partial_s,\varphi^l_j\partial_l]-\varphi[\partial_i,\varphi^l_j\partial_l]-\varphi[\varphi^s_i\partial_s,\partial_j]$$

ve Lie parantezinin özelliğinden, yani (3.19) eşitliğinden

$$N^k_{ij}\partial_k=\varphi^s_i\varphi^l_j[\partial_s,\partial_l]+\varphi^s_i(\partial_s\varphi^l_j)\partial_l-\varphi^l_j(\partial_l\varphi^s_i)\partial_s$$
$$-\varphi\{\varphi^l_j[\partial_i,\partial_l]+(\partial_i\varphi^l_j)\partial_l-\varphi^l_j(\partial_l.1)\partial_i\}$$
$$-\varphi\{\varphi^s_i[\partial_s,\partial_j]+\varphi^s_i(\partial_s.1)\partial_j-(\partial_j\varphi^s_i)\partial_s\}$$

$$N_{ij}^k \partial_k = \varphi_i^s \partial_s \varphi_j^l \partial_l - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^s \partial_s - \partial_i \varphi_j^l \varphi_l^k \partial_k + \partial_j \varphi_i^s \varphi_s^k \partial_k$$

$$= (\varphi_i^s \partial_s \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \partial_i \varphi_j^l \varphi_l^k + \partial_j \varphi_i^s \varphi_s^k) \partial_k$$

$$N_{ij}^k \partial_k = (\varphi_i^s \partial_s \varphi_j^k - \varphi_j^l \partial_l \varphi_i^k - \partial_i \varphi_j^l \varphi_l^k + \partial_j \varphi_i^s \varphi_s^k) \partial_k \qquad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. (3.20) eşitliği Nijenhuis tensörünün lokal koordinatlarla yazılımıdır.

3.4. Skaler Eğrilik

M_n, n-boyutlu C^∞-sınıfından olan Riemannian manifoldu olsun. g_{ij} metriğimiz simetrik, regüler ve konneksiyonumuz da Levi-Civita konneksiyonu olsun.

Riemannian manifoldunda R_{ijk}^s eğrilik tensöründeki s indisini k indisinden sonraki yere indirdiğimizde

$$R_{ijkt} = g_{st} R_{ijk}^s \iff R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

şeklinde (0,4) tipli tensör elde edilir.

$R_{ij} = R_{sij}^s = g^{ts} R_{tijs} = g^{ts} R_{itsj}$ tensörüne Ricci tensörü denir (Yano, 1965). Ricci tensörü ve g^{ij} tensörü ile tam kontraksiyon yapalım ve

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

olsun. Bu R eğriliğine skaler eğrilik denir. Genelde R eğriliği manifoldun noktasına bağlı fonksiyondur.

Şimdi skaler eğriliğinin yüzeyde neye karşılık geldiğini bulalım:
Yüzeyin birinci esas formu (Riemannian metriği) $I = g_{ij} du^i du^j$ ve ikinci esas formu $II = h_{ij} du^i du^j$ şeklinde olmak üzere, κ Gauss (veya tam) eğriliği

$$\kappa = \kappa_1 . \kappa_2 = \frac{Det(h_{ij})}{Det(g_{ij})}$$

$$\kappa = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}{}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden, 1999). Yüzeyler için eğrilik tensörü,

$$\kappa = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2}$$

şeklinde olup bu son eşitlik Gauss eğriliği için önemli bir teoremdir. Skaler eğrilik yüzeyler için (n=2 için) Gauss eğriliğinin 2 katı olduğunu göstermeye çalışalım. Skaler eğriliği yüzeyde,

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}R^{s}_{sij} = g^{ij}g^{ts}R_{sijt}$$

$$\Rightarrow R = g^{21}g^{21}R_{1212} + g^{11}g^{22}R_{2112} + g^{22}g^{11}R_{1221} + g^{12}g^{12}R_{2121}$$

şeklindeki eşitliğe sahiptir. Burada, Riemannian uzayında R_{ijkl} eğrilik tensörünün özelliğinden, ilk iki indis ve son iki indis aynı olanlar sıfır olur.

$$\begin{aligned} R &= g^{12}g^{12}R_{1212} - g^{11}g^{22}R_{1212} - g^{11}g^{22}R_{1221} + g^{12}g^{12}R_{1212} \\ &= ((g^{12})^2 - g^{11}g^{22} - g^{11}g^{22} + (g^{12})^2)R_{1212} \\ &= (-2(-(g^{12})^2 + g^{11}g^{22}))R_{1212}, \end{aligned}$$

$$R = -2(Det(g^{-1}))R_{1212},$$

$$R = -2\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2},$$

$$R = 2\kappa.$$

bulunmuş olur. Bu son eşitlik, yüzeyler için skaler eğriliğin, Gauss eğriliğinin 2 ile çarpılmış hali olduğunu gösterir. Yüzeyler bilinen 2-boyutlu Riemannian manifoldudur.

3.5. Hermitian ve Kahlerian Manifoldlar

M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -I$ olan tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) ise hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır. M_{2n} üzerindeki Hermitian metrik, M_{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{3.21}$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğidir. Bazen (3.21) şartını sağlayan g metriğine hybrid metrik de denir.

Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifolda hemen hemen Hermitian manifold, Hermitian metriğe sahip kompleks manifolda ise Hermitian manifold denir.

3.5.1. Teorem: M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına sahip hemen hemen kompleks manifold olsun. M_{2n} nin kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi = 0$ ve $S = 0$ olacak şekilde ∇ afin konneksiyonunun olmasıdır. Burada S, ∇'nın burulma tensörüdür.

M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip hemen hemen Hermitian manifold olsun. M_{2n} üzerindeki Ω esas 2-formu

$$\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y) = (g \circ \varphi)(X, Y) \tag{3.22}$$

ile tanımlanır.

3.5.2. Teorem: M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifold olsun. ∇, g ile tanımlanan Riemannian konneksiyonunun kovaryant türevlemesi olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

a) $\nabla\varphi = 0$

b) φ hemen hemen kompleks yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olması ve Ω esas 2-formunun kapalı olması, yani $N_\varphi = 0$ ve $d\Omega = 0$.

M_{2n} hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki g Hermitian metriği için Ω esas 2-formu kapalı ise g'ye Kahlerian metrik denir. Kahlerian metriğine sahip M_{2n} hemen hemen kompleks manifolduna hemen hemen Kahlerian manifold denir. Kahlerian metriğine sahip M_{2n} kompleks manifolduna da Kahlerian manifold denir. Teorem 3.5.2

den, M_{2n} Hermitian manifoldunun Kahlerian manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\nabla \varphi = 0$ olması gerektiği açıktır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Parakompleks yapı ve ϕ-operatör

M_n pozitif tanımlı olması gerekmeyen g metriğine sahip bir Riemannian manifoldu olsun. M_n üzerindeki (p,q) tipli bütün tensör alanlarının kümesini $\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilecektir. Manifoldlar, tensör alanları ve konneksiyonlar her zaman diferensiyellenebilir ve C^∞ sınıfından olduğu kabul edilecektir.

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki φ hemen hemen product yapı, $\varphi^2 = I$ olacak şekilde M_n üzerinde (1,1) tipli tensör alanıdır. Burada (M_n,φ) çiftine hemen hemen product manifold denir. Hemen hemen parakompleks manifold, sırasıyla, φ nin +*I* ve -*I* öz değerlerine karşılık gelen T^+M_n ve T^-M_n öz demetleri aynı rank'a sahip olduğunda hemen hemen product manifolddur (Cruceanu *et al.* 1995). Burada hemen hemen parakompleks manifoldun boyutu çifttir. φ parakompleks yapısı göz önünde bulundurulursa aşağıdaki afinorlar kümesi elde edilir: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde mertebesi 2 olan cebiri temsil eden bazlar $\{I,\varphi\}$, $\varphi^2 = I$ formundadır. $\mathbb{R}(j) = \{a_0 + a_1 j : j^2 = 1; a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ ile tanımlanan cebire parakompleks sayılar cebiri (veya iki kat sayılar cebiri) denir. Bu cebir birleşimli, değişimli ve birimli bir cebirdir. Ve cebir kanonik bazda $\{1, j\}$ formuna sahiptir. Cebirin yapı sabitleri çarpım kuralıyla $e_i e_j = C_{ij}^k e_k$ şeklinde tanımlanır. C_{ij}^k bileşenleri $\mathbb{R}(j)$ nin kanonik bazına göre $C_{11}^1 = C_{12}^2 = C_{21}^2 = C_{22}^1 = 1$ ve diğer bileşenleri sıfır şeklindedir.

$\mathbb{R}(j)$ nin $\mathbb{R}^2$ nin alışılmış topolojisine sahip olduğu düşünülür. $U \subset \mathbb{R}(j)$ bölgesinde bir değişken

$$X = x^1 + jx^2$$

olsun. Burada x^i ler $i=1,2$ için U nun tanım kümesindeki belli bir noktanın reel koordinatlarıdır. İki tane reel değişkenli $f^i(x^1,x^2)$, $i=1,2$ fonksiyonlarının vasıtasıyla X değişkeninin parakompleks fonksiyonu

$$F=f^1+jf^2$$

ile tanımlanır. $dX=dx^1+jdx^2$, $dF=df^1+jdf^2$ diferensiyelleri ve $F'(X)$ türevi için

$$dF=F'(X)dX$$

ifadesi yazılırsa fonksiyona paraholomorfik fonksiyon denir. $X=x^1+jx^2$ değişkenli $F=f^1+jf^2$ fonksiyonun paraholomorfik olması, $D=(\partial_k f^i)$ Jacobian matrisinin $C_2=(C_{2j}^k)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ matrisiyle değişmeli olmasına denktir (Vishnevskii *et al.* 1985, s. 87). F nin paraholomorfik olması için gerek ve yeter şart f^1 ve f^2 nin

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^1}=\frac{\partial f^2}{\partial x^2},\ \frac{\partial f^1}{\partial x^2}=\frac{\partial f^2}{\partial x^1}$$

para-Cauchy-Riemannian şartını sağlamasıdır. Aslında F nin paraholomorfik olması için gerek ve yeter şart $C_\alpha D=DC_\alpha$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitliğe Sheffers şartı denir. Paracompleks cebir için Sheffers şartının özelleştirilmesi yapılır ve sonuçta para-Cauchy-Riemannian şartı oluşur.

Hemen hemen parakompleks yapının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$N_\varphi(X,Y)=[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]+[X,Y]$$

Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olmasıdır. Hemen hemen parakompleks yapının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biriside $\nabla\varphi=0$ olacak şekilde burulmasız bir lineer konneksiyonun olmasıdır. Ayrıca φ afinor alanı ile tanımlanan G-yapısı integrallenebilirse (M_{2k},φ) hemen hemen parakompleks manifolduna parakompleks manifold denir. $\mathbb{R}^k(j)=\left\{(X^1,...,X^k)/X^i\in\mathbb{R}(j),\ i=1,...k\right\}$ uzayındaki lokal homeomorfizmlere göre de parakompleks manifoldunun benzer tanımı verilebilir.((Cruceanu *et al.*, 1996), (Gadea P.M. *et al.*, 2003), (Vishnevskii *et al.*, 1985)). $\overset{*}{t}$, $M_k(\mathbb{R}(j))$ manifoldu üzerinde parakompleks tensör alanı olsun. Böyle bir tensör alanı aynı zamanda M_{2k} manifoldu üzerinde bir tensör alanıdır. Böyle tensör alanların φ ye göre pür olduğu söylenilir. Bu durumlar birçok yazar tarafından çalışılmıştır ((Blažić and Bokan, 1996), (Borowiec *et al.* 2000), (Iscan and Salimov, 2005), (Kruchkovich, 1972), (Magden, 2004), (Salimov *et al.*, 2007), (Vishnevskii *et al.*, 1985), (Yano and Ako, 1968)).

Her $X_1,...,X_q \in \Im_0^1(M_{2k})$ için $(0,q)$ tipli ω tensör alanının pürlük şartı,

$$\omega(\varphi X_1, X_2,...,X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2,...,X_q) = ... = \omega(X_1, X_2,...,\varphi X_q)$$

şeklinde ifade edilir. $\phi_\varphi \omega$ (Yano and Ako, 1968) ile ω pür tensör alanına uygulanabilen $\phi_\varphi : \Im_q^0(M_{2k}) \to \Im_{q+1}^0(M_{2k})$ operatörü

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2,...,Y_q) = (\varphi X)(\omega(Y_1, Y_2,...,Y_q)) - X(\omega(\varphi Y_1, Y_2,...,Y_q))$$
$$+\omega((L_{Y_1}\varphi)X, Y_2,...,Y_q) + ... + \omega(Y_1, Y_2,...,(L_{Y_q}\varphi)X) \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada L_Y, Y 'ye göre Lie türevini gösterir.

φ, M_{2k} manifoldu üzerinde parakompleks yapı olsun. $\phi_\varphi \omega$ tensör alanı sıfıra eşit ise $M_k(R(j))$ üzerindeki $\overset{*}{\omega}$ parakompleks tensör alanına paraholomorfik tensör alanı denir (Kruchkovich, 1972). Böylece $M_k(R(j))$ üzerindeki $\overset{*}{\omega}$ paraholomorfik parakompleks tensör alanı, her $X, Y_1,...,Y_q \in \Im_0^1(M_{2k})$ için

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2,...,Y_q) = 0 \qquad (4.2)$$

olacak şekilde ω pür tensör alanı formunda, M_{2k} manifoldu üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu yüzden M_{2k} manifoldu üzerindeki böyle ω tensör alanına ayrıca paraholomorfik tensör alanıda denir.

4.2. Holomorfik B-Manifold

Hemen hemen parakompleks yapısına göre bir g *pür metriği*, her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$g(\varphi X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{4.3}$$

şartını sağlayan bir Riemannian metriğidir. Böyle Riemannian metrikler (Vishnevskii, 2002)'da çalışılmış ve böyle metriklere *B-metrik* denilmiştir. Çünkü φ yapısına göre pür g metrik tensörü (Vishnevskii *et al.*, 1985)'de kabul edilen terminolojiye göre B-tensördür. Eğer (M_{2k},φ), g B-metriğine sahip bir hemen hemen parakompleks manifold ise (M_{2k},φ,g)'ye hemen hemen B-manifold denir. φ integrallenebilir ise (M_{2k},φ,g)'ye B-manifold denir.

Bir B-manifoldunda g B-metriği $(\phi_\varphi g)(X,Y,Z)=0$ şartını sağlarsa g'ye paraholomorfiktir denir. Eğer (M_{2k},φ,g), g B-metriği paraholomorfiğe sahip bir B-manifold ise (M_{2k},φ,g)'ye paraholomorfik B-manifold denir.

Şimdi Hemen hemen para B-manifoldun g B-metriği için bir formül oluşturalım.

4.2.1. Teorem: g, hemen hemen para B-manifoldun B-metriği olsun. Bu durumda,

$$g(Z,(\nabla_Y\varphi)(X))=g((\nabla_Y\varphi)(Z),X),$$

olur. Burada ∇, g ye göre Riemannian kovaryant türev operatörünü gösterir.

İspat: (4.3) ve

$$Yg(Z,X)=g(\nabla_Y Z,X)+g(Z,\nabla_Y X)$$

eşitliğinden dolayı $Yg(\varphi Z,X)=Yg(Z,\varphi X)$ olup,

$$g(\nabla_Y\varphi Z,X)+g(\varphi Z,\nabla_Y X)=g(\nabla_Y Z,\varphi X)+g(Z,\nabla_Y\varphi X)$$

veya

$$g(\varphi Z,\nabla_Y X)-g(Z,\nabla_Y\varphi X)=g(\nabla_Y Z,\varphi X)-g(\nabla_Y\varphi Z,X)$$

eşitliğini yazabiliriz. Sonuç olarak,

$$(\nabla_X K)(X_1,...,X_s)=(\nabla K)(X_1,...,X_s,X)=\nabla_X(K(X_1,...,X_s))$$

$$-\sum_{i=1}^{s}K(X_1,...,\nabla_X X_i,...,X_s),\quad K\in T_s^1(M_n) \tag{4.4}$$

formülünden dolayı da

$$g(Z,\varphi(\nabla_Y X)-\nabla_Y\varphi X)=g(\varphi(\nabla_Y Z)-\nabla_Y\varphi Z,X)$$

eşitliği yazılır.

4.2.2. Teorem: Hemen hemen B-manifoldun paraholomorfik B-manifold olması için gerek ve yeter şart hemen hemen parakompleks yapının ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.

İspat:

$$(L_X g)(Y_1,Y_2)=X(g(Y_1,Y_2))-g([X,Y_1],Y_2)-g(Y_1,[X,Y_2]),$$

$$L_X Y=\nabla_X Y-\nabla_Y X-T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X$$

eşitliklerinden ve (4.1) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(X,Z_1,Z_2)&=(\varphi X)g(Z_1,Z_2)-g(\nabla_{\varphi X}Z_1-\nabla_{Z_1}\varphi X,Z_2)\\&\quad-g(Z_1,\nabla_{\varphi X}Z_2-\nabla_{Z_2}\varphi X)\;-Xg(\varphi Z_1,Z_2)\\&\quad+(g\circ\varphi)(\nabla_X Z_1-\nabla_{Z_1}X,Z_2)+(g\circ\varphi)(Z_1,\nabla_X Z_2-\nabla_{Z_2}X)\\&\quad+g(Z_1,\varphi(\nabla_X Z_2-\nabla_{Z_2}X))-g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2-\nabla_{Z_2}X)\\&=(\varphi X)g(Z_1,Z_2)-Xg(\varphi Z_1,Z_2)-g(\nabla_{\varphi X}Z_1,Z_2)\\&\quad+g(\nabla_{Z_1}\varphi X,Z_2)\;-g(Z_1,\nabla_{\varphi X}Z_2)+g(Z_1,\nabla_{Z_2}\varphi X)\\&\quad+g(\varphi(\nabla_X Z_1),Z_2)-g(\varphi(\nabla_{Z_1}X),Z_2)\;+g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2)\\&\quad-g(\varphi Z_1,\nabla_{Z_2}X)+g(Z_1,\varphi(\nabla_X Z_2))-g(Z_1,\varphi(\nabla_{Z_2}X))\\&\quad-g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2)+g(\varphi Z_1,\nabla_{Z_2}X),\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(X,Z_1,Z_2)&=(\varphi X)g(Z_1,Z_2)-Xg(\varphi Z_1,Z_2)-g(\nabla_{\varphi X}Z_1,Z_2)\\&\quad+g(\nabla_{Z_1}\varphi X,Z_2)\;-g(Z_1,\nabla_{\varphi X}Z_2)\;+g(Z_1,\nabla_{Z_2}\varphi X)\\&\quad+g(\varphi(\nabla_X Z_1),Z_2)-g(\varphi(\nabla_{Z_1}X),Z_2)\;+g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2)\\&\quad-g(Z_1,\varphi(\nabla_{Z_2}X))\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

(4.4) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$g(\nabla_{Z_1}\varphi X, Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1}X), Z_2) + g(Z_1, \nabla_{Z_2}\varphi X) - g(Z_1, \varphi(\nabla_{Z_2}X))$$
$$= g((\nabla\varphi)(X, Z_1), Z_2) + g(Z_1, (\nabla\varphi)(X, Z_2)) \tag{4.6}$$

bulunur. (4.6) eşitliği (4.5) te yerine yazılırsa, (4.5) eşitliği

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) = {} & (\varphi X)g(Z_1, Z_2) - Xg(\varphi Z_1, Z_2) \\ & + g((\nabla\varphi)(X, Z_1), Z_2) + g(Z_1, (\nabla\varphi)(X, Z_2)) \\ & - g(\nabla_{\varphi X}Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X}Z_2) \\ & + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2)\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan, ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre

$$(\varphi X)g(Z_1, Z_2) - g(\nabla_{\varphi X}Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X}Z_2) = (\nabla_{\varphi X}g)(Z_1, Z_2) = 0 \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned}& -Xg(\varphi Z_1, Z_2) + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) \\ & = -Xg(\varphi Z_1, Z_2) + g((\nabla_X \varphi Z_1), Z_2) \\ & + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) - g((\nabla_X\varphi)Z_1, Z_2) \\ & = -(\nabla_X g)(\varphi Z_1, Z_2) - g((\nabla_X\varphi)Z_1, Z_2) \\ & = -g((\nabla_X\varphi)Z_1, Z_2)\end{aligned} \tag{4.9}$$

yazabiliriz. (4.8) ve (4.9) eşitliklerinden dolayı, (4.7) eşitliğini

$$(\phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) = -g((\nabla_X\varphi)Z_1, Z_2) + g((\nabla_{Z_1}\varphi)X, Z_2) + g(Z_1, (\nabla_{Z_2}\varphi)X) \tag{4.10}$$

olarak yazabiliriz.

Benzer şekilde,

$$(\phi_\varphi g)(Z_2, Z_1, X) = -g((\nabla_{Z_2}\varphi)Z_1, X) + g((\nabla_{Z_1}\varphi)Z_2, X) + g(Z_1, (\nabla_X\varphi)Z_2) \tag{4.11}$$

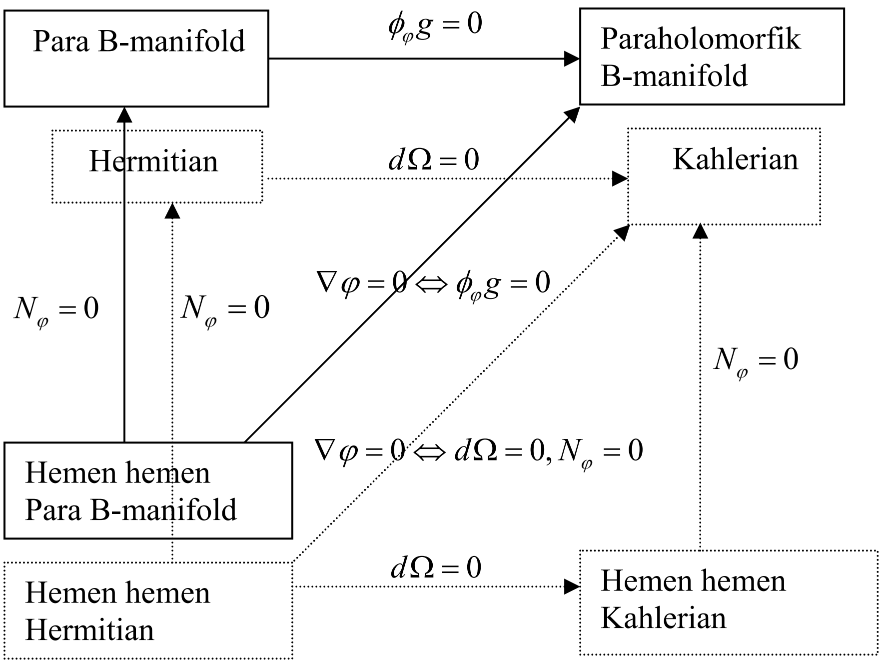
eşitliğini yazabiliriz. (4.10) ve (4.11) eşitliğinden

$$(\phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) + (\phi_\varphi g)(Z_2, Z_1, X) = 2g(X, (\nabla_{Z_1}\varphi)Z_2) \tag{4.12}$$

eşitliği kolayca elde edilebilir. (4.12) eşitliğinde $\phi_{\varphi} g = 0$ yazılırsa, $\nabla\varphi = 0$ eşitliği bulunmuş olur. (4.10) veya (4.11) eşitliğinden $\nabla\varphi = 0$ olduğunda $\phi_{\varphi} g = 0$ olduğu kolayca bulunur.

4.2.3. Sonuç: $\phi_{\varphi} g = 0$ ise hemen hemen para B-manifold üzerindeki φ hemen hemen parakompleks yapı integrallenebilirdir.

Hemen hemen Hermitian manifold ve hemen hemen para B-manifold arasındaki bazı benzerlikleri çift diagramlarla göstereceğiz. (M_{2k}, φ, g) hemen hemen Hermitian manifold olsun ve Ω ile esas 2-formu gösterelim. O halde yapıları aşağıdaki şematik sıraya koyabiliriz.



Şekil 4.1. Hemen hemen Hermitian manifold ve hemen hemen para B-manifold arasındaki benzerlikler diagramı

(M_{2k}, φ, g) hemen hemen B-manifold olsun. Hemen hemen B-manifoldun birleşimli B-metriği, M_{2k} manifoldu üzerindeki her X ve Y vektör alanları için

$$G(X,Y) = (g \circ \varphi)(X,Y) \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlanır. Pür olan G Riemannian metriğine Tachibana operatörünü uyguladığımızda

$$
\begin{aligned}
(\phi_{\varphi}G)(X,Y,Z) &= (L_{\varphi X}G - L_X(G\circ\varphi))(Y,Z) + G(Y,\varphi L_X Z) - G(\varphi Y, L_X Z) \\
&= (L_{\varphi X}(g\circ\varphi) - L_X((g\circ\varphi)\circ\varphi))(Y,Z) \\
&+(g\circ\varphi)(Y,\varphi L_X Z) - (g\circ\varphi)(\varphi Y, L_X Z) \\
&= ((L_{\varphi X}g)\circ\varphi + g\circ L_{\varphi X}\varphi - L_X(g\circ\varphi)\circ\varphi - (g\circ\varphi)L_X\varphi)(Y,Z) \\
&+ (g\circ\varphi)(Y,\varphi L_X Z) - (g\circ\varphi)(\varphi Y, L_X Z) \\
&= (L_{\varphi X}g - L_X(g\circ\varphi))(\varphi Y,Z) + g(\varphi Y,\varphi L_X Z) \\
&- g(\varphi(\varphi Y), L_X Z) + (g\circ L_{\varphi X}\varphi - (g\circ\varphi)L_X\varphi)(Y,Z) \qquad (4.14) \\
&= (\phi_{\varphi}g)(X,\varphi Y,Z) + g((L_{\varphi X}\varphi)Y,Z) - g(\varphi((L_X\varphi)Y),Z) \\
&= (\phi_{\varphi}g)(X,\varphi Y,Z) + g([\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y],Z) \\
&-g(\varphi[X,\varphi Y] - \varphi^2[X,Y],Z) \\
&= (\phi_{\varphi}g)(X,\varphi Y,Z) + g([\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] + \varphi^2[X,Y],Z) \\
&= (\phi_{\varphi}g)(X,\varphi Y,Z) + g(N_{\varphi}(X,Y),Z)
\end{aligned}
$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. Böylece (4.14) ifadesinden aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.2.4. Teorem: Bir hemen hemen B-manifoldunda

$$\phi_{\varphi}G = (\phi_{\varphi}g)\circ\varphi + g\circ(N_{\varphi})$$

eşitliği doğru olur.

Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.4’ den aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.2.5. Teorem: $\phi_{\varphi}G = 0$, $N_{\varphi} \neq 0$ şartlarına sahip hemen hemen B-manifold, yani hemen hemen Kahlerian manifoldların benzerleri yoktur.

4.2.6. Sonuç: Aşağıdaki şartlar denktir:

a) $\phi_{\varphi}g = 0$

b) $\phi_{\varphi} G = 0$

g B-metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun kovaryant türevini ∇_g ile gösterelim. Bu durumda Teorem 4.2.2'den dolayı $\nabla_g G = 0$ ifadesini

$$\nabla_g G = (\nabla_g g) \circ \varphi + g \circ (\nabla_g \varphi) = g \circ (\nabla_g \varphi)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu yüzden aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.2.7. Teorem: (M_{2k}, φ, g) paraholomorfik B-manifold olsun. Bu durumda g B-metriğinin Levi-Civita koneksiyonu birleşimli G B-metriğinin Levi-civita konneksiyonu ile çakışır.

4.3. Paraholomorfik B-manifoldlarında Eğrilik Tensörleri

R ve S sırasıyla g ve G ile oluşturulmuş eğrilik tensörleri olsunlar. Bu durumda paraholomorfik B-manifold için Teorem 4.2.7'nin vasıtasıyla $R = S$ yazılabilir. φ için Ricci'nin özdeşliğini uygulayarak, $\nabla \varphi = 0$ eşitliğinden dolayı

$$\varphi(R(X,Y)Z) = R(X,Y)\varphi Z \tag{4.15}$$

eşitliği yazılabilir. Bu yüzden $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$ eşitliği ve

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, \varphi X_3, X_4) &= g(R(X_1, X_2)\varphi X_3, X_4) \\ &= g(\varphi(R(X_1, X_2)X_3), X_4) \\ &= g(R(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\ &= R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4) \end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı R eğrilik tönsörü X_3 ve X_4 göre ve ayrıca X_1 ve X_2 göre pürdür.

Diğer taraftan S, birleşimli G B-metriği ile oluşturulmuş eğrilik tensörü olsun. Eğer $S(X_1, X_2, X_3, X_4) = G(S(X_1, X_2)X_3, X_4)$ alınırsa o zaman

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = S(X_3, X_4, X_1, X_2) \tag{4.16}$$

yazılabilir. (4.1), (4.13), (4.15) ve $R = S$ ifadelerini göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} S(X_1, X_2, X_3, X_4) &= G(S(X_1, X_2)X_3, X_4) \\ &= g(\varphi(S(X_1, X_2)X_3), X_4) \\ &= g(S(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\ &= g(R(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\ &= R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} S(X_3, X_4, X_1, X_2) &= G(S(X_3, X_4)X_1, X_2) \\ &= g(\varphi(S(X_3, X_4)X_1), X_2) \\ &= g(S(X_3, X_4)X_1, \varphi X_2) \\ &= g(R(X_3, X_4)X_1, \varphi X_2) \\ &= R(X_3, X_4, X_1, \varphi X_2) \\ &= R(X_1, \varphi X_2, X_3, X_4) \end{aligned}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece (4.16) eşitliği

$$R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4) = R(X_1, \varphi X_2, X_3, X_4)$$

olur. Bu ise $R(X_1, X_2, X_3, X_4)$'nin X_2 ve X_4'e göre pür olduğunu gösterir. O halde $R(X_1, X_2, X_3, X_4)$ pürdür. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.3.1. Teorem: Paraholomorfik B-manifoldunda B-metriğinin Riemannian eğrilik tensörü pürdür.

R Riemannian eğrilik tensörü pür olduğundan R'ye ϕ-operatörünü uygulayabiliriz. Teorem 4.2.2'de kullandığımız yöntemlerin benzerleri ile

$$(\phi_\varphi R)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = (\nabla_{\varphi X} R)(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) - (\nabla_X R)(\varphi Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \tag{4.17}$$

olduğunu ispatlayabiliriz. (4.15)'i kullanarak ve (4.17)'ye Bianchi'nin 2. özdeşliğini uygulayarak

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi R)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= g((\nabla_{\varphi X} R)(Y_1, Y_2, Y_3) - (\nabla_X R)(\varphi Y_1, Y_2, Y_3), Y_4) \\ &= g((\nabla_{\varphi X} R)(Y_1, Y_2, Y_3) - \varphi((\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3)), Y_4) \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$= g(-(\nabla_{Y_1} R)(Y_2, \varphi X, Y_3) - (\nabla_{Y_2} R)(\varphi X, Y_1, Y_3)$$

$$-\varphi((\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3)), Y_4)$$

eşitliğini elde edebiliriz. Diğer taraftan, $\nabla\varphi = 0$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_{Y_2} R)(\varphi X, Y_1, Y_3) &= \nabla_{Y_2}(R(\varphi X, Y_1, Y_3)) - R(\nabla_{Y_2}(\varphi X), Y_1, Y_3) \\
&- R(\varphi X, \nabla_{Y_2} Y_1, Y_3) - R(\varphi X, Y_1, \nabla_{Y_2} Y_3) \\
&= (\nabla_{Y_2}\varphi)(R(X, Y_1, Y_3)) + \varphi(\nabla_{Y_2} R(X, Y_1, Y_3)) \\
&- R((\nabla_{Y_2}\varphi)X + \varphi(\nabla_{Y_2} X), Y_1, Y_3) \qquad (4.19) \\
&- R(\varphi X, \nabla_{Y_2} Y_1, Y_3) - R(\varphi X, Y_1, \nabla_{Y_2} Y_3) \\
&= \varphi(\nabla_{Y_2} R(X, Y_1, Y_3)) - \varphi(R(\nabla_{Y_2} X, Y_1, Y_3)) \\
&- \varphi(R(X, \nabla_{Y_2} Y_1, Y_3)) - \varphi(R(X, Y_1, \nabla_{Y_2} Y_3)) \\
&= \varphi((\nabla_{Y_2} R)(X, Y_1, Y_3))
\end{aligned}$$

eşitliğini bulabiliriz. Benzer şekilde

$$(\nabla_{Y_1} R)(Y_2, \varphi X, Y_3) = \varphi((\nabla_{Y_1} R)(Y_2, X, Y_3)) \qquad (4.20)$$

eşitliğini bulabiliriz. (4.18) de (4.19) ve (4.20) eşitliklerini yerine yazarak ve tekrar Bianchi'nin 2. özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
(\phi_\varphi R)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= g(-\varphi((\nabla_{Y_1} R)(Y_2, X, Y_3)) - \varphi((\nabla_{Y_2} R)(X, Y_1, Y_3)) \\
&- \varphi((\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3)), Y_4) \\
&= -g(\varphi(\sigma\{(\nabla_X R)(Y_1, Y_2\}, Y_3)), Y_4) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

eşitliğini elde edebiliriz. Burada σ, X, Y_1 ve Y_2 ye göre dairesel toplamı gösterir. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.3.2 Teorem: Paraholomorfik B-manifoldunda Riemannian eğrilik tensör alanı paraholomorfik tensör alanıdır.

4.4. Paraholomorfik B-manifoldlarında Skaler Eğrilikler

(M_{2n},φ) parakompleks manifold olsun.

4.4.1. Yardımcı Teorem: $f\in\Im_0^0(M_{2n})$, df tam 1-formunun holomorfik, yani $\phi_\varphi(df)=0$ olması için gerek ve yeter şart $df\circ\varphi$ birleşimli 1-form'unun kapalı, yani $d(df\circ\varphi)=0$ olmasıdır.

İspat: Her $X,Y\in\Im_0^1(M_{2n})$, $\omega\in\Im_1^0(M_{2n})$ ve $(\omega\circ\varphi)(X)=\omega(\varphi(X))$ için

$$(d\omega)(X,Y)=\frac{1}{2}\left\{X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])\right\}$$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}(d\omega)(Y,\varphi X)&=\frac{1}{2}\left\{Y(\omega(\varphi X))-(\varphi X)(\omega(Y))-\omega([Y,\varphi X])\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{Y(\omega(\varphi X))-(\varphi X)(\omega(Y))+\omega([\varphi X,Y])\right\}\qquad(4.21)\\&=\frac{1}{2}\{Y(\omega(\varphi X))-(\varphi X)(\omega(Y))+\omega([\varphi X,Y]\\&\quad-\varphi[X,Y])+\omega(\varphi[X,Y])\}\end{aligned}$$

yazabiliriz.

(4.1) eşitliğinden de,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi\omega)(X,Y)&=(\varphi X)(\omega(Y))-X(\omega(\varphi Y))+\omega((L_Y\varphi)(X))\\&=(\varphi X)(\omega(Y))-X(\omega(\varphi Y))-\omega([\varphi X,Y]-\varphi[X,Y])\qquad(4.22)\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

(4.22) eşitliğini (4.21)'de yerine yazarsak,

$$(d\omega)(Y,\varphi X)=\frac{1}{2}\left\{-(\phi_\varphi\omega)(X,Y)+Y(\omega(\varphi X))-X(\omega(\varphi Y))+\omega(\varphi[X,Y])\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(\phi_{\varphi}\omega)(X,Y)+Y((\omega\circ\varphi)(X))-X((\omega\circ\varphi)(Y))-(\omega\circ\varphi)([Y,X])\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}(\phi_{\varphi}\omega)(X,Y)+(d(\omega\circ\varphi)(Y,X))$$

eşitliğini elde edebiliriz.

Buradan da $\phi_{\varphi}\omega=0$ eşitliğinin

$$(d(\omega\circ\varphi))(Y,X)=(d\omega)(Y,\varphi X) \tag{4.23}$$

eşitliğine denk olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda $\omega=df$ için (4.23) eşitliği

$$(d(df\circ\varphi))(Y,X)=(d^2f)(Y,\varphi X)=0\,,$$

yani

$$d(df\circ\varphi)=0 \tag{4.24}$$

şeklinde sade bir eşitliğe dönüşmüş olur.

Bir f fonksiyonu için $df\circ\varphi=dg$ olacak şekilde paraholomorfik B-manifoldunda g fonksiyonu var ise f fonksiyonuna *holomorfik (analitik) fonksiyon* ve g'ye de f'nin birleşimli fonksiyonu denir (Tachibana and Kotô, 1962). Böyle bir f fonksiyonu lokal olarak tanımlanırsa, f fonksiyona lokal olarak holomorfik fonksiyon denir.

(4.24) eşitliği sadece lokal olarak $df\circ\varphi=dg$ eşitliğine denktir. Bu yüzden, f'nin lokal holomorfik $(\varphi_i^m\partial_m f=\partial_i g)$ olması şartı

$$(\phi_{\varphi}df)_{ij}=\varphi_i^m\partial_m\partial_j f-\partial_i(\varphi_j^m\partial_m f)+(\partial_j\varphi_i^m)\partial_m f=0$$

eşitliği ile verilir.

(M_{2n},φ,g), g pür metriğine sahip paraholomorfik B-manifold olsun. Teorem 4.3.1, Teorem 4.3.2 ve (4.17) eşitliğinden, paraholomorfik B-manifoldlarında ∇R eğrilik tensör alanının kovaryant türevinin pür olduğunu bulabiliriz. O halde $R_{ji}=R_{sji}{}^{s}=g^{ts}R_{tjis}$ Ricci tensörünün kovaryant türevi tüm indislere göre pür olur ve bu durumda

$$\varphi_t^s\nabla_s R_{ji}=\varphi_j^s\nabla_t R_{si}$$

eşitliğini yazabiliriz.

g^{ji} kontravaryant B-metriği ile bu son eşitlikten

$$\varphi_t^s \nabla_s R = g^{ji} \varphi_j^s \nabla_t R_{si} = \nabla_t (G^{si} R_{si}) = \nabla_t \overset{*}{R} \tag{4.25}$$

eşitliğini bulabiliriz. Burada $R = g^{ij} R_{ij}$ ve $\overset{*}{R} = G^{ij} R_{ij}$ sırasıyla B-manifoldunun skaler eğriliği ve onun birleşimli fonksiyonudur.

(4.25) eşitliğinden aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.4.2. Teorem: Paraholomorfik B-manifoldunda R skaler eğriliği lokal holomorfik fonksiyondur.

4.4.3. Örnek: M_{2n} manifoldunun, V_n Riemannian manifoldunun $\pi : T(V_n) \to V_n$ tanjant demeti olduğunu kabul edelim. Eğer x^i, V_n üzerinde lokal koordinatlar ise bu durumda x^i, $x^{\bar{i}} = y^i$, $\bar{i} = n+1, ..., 2n$ formundaki fibre koordinatlarla birlikte $T(V_n)$ üzerinde lokal koordinatlardır.

$T(V_n)$ üzerindeki $(0,q)$ tipli bir tensör alanı

$$^V X = X^i \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}, \quad ^{\mathrm{H}} X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - y^s \Gamma_{sh}^i X^h \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$$

$^V X$ (dikey lift) veya $^{\mathrm{H}} X$ (yatay lift) (Yano and Ishihara, 1973) şeklinde olan tüm $\tilde{X}_i$, $i = 1, 2, ..., q$ vektör alanları üzerindeki etkisiyle tanımlanır. Bu yüzden $T(V_n)$ üzerindeki $^S g$ Sasakian metriği, her $X, Y \in \Im_0^1(V_n)$ için

$$\begin{cases} ^S g(^H X, {}^H Y) = {}^V (g(X,Y)), \\ ^S g(^V X, {}^V Y) = {}^V (g(X,Y)), \\ ^S g(^V X, {}^H Y) = 0, \end{cases} \tag{4.26}$$

eşitlikleriyle tanımlanır. $^S g$ Sasakian metriği, $T(V_n)$ tanjant demetindeki $(x^i, x^{\bar{i}})$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{S}g = \begin{pmatrix} g_{ji} + g_{ts}y^k y^l \Gamma^t_{kj}\Gamma^s_{li} & y^k \Gamma^s_{kj} g_{si} \\ y^k \Gamma^s_{ki} g_{js} & g_{ji} \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Burada Γ^k_{ij}, V_n manifoldundaki ∇_g Levi-Civita konneksiyonunun bileşenleridir.

$T(V_n)$ tanjant demetindeki $^{D}\varphi$ diagonal lifti her $\varphi \in \Im^1_1(M_n)$ ve $X \in \Im^1_0(V_n)$ için

$$\begin{cases} ^{D}\varphi\, ^{H}X = {}^{H}(\varphi X), \\ ^{D}\varphi\, ^{V}X = -{}^{V}(\varphi X), \end{cases} \tag{4.27}$$

eşitlikleri ile tanımlanır. $I \in \Im^1_1(M_n)$ birim tensör alanının ^{D}I diagonal lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{D}I = \begin{pmatrix} \delta^j_i & 0 \\ -2y^t\Gamma^j_{ti} & -\delta^j_i \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir ve $(^{D}I)^2 = I_{T(V_n)}$ şartını sağlar. Bu yüzden ^{D}I hemen hemen parakompleks yapıdır.

$$A(\tilde{X},\tilde{Y}) = {}^{S}g(^{D}I\tilde{X},\tilde{Y}) - {}^{S}g(\tilde{X},{}^{D}I\tilde{Y})$$

eşitliğini alalım. Eğer ^{V}X, ^{V}Y veya ^{H}X, ^{H}Y şeklinde olan tüm $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanları için $A(\tilde{X},\tilde{Y}) = 0$ ise o zaman $A = 0$ olmuş olur. $^{D}I\,^{V}X = -{}^{V}X$, $^{D}I\,^{H}X = {}^{H}X$, (4.26) ve (4.27) eşitlilerinden dolayı

$$A(^{V}X,{}^{V}Y) = {}^{S}g(-{}^{V}X,{}^{V}Y) - {}^{S}g(^{V}X,-{}^{V}Y) = 0,$$

$$A(^{V}X,{}^{H}Y) = {}^{S}g(-{}^{V}X,{}^{H}Y) - {}^{S}g(^{V}X,{}^{H}Y) = 0,$$

$$A(^{H}X,{}^{V}Y) = {}^{S}g(^{H}X,{}^{V}Y) - {}^{S}g(^{H}X,-{}^{V}Y) = 0,$$

$$A(^{H}X,{}^{H}Y) = {}^{S}g(^{H}X,{}^{H}Y) - {}^{S}g(^{H}X,{}^{H}Y) = 0$$

eşitliklerini yazabiliriz. Yani ^{S}g, ^{D}I ’ye göre B-metriktir.

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.4.4. Teorem: $(T(V_n), {}^D I, {}^S g)$ bir hemen hemen B-manifolddur.

${}^V X, {}^H X$ ve $\gamma R(X,Y) = y^s R_{ijs}{}^k X^i Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{k}}}$ (Cengiz and Saimov , 2002) ifadelerinin özelliklerini kullanarak

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^V X, {}^H Y, {}^H Z) = -2({}^S g^V (\nabla_Y X), {}^H Z + {}^S g({}^H Y, {}^V (\nabla_Z X)) = 0,$$

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^V X, {}^H Y, {}^V Z) = -2\,{}^S g({}^H Y, [{}^V Z, {}^V X]) = 0,$$

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^V X, {}^V Y, {}^H Z) = -2\,{}^S g([{}^V Y, {}^V X], {}^H Z) = 0,$$

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^V X, {}^V Y, {}^V Z) = 0,$$

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^H X, {}^H Y, {}^H Z) = 0,$$

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^H X, {}^V Y, {}^V Z) = 2\,{}^V((\nabla_X g)(Y,Z)) = 0,$$

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^H X, {}^H Y, {}^V Z) = -2\,{}^S g(\gamma R(Y,X), {}^V Z),$$

$$(\phi_{D_I}{}^S g)({}^H X, {}^V Y, {}^H Z) = -2\,{}^S g({}^V Y, \gamma R(Z,X))$$

eşitliklerini yazabiliriz.

O halde aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.4.5. Teorem: Bir $(T(V_n), {}^D I, {}^S g)$ hemen hemen B-manifoldunun paraholomorfik olması için gerek ve yeter şart V_n ' nin lokal Euclidean olmasıdır.

4.4.6. Örnek: M_n, $\varphi = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ 0 & -\delta_{\bar{j}}^{\bar{i}} \end{pmatrix}$, $i, j = 1,...,k$, $\bar{i}, \bar{j} = k+1,...,n$, $n = 2k$ integrallenebilir hemen hemen product yapısına sahip lokal product Riemannian manifoldu olsun. O halde M_{2k} parakompleks manifoldu

$$g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{\bar{i}\,\bar{j}} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = g_{ij}(x^t, x^{\bar{t}}), \quad g_{\bar{i}\,\bar{j}} = g_{\bar{i}\,\bar{j}}(x^t, x^{\bar{t}})$$

şeklindeki B-manifoldunun bir yapısını içerir.

M_{2k} lokal product Riemannian manifoldunun metriğinin

$$ds^2 = g_{ij}(x^t)dx^i dx^j + g_{\bar{i}\bar{j}}(x^{\bar{t}})dx^{\bar{i}} dx^{\bar{j}}, \quad i, j, t = 1, ..., k, \quad \bar{i}, \bar{j}, \bar{t} = k+1, ..., 2k$$

formda olduğunu kabul edelim. Yani $g_{ij}(x)$ sadece x^t nin fonksiyonları, $g_{i\bar{j}} = 0$ ve $g_{\bar{i}\bar{j}}(x)$ de sadece $x^{\bar{t}}$ nin fonksiyonlarıdır. Bu durumda manifolda lokal *decomposable* (ayrıştırılabilir) Riemannian manifoldu denir. Lokal product Riemannian manifoldunun lokal decomposable Riemannian manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\nabla_g \varphi = 0$ olmasıdır (Yano and Kon, 1984). O halde Teorem 4.2.2 den aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

4.4.7. Teorem: M_{2k} lokal decomposable Riemannian manifoldu paraholomorfik B-manifolddur.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde amaç B-manifoldlar geometrisinin problemiyle ilgili olarak pür Riemannian metrik tensörlerinin uygulanabildiği Tachibana operatörler teorisini kullanmak ve paraholomorfik B-manifoldu çalışmalara uygulamaktır.

Bu çalışmada ilk olarak hemen hemen B-manifoldun paraholomorfik B-manifold olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. Ayrıca hemen hemen Hermitian manifold ve hemen hemen para B-manifold arasındaki bazı benzerlikler çift diagramlarla gösterildi.

İkinci olarak, paraholomorfik B-manifoldlar için eğrilik tensörüne bakıldı. Bu amaçla eğrilik tensörünün pür olduğu gösterildi. Pürlük şartını sağlayan Riemannian eğrilik tensörüne, pür tensörlere uygulanabilen ϕ-Tachibana operatörünü uygulayarak Riemannian eğrilik tensör alanının paraholomorfik tensör alanı olduğu ispatlandı.

Üçüncü olarak ise $R = g^{ij}R_{ij}$ skaler eğriliğinin paraholomorfik B-manifoldunda lokal holomorfik fonksiyon olduğu ispatlandı.

Son olarak Tanjant demette (1,1) tipli I birim tensör alanının ${}^{D}I$ diagonal liftinin indirgenmiş koordinatlardaki bileşenleri ile ${}^{S}g$ Sasakian metriğinin indirgenmiş koordinatlardaki bileşenlerinin vasıtasıyla $(T(V_n), {}^{D}I, {}^{S}g)$ üçlüsünün bir hemen hemen B-manifold ve $(T(V_n), {}^{D}I, {}^{S}g)$ hemen hemen B-manifoldunun paraholomorfik olması için gerek ve yeter şart baz manifoldun lokal Euclidean olması gerektiği ispatlandı.

KAYNAKLAR

Adati T., 1981. Submanifolds of an almost product Riemannian manifold. Kodai Math. J., 4, 327-343.

Bishop R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Mcmillan Company, New York, p.19-135.

Blažić N. and Bokan N., 1996. Invariance theory and affine differential geometry. Differential geometry and applications (Brno, 1995), Masarky Univ., Brno, 249-260.

Borowiec A., Francaviglia M. and Volovich I., 2000. Anti-Kählerian manifolds. Differential Geom. Appl.,12 , no.3, 281-289.

Cengiz N. and Saimov A.A., 2002. Complete lifts of Derivations to Tensor Bundles. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) vol. 8, 75-82.

Cruceanu V., Fortuny P. and Gadea P.M., 1996. A survey on paracomplex Geometry. Rocky Mountain J. Math., 26, 83-115.

Fukami T., 1959. Afine connections in almost product manifolds with some structure. Tohoku Math. J., 11, 430-446.

Gadea P.M., Grifone J.and Munoz Masque J., 2003. Manifolds modelled over free modules over the double numbers. Acta Math. Hungar., 100 (3).

Iscan M. and Salimov A. A., 2005. On a connection between the theory of Tachibana operators and the theory of B-manifolds. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 34 (2005), 47-53.

Kobayashi S., and Nomızu K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers.

Kruchkovich G.I., 1972. Hypercomplex structure on a manifold. I, Tr. Sem. Vect. Tens. Anal., Moscow Univ., 16, 174-201.

Magden A., 2004. On applications of the Tachibana operator. Apply. Math. and Comp., 147, 45-55.

Mihai I. and Nicolau C., 1982. Almost product structures on the tangent bundle of an almost paracontact manifold. Demonstratio Math., 15, 1045-1058.

Norden A. P., 1960. On a certain class of four-dimensional A-spaces. Izv. Vuzov. Mat., no.4, 145-157.

Salimov A.A., and Mağden A., 1999. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Salimov A.A., Iscan M. and Etayo F., 2007. Paraholomorphic B-manifold and its properties. Topology and its Application, 154, 925-933.

Tachibana S., 1960. Some theorems on locally product Riemannian spaces. Tohoku Math. J., 12, 281-292.

Tachibana S. & Kotô S., 1962. On almost-analytic functions, tensors and invariant subspaces. Tôhoku Math. J., (2) 14, 177-186.

Vishnevskii V.V., 1970. Affinor structures of affine connection spaces. Izv. Vuzov. Math., No 1, 12-23.

Vishnevskii V.V., Shirokov A.P. and Shurygin V.V., 1985. Spaces over algebras. Kazan Gos. University, Kazan, Russian.

Vishnevskii V.V., 2002. Integrable affinor structures and their plural interpretations. J. of Math. Sciences, 108 , No.2, 151-187.

Yano K., 1959. Affine connections in an almost product space. Kodai Math. Sem. Rep. 11, 1-24.

Yano K., 1958. On Walker differentiation in almost product or almost complex spaces. Indag. Math., 20, 573-580.

Yano K., 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, Pergamon Press, N.Y..

Yano K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436.

Yano K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker Inc., New York.

Yano K. and Kon M., 1984. Structure on manifolds. World Scientific, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Samsun'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1996 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yülsek lisans öğrenimine başlayıp bunun yanında Erzurum ilindeki Özel Güneş Dersanesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.