ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

TANJANT DEMETTE İNFİNİTESİMAL DÖNÜŞÜMLER

Kürşat AKBULUT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2009

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Kürşat AKBULUT tarafından hazırlanan bu çalışma 03/02/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Yusuf YAYLI — *İmza* :

Üye: Prof. Dr. Arif SALİMOV — *İmza* :

Üye: Prof. Dr. Hüseyin AYDIN — *İmza* :

Üye: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ — *İmza* :

Üye: Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN — *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

(imza)

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

TANJANT DEMETTE İNFİNİTESİMAL DÖNÜŞÜMLER

Kürşat AKBULUT

Atatürk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde, tanjant demette alınan vektör alanlarının yine bu demette alınan özel liftlere (synectic lift, horizontal lift) göre infinitesimal afin dönüşüm ve infinitesimal izometri olma durumları incelenmiştir. İlk olarak tanjant demette ${}^{S}g$ synectic metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{S}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. Daha sonra yine ${}^{S}g$ synectic metriğine göre bir X vektör alanının infinitesimal izometri olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. İkinci olarak, tanjant demette ${}^{H}g$ metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. Daha sonra yine ${}^{H}g$ metriğine göre bir X vektör alanının infinitesimal izometri olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. Ayrıca, son olarak yine ${}^{S}g$ synectic metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{S}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının IHPT (Infinitesimal Holomorphically Projective Transformation) olması için gerek ve yeter şart ispatlandı.

2009, 92 sayfa

Anahtar Kelimeler: İnfinitesimal Afin Dönüşüm, Killing Vektör Alanları, İnfinitesimal Holomorphically Projective Dönüşüm, Synectic Lift Metriği, Konneksiyon.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS IN A TANGENT BUNDLE

Kürşat AKBULUT

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV

In this thesis, firstly, the conditions for a vertical infinitesimal affine transformations with ${}^{s}\nabla = {}^{c}\nabla + {}^{v}H$ in the tangent bundle of a Riemannian manifold have been investigated then the results have been applied to the study of fibre-preserving infinitesimal affine transformation with ${}^{s}\nabla$. However, infinitesimal isometry in the tangent bundle with respect to ${}^{S}\nabla$ has also been studied. Secondly, the conditions for a vertical infinitesimal affine transformations with ${}^{H}\nabla$ in the tangent bundle of a Riemannian manifold have been investigated then the results have been applied to the study of fibre-preserving infinitesimal affine transformation with ${}^{H}\nabla$ and the infinitesimal isometry in the tangent bundle with respect to ${}^{H}\nabla$ has also been studied. Lastly, we find solutions to a system of partial differential equations that characterize IHPT (Infinitesimal Holomorphically Projective Transformations) on $T(M)$ with a Levi-Civita connection of synectic lift metric and an adapted almost complex structure. Further, we investigate necessary conditions in order that $T(M)$ admits a non-affine infinitesimal holomorphically projective transformation.

2009, 92 pages

Keywords: Infinitesimal Affine Transformations, Killing Vector Fields, Infinitesimal Holomorphically Projective Transformations, Synectic Lift Metric, Connection.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocalarım Sayın Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nejmi CENGİZ ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKÇI'ya, arkadaşlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Aydın GEZER ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında eşim ve çocuklarımdan görmüş olduğum destek ve teşvikten dolayı kendilerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması TÜBİTAK'ın TBAG'a bağlı 105T551 ve 108T590 numaralı projeleri tarafından kısmen desteklenmiştir.

Kürşat AKBULUT

Ocak 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

C	Tam Lift
H	Yatay Lift
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
$\Gamma_{ij}^{\ h}$	Cristoffel Sembolü
π	Tabii İzdüşüm
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
s	Synectic Lift
^{s}g	Synectic Lift Metriği
T_{km}^{i}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T_q^{p}(M_n)$	M_n Manifoldu Üzerinde *(p,q)* Tipli Tensör Demeti
V	Dikey Lift

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri, eğri ve yüzeylerin Matematiksel Analiz metodları ile incelenmesi yolunun seçilmesi ile XVII. yüzyılda ortaya çıkmış ve günümüze kadar güncelliği korumuş Geometrinin bir bölümüdür.

Diferensiyel Geometri objelerinin tensör demetlere liftlerinin (genişlemelerinin) incelenmesi, geometrinin hızlı bir şekilde gelişen bölümlerinden birisidir. $(1,0)$ tipli tensör demeti olan tanjant demette lift problemlerine, (Yano and Kobayashi 1966) çalışmasıyla başlanmıştır. Daha sonra bu çalışma referans alınarak bu alanda bir çok çalışma yapılmıştır. Ama "lift" kavramı "genişleme" anlamında daha önce yapılan (Sasaki 1962) çalışmasında kendini göstermektedir. Ayrıca (Yano and Petterson 1967) çalışmasında lift konusu, $(0,1)$ tipli bir tensör demeti olan kotanjant demet için de incelenmiştir. (Yano and Ishihara 1973) çalışmasında ise, hem tanjant hem de kotanjant demetlerindeki dikey (vertical), tam (complete), yatay (horizontal) ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca (Talantova and Shirokov 1975) çalışmasında, tanjant demet ile dual cebir üzerinde inşa edilmiş holomorf manifoldlar arasında bir bağlantı elde edilmiş ve bu bağlantı lift konusunda milad kabul edilebilecek yeni bir yaklaşım ortaya çıkarmıştır. Bu yaklaşımın sonucu olarak synectic lift denilen liftlerin incelenmesine başlanmıştır. Benzer liftler yarım tanjant demette yapılmıştır (Vishnevsky 1983). Yüksek mertebeli tanjant demetlerde lift konusu plyural cebir ile bağlantılı olarak (Morimoto 1968) ve (Vishnevsky *et al.* 1985) çalışmalarında incelenmiştir.

Ayrıca, (Ishihara 1957), (Tachibana and Ishihara 1960) ve (Hasegawa and Yamauchi 1979,2003,2005) çalışmalarında tanjant demette ve yüksek mertebeli tanjant demette çeşitli liftlere göre "infinitesimal afin dönüşümler" ve "infinitesimal holomorphically projective dönüşümler" araştırılmıştır.

Sunulan bu tezde ise tanjant demette alınan vektör alanlarının yine bu demette alınan özel liftlere (synectic lift, horizontal lift) göre infinitesimal afin dönüşüm ve infinitesimal izometri olma durumları incelenmiştir. Bu amaçla ikinci ve üçüncü bölümlerde çalışmamızın daha iyi anlaşılması için diferensiyellenebilir manifold, tanjant demet ve bu demetteki özel diferensiyel geometrik objeler ve tensör demetlerde liftler hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sırasıyla tanjant demette ${}^{S}g$ synectic metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{S}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olma durumları, ${}^{S}g$ synectic metriğine göre X vektör alanının infinitesimal izometri olma durumları, ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olma durumları, ${}^{H}g$ metriğine göre X vektör alanının infinitesimal izometri olma durumları ve son olarak yine ${}^{S}g$ synectic metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{S}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının IHPT (Infinitesimal Holomorphically Projective Transformation) olma durumları incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

2.1.1. Tanım: X Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \Re^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1,...,x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

2.1.2. Tanım: Eğer X Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \qquad \text{(A-indisler kümesi)}$$

ise X 'e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

2.1.3. Tanım: X Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X i örter, yani X, n-boyutlu topolojik manifolddur.
2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,...,n\right)$ denir. Burada u_β^i, $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

2.1.4. Tanım: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

2.1.5. Tanım: X Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k $\left(1 \le k \le \infty\right)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞-yapılara bakılacaktır.

2.1.6. Tanım: M, sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.

2.2. Tensör Alanları

2.2.1. Tanım: B_n, $n-$boyutlu reel vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j=1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*$, $i=1,...,p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\omega = t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve bu şekildeki tüm tensörlerin uzayı $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına ise tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. (p,0) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (0,q) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $T_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım;

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0,\ \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartında $\vec{x}=0$ olursa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir.

(2.1) eşitliği koordinatlarla

$$g_{ij}x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından

$$g_{ij}x^i = 0\,,\ j = 1,...,n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\widetilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$\widetilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik}x^k\,,\ (\eta_i = g_{ik}y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümü, (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \tilde{g}^{ki}\xi_i\,,\ (y^k = \tilde{g}^{ki}\eta_i) \tag{2.4}$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invaryant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j$$

şeklinde yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini dikkate alırsak

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x^i\eta_i = \widetilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$$

olur. Yani, g esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenlerinin $\omega = \widetilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$ invaryant bilineer formunu buluruz. Buna göre de $\widetilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\widetilde{g}(\eta,\xi) = \widetilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j = \eta_i x^i = g_{ik}y^k x^i\,,$$
$$\widetilde{g}(\xi,\eta) = \widetilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i = \xi_j y^j = g_{jk}x^k y^j$$

$$= g_{ki} x^i y^k = g_{ki} y^k x^i = \tilde{g}(\eta, \xi)$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n uzayında g tensörü verildiğinde B_n'den B_n^*'a bir izomorfizm bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k = g_{ki} x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{ik} x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $\left(x^i \to x_k\right)$ ve yükseltilmesi $\left(x_k \to x^i\right)$ işlemleri denir. Buna göre, $S(\vec{x}, \vec{y})$ tensörü göz önüne alınırsa

$$S_{\bullet j}^{p} = \tilde{g}^{pi} S_{ij}, \quad S_{i\bullet}^{p} = \tilde{g}^{pj} S_{ij}, \quad S_{\bullet\bullet}^{pq} = \tilde{g}^{pi} \tilde{g}^{pj} S_{ij}$$

ifadelerinin herbiri S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemi,

$$S_{p}^{\bullet j} = g_{pi} S^{ij}, \quad S_{p}^{i\bullet} = g_{pj} S^{ij}, \quad S_{pq}^{\bullet\bullet} = g_{pi} g_{qj} S^{ij}$$

ifadelerinin herbiri ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x}, \vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, her $\vec{x}, \vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x}, \vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$\vec{x}\vec{y} = g\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = g_{ij} x^i y^j = x_j y^j \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $Det(g_{ij}) \neq 0$ olursa bu taktirde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

2.2.2. Tanım: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968, Salimov ve Mağden 2008).

f, M_n manifoldunda bir dönüşüm ise Xf de M_n manifoldunda

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i, \dots, x^n\right), \ \ i = 1, \dots, n$$

olur.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

2.2.3. Tanım: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1$, $q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise her $x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ $(0,1)$ tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m), X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q},\partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.2.4. Tanım: $\omega = (\omega_{ij})$, $(0,2)$ tipli bir tensör olsun. $\omega = (\omega_{ij})$ tensöründe i ve j indislerine göre antisimetriklik varsa $\omega = (\omega_{ij})$ tensörüne 2-form veya dış form denir. Bir k-forma dış diferensiyel uygulanırsa sonuçta k+1-form elde edilir. Yani ω, k-form ise $d\omega \in T_{k+1}(M_n)$ olup k+1-form oluşur. Böyle k+1 formlara tam form denir.

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

olması exact formların en önemli özelliğidir. Yani tam formlara dış diferensiyel uygulanırsa sonuç sıfır olur.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilen konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına uygulanan vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{k}{a}^i,\ k = 1,...n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$'nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını ifade etmiş olsun. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d\,\underset{k}{a}^i \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i\, v^i \tag{2.7}$$

eşitliği yazılır. Burada $\underset{k}{a}^i$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\underset{k}{a}^i \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) eşitliğinde kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.8) denkleminde ω_i^k,

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i \, d \underset{s}{a}^k \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde tanımlanan ω_i^k objelerine konneksiyon formları (bağlantı objeleri) denir.

2.3.1. Teorem: 1. Konneksiyon formları $\left\{ \underset{k}{a}^i \right\}$, $k = 1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmezler.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ farklı iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0, \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

şartlarını yazabiliriz. (2.10) ve (2.11) şartlarından ve v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralı

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12) deki ikinci eşitliğin diferensiyelini alırsak,

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.9) denkleminde (2.12) nin birinci eşitliği ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

ve gerekli işlemlerden sonra

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.14}$$

bulunur. (2.14) eşitliği, ω_j^i konneksiyon formlarının, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

2.3.1. Tanım: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa, ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i \omega_i\right) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \tag{2.15}$$

eşitliği yazılabilir. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

yazılır. (2.16) eşitliğini (2.15) ifadesinde kullanılırsa,

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right) v^i = 0$$

eşitliği bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

biçiminde olur. Vektörün ve kovektörün (1-form) γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün de paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

şeklinde verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$dZ = dt^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} d \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

$$+ \dots + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots d \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.18}$$

$$= \left(dt^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \dots i_p}_{s j_2 \dots j_q} - \dots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \dots i_p}_{s j_2 \dots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \dots i_p}_{s j_2 \dots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \dots s}_{j_1 \dots j_q} \right) \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = dt^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \dots i_p}_{s j_2 \dots j_q} - \dots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \dots i_p}_{s j_2 \dots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \dots s}_{j_1 \dots j_q} \tag{2.19}$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.20}$$

elde edilir. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli bir tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0\,, \qquad \delta \omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli bir tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right)=0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2)=\delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,
2. $\delta(\lambda t)=(d\lambda)t+\lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,
3. $\delta(A\otimes B)=(\delta A)\otimes B+A\otimes(\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$ - tensör çarpımını gösterir.
4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemlerinin mutlak diferensiyelleme işlemine göre işlem öncelik sırası değişebilir.

2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

2.3.2. Tanım: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyonu verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Bu tanımdaki lineerlik şartı şu şekilde ifade edilir:
X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın komşuluğunda keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v_k^i du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v_k^i, v^i'ye ve noktaya bağlı fonksiyon, du^k ise her bir vektöre teğet vektörün koordinatlarıdır. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega_k^i v^k = \partial_k v^i du^k + \omega_k^i v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega_k^i v^k = \left(v_s^i - \partial_s v^i\right) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. v^k, $\partial_s v^i$ 'nin ve v_s^i 'ler ise u^i 'lerin fonksiyonlarıdır. ω_k^i formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω_k^i formları du^k nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada Γ_{sk}^i katsayıları afin uzayın bir noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ_{sk}^i afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) du^k \tag{2.25}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğin her iki tarafının ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\partial_k \left(A_j^{j'} A_{j'}^i\right) = \partial_k \left(\delta_j^i\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i + A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = 0$$
$$\Rightarrow A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = -\left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i$$

olur. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i \left(\partial_k A_j^{j'}\right) du^k \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) , (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{i'} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'} = \partial_k A_j^{i'}$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i = (\ \partial_k v^i + \Gamma^i_{ks} v^s\ )\, du^k \tag{2.28}$$

biçiminde olur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{ks} v^s \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür.

Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^s_{kj} \omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür.

(2.24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (\partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q}) du^k \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q} \tag{2.32}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türevi tanımından, (p,q) tipli tensörün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensör olduğu görülür. Yani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık mertebesini bir artırır.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikleri yazabiliriz:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \underset{2}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = \nabla_k \underset{1}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \nabla_k \underset{2}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \lambda \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}, \quad \lambda \in F(M_n)$

3. $\nabla_k (t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}) = \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q} + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemlerinin kovaryant diferensiyelleme işlemine göre işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin (lineer) konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

2.3.3. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $T^1_0(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) :\ T^1_0(M_n) \times T^1_0(M_n) \to T^1_0(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ’ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T^1_0(M_n) \to T^1_0(M_n)$$

dönüşümüne de *X* vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1,\ldots,u^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olmasıdır (Yano 1968).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^{k} V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^{k} V_k \tag{2.36}$$

elde edilir. Burada

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli tensör olduğundan S_{ij}^{k} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensörün bileşenlerini ifade eder. Bu tensöre A_n uzayının burulma (torsion) tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X , Y vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^i vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^{i} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}
\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^{i} \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i \\
&= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^{i} v^k) + \Gamma_{rm}^{i} (\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^{m} v^k) - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i \\
&= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^{i} v^k + \Gamma_{sk}^{i} \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^{i} \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^{i} \Gamma_{sk}^{m} v^k - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}^{i} v^k - 2S_{rs}^{k} \nabla_k v^i \tag{2.39}$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$R^i_{rsk} = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^m_{rk} \tag{2.40}$$

$$= 2(\partial_{[r}\Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|}\Gamma^m_{s]k})$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının Eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılabilir:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k = -R^m_{rsk}\omega_m - 2S^m_{rs}\nabla_m\omega_k \,, \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^j_i = R^j_{rsm}\varphi^m_i - R^m_{rsi}\varphi^j_m - 2S^k_{rs}\nabla_k\varphi^j_i \,, \tag{2.42}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = R^{i_1}_{rsm} t^{m i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \dots + R^{i_p}_{rsm} t^{i_1 \dots m}_{j_1 \dots j_q} \tag{2.43}$$

$$- R^m_{rsj_1} t^{i_1 \dots i_p}_{m j_2 \dots j_q} - \dots - R^m_{rsj_q} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots m} - 2S^k_{rs}\nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \,.$$

(2.42) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma, konneksiyonların birinden diğerine geçmeye, konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Aynı manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür. M_n manifoldu üzerinde Γ^k_{ij} ve $\overline{\Gamma}^k_{ij}$

konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{km} v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}^i_{km} v^m$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T^i_{km} v^m \tag{2.45}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$T^i_{km} = \overline{\Gamma}^i_{km} - \Gamma^i_{km} \tag{2.46}$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T^i_{km}, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon (gerilme) tensörü denir.

2.3.2. Teorem: T^i_{km}, (1,2) tipli tensör ve Γ^i_{km} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}^i_{km}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij}$$

yazılır. Γ^k_{ij} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \left(\overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} - T^{k'}_{i'j'} \right) + A^k_{k'} A^{k'}_{ij} \tag{2.47}$$

olur. Burada T^k_{ij} tensör olduğundan,

$$T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j T^{k'}_{i'j'} \tag{2.48}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} + A^k_{k'} A^{k'}_{ij}$$

olduğu bulunur. Bu ise, $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim;

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij} - \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılabilir. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan Teorem 2.3.2.'e göre Γ^k_{ij} afin konneksiyon olur. Yani iki farklı konneksiyon kullanılarak yeni bir konneksiyon oluşturulmuş olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{2} \tag{2.51}$$

bulunur. $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ^k_{ij} afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} + 2S^k_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} \tag{2.52}$$

yazılır. 2.3.2. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ ve Γ^k_{ji} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.3.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^1,...,\overset{\circ}{u}{}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta^{i'}_k$ Kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. Bu ifade u^i den $u^{i'}$ ne bir dönüşümdür. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i + \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p), \quad A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği *O* noktasında ve civarında $\det\left(A^{i'}_i\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları *O* noktasında yazılırsa,

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i, \quad A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.55}$$

olur.

Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre *O* noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \delta^{j'}_j \delta^{k'}_k \delta^i_{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta^i_{i'} \delta^{i'}_l \overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle bir koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği), (Bianchi'nin 2. özdeşliği)

eşitlikleri geçerlidir.

Bu eşitliklerin her üçünün de invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere, a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

şeklinde olsun. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek

$$\begin{aligned}
\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^{m} a_{mj} - \Gamma_{kj}^{m} a_{mi} &= \nabla_k a_{ij}, \\
\partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^{m} a_{mk} - \Gamma_{ik}^{m} a_{jm} &= \nabla_i a_{jk}, \\
\partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^{m} a_{mi} - \Gamma_{ji}^{m} a_{km} &= \nabla_j a_{ki}.
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır.

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma_{ij}^{m} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

eşitliği bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^{r} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

biçimindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Riemannian konneksiyon katsayıları, Levi-Civita konneksiyonu veya Christoffel sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

2.3.4. Tanım: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \mp e \\ 0 \end{cases}, \quad e = e_{12\ldots n}$ n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_1 \ldots i_n} - \Gamma^s_{k i_1} e_{s i_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{k i_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{2.62}$$

biçiminde yazılabilir. n-vektörün antisimetrikliğine göre (2.62) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12\ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2\ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12\ldots s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12\ldots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. Eş afin uzay bu şart ile de karakterize edilebilir. (2.64) eşitliğindeki eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^k \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edilebilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0$ ve $R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını göz önüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

2.3.5. Tanım: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik, (0,2) tipli g tensörü, tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaya metrik uzay denir. Burada simetrik, (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör denir.

2.3.6. Tanım: Metrik uzayın g metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ ise uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

2.3.7. Tanım: Eğer Weyl uzayı eş-afin uzay olursa, bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

şartı ile karekterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^{k}=\left\{ {k \atop ij} \right\}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{kr}\left(\partial_i g_{rj}+\partial_j g_{ir}-\partial_r g_{ij}\right) \tag{2.69}$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g=0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s}g_{si}=R_{ijkl}$ olmak üzere

1. $R_{(ij)kl}=0$,

2. $R_{[ijk]l}=0$,

3. $\nabla_{[s}R_{ij]kl}=0$,

4. $R_{ij(kl)}=0$,

5. $R_{ijkl}=R_{klij}$

eşitlikleri geçerlidir.

2.3.5. Riemannian manifoldu

Her bir $x\in M_n$ noktasında her $Y\in T_x\left(M_n\right)$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y)=0$ eşitliğinde $X=0$ olursa g 'ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $Det(g_{ij})\neq 0$ şartına denktir. g 'nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2=g_{ij}du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n,g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{ks}\left(\partial_i g_{sj}+\partial_j g_{is}-\partial_s g_{ij}\right)$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian veya Levi-Civita konneksiyonu denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından *n*- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p\in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$' nin herhangi bir $\widetilde{p}$ noktası, yani $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet projeksiyonu $\widetilde{p} \mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\widetilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının p noktasındaki fibre denir.

M_n temel uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada (x^h), U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizmdir. R^n, R reel alan üzerindeki *n*- boyutlu vektör uzayı olur. $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ $(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$, $\left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\widetilde{p}$ nın $(y^h) = (x^{\overline{h}})$, $\overline{h} = n+1,...,2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\widetilde{p})$ nin koordinatları (x^h), $h = 1,..,n$ ile gösterilirse $\widetilde{p}$ noktası uygun $(x^h, x^{\overline{h}}) \mapsto \widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Biz $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\overline{h}})$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Burada $(x^h, x^{\overline{h}})$ ya (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p=\pi(\widetilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U^{'},x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U^{'})$ koordinat komşuluğu $\widetilde{p}$ ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U^{'})$ ya göre $\widetilde{p}$ nın indirgenmiş koordinatları $(x^{h'},y^{h'})$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x), \\ y^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} y^{h} \end{cases} \tag{3.2}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındaki $x^1,x^2,...,x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\overline{h}}=y^h$, $x^{\overline{h}'}=y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x), \quad p^{'} = 1,...2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobian matrisi

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h}\partial x^{i}} y^{i} & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

şeklinde verilir. (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}(x'), \\ y^{h} = \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^{p} = x^{p}(x'), \quad p = 1,...,2n \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jacobian matrisi

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'}\partial x^{i'}} y^{i'} & \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

şeklinde verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir, çünkü, $Det\left(\frac{\partial x^{p^{'}}}{\partial x^{p}}\right)\rangle 0$, $(Det\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p^{'}}}\right)\rangle 0)$.

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfında (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $T_s^r(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise $T(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(M_n)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $T_s^r\left(T(M_n)\right)$ ve $T(T(M_n))$ olarak göstereceğiz .

3.2. Vertical (Dikey) Lift

3.2.1. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T(M_n) \to M_n$ izdüşümü olmak üzere

$$^{V} f = f \circ \pi \tag{3.8}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette dikey(vertical) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun U koordinat komşuluğunda lokal olarak $\omega = \omega_i dx^i$ ile ω, 1-formu verilmişse tanjant demetde $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $\imath\omega$ ile gösterilen

$$\imath\omega = \omega_i y^i \tag{3.9}$$

fonksiyonu tanımlanır. Bu tanıma göre eğer f, M_n manifoldu üzerinde bir fonksiyon ise $i(df)$ fonksiyonu $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda lokal olarak

$$\imath(df) = (\partial_i f) y^i \tag{3.10}$$

yazılır.

3.2.2. Tanım: M_n manifoldu üzerinde herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$$^{V} X(\imath\omega) = {}^{V}(\omega(X)) \tag{3.11}$$

ile tanımlanan ^{V}X vektör alanına X vektör alanının dikey(vertical) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.11) denkleminden X vektör alanının dikey(vertical) lifti, $T(M_n)$ tanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{h} \end{pmatrix} \tag{3.12} $$

biçiminde olur. (3.12) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^{V}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right) = {}^{V}(\partial_{i}) = \frac{\partial}{\partial y^{i}} = \partial_{\bar{i}} \tag{3.13} $$

olarak bulunur.

$f \in \Im_0^0(M_n)$ alalım. ${}^{V}(df)$ vertical liftini ${}^{V}(df) = d\,{}^{V}f$ biçiminde tanımlayalım. $f, g \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere gdf 1-formunun vertical liftini ise ${}^{V}(gdf) = {}^{V}g\,{}^{V}(df) = {}^{V}gd\,{}^{V}f$ şeklinde tanımlayalım.

3.2.3. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ 1-formu verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$$ {}^{V}\omega = {}^{V}(\omega_i)\,{}^{V}(dx^{i}) \tag{3.14} $$

ile tanımlanan ${}^{V}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ 1-formuna ω 1-formunun dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

ω 1-formunun dikey lifti, $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{V}\omega = (\omega_i, 0) \tag{3.15} $$

biçiminde olur. (3.15) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^{V}(dx^{h}) = dx^{h} \tag{3.16} $$

olarak bulunur.

M_n manifoldu üzerinde S tensör alanı

$$ S = S_{lj_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\, \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{l} \otimes dx^{j_1} \dots \otimes dx^{j_q} \tag{3.17} $$

olarak verilmiş olsun. $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ indirgenmiş koordinatlarına göre $\gamma_X S$ ve γS tensör alanları sırasıyla

$$\gamma_X S = \left(X^l S_{lk\ldots j}^{i\ldots h}\right)\partial_{\bar{i}} \otimes \ldots \otimes \partial_{\bar{h}} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j \tag{3.18}$$

ve

$$\gamma S = \left(y^l S_{lk\ldots j}^{i\ldots h}\right)\partial_{\bar{i}} \otimes \ldots \otimes \partial_{\bar{h}} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j \tag{3.19}$$

ile tanımlanır (Yano and Ishihara 1973). Eğer S bir fonksiyon ise $\gamma_X S$ ve γS sıfır olarak kabul ediliyor.

Keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $S \in \Im_s^0(M_n)$ veya $S \in \Im_s^1(M_n)$ için (3.18) denkleminden

$$\gamma_X S = {}^V(S_X) \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada $S_X \in \Im_{s-1}^0(M_n)$ veya $S_X \in \Im_{s-1}^1(M_n)$

$$S_X(X_{s-1}, \ldots, X_1) = S(X, X_{s-1}, \ldots, X_1) \tag{3.21}$$

ile tanımlanmıştır (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Complete (Tam)Lift

3.3.1. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demette

$${}^C f = \iota(df) \tag{3.22}$$

ile tanımlanan ${}^C f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tam(complete) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

3.3.2. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. *f*, M_n manifoldu üzerinde keyfi bir fonksiyon olmak üzere, $T(M_n)$ uzayında

$${}^C X\, {}^C f = {}^C(Xf) \tag{3.23}$$

ile tanımlanan ${}^{C}X \in \mathfrak{I}_0^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına X vektör alanının tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.23) denkleminden X vektör alanının tam liftinin $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

olur. (3.24) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^{C}(\partial_i) = \partial_i \tag{3.25}$$

olarak bulunur.

3.3.3. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $\omega \in \mathfrak{I}_1^0\left(M_n\right)$ 1-formu verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$$ {}^{C}\omega\left({}^{C}X\right) = {}^{C}\left(\omega(X)\right) \tag{3.26}$$

ile tanımlanan ${}^{C}\omega$, 1-formuna $\omega \in \mathfrak{I}_1^0\left(T\left(M_n\right)\right)$ 1-formunun tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.26) denkleminden ω, 1-formunun tam lifti $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{C}\omega = \left(y^s \partial_s \omega_i, \omega_i\right) \tag{3.27}$$

biçimindedir. (3.27) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^{C}\left(dx^h\right) = dy^h = dx^{\bar{h}} \tag{3.28}$$

olarak bulunur.

Keyfi $P, Q, R \in \mathfrak{I}_q^p\left(M_n\right)$ alalım. Keyfi tipli tensörün vertical ve tam lifti aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde tanımlanıyor.

Vertical lift:

$$ {}^{V}(P\otimes Q) = {}^{V}P \otimes {}^{V}Q, $$
$$ {}^{V}(P+R) = {}^{V}P + {}^{V}R, $$

Tam lift:
$$ {}^{C}(P\otimes Q) = {}^{C}P \otimes {}^{V}Q + {}^{V}P \otimes {}^{C}Q, \tag{3.39} $$
$$ {}^{C}(P+R) = {}^{C}P + {}^{C}R. $$

3.4. (0,2) Tipli Tensör Alanların Complete (Tam) Lifti

M_n manifoldu üzerinde $G \in \Im_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^{C}G$ tam lifti $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri;

$$ {}^{C}G = {}^{C}\left(G_{ji}dx^j \otimes dx^i\right) = {}^{C}\left(G_{ji}\right){}^{V}\left(dx^j \otimes dx^i\right) + {}^{V}\left(G_{ji}\right){}^{C}\left(dx^j \otimes dx^i\right) $$
$$ = {}^{C}\left(G_{ji}\right)^{V}\left(dx^j \otimes dx^i\right) + {}^{V}\left(G_{ji}\right)^{C}\left(dx^j\right) \otimes {}^{V}\left(dx^i\right) + {}^{V}\left(G_{ji}\right)^{V}\left(dx^j\right) \otimes {}^{C}\left(dx^i\right) $$
$$ = y^s \partial_s G_{ji} dx^j \otimes dx^i + G_{ji} dx^{\bar{j}} \otimes dx^i + G_{ji} dx^j \otimes dx^{\bar{i}} \tag{*} $$

ayrıca

$$ {}^{C}G = {}^{C}G_{JI}dx^J \otimes dx^I = {}^{C}G_{ji}dx^j \otimes dx^i + {}^{C}G_{\bar{j}i}dx^{\bar{j}} \otimes dx^i $$
$$ + {}^{C}G_{j\bar{i}}dx^j \otimes dx^{\bar{i}} + {}^{C}G_{\bar{j}\bar{i}}dx^{\bar{j}} \otimes dx^{\bar{i}} \tag{**} $$

olur. (*) ve (**) taraf tarafa eşitlenerek

$$ {}^{C}(G) = \begin{pmatrix} y^s \partial_s G_{ji} & G_{ji} \\ G_{ji} & 0 \end{pmatrix} $$

şeklinde elde edilir.

3.4.1. Teorem: M_n de $ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$ şeklinde verilen g Riemannian metriği için, $T(M_n)$ de ${}^{C}g$ Riemannian metriği,

$$ {}^{C}g = 2g_{ji}\delta y^j dx^i $$

şeklinde tarif edilir. Burada $\delta y^j = dy^j + \left\{ {}^{\,j}_{lk} \right\} dx^l y^k$ ve $\left\{ {}^{\,j}_{lk} \right\}$ Christoffel sembolleridir.

İspat: $${}^{C}g = g_{JI}dx^{J}dx^{I} = (y^{k}\partial_{k}g_{ji})dx^{j}dx^{i} + g_{ji}dy^{j}dx^{i} + g_{ji}dx^{j}dy^{i}$$

$$= (y^{k}\partial_{k}g_{ji})dx^{j}dx^{i} + 2g_{ji}dx^{j}dy^{i} \qquad (*)$$

şeklindedir. $\partial_{k}g_{ji} = \left\{ {h \atop jk} \right\} g_{hi} + \left\{ {h \atop ki} \right\} g_{jh}$, (*) eşitliğinde kullanılırsa

$${}^{C}g = (y^{s}\partial_{s}g_{ji})dx^{j}dx^{i} + 2g_{ji}dx^{j}dy^{i}$$

$$= y^{k}(\left\{ {h \atop kj} \right\} g_{hi} + \left\{ {h \atop ki} \right\} g_{jh})dx^{j}dx^{i} + 2g_{ji}dx^{j}dy^{i}$$

$$= 2g_{ji}\left\{ {j \atop lk} \right\} dx^{l}y^{k}dx^{i} + 2g_{ji}dx^{j}dy^{i}$$

$$= 2g_{ji}(dy^{j} + \left\{ {j \atop lk} \right\} dx^{l}y^{k})dx^{i}$$

$$= 2g_{ji}\delta y^{j}dx^{i}$$

olduğu görülür.

3.5. Afin Konneksiyonun Complete (Tam) Lifti

$T(M_n)$ de ∇ konneksiyonun tam lifti,

$${}^{C}\nabla_{{}^{C}X}\,{}^{C}Y = {}^{C}(\nabla_{X}Y) \qquad (3.40)$$

şartını sağlayan tek bir konneksiyondur. Γ_{ij}^{k}, M_n de (x^h) yerel koordinatlara göre ∇ nın bileşenleri ve ${}^{C}\Gamma_{ij}^{k}$, $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}\nabla$ nin bileşenleridir. X ve Y, M_n de sırasıyla X^h ve Y^h bileşenli vektör alanları olsun. Buna göre $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}X$ ve ${}^{C}Y$

$${}^{C}X : \begin{pmatrix} X^{h} \\ \partial X^{h} \end{pmatrix}, \quad {}^{C}Y : \begin{pmatrix} Y^{h} \\ \partial Y^{h} \end{pmatrix}, \; \partial x^{h} = y^{s}\partial_{s}X^{h}, \; \partial Y^{h} = y^{s}\partial_{s}Y^{h}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. (3.40) eşitliğini açık şekilde yazarsak

$${}^{C}X^{I}\partial_{I}\,{}^{C}Y^{J} + {}^{C}\Gamma_{IM}^{J}\,{}^{C}Y^{M}\,{}^{C}X^{I} = {}^{C}(\nabla_{X}Y)^{J}$$

1) $J = j$ için

$${}^{C}X^{I}\partial_{I}\,{}^{C}Y^{j} + {}^{C}\Gamma_{IM}^{j}\,{}^{C}Y^{M}\,{}^{C}X^{I} = X^{i}\partial_{i}Y^{j} + \Gamma_{im}^{j}Y^{m}X^{i}$$

$$\Rightarrow {}^{C}X^{i}\partial_{i}\,{}^{C}Y^{j} + {}^{C}X^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\,{}^{C}Y^{j} + {}^{C}\Gamma_{im}^{j}\,{}^{C}Y^{m}\,{}^{C}X^{i} + {}^{C}\Gamma_{\bar{i}m}^{j}\,{}^{C}Y^{m}\,{}^{C}X^{\bar{i}} + {}^{C}\Gamma_{\bar{i}\bar{m}}^{j}\,{}^{C}Y^{\bar{m}}\,{}^{C}X^{\bar{i}} +$$

$$+{}^{C}{}_{i\bar{m}}^{\;j}\,{}^{C}Y^{\bar{m}}\,{}^{C}X^{i} = X^{i}\partial_{i}Y^{j} + \Gamma_{im}^{j}Y^{m}X^{i}$$

$$\Rightarrow X^{i}\partial_{i}Y^{j} + {}^{C}\Gamma_{im}^{j}Y^{m}X^{i} + {}^{C}\Gamma_{\bar{i}m}^{\;j}Y^{m}y^{s}\partial_{s}X^{i} + {}^{C}\Gamma_{\bar{i}\bar{m}}^{j}y^{s}\partial_{s}Y^{m}y^{s}\partial_{s}X^{i}$$

$$+{}^{C}\Gamma_{i\bar{m}}^{j}y^{s}\partial_{s}Y^{m}X^{i} = X^{i}\partial_{i}Y^{j} + \Gamma_{im}^{j}Y^{m}X^{i}$$

olur. Bu son eşitlikten

$${}^{C}\Gamma_{im}^{j} = \Gamma_{\;im}^{\,j},\quad {}^{C}\Gamma_{\bar{i}m}^{j} = {}^{C}\Gamma_{i\bar{m}}^{j} = {}^{C}\Gamma_{\;\bar{i}\bar{m}}^{\,j} = 0 \tag{3.41}$$

elde edilir.

2) $J = \bar{j}$ için aynı şekilde hareket edilerek,

$${}^{C}\Gamma_{im}^{\bar{j}} = \partial\Gamma_{\;im}^{\,j},\quad {}^{C}\Gamma_{\bar{i}m}^{\bar{j}} = \Gamma_{\;im}^{\,j},\quad {}^{C}\Gamma_{i\bar{m}}^{\bar{j}} = \Gamma_{\;im}^{\,j},\quad {}^{C}\Gamma_{\bar{i}\bar{m}}^{\bar{j}} = 0 \tag{3.42}$$

elde edilir.

(3.41) ve (3.42) ile tanımlanan ${}^{C}\Gamma_{IM}^{J}$, $T(M_n)$ de bir afin konneksiyon belirtir. ∇ afin konneksiyonun complete (tam) lifti denir ve ${}^{C}\nabla$ ile gösterilir.

3.5.1. Teorem: Herhangi bir $X \in \Im_{0}^{1}(M_n)$ ve $f \in \Im_{0}^{0}(M_n)$ için

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}f = 0, \qquad {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{C}f = {}^{V}(\nabla_{x}f), $$

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{V}f = {}^{V}(\nabla_{x}f), \qquad {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}f = {}^{C}(\nabla_{x}f) $$

şeklindedir.

3.5.2. Teorem: Herhangi bir $X, Y \in \Im_{0}^{1}(M_n)$ için

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = 0, \qquad {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{C}Y = {}^{V}(\nabla_{X}Y), $$

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{V}Y = {}^{V}(\nabla_{X}Y), \qquad {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}Y = {}^{C}(\nabla_{X}Y). $$

İspat: M_n de X^h ve Y^h, (x^h) lokal koordinatlara göre sırasıyla X ve Y nin bileşenleri olsun. O zaman X ve Y nin liftleri $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre sırasıyla

$$ {}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \qquad {}^V Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y^h \end{pmatrix}, $$

$$ {}^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \qquad {}^C Y = \begin{pmatrix} Y^h \\ \partial Y^h \end{pmatrix} $$

şeklindedir. Böylece (3.41) ve (3.42) de dolayı ${}^C\nabla_{{}^V X}{}^V Y$ nin ilk n bileşenleri

$$ X^j \left({}^C\Gamma_{\bar{j}i}^{h} Y^i \right) = 0 $$

ve son n bileşenleri

$$ X^j \left(\partial_{\bar{j}} Y^h + {}^C\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} Y^i \right) = 0 $$

şeklindedir. Böylece ${}^C\nabla_{{}^V X}{}^V Y = 0$ elde ederiz.

(3.41) ve (3.42) de dolayı ${}^C\nabla_{{}^V X}{}^C Y$ nin ilk n bileşenleri

$$ X^j \left(\partial_{\bar{j}} Y^h + {}^C\Gamma_{\bar{j}i}^{h} Y^i + {}^C\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{h} \partial Y^i \right) = 0 $$

ve son n bileşenleri

$$ X^j \left(\partial_{\bar{j}} \partial Y^h + {}^C\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} Y^i + {}^C\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} \partial Y^i \right) = X^j \left(\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{h} Y^i \right) $$

olduğundan ${}^C\nabla_{{}^V X}{}^C Y = {}^V(\nabla_X Y)$ elde edilir. Benzer şekilde ${}^C\nabla_{{}^C X}{}^V Y = {}^V(\nabla_X Y)$ olduğu görülür.

3.5.3. Teorem: Herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ için

$$ {}^C\nabla_{{}^V X}{}^V \omega = 0, \qquad {}^C\nabla_{{}^V X}{}^C \omega = {}^V(\nabla_X \omega), $$

$$ {}^C\nabla_{{}^C X}{}^V \omega = {}^V(\nabla_X \omega), \qquad {}^C\nabla_{{}^C X}{}^C \omega = {}^C(\nabla_X \omega) $$

olur.

Teorem 3.5.1, Teorem 3.5.2 ve Teorem 3.5.3 den aşağıdaki teorem elde edilir;

3.5.4. Teorem: M_n de herhangi bir K tensör alanı ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$^C\nabla_{^VX}\,^VK = 0, \qquad ^C\nabla_{^VX}\,^CK = ^V(\nabla_X K),$$
$$^C\nabla_{^CX}\,^VK = ^V(\nabla_X K), \qquad ^C\nabla_{^CX}\,^CK = ^C(\nabla_X K)$$

ve

$$^C\nabla^VK = ^V(\nabla K), \quad ^C\nabla^CK = ^C(\nabla K)$$

olur.

3.6. Fonksiyonların ve Vektör Alanların Horizontal (Yatay) Liftleri

M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilsin. f fonksiyonunun gradiyenti ∇f ile gösterilir. γ operatörü ∇f gradiyentine uygulanırsa

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f)$$

olur. M_n de f nin ^Hf horizontal (yatay) lifti $T(M_n)$ de

$$^Hf = ^Cf - \gamma(\nabla f) \tag{3.43}$$

şeklindedir. Ayrıca ^Cf nin tanımından

$$^Hf = 0$$

olur. Yani tanjant demette fonksiyonun horizontal (yatay) lifti sıfırdır.

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Her $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$^HX = ^CX - \nabla_\gamma X \tag{3.44}$$

ile tanımlanan $^HX \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanına, X vektör alanının horizontal (yatay) lifti denir. Burada $\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X)$ olarak gösterilmiştir (Yano and Ishihara 1973).

Farzedelim ki X , X^h lokal bileşenlere ve ∇, Γ_{ji}^{h} bileşenlerine sahip olsun. Bu taktirde, $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ${}^C X$ ve $\nabla_\gamma X$

$$ {}^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \qquad \nabla_\gamma X = \begin{pmatrix} 0 \\ y^j \nabla_j X^h \end{pmatrix} $$

lokal bileşenlerine sahiptir ve $\nabla_j X^h = \partial_j X^h + \Gamma_{ji}^h \mathrm{X}^{\mathrm{i}}$ şeklinde olup X in ${}^H X$ horizontal (yatay) lifti $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{si}^h X^i \end{pmatrix} \tag{3.45} $$

bileşenlerine sahiptir.

3.7. (0,2) Tipli Tensör Alanların Horizontal (Yatay) Lifti

∇ afin konneksiyonlu M_n manifoldu üzerinde herhangi bir tensör alanı

$$ S = S_{k\ldots j}^{i\ldots h} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j $$

şeklinde verilsin. $T(M_n)$ de bir $\nabla_\gamma S$ tensör alanı $\pi^{-1}(U)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre

$$ \nabla_\gamma S = (y^l \nabla_l S_{k\ldots j}^{i\ldots h}) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j $$

şeklinde tanımlanır. $f \in \Im_0^0(M_n)$ için $\nabla_\gamma f = {}^C f$ olup $P,Q \in T(M_n)$ için

$$ \nabla_\gamma (P \otimes Q) = (\nabla_\gamma P) \otimes {}^V Q + {}^V P \otimes (\nabla_\gamma Q) \tag{3.46} $$

elde edilir. M_n de keyfi tipli bir S tensör alanının $T(M_n)$ de ${}^H S$ horizontal (yatay) lifti

$$ {}^H S = {}^C S - \nabla_\gamma S \tag{3.47} $$

olarak tanımlanır. Buradan $\nabla S = 0$ için ${}^H S = {}^C S$ olur. $\nabla S = 0$ olması için gerek ve yeter şart ∇ konneksiyonuna göre S nin paralel olmasıdır. Buna göre (3.46) dan

$$ {}^{H}\left(P \otimes Q\right) = {}^{H}P \otimes {}^{V}Q + {}^{V}P \otimes {}^{H}Q \tag{3.48} $$

elde edilir. (3.47) eşitliği kullanılarak M_n de g_{ji} bileşenli (0,2) tipli g tensör alanının ${}^{H}g$ liftinin bileşenleri $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}g = \begin{pmatrix} \Gamma_j^t g_{ti} + \Gamma_i^t g_{jt} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.49} $$

olur.

3.8. Afin Konneksiyonun Horizontal (Yatay) Lifti

M_n de bir ∇ afin konneksiyonu verilsin. (3.44) kullanarak Teorem 3.5.4 den herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$ \begin{aligned} {}^{C}\nabla_{{}^{H}X} {}^{H}Y &= {}^{H}\left(\nabla_X Y\right) + \gamma(R(\ \ , X)Y) \ , \\ {}^{C}\nabla_{{}^{C}X} {}^{H}Y &= {}^{H}\left(\nabla_X Y\right) + \gamma(R(\ \ , X)Y) \ , \\ {}^{C}\nabla_{{}^{H}X} {}^{C}Y &= {}^{C}\left(\nabla_X Y\right) - \gamma((\nabla Y)(\nabla X)) \end{aligned} \tag{3.50} $$

elde ederiz. Burada $(R(\ \ , X)Y)$ M_n de (1,1) tipli bir tensör alanı $W(Z) = R(Z, X)Y$, $Z \in \Im_0^1(M_n)$, R ise ∇ afin konneksiyonunun eğrilik tensörüdür. Ayrıca herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$ \begin{aligned} &{}^{C}\nabla_{{}^{V}X} {}^{V}Y = 0, \quad {}^{C}\nabla_{{}^{V}X} {}^{H}Y = 0, \\ &{}^{C}\nabla_{{}^{H}X} {}^{V}Y = {}^{V}\left(\nabla_X Y\right) \end{aligned} \tag{3.51} $$

şeklindedir. Şimdi herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için $T(M_n)$ de ${}^{H}\nabla$ yatay liftini

$$ \begin{aligned} &{}^{H}\nabla_{{}^{V}X} {}^{V}Y = 0, \quad {}^{H}\nabla_{{}^{V}X} {}^{H}Y = 0, \\ &{}^{H}\nabla_{{}^{H}X} {}^{V}Y = {}^{V}\left(\nabla_X Y\right), \quad {}^{H}\nabla_{{}^{H}X} {}^{H}Y = {}^{H}\left(\nabla_X Y\right) \end{aligned} \tag{3.52} $$

eşitlikleriyle tanımlayacağız. Bu durumda (3.50), (3.51) ve (3.52) den herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$ {}^{H}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = 0, \qquad {}^{H}\nabla_{{}^{V}X}{}^{H}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{H}Y = 0, \tag{3.53} $$
$$ {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}Y, \qquad {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y - \gamma(R(\quad, X)Y) $$

elde edilir. Böylece eğer herhangi $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ için

$$ \widetilde{S}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = {}^{H}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - {}^{C}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} \tag{3.54} $$

yazılırsa $T(M_n)$ de (1,2) tipli $\widetilde{S}$ tensörü

$$ \widetilde{S}({}^{V}X,{}^{V}Y) = 0, \qquad \widetilde{S}({}^{V}X,{}^{H}Y) = 0, \tag{3.55} $$
$$ \widetilde{S}({}^{H}X,{}^{V}Y) = 0, \qquad \widetilde{S}({}^{H}X,{}^{H}Y) = -\gamma(R(\quad, X)Y) $$

eşitliklerini sağlar. Bundan dolayı

$$ \widetilde{S}^{\bar{h}}_{ji} = -y^{k}R^{h}_{kji}, \tag{3.56} $$

ve diğer bileşenleri sıfırdır. (3.54) , (3.56) , (3.41) ve (3.42) eşitliklerinden ∇ nın ${}^{H}\nabla$ horizontal (yatay) lifti $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}\Gamma^{h}_{ji} = \Gamma^{h}_{ji}, \qquad {}^{H}\Gamma^{h}_{j\bar{i}} = 0, \qquad {}^{H}\Gamma^{h}_{\bar{j}i} = 0, \qquad {}^{H}\Gamma^{h}_{\bar{j}\bar{i}} = 0, $$
$$ {}^{H}\Gamma^{\bar{h}}_{ji} = \partial\Gamma^{h}_{ji} - y^{k}R^{h}_{kji}, \quad {}^{H}\Gamma^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = \Gamma^{h}_{ji}, \quad {}^{H}\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{j}i} = \Gamma^{h}_{ji}, \quad {}^{H}\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} = 0 \tag{3.57} $$

bileşenlerine sahiptir.

3.9. Riemannian Manifoldunun Tanjant Demetinde Metrikler

M_n, g metriği ile verilen bir Riemannian manifoldu olsun. g metriğinin bileşenleri herhangi bir U koordinat komşuluğunda g_{ji} ve Christoffel sembolleri ise Γ^{h}_{ji} ile gösterilir. U, M_n nin bir komşuluğu olmak üzere, eğer $T(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ koşuluğunda (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre

$$ \delta y^{h} = dy^{h} + \Gamma^{h}_{i}dx^{i}, \; (\Gamma^{h}_{i} = y^{j}\Gamma^{h}_{ji}) $$

yazılırsa,

$$I : g_{ji} dx^j dx^i ,$$
$$II : 2g_{ji} dx^j \delta y^i ,$$
$$III : g_{ji} \delta y^j \delta y^i$$

şeklinde $T(M_n)$de global olarak tanımlanan ikinci dereceden diferensiyel formlar elde edilir. Ayrıca,

$$II : 2g_{ji} dx^j \delta y^i ,$$
$$I + II : g_{ji} dx^j dx^i + 2g_{ji} dx^j \delta y^i ,$$
$$I + III : g_{ji} dx^j dx^i + g_{ji} \delta y^j \delta y^i ,$$
$$II + III : 2g_{ji} dx^j \delta y^i + g_{ji} \delta y^j \delta y^i$$

diferensiyel formlarının hepsi singüler değildirler ve sonuç olarak $T(M_n)$ üzerinde Riemannian veya pseudo- Riemannian metrikleri olarak bakılabilirler (Yano and Ishihara 1966).

II metriği $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$II : \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir ayrıca Teorem 3.4.1 den dolayı II metriği ${}^C g = {}^H g$ ile çakışır.

$T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre $I+II$ metriği

$$I + II : \begin{pmatrix} g_{ji} + \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. Ayrıca Teorem 3.4.1 den dolayı $I+II$ metriği ${}^V g + {}^C g$ ile çakışır. Burada $g \in \Im_2^0(M_n)$ nin vertical (dikey) lifti

$${}^V g : \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde lokal bileşenlere sahiptir.

3.9.1. Riemannian manifoldunun tanjant demetinde II metriği

M_n, lokal bileşenleri g_{ji} olan g metriğine sahip bir Riemannian manifoldu olsun. $T(M_n)$ de indirgenmiş (x^A), yani (x^h, y^h) koordinatlarına göre lokal ifadesi

$$\widetilde{g}_{CB} dx^C dx^B = 2g_{ji} dx^j \delta y^i$$

şeklinde olan $\widetilde{g}$ Riemannian metriği verilsin. Burada

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_i^h dx^i, \qquad \Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h$$

şeklindedir. Bu metriğe II metriği denir ve $\widetilde{g}_{CB}$, ${}^C g$ metriğinin bileşenleridir olup,

$$(\widetilde{g}_{CB}) = \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

şeklinde tarif edilir ve kontravaryant bileşenleri $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$(\widetilde{g}^{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ji} \\ g^{ji} & \partial g^{ji} \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

şeklindedir. Burada g^{ji}, g nin kontravaryant bileşenleri olup $\mathrm{g}_{\mathrm{ji}} g^{ih} = \delta_i^h$ şartını sağlar. Ayrıca X, M_n de bir vektör alanı ise, ${}^V X$ dikey lifti, ${}^C X$ tam lifti ve ${}^H X$ yatay lifti $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre sırasıyla

$$({}^{'}X^A) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \qquad (\widetilde{X}^A) = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \qquad (\overline{X}) = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^h \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.58) ve (3.60) eşitliklerinden

$$\widetilde{g}_{CB} {}^{'}X^C {}^{'}X^B = 0, \qquad \widetilde{g}_{CB} \overline{X}^C \overline{X}^B = 0$$

elde edilir. Burada $\nabla_k g_{ji} = \partial_k g_{ji} - \Gamma_{kj}^h g_{hi} - \Gamma_{ki}^h g_{jh} = 0$ değeri kullanılmıştır. Bu da gösteriyor ki II metriğine göre X vektör alanının ${}^V X$ dikey lifti ve ${}^H X$ yatay lifti sıfır olur.

M_n de X^h ve Y^h bileşenlerine sahip X ve Y vektör alanlarının $\widetilde{X}$ ve $\widetilde{Y}$ tam liftlerinin iç çarpımı, ${}^C g\left({}^C X, {}^C Y\right) = {}^C\left(g(X,Y)\right)$ kullanılarak

$$\widetilde{g}\left(\widetilde{X},\widetilde{Y}\right) = \partial\left(g_{ji}X^j Y^i\right)$$

şeklinde elde edilir. Böylece M_n de iki vektör alanının $T(M_n)$ de tam liftlerinin iç çarpımının sıfır olması için gerek ve yeter şart M_n de iç çarpımlarının sabit olmasıdır. Bu da verilen vektörün sabit uzunluğa sahip olması demektir.

II metriğinin $T(M_n)$ de tanımlı $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonu ile M_n de tanımlı g metriğinin ∇ Riemannian konneksiyonunun ${}^C\nabla$ tam lifti çakışır. Böylece (3.41) ve (3.42) den dolayı $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre II metriğinin $\widetilde{\Gamma}_{CB}^{A}$ Christoffel sembolleri

$$\widetilde{\Gamma}_{ji}^{h} = \Gamma_{ji}^{h}, \qquad \widetilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{h} = 0, \qquad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{h} = 0, \qquad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = 0$$

$$\widetilde{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}} = \partial\Gamma_{ji}^{h}, \qquad \widetilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \qquad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \qquad \widetilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0 \tag{3.61}$$

elde edilir. $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanının ${}^V X$ dikey lifti için

$$\widetilde{\nabla}_{{}^C Y}{}^V X = {}^C\nabla_{{}^C Y}{}^V X = {}^V\left(\nabla_Y X\right)$$

olduğundan $\widetilde{\nabla}_{{}^C Y}{}^V X$ konneksiyonu $T(M_n)$ de

$$\widetilde{\nabla}_{{}^C Y}{}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ y^k \nabla_k X^h \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

bileşenlerine sahiptir. Fibrenin teğet düzlemleri $T(M_n)$ de dikey dağılım adı verilen bir dağılım oluşturur. Buna göre (3.62) den şu teoremi verebiliriz.

3.9.1. Teorem: $T(M_n)$ de dikey dağılım Levi-Civita konneksiyonuna göre paraleldir(Yano and Ishihara 1973).

$T(M_n)$ de $\Gamma_i^h \overline{X}^i + \overline{X}^{\bar{h}} = 0$ şartını sağlayan $\overline{X}^A$ lokal bileşenlerine sahip $\overline{X}$ yatay vektör alanını gözönüne alalım. (3.61) den herhangi bir $Y \in \Im_0^1(M_n)$ için indirgenmiş koordinatlara göre $\widetilde{\nabla}_{^C Y} \overline{X}$,

$$\widetilde{\nabla}_{^C Y} \overline{X} = \begin{pmatrix} Y^j\left(\partial_j \overline{X}^h + \Gamma_{ji}^h \overline{X}^i\right) \\ -\Gamma_i^h Y^j\left(\partial_j \overline{X}^i + \Gamma_{jk}^i \overline{X}^k\right) + y^k K_{kji}^{\ \ h} Y^j \overline{X}^i \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Burada $K_{kji}^{\ \ h}$, M_n deki eğrilik tensörünün bileşenleridir. Böylece şu teoremi elde ederiz,

3.9.2. Teorem: Yatay dağılımın II metriğinin Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olması için gerek ve yeter şart M_n deki g metriğinin lokal olarak Euclidiyen olmasıdır (Yano and Ishihara 1973).

$$\widetilde{g}_{CB} dx^C dx^B = 2 g_{ji} dx^j \delta y^i$$

eşitliğinden, $dx^h = 0$ ile temsil edilen fibrenin II metriğine göre $T(M_n)$ de bir boş alt manifold ve $\delta y^h = 0$ ile tanımlanan yatay dağılımın ise sıfır olduğu görülür.

$T(M_n)$ de bir $\widetilde{X}$ vektör alanı verilsin. $\widetilde{Y} \in \Im_0^1(T(M_n))$ olmak üzere $\widetilde{\omega}(\widetilde{Y}) = \widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ ile tanımlanan $\widetilde{\omega}$ 1-formu, $\widetilde{X}$ ile birlikte kovektör alanı olarak tanımlanır ve $\widetilde{X}^*$ ile gösterilir. Eğer $\widetilde{X}$ vektör alanı $\widetilde{X}^A$ lokal bileşenlere sahip ise $\widetilde{X}^*$ kovektör alanı da $\widetilde{X}_C = \widetilde{g}_{CB} \widetilde{X}^B$ şeklinde lokal bileşenlere sahiptir.

ω, M_n de ω_i bileşenli 1-form olsun. Bu taktirde ω nın $T(M_n)$ de dikey, tam ve yatay liftleri sırasıyla

$$\left({}^{'}\omega_B\right) = \left(\omega_i, 0\right), \qquad \left(\tilde{\omega}_B\right) = \left(\partial\omega_i, \omega_i\right), \qquad \left(\overline{\omega}\right) = \left(-\Gamma_i^h \omega_h, \omega_i\right) \tag{3.64}$$

şeklinde indirgenmiş koordinatlara sahiptir.

Bir X vektör alanının dikey, tam ve yatay liftleri sırasıyla

$$\left({}^{'}X^{A}\right)=\begin{pmatrix}0\\X^{h}\end{pmatrix},\qquad \left(\widetilde{X}^{A}\right)=\begin{pmatrix}X^{h}\\\partial X^{h}\end{pmatrix},\qquad \left(\widetilde{X}^{A}\right)=\begin{pmatrix}X^{h}\\-\Gamma_{i}^{h}X^{i}\end{pmatrix} \tag{3.65}$$

şeklinde verilmişti. Buna göre $T(M_n)$ de II metriğine göre ${}^{V}X$, ${}^{C}X$ ve ${}^{H}X$ ile tanımlanan kovektör alanlarının bileşenleri sırasıyla

$$\left(X_i,0\right),\qquad \left(\partial X_i, X_i\right),\qquad \left(-\Gamma_i^h X_h, X_i\right) \tag{3.66}$$

şeklindedir. Burada $X_j = g_{ji}X^i$, X^* kovektör alanının bileşenleridir. (3.64) ün sırasıyla X^* nın dikey, tam ve yatay liftleri olduğunu görürüz. Buradan şu teoremi elde ederiz,

3.9.3. Teorem: Herhangi bir $X\in\Im_0^1(M_n)$ için, $T(M_n)$ de II metriğine göre

$$\left({}^{V}X\right)^{*}={}^{V}\left(X^{*}\right),\qquad \left({}^{C}X\right)^{*}={}^{C}\left(X^{*}\right),\qquad \left({}^{H}X\right)^{*}={}^{H}\left(X^{*}\right)$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

İspat: $X_A^* = {}^{C}g_{AB}X^B$ ve ${}^{V}X=\begin{pmatrix}0\\X^i\end{pmatrix}$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned}\left({}^{V}X\right)^{*} &= \left(\left(\left({}^{V}X\right)^{*}\right)^{i},\left(\left({}^{V}X\right)^{*}\right)^{\bar{i}}\right)\\ &= \begin{pmatrix}y^s\partial_s g_{ij} & g_{ij}\\ g_{ij} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\X^j\end{pmatrix}\\ &= \left(g_{ij}X^j,0\right)\end{aligned}$$

ve $X^* = \left(X^*\right)^i\partial_i$, $\left(X^*\right)^i=\left(g_{ij}X^j\right)$ ifadelerinden ${}^{V}\left(X^*\right)=\left(g_{ij}X^j,0\right)$ elde edilir. Buradan

$$\left({}^{V}X\right)^{*}={}^{V}\left(X^{*}\right)$$

olduğu görülür. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}\left({}^{C}X\right)^{*} &= \left(\left(\left({}^{C}X\right)^{*}\right)_{i},\left(\left({}^{C}X\right)^{*}\right)_{\bar{i}}\right)\\ &= \begin{pmatrix}y^s\partial_s g_{ij} & g_{ij}\\ g_{ij} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^j\\y^s\partial_s X^j\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\left(y^s\partial_s g_{ij}X^j + g_{ij}y^s\partial_s X^j, g_{ij}X^j\right)$$
$$=\left(y^s\partial_s(g_{ij}X^j), g_{ij}X^j\right)$$

ve $\left(X^*\right)_i = \left(g_{ij}X^j\right)$ olduğundan $\left({}^C X^*\right) = \left(y^s\partial_s(g_{ij}X^j), g_{ij}X^j\right)$ elde edilir. Buradan

$$\left({}^C X\right)^* = {}^C\left(X^*\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$\left({}^H X\right)^* = \left(\left(\left({}^H X\right)^*\right)_i, \left(\left({}^H X\right)^*\right)_{\bar{i}}\right)$$
$$=\begin{pmatrix} y^s\partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^j \\ -y^s\Gamma_{sl}^j X^l \end{pmatrix}$$
$$=\left(y^s\partial_s g_{ij}X^j - y^s\Gamma_{sl}^j X^l g_{ij}, g_{ij}X^j\right)$$
$$=\left(y^s X^l(\partial_s g_{il} - \Gamma_{sl}^j g_{ij}), g_{ij}X^j\right)$$

elde edilir.

$$0 = \nabla_s g_{il} = \partial_s g_{il} - \Gamma_{si}^j g_{jl} - \Gamma_{sl}^j g_{ij}$$

eşitliğinden

$$\partial_s g_{il} - \Gamma_{sl}^j g_{ij} = \Gamma_{si}^j g_{jl}$$

yazılır. Buradan

$$\left({}^H X\right)^* = \left(y^s X^l\Gamma_{si}^j g_{jl}, g_{ij}X^j\right)$$
$$=\left(y^s X^j\Gamma_{si}^l g_{lj}, g_{ij}X^j\right)$$

olur. Diğer yandan

$$\left({}^H X\right)^* = {}^H\left(g_{ij}X^j\right)$$
$$=\left(y^s X^j\Gamma_{si}^l g_{lj}, g_{ij}X^j\right)$$

şeklinde olup buradan

$$\left({}^H X\right)^* = {}^H\left(X^*\right)$$

olduğu görülür.

3.9.2. Tanjant demette *I+II* metriği

g Riemannian metriğine sahip M_n Riemannian manifoldu üzerinde tanımlanan $T(M_n)$ deki Riemannian metriğinin

$$\tilde{g}_{CB} dx^C dx^B = g_{ji} dx^j dx^i + 2 g_{ji} dx^j \delta y^i \tag{3.67}$$

şeklinde verildiğini farzedelim. Bu metriğe $I+II$ metriği adı verilir. (X^A) indirgenmiş koordinatlara göre $I+II$ metriği

$$(\tilde{g}_{CB}) = \begin{pmatrix} g_{ij} + y^s \partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

bileşenlere sahiptir. Şimdi $\tilde{g}^{AB}$ metriğinin bileşenlerini (X^A), yani (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre bulalım.

$$\tilde{g}_{AM} \tilde{g}^{MB} = \delta_A^B$$

tensörünü açık şekilde yazarsak $j = 1,...,n$ ve $\bar{i} = n+1,...,2n$ için,

$$\begin{aligned}
&1)\ \ \tilde{g}_{im}\tilde{g}^{mj} + \tilde{g}_{i\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \delta_i^j, \\
&2)\ \ \tilde{g}_{\bar{i}m}\tilde{g}^{mj} + \tilde{g}_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \delta_{\bar{i}}^j = 0, \\
&3)\ \ \tilde{g}_{im}\tilde{g}^{m\bar{j}} + \tilde{g}_{i\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = \delta_i^{\bar{j}} = 0, \\
&4)\ \ \tilde{g}_{\bar{i}m}\tilde{g}^{m\bar{j}} + \tilde{g}_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = \delta_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \delta_i^j
\end{aligned} \tag{3.70}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden

$$(\tilde{g}^{BA}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ji} \\ g^{ji} & -g^{ji} + \partial g^{ji} \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

elde edilir. Burada g^{ji}, M_n de g nin kontravaryant bileşenleridir.

(3.67) eşitliği, $dx^h = 0$ ile verilen fibrenin, $I+II$ metriğine göre $T(M_n)$ de bir sıfır alt manifold olduğunu gösterir. Fakat $\delta y^h = 0$ ile tanımlanan yatay dağılım sıfır değildir.

$I+II$ metriğine göre $T(M_n)$ de X ve Y vektör alanlarının ${}^C X$ ve ${}^C Y$ tam liftlerinin iç çarpımlarından dolayı

$$\tilde{g}_{CB}\, {}^{C}\tilde{X}^{B}\tilde{Y} = g_{ji}X^{j}Y^{i} + \partial\left(g_{ji}X^{j}Y^{i}\right)$$

elde edilir. Burada $\tilde{X}^{B}$ ve $\tilde{Y}^{B}$ sırasıyla ${}^{C}X$ ve ${}^{C}Y$ bileşenleri ve X^{h} ve Y^{h} sırasıyla X ve Y nin lokal bileşenleridir. Böylece $I{+}II$ metriğine göre $T(M_n)$ de alınan bir X vektör alanının ${}^{C}X$ tam liftinin birim vektör olması için gerek ve yeter şart X in M_n de birim vektör olmasıdır. $T(M_n)$ de X ve Y vektör alanlarının sırasıyla ${}^{C}X$ ve ${}^{C}Y$ tam liftlerinin ortagonal olması için gerek ve yeter şart ise M_n deki X ve Y vektör alanlarının ortagonal olmasıdır.

Teorem 3.5.4 den dolayı

$${}^{C}\nabla_{{}^{C}X}\, {}^{V}g = {}^{V}\left(\nabla_{X}g\right) = 0, \qquad {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}\, {}^{C}g = {}^{C}\left(\nabla_{X}g\right) = 0$$

yazılır. Sonuç olarak herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ için $\nabla_X g = 0$ olduğundan

$${}^{C}\nabla_{{}^{C}X}\left({}^{V}g + {}^{C}g\right) = 0$$

elde edilir. Buna göre ${}^{V}g + {}^{C}g$ şeklindeki $I{+}II$ metriği, g metriğinin ∇ Levi-Civita konneksiyonunun ${}^{C}\nabla$ tam liftine göre kovaryant olarak sabittir. Diğer yandan ${}^{C}\nabla$ burulmasızdır. Buradan şu teoremi elde ederiz,

3.9.4. Teorem: II metriği ve $I{+}II$ metriğinin Levi-Civita konneksiyonu aynıdır (Yano and Ishihara 1973).

M_n de X^{h} lokal bileşenlerine göre X vektör alanının (3.65) ile verilen dikey, tam ve yatay liftlerini dikkate alarak $I{+}II$ metriğine göre X^{*} vektör alanının bileşenlerini hesaplarsak, indirgenmiş koordinatlara göre sırasıyla

$$\begin{aligned} \left({}'X_B\right) &= \left(X_i, 0\right), \\ \left(\tilde{X}_B\right) &= \left(X_i + \partial X_i, X_i\right) = \left(X_i, 0\right) + \left(\partial X_i, X_i\right), \\ \left(\bar{X}_B\right) &= \left(X_i + \Gamma_i^h X_h, X_i\right) = \left(X_i, 0\right) + \left(\Gamma_i^h X_h, X_i\right) \end{aligned} \qquad (3.72)$$

elde ederiz. Burada $X_j = g_{ji}X^{i}$ ve X^{h} lar sırasıyla, M_n deki X^{*} ve X vektör alanlarının lokal bileşenleridir.

3.9.5. Teorem: Herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ için, $T(M_n)$ de $I+II$ metriğine göre

$$\left({}^V X\right)^* = {}^V\left(X^*\right), \quad \left({}^C X\right)^* = {}^V\left(X^*\right) + {}^C\left(X^*\right),$$
$$\left({}^H X\right)^* = {}^V\left(X^*\right) + {}^H\left(X^*\right)$$

lur (Yano and Ishihara 1973).

3.9.3. Riemannian manifoldunun tanjant demetinde ${}^S g = {}^C g + {}^V a$ metriği

M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n)$$

ile tanımlanan $T\left(M_n\right)$ kümesine tanjant demetine bakalım.

M_n, g metriği ile verilen bir Riemannian manifoldu olsun. g metriğinin herhangi bir U koordinat komşuluğunda bileşenleri g_{ji} olur ve Christoffel sembolleri Γ_{ji}^h ile gösterilir. U, M_n nin bir komşuluğu olmak üzere $T\left(M_n\right)$ nin $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ de $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_i^h dx^i$$

şeklindedir. Burada

$$\Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h$$

biçimindedir.

Farzedelim ki g metriği ile birlikte verilen M_n Riemannian manifoldunun $T(M_n)$ tanjant demetinde

$${}^S\tilde{g}_{CB} dx^C dx^B = a_{ji} dx^j dx^i + 2g_{ji} dx^j \delta y^i \tag{3.73}$$

şeklinde Riemannian metriği verilsin. Burada a_{ji} ler M_n deki (0,2) tipli bir simetrik tensör alanının bileşenleridir. Bu metriğe synectic metrik denir ve

$$ {}^{S}g = \left({}^{S}\tilde{g}_{CB}\right) = \begin{pmatrix} a_{ji} + \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir (Talantova and Shirokov 1975).

(3.74) eşitliği, $dx^h = 0$ ile belirtilen fibrenin ${}^{S}g$ metriğine göre $T(M_n)$de boş altmanifold olduğunu gösterir.

$T_0^1(M_n)$,C^∞ sınıfından bütün vektör alanların kümesi olmak üzere $X \in T_0^1(M_n)$ verilsin. O zaman $T(M_n)$ de X in ${}^{H}X$ yatay lifti

$$ {}^{H}X = {}^{C}X - \nabla_\gamma X $$

ile tanımlanır (Yano and Ishahara 1973). Burada

$$ \nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X) $$

şeklindedir.

Farzedelim ki X , M_n de X^h yerel bileşenlere sahiptir. O zaman ${}^{C}X$ ve $\nabla_\gamma X$ sırasıyla $T(M_n)$ de

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \quad \nabla_\gamma X = \begin{pmatrix} 0 \\ y^j \nabla_j X^h \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

şeklinde yerel bileşenlere sahiptir. Burada $\nabla_j X^h, X^h$ ın kovaryant türevi olur ve

$$ \nabla_j X^h = \partial_j X^h + \Gamma_{ji}^h X^i $$

şeklindedir. $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre X in ${}^{H}X$ yatay lifti

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \tag{3.76}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h$$

şeklindedir.

(3.76) eşitliğinden $\Im_0^1(M_n)$ nin keyfi bir X elemanının ${}^H X$ yatay lifti daima $T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_{ji}^h dx^j dy^i = 0$$

eşitliği ile tanımlı D dağılım üzerinedir. Biz D yi yatay dağılım olarak adlandırıyoruz.

(3.73) eşitliğinde, $\delta y^h = 0$ ile tanımlı yatay dağılım, ${}^S g$ metrikli $T(M_n)$ de boş alt manifold değildir.

${}^S g$ metrğine göre $T(M_n)$ de X ve Y vektör alanlarının ${}^C X$ ve ${}^C Y$ tam liftlerinin iç çarpımı

$$\widetilde{g}_{CB} \widetilde{X}^C \widetilde{Y}^B = a_{ji} X^j Y^i + \partial\left(g_{ji} X^j Y^i\right)$$

şeklindedir. Burada $\widetilde{X}^B$ ve $\widetilde{Y}^B$ sırasıyla X ve Y nin yerel bileşenleridir. Böylece aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

3.9.6. Teorem: ${}^S g$ metriği ile birlikte M_n deki bir X vektör alanının, $T(M_n)$ de ${}^C X$ tam liftinin birim vektör olması için gerek ve yeter şart X vektör alanının M_n de birim vektör ve $a_{ji} X^j Y^i = 1$ olmasıdır.

3.9.7. Teorem: ${}^S g$ metriği ile birlikte M_n de X ve Y vektör alanlarının $T(M_n)$ de ${}^C X$ ve ${}^C Y$ tam liftlerinin ortagonel olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen X ve Y vektör alanlarının ortagonel olması ve $a_{ji} X^j Y^i = 0$ olmasıdır.

M_n de herhangi bir K tensör alanı ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$\begin{array}{ll} {}^C\nabla_{{}^V X}\,{}^V K = 0, & {}^C\nabla_{{}^V X}\,{}^C K = {}^V(\nabla_X K), \\ {}^C\nabla_{{}^C X}\,{}^V K = {}^V(\nabla_X K), & {}^C\nabla_{{}^C X}\,{}^C K = {}^C(\nabla_X K) \end{array} \tag{3.77}$$

olur. Burada ${}^C\nabla$, ${}^C g$ ye göre $T(M_n)$ nin Riemannian konneksiyonudur (Yano and Ishahara 1973). (3.77) eşitliklerinden dolayı

$$ {}^C\nabla_{{}^C X}\,{}^V a = {}^V(\nabla_X a), {}^C\nabla_{{}^C X}\,{}^C g = {}^C(\nabla_X g)$$

yazılır. Sonuç olarak $\nabla_X g = 0$ olduğundan herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$ {}^C\nabla_{{}^C X}\left({}^V a + {}^C g\right) = {}^V(\nabla_X a)$$

elde edilir. Böylece $\nabla_X a = 0$ ise o zaman ${}^S g$, g nin ∇ Levi-Civita konneksiyonunun ${}^C\nabla$ tam liftine göre kovaryant olarak sabittir. Diğer yandan ${}^C\nabla$ burulmasızdır. Bundan dolayı şu teoremi elde ederiz.

3.9.8. Teorem: Eğer herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ için $\nabla_X a = 0$ ise o zaman ${}^C g$ metriğinin ve ${}^S g$ metriğinin Levi –Civita konneksiyonu aynıdır (Aras 2005).

X , M_n de bir vektör alanı olsun. $T(M_n)$ de X in ${}^V X$ dikey lifti, ${}^C X$ tam lifti ve ${}^H X$ yatay lifti indirgenmiş koordinatlara göre sırasıyla

$$\left({}^V X^A\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \left({}^C X^A\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \left({}^H X^A\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir.

$\widetilde{Y}, \widetilde{X} \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere $\widetilde{w}(\widetilde{Y}) = \widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ ile tanımlı $\widetilde{w}$, 1-form $\widetilde{X}$ ile birlikte kovektör alan adını alır ve $\widetilde{X}^*$ ile gösterilir. Eğer $\widetilde{X}$ in yerel bileşenleri $\widetilde{X}^A$ ise $\widetilde{X}^*$ kovektör alanı

$$\widetilde{X}_C = \widetilde{g}_{CB}\widetilde{X}^B$$

şeklinde yerel bileşenlere sahiptir.

w, M_n de w_i bileşenli bir 1-form olsun. w nın $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre dikey, tam ve yatay liftleri sırasıyla

$$\left({}^{V}w_B\right)=\left(w_i,0\right),\left({}^{C}w_B\right)=\left(\partial w_i,w_i\right),\left({}^{H}w_B\right)=\left(-\Gamma_i^h w_h,w_i\right) \tag{3.79}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishahara 1973).

M_n de X^h bileşenleri sahip bir X vektör alanının dikey, tam ve yatay liftleri (3.78), (3.75) ve (3.76) ile verilmiştir. Buna göre (3.74) eşitliğinden indirgenmiş koordinatlara ${}^{V}X$, ${}^{C}X$ ve ${}^{H}X$ kovektör alanlarının bileşenlerini bulalım;

$${}^{V}X_C={}^{s}\widetilde{g}_{CB}\,{}^{V}X^B$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}{}^{V}X_i&={}^{S}g_{ij}\,{}^{V}X^j+{}^{S}g_{i\bar{j}}\,{}^{V}X^{\bar{j}}\\&=g_{ij}X^j\\&=X_i\end{aligned}$$

ve

$${}^{V}X_{\bar{i}}={}^{S}g_{\bar{i}j}\,{}^{V}X^j+{}^{S}g_{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{V}X^{\bar{j}}=0$$

elde edilir. Buna göre

$${}^{V}\left(X^*\right)=\left(X_i,0\right) \tag{3.80}$$

şeklindedir. Aynı şekilde hareketle

$$\begin{aligned}{}^{C}X_i&={}^{S}g_{ij}\,{}^{C}X^j+{}^{S}g_{i\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{j}}\\&=\left(a_{ij}+\partial g_{ij}\right)X^j+g_{ij}\partial X^j\\&=a_{ij}X^j+\partial\left(g_{ij}X^j\right)\\&=a_{ij}X^j+\partial X_i\end{aligned}$$

ve

$${}^{C}X_{\bar{i}}={}^{S}g_{\bar{i}j}\,{}^{C}X^j+{}^{S}g_{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{C}X^{\bar{j}}$$

$$= g_{ij} X^j$$
$$= X_i$$

olup buradan

$$^C\left(X^*\right) = \left(a_{ij} X^j + \partial X_i, X_i\right) \tag{3.81}$$

elde edilir. Son olarak

$$^H X_i = {}^S g_{ij} \, {}^H X^j + {}^S g_{i\bar{j}} \, {}^H X^{\bar{j}}$$
$$= \left(a_{ij} + \partial g_{ij}\right) X^j + g_{ij}\left(-\Gamma_s^j X^s\right)$$
$$= a_{ij} X^j + \partial g_{ij} X^j - g_{ij} \Gamma_s^j X^s$$
$$= a_{ij} X^j + \left(\Gamma_i^h g_{hj} + \Gamma_j^h g_{ih}\right) X^j - g_{ij} \Gamma_s^j X^s$$
$$= a_{ij} X^j + g_{hj} X^j \Gamma_i^h + g_{ih} X^j \Gamma_j^h - g_{ij} X^s \Gamma_s^j$$
$$= a_{ij} X^j + g_{hj} X^j \Gamma_i^h + g_{ij} X^h \Gamma_h^j - g_{ij} X^s \Gamma_s^j$$
$$= a_{ij} X^j + \Gamma_i^h X_h$$

ve

$$^H X_{\bar{i}} = {}^S g_{\bar{i}j} \, {}^H X^j + {}^S g_{\bar{i}\bar{j}} \, {}^H X^{\bar{j}}$$
$$= g_{ij} X^j$$
$$= X_j$$

olmak üzere

$$^H\left(X^*\right) = \left(a_{ij} X^j + \Gamma_i^h X_h, X_j\right) \tag{3.82}$$

bulunur. (3.78) ve (3.79) eşitliklerinde şu teoremi elde ederiz.

3.9.9. Teorem: Herhangi bir $X \in T_0^1(M_n)$ için $T(M_n)$de $^S g$ metriğine göre

$$^V\left(X^*\right) = \left({}^V X\right)^*, \quad ^C\left(X^*\right) = \left({}^C X\right)^* + {}^V\left(a(X)\right), \quad ^H\left(X^*\right) = \left({}^H X\right)^* + {}^V\left(a(X)\right)$$

şeklidedir. Burada $a(X)$, $T(M_n)$de $a_{ji} X^j$ bileşenli bir 1-formdur (Aras 2005).

3.9.4. ${}^{S}g = {}^{C}g + {}^{V}a$ metriğinin Riemannian konneksiyonu

M_n, n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $T_Q - Q \in M_n$ noktasında tanjant uzay olmak üzere M_n nin tanjant demeti $T(M_n) = \bigcup_{Q \in M_n} T_Q$ şeklindedir. $\Im_q^p(M_n)$ ile M_n üzerindeki (p,q) tipinde tüm tensör alanlarının kümesini ve $\pi : T(M_n) \to M_n$ ile $T(M_n)$ nin doğal izdüşümünü gösterelim. $U \subset M_n$ olmak üzere $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ komşuluğunda $(x^i, x^{\bar{i}}), i = 1,...n$ ve $x^{\bar{i}} = n+1,...,2n$ şeklinde lokal koordinatlar mevcuttur. Burada x^i, $U \subset M_n$ komşuluğundaki lokal koordinatlar, $x^{\bar{i}}$ ise $x^{\bar{i}} = \upsilon^i \in T_x$ dir. Yani o noktadaki herhangi bir vektördür. x^i koordinatlarının $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ dönüşümü $T(M_n)$ deki $(x^i, x^{\bar{i}})$ koordinatlarının aşağıdaki dönüşümünü meydana getirecektir

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i),$$
$$x^{\bar{i}'} = \upsilon^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\upsilon^i = x^{\bar{i}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Bu dönüşümün Jacobiyen Matrisi

$$A = \left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\bar{i}}} \\ \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{\bar{i}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & 0 \\ \dfrac{x^{\bar{s}}\partial^2 x^{i'}}{\partial x^s \partial x^i} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$f \in \Im_0^0(M_n),$$
$$v \in \Im_0^1(M_n),$$
$$w \in \Im_1^0(M_n)$$

şeklindeki fonksiyon, vektör ve kovektörün dikey liftleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$^{V}f = fo\pi$$

$$^{V}v(\iota w) = {}^{V}(w(v)), \iota(w) = x^{s}w_{s}, w \in \Im_{1}^{0}(M_{n}), w(v) \in \Im_{0}^{0}(M_{n})$$

$$^{V}w = {}^{V}(w_{i})^{V}(dx^{i}), {}^{V}(w_{i}) = w_{i}o\pi, {}^{V}(dx^{i}) = d^{V}(x^{i}) = d(x^{i}o\pi)$$

^{V}f nin $\left(x^{i}, x^{\bar{i}}\right)$ üzerindeki değeri

$$^{V}f\left(x^{i}, x^{\bar{i}}\right) = (fo\pi)\left(x^{i}, x^{\bar{i}}\right) = fo\pi\left(x^{i}, x^{\bar{i}}\right) = fox^{i} = f\left(x^{i}\right)$$

şeklindedir. Yani ^{V}f , $\pi^{-1}(x) = T_{x}$ fibre boyunca yalnız $f\left(x^{i}\right)$ değerini alır. Vektör ve kovektörün dikey liftinin tanımından, bunların $\left(\partial_{i}, \partial_{\bar{i}}\right), \partial_{i} = \dfrac{\partial}{\partial x^{i}}, \partial_{\bar{i}} = \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$ doğal çatıdaki koordinatları

$$^{V}\upsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon^{i} \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

$$^{V}w = \begin{pmatrix} w_{i} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

şeklinde bulunur. (3.83) ve (3.84) den $^{V}\left(\partial_{i}\right) = \partial_{\bar{i}}$ ve $^{V}\left(dx^{i}\right) = dx^{i}$ elde edilir.

$a \in \Im_{2}^{0}\left(M_{n}\right)$ simetrik tensörünü alalım. Bu tensörün dikey lifti aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$^{V}a = {}^{V}\left(a_{ij}dx^{i} \otimes dx^{j}\right) = {}^{V}\left(a_{ij}\right){}^{V}\left(dx^{i}\right) \otimes {}^{V}\left(dx^{j}\right) = a_{ij}dx^{i} \otimes dx^{j}$$

ve ^{V}a nin $(\partial_{i}, \partial_{\bar{i}})$ çatısındaki koordinatları

$$^{V}a = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan görülüyor ki a simetrikse ^{V}a de simetriktir. Eğer $a = g$ Riemannian metrik tensörü olursa

$$^{V}g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formülünden, ^{V}g tanjant demette bir Riemannian metriği tanımlamadığı görülür. Çünkü

$$Det\,^{V}g = 0$$

olur.

Şimdi $H \in \Im_2^1(M_n)$ tensörünün dikey liftini bulalım:

$$
\begin{aligned}
{}^{V}H &= {}^{V}\left(H_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\otimes dx^{i}\otimes dx^{j}\right)\\
&= {}^{V}\left(H_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\otimes dx^{i}\right)\otimes {}^{V}dx^{j}\\
&= {}^{V}\left(H_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\otimes dx^{i}\right)\otimes dx^{j}\\
&= {}^{V}\left(H_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\right)\otimes {}^{V}\left(dx^{i}\right)\otimes dx^{j}\\
&= {}^{V}\left(H_{ij}^{k}\right){}^{V}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k}}\right)\otimes dx^{i}\otimes dx^{j}\\
&= H_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x^{\bar{k}}}\otimes dx^{i}\otimes dx^{j}
\end{aligned}
$$

buradan görülüyor ki ${}^{V}H$ nın sıfırdan farklı koordinatı yalnız ${}^{V}H_{ij}^{\bar{k}} = H_{ij}^{k}$ olur.

$$
\begin{aligned}
&f \in \Im_0^0(M_n),\\
&v \in \Im_0^1(M_n),\\
&w \in \Im_1^0(M_n),
\end{aligned}
$$

şeklindeki fonksiyon, vektör ve kovektörün tam liftleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
&{}^{C}f = \iota(df) = x^{s}\partial_{s} f,\\
&{}^{C}v\,{}^{C}f = {}^{C}(vf),\\
&{}^{C}w\left({}^{C}w\right) = {}^{C}\left(w(v)\right).
\end{aligned}
$$

Buradan bu objelerin $\left(\partial_{i},\partial_{\bar{i}}\right)$ doğal çatıdaki koordinatları aşağıdaki biçimde bulunur:

$$ {}^{C}v = \begin{pmatrix} v^{i} \\ x^{s}\partial_{s}v^{i} \end{pmatrix}, \qquad {}^{C}w = \left(x^{s}\partial_{s}w_{i}, w_{i}\right). $$

$a \in \Im_{2}^{0}\left(M_{n}\right)$ simetrik tensörünü alalım. Bu tensörün tam lifti aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$ \begin{aligned} {}^{C}a &= {}^{C}\left(a_{ij}dx^{i} \otimes dx^{j}\right) = {}^{C}\left(a_{ij}dx^{i}\right) \otimes {}^{V}\left(dx^{j}\right) + {}^{V}\left(a_{ij}dx^{i}\right) \otimes {}^{C}\left(dx^{j}\right) \\ &= {}^{C}\left(a_{ij}\right)^{V}\left(dx^{i}\right) \otimes {}^{V}\left(dx^{j}\right) + {}^{V}\left(a_{ij}\right)^{C}\left(dx^{i}\right) \otimes {}^{V}\left(dx^{j}\right) + {}^{V}\left(a_{ij}\right)^{V}\left(dx^{i}\right) \otimes {}^{C}\left(dx^{j}\right) \\ &= \left(x^{s}\partial_{s}a_{ij}\right)dx^{i} \otimes dx^{j} + a_{ij}dx^{\bar{i}} \otimes dx^{j} + a_{ij}dx^{i} \otimes dx^{\bar{j}}. \end{aligned} $$

Burada ${}^{C}\left(dx^{i}\right) = dx^{\bar{i}}$ şeklindedir. Bu son formülden ${}^{C}a$ nin doğal çatıdaki koordinatları

$$ {}^{C}a = \begin{pmatrix} x^{s}\partial_{s}a_{ij} & a_{ij} \\ a_{ij} & 0 \end{pmatrix} $$

şeklindedir. Bu formülden görülüyor ki eğer a_{ij} simetrikse ${}^{C}a$ de simetriktir. Özel durumda eğer $a = g$ ise (g Riemannian metrik tensörüdür) ${}^{C}g$ de Riemannian metrik tensörü olur. Çünkü $Det\,{}^{C}g = \left(Detg\right)^{2} \neq 0$ şeklindedir.

Şimdi aşağıdaki metriklere bakalım:

$$ {}^{S}g' = {}^{C}g + {}^{V}g = \begin{pmatrix} x^{s}\partial_{s}g_{ij} + g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{S}g = {}^{C}g + {}^{V}a = \begin{pmatrix} x^{s}\partial_{s}g_{ij} + a_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} $$

Birinci metrik (Yano and Ishıhara1973) çalışmasında, 2. metrik yani ${}^{S}g = {}^{C}g + {}^{V}a$ ise (Talantova and Shirokov 1975) çalışmasında incelenmiştir.

$$ {}^{S}g = \left({}^{S}g_{IJ}\right) = \begin{pmatrix} x^{s}\partial_{s}g_{ij} + a_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.85} $$

Riemannian metrik tensörünün ${}^{S}\Gamma_{IJ}^{K}$ Riemannian konneksiyonunu bulalım. Burada

$$ {}^{S}\Gamma_{IJ}^{K} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{KS}\left(\partial_I^S g_{SJ} + \partial_J^S g_{IS} - \partial_S^S g_{IJ}\right), $$

olup $\widetilde{g}^{KS}$, (3.85) tensörünün ters tensörüdür yani

$$ {}^{S}g_{IM}\widetilde{g}^{MJ} = \delta_I^J = \begin{cases} 0, & I \neq J \\ 1 & I = J \end{cases} \tag{3.86} $$

şeklindedir. (3.85) ve (3.86) eşitliklerini kullanarak $\widetilde{g}$ tensörünün koordinatlarını bulalım:

1) $I = i, J = j$ için

$$ \begin{aligned} &{}^{S}g_{im}\tilde{g}^{mj} + {}^{S}g_{i\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \boldsymbol{\delta}_i^j \\ &\left(x^s\partial_s g_{im} + a_{im}\right)\tilde{g}^{mj} + g_{im}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \boldsymbol{\delta}_i^j \end{aligned} \tag{3.87} $$

2) $I = \bar{i}, J = j$ için

$$ \begin{aligned} &{}^{S}g_{\bar{i}m}\tilde{g}^{mj} + {}^{S}\tilde{g}_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}j} = \boldsymbol{\delta}_{\bar{i}}^j = 0 \\ &g_{im}\tilde{g}^{mj} = 0 \Rightarrow \tilde{g}^{mj} = 0 \end{aligned} \tag{3.88} $$

3) $I = i, J = \bar{j}$ için

$$ \begin{aligned} &{}^{S}g_{im}\widetilde{g}^{m\bar{j}} + {}^{S}g_{i\bar{m}}\widetilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = \delta_i^{\bar{j}} = 0 \\ &\left(x^s\partial_s g_{im} + a_{im}\right)\widetilde{g}^{m\bar{j}} + g_{im}\widetilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = 0 \end{aligned} \tag{3.89} $$

4) $I = \bar{i}, J = \bar{j}$ için

$$ \begin{aligned} &{}^{S}g_{\bar{i}m}\tilde{g}^{m\bar{j}} + {}^{S}\tilde{g}_{\bar{i}\bar{m}}\tilde{g}^{\bar{m}\bar{j}} = \boldsymbol{\delta}_{\bar{i}}^{\bar{j}} = \boldsymbol{\delta}_i^j \\ &g_{im}\tilde{g}^{m\bar{j}} = \boldsymbol{\delta}_i^j \end{aligned} \tag{3.90} $$

olur. (3.90) eşitliğinden

$$ \delta_m^s\widetilde{g}^{m\bar{j}} = \delta_i^j g^{is} \Rightarrow \widetilde{g}^{s\bar{j}} = g^{js} = g^{sj} \tag{3.91} $$

elde edilir. (3.87) ve (3.88) den $g_{im}\widetilde{g}^{\bar{m}j} = \delta_i^j$ elde edilir. Buradan da $\widetilde{g}^{\bar{m}j} = g^{mj}$ bulunur. Buna göre (3.89) eşitliğinde (3.91) eşitliği kullanılırsa

$$\left(x^s\partial_s g_{im} + a_{im}\right)g^{mj} + g_{im}\widetilde{g}^{\overline{m}\overline{j}} = 0$$

olur, eşitliğin her iki tarafını g^{it} ile çarpalım

$$\left(g^{it}x^s\partial_s g_{im} + g^{it}a_{im}\right)g^{mj} + \delta^t_m\widetilde{g}^{\overline{m}\overline{j}} = 0$$

$$\begin{aligned}\widetilde{g}^{\overline{t}\overline{j}} &= -\left(g^{it}x^s\partial_s g_{im} + g^{it}a_{im}\right)g^{mj} \\ &= g^{mj}g_{im}x^s\partial_s g^{it} - a^{tj}_{..} \\ &= x^s\partial_s g^{jt} - a^{tj}_{..}\end{aligned}$$

olur. Böylece $\widetilde{g} = \widetilde{g}^{IJ}$ matrisinin koordinatları aşağıdaki şekildedir;

$$\widetilde{g} = \widetilde{g}^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & x^s\partial_s g^{ij} - a^{ij}_{..} \end{pmatrix}, g^{it}a_{is}g^{sj} = a^{tj}_{..} \ . \tag{3.92}$$

(3.85) ve (3.92) eşitliklerini ${}^S\Gamma^K_{IJ}$ formülünde yerine yazalım:

1) $K = k, \quad I = i, \quad J = j$ için

$$\begin{aligned}{}^S\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{kS}\left(\partial_i{}^S g_{Sj} + \partial_j{}^S g_{iS} - \partial_S{}^S g_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{ks}\left(\partial_i{}^S g_{sj} + \partial_j{}^S g_{is} - \partial_s{}^S g_{ij}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{k\overline{s}}\left(\partial_i{}^S g_{\overline{s}j} + \partial_j{}^S g_{i\overline{s}} - \partial_{\overline{s}}{}^S g_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{ks}\left(\partial_i{}^S g_{sj} + \partial_j{}^S g_{is} - \partial_{\overline{s}}\left(x^s\partial_s g_{ij} + a_{ij}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{ks}\left(\partial_i{}^S g_{sj} + \partial_j{}^S g_{is} - \partial_s g_{ij}\right) \\ &= \Gamma^k_{ij}\end{aligned}$$

olur. Benzer yolla

2) ${}^s\Gamma^{\overline{k}}_{\overline{i}\overline{j}} = \Gamma^k_{ij}$,

3) $\quad {}^{s}\Gamma_{\overline{ij}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}$,

4) $\quad {}^{s}\Gamma_{\overline{ij}}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\overline{ij}}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\overline{ij}}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\overline{ij}}^{\bar{k}} = 0$,

5) $$ {}^{S}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\bar{k}S}\left(\partial_i\, {}^{S}g_{Sj} + \partial_j\, {}^{S}g_{iS} - \partial_S\, {}^{S}g_{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\bar{k}s}\left(\partial_i\, {}^{S}g_{sj} + \partial_j\, {}^{S}g_{is} - \partial_s\, {}^{S}g_{ij}\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\bar{k}\bar{s}}\left(\partial_i\, {}^{S}g_{\bar{s}j} + \partial_j\, {}^{S}g_{i\bar{s}} - \partial_{\bar{s}}\, {}^{S}g_{ij}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i\left(x^t\partial_t g_{sj} + a_{sj}\right) + \partial_j\left(x^t\partial_t g_{is} + a_{is}\right) - \partial_s\left(x^t\partial_t g_{ij} + a_{ij}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x^t\partial_t g^{ks} - a_{\cdot\cdot}^{ks}\right)\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_{\bar{s}}\left(x^t\partial_t g_{ij} + a_{ij}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}g^{ks}x^t\partial_t\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right) + \frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i a_{sj} + \partial_j a_{is} - \partial_s a_{ij}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}x^t\partial_t g^{ks}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right) - \frac{1}{2}a_{\cdot\cdot}^{ks}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right)$$

$$= x^t\partial_t\Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i a_{sj} + \partial_j a_{is} - \partial_s a_{ij}\right) - \frac{1}{2}a_{\cdot\cdot}^{ks}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right)$$

$$= x^t\partial_t\Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i a_{sj} + \partial_j a_{is} - \partial_s a_{ij}\right) - \frac{1}{2}g^{km}a_{ml}g^{ls}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right)$$

$$= x^t\partial_t\Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i a_{sj} + \partial_j a_{is} - \partial_s a_{ij}\right) - g^{km}a_{ml}\Gamma_{ij}^{l}$$

$$= x^t\partial_t\Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i a_{sj} + \partial_j a_{is} - \partial_s a_{ij}\right) - g^{ks}a_{sl}\Gamma_{ij}^{l} \mp \frac{1}{2}g^{ks}\,\Gamma_{js}^{l}a_{li} \mp \frac{1}{2}g^{ks}\,\Gamma_{is}^{l}a_{lj}$$

$$= x^t\partial_t\Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2}g^{ks}\left(\nabla_i a_{sj} + \nabla_j a_{is} - \nabla_s a_{ij}\right)$$

elde edilir. Burada $\nabla_k a_{ij} = \partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^{l}a_{lj} - \Gamma_{kj}^{l}a_{il}$ kullanılmıştır. Buradan

$$ {}^{S}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = x^t\partial_t\Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2}g^{ks}\left(\nabla_i a_{sj} + \nabla_j a_{is} - \nabla_s a_{ij}\right) = x^t\partial_t\Gamma_{ij}^{k} + H_{ij}^{k}$$

yazılır ve $H_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{ks}\left(\nabla_i a_{sj} + \nabla_j a_{is} - \nabla_s a_{ij}\right)$, (1,2) tipli tensördür (Vishnevsky *et al.* 1985).

3.9.11. Teorem: Eğer $\nabla a = 0$ ise, o zaman ${}^{C}\Gamma = {}^{S}\Gamma$ dir. Burada ${}^{C}\Gamma$, ${}^{C}g$ nin Riemannian konneksiyonudur (Yano and Ishihara1973).

3.9.12. Teorem: Eğer $a_{ij} = g_{ij}$ ise, o zaman ${}^{C}\Gamma = {}^{S}\Gamma$ olur.

${}^{S}\Gamma$ nın yukarıda bulduğumuz formüllerinden görülüyor ki, aşağıdaki teorem doğrudur.

3.9.13. Teorem : ${}^{S}\Gamma = {}^{C}\Gamma + {}^{V}H$ dir. Burada ${}^{V}H, H \in T_2^1\left(M_n\right)$ tensörünün vertical liftidir (Talantova and Shirokov 1975).

3.10. Lie Türevi

M_n diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_n üzerindeki (U,φ) lokal koordinat sisteminde X, Y vektör alanları

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i ,$$

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} = Y^i \partial_i$$

şeklindedir. Burada $X^i = X^i(x^i)$ ler U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarının fonksiyonlarıdır. X^i lere X vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir. M_n üzerindeki (U,φ) koordinat sisteminde $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonu için

$$X(f) = X^i \partial_i f, \quad Y(f) = Y^i \partial_i f$$
$$XY(f) = X(Y^i \partial_i f) = X^i(\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_{ji}^2 f)$$
$$YX(f) = Y(X^i \partial_i f) = Y^j(\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f)$$

bulunur. Buradan da

$$XY(f) - YX(f) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j f$$

yazılır. Böylece biz

$$XY - YX = [X, Y]$$

biçiminde tanımlanan yeni bir vektör alanı tanımlamış olduk. Bu vektör alanının ∂_i doğal çatısı cinsinden ifadesi

$$[X,Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j \tag{3.93}$$

biçiminde olur.

(3.93) eşitliği ile tanımlanan $[X,Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$, $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları alınırsa, (3.93) formülünden

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür. (3.93) formülünün yardımıyla Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir (Salimov ve Mağden 2008).

1. $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$,
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$,
3. $[X,Y] = -[Y,X]$,
4. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

3.10.1. Tanım: M_n manifoldunda ∇ afin konneksiyonu ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilsin. Her $Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için X vektör alanının ∇ afin konneksiyonuna göre Lie türevi,

$$(L_X \nabla)(Y,Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y (L_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z = [L_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tarif edilmektedir.

3.11. İnfinitesimal Afin Dönüşümler

3.11.1. Tanım: M_n, *n*- boyutlu bir manifold $X \in \Im_0^1(M_n)$ olsun. Eğer $L_X \nabla = 0$ ise X vektör alanına ∇ afin konneksiyonuna göre infinitesimal afin dönüşüm denir ve koordinatlarla

$$\partial_\gamma \partial_\beta X^\alpha + X^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda \partial_\lambda X^\alpha + \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \partial_\gamma X^\lambda + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha \partial_\beta X^\lambda = 0$$

şekilde ifade edilir. Burada $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n$ dir.

3.11.2. Tanım: M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$(L_V \nabla)(X, Y) = \Omega(X)Y + \Omega(Y)X$$

şartını sağlayan M_n üzerinde bir Ω 1-formu varsa V vectör alanına M_n üzerinde infinitesimal projective dönüşüm denir. Burada Ω ya V nin associated 1-formu denir. Özel olarak eğer Ω=0 ise V vectör alanına M_n üzerinde infinitesimal afin dönüşüm denir.

3.11.3. Tanım: (M_n, J), ∇ afin konneksiyonu ile birlikte bir almost kompleks manifold olsun. Eğer her $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$(L_V \nabla)(X, Y) = \Omega(X)Y + \Omega(Y)X - \Omega(JX)JY - \Omega(JY)JX$$

şartını sağlayan M_n üzerinde bir Ω 1-formu varsa V vectör alanına M_n üzerinde infinitesimal projective dönüşüm denir. Burada Ω ya V nin associated 1-formu denir. Özel olarak eğer Ω=0 ise V vectör alanına M_n üzerinde infinitesimal afin dönüşüm denir.

3.12. İnfinitesimal İzometri (Killing Vektör Alanları)

3.12.1. Tanım: M_n, g metriğine sahip Riemannian manifold ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ olsun. Eğer $L_X g = 0$ ise X vektör alanına infinitesimal izometri (Killing Vektör Alanı) denir. g_{ij} ler g metriğinin ve X^α lar da X vektör alanının bileşenleri olmak üzere koordinatlarla

$$L_X g_{ij} = X^\alpha \nabla_\alpha g_{ij} + g_{\alpha j} \nabla_i X^\alpha + g_{i\alpha} \nabla_j X^\alpha = \nabla_j X_i + \nabla_i X_j$$

şartını sağlayan X vektör alanına infinitesimal izometri denir (Yano 1957).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Synectic Liftine Göre Dikey İnfinitesimal Afin Dönüşümler

$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ lar ∇ konneksiyonunun konneksiyon katsayıları olmak üzere Lie türevinin tanımından, X vektör alanının n-boyutlu M_n manifoldunda bir infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{\gamma}\partial_{\beta}X^{\alpha} + X^{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\gamma\beta}\partial_{\lambda}X^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\partial_{\gamma}X^{\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}\partial_{\beta}X^{\lambda} = 0\,, \quad \alpha,\beta,\ldots = 1,\ldots,m \tag{4.1}$$

olmasıdır.

M_n de g metriği ile tanımlanan Riemannian konneksiyonu ∇ ve konneksiyon katsayıları ise Γ^k_{ij} olsun. Ayrıca $T(M_n)$ de $\tilde{X} = \tilde{X}^i\partial_i + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$ vektör alanı verilmiş olsun. Burada $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_{\bar{i}} = \dfrac{\partial}{\partial y^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$, $\bar{i} = n+1,\ldots,2n$, şeklinde tarif edilir.

$${}^{s}\Gamma^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij} \;,\quad {}^{s}\Gamma^{k}_{i\bar{j}} = {}^{s}\Gamma^{k}_{\bar{i}j} = {}^{s}\Gamma^{k}_{\bar{i}\bar{j}} = {}^{s}\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0 \;,\quad {}^{s}\Gamma^{\bar{k}}_{ij} = \partial^{s} y^{s}\Gamma^{k}_{ij} + H^{k}_{ij}\,,\quad {}^{s}\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}j} = {}^{s}\Gamma^{\bar{k}}_{i\bar{j}} = \Gamma^{k}_{ij}$$

eşitlikleri ve (4.1) denklemi dikkate alınırsa, $\tilde{X} = \tilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha} \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ vektör alanının ${}^{s}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki (4.2)- (4.9) şartlarını sağlamasıdır:

$$\partial_j\partial_i\tilde{X}^h + \tilde{X}^k\partial_k\Gamma^h_{ji} - (\Gamma^k_{ji}\partial_k\tilde{X}^h + \partial\Gamma^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h) - H^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h + \Gamma^h_{ki}\partial_j\tilde{X}^k + \Gamma^h_{jk}\partial_i\tilde{X}^k = 0\,, \tag{4.2}$$

$$\partial_j\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^h - \Gamma^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h + \Gamma^h_{jk}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^k = 0\,, \tag{4.3}$$

$$\partial_{\bar{j}}\partial_i\tilde{X}^h - \Gamma^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h + \Gamma^h_{ki}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^k = 0\,, \tag{4.4}$$

$$\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^h = 0\;, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}&\partial_j\partial_i\tilde{X}^{\bar{h}} + (\tilde{X}^k\partial_k\partial\Gamma^h_{ji} + \tilde{X}^{\bar{k}}\partial_k\Gamma^h_{ji}) - (\Gamma^k_{ji}\partial_k\tilde{X}^{\bar{h}} + \partial\Gamma^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{\bar{h}}) + (\partial\Gamma^h_{ki}\partial_j\tilde{X}^k + \Gamma^h_{ki}\partial_j\tilde{X}^{\bar{k}})\\ &\quad + (\partial\Gamma^h_{jk}\partial_i\tilde{X}^k + \Gamma^h_{jk}\partial_i\tilde{X}^{\bar{k}}) + \tilde{X}^k\partial_k H^h_{ji} - H^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{\bar{h}} + H^h_{jk}\partial_i\tilde{X}^k + H^h_{ki}\partial_j\tilde{X}^k = 0\end{aligned}\,, \tag{4.6}$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + (\partial \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{k}}) + H_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0, \quad (4.7)$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_i \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + (\partial \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^{\bar{k}}) + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + H_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k = 0, \quad (4.8)$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} - \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0. \quad (4.9)$$

$\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olsun. Bu durumda indirgenmiş koordinatlara göre $\tilde{X}$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ dır. Böylece (4.9) denkleminden $\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}}$=0 bulunur. Buradan

$$\tilde{X}^{\bar{h}} = C_i^h y^i + D^h \quad (4.10)$$

yazılır. Burada C_i^h ve D^h bileşenleri sadece $\tilde{X}^h$ değişkenlerine bağlıdır. $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir vektör alanı olduğundan $C = C_i^h \partial_h \otimes dx^i$ ve $D = D^h \partial_h$, sırasıyla, $\Im_1^1(M_n)$ ve $\Im_0^1(M_n)$ nin elemanları olarak tanımlanır.

4.1.1. Teorem: Eğer $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre bir dikey infinitesimal afin dönüşüm ise, bu durumda

a) $X, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $(C \circ H)(X,Y) = C(H(X,Y))$ için $L_D \nabla = C \circ H$ dır.

b) C, ∇ ya göre paraleldir, yani $\nabla C = 0$ dır.

c) ∇ nın R eğrilik tensörü C ye göre pürdür ve her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$CR(X,Y)Z = R(CX,Y)Z = R(X,CY)Z = R(X,Y)Z$$

şeklindedir.

Tersine, eğer C ve D (a) , (b) ve (c) şartlarını sağlıyor ise

$$\tilde{X} = (C_i^h y^i + D^h) \frac{\partial}{\partial y^h} = \gamma C + {}^v D$$

vektör alanı, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür, burada $\gamma C = \begin{pmatrix} 0 \\ y^i C_i^h \end{pmatrix}$ bir dikey vektör alanıdır.

İspat: (a) (4.10) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.6) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_j \partial_i C_s^h + C_s^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k C_s^h - \partial_s \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j C_s^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i C_s^k = 0 \qquad (4.11)$$

ve koordinatlarla ifadesi

$$\partial_j \partial_i D^h + D^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k D^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j D^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i D^k - H_{ji}^k C_k^h = 0 \qquad (4.12)$$

şeklinde olan $L_D \nabla = C \circ H$ eşitliği bulunur.

(b) (4.10) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.8) denkleminde kullanılmasıyla

$$\partial_i C_j^h - \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{ki}^h C_j^k = 0 \qquad (4.13)$$

elde edilir.

(4.7) denkleminde $\tilde{X}^h = 0$ alınması ve (4.10) denkleminin kullanılmasıyla,

$$\partial_j C_i^h - \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{jk}^h C_i^k = 0 \qquad (4.14)$$

bulunur ki, bu da C nin M_n de paralel olması demektir.

(4.13) ve (4.14) denklemlerindeki kısmi türevleri (4.11) denkleminde yerine yazarsak, C_j^h nin tüm kısmi türevleri yok olur. Böylece herhangi $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için $C_l^h R_{kji}^l = R_{kli}^h C_j^l$ veya $CR(X,Y)Z = R(X,CY)Z$ elde edilir. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ eşitliği dikkate alınırsa

$$CR(X,Y)Z = -CR(Y,X)Z = -R(Y,CX)Z = R(CX,Y)Z$$

eşitliği elde edilir. $\nabla C = 0$ ve ∇ burulmasız olduğundan Ricci formülüne göre

$$CR(X,Y)Z = R(X,Y)CZ \qquad (4.15)$$

yazılır. Böylece (c) şartı sağlanır.

Tersine, eğer (a), (b) ve (c) şartları mevcut ise, $\tilde{X}$ in bir infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür. Böylece Teorem 4.1.1 ispatlanmış olur.

4.2. Tanjant Demette ${}^{s}\nabla$ Konneksiyonuna Göre Fibre-Koruyan İnfinitesimal Afin Dönüşümler

$T(M_n)$ nin her bir fibresini yine bir fibreye dönüştüren dönüşüme fibre-koruyan dönüşüm denir. Ayrıca, $T(M_n)$ deki bir infinitesimal afin dönüşüm fibre-koruyan dönüşümlerin bir lokal bir parametreli grubunu üretiyorsa, yine bu dönüşüme fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm denir.

$\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\tilde{X}$ infinitesimal dönüşümünün fibre-koruyan olması için gerek ve yeter şart $\tilde{X}^h (h = 1, 2, ..., n)$ bileşenlerinin sadece $T(M_n)$ deki (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre $x^1, ..., x^n$ değişkenlerine bağlı olmasıdır.

$$\begin{cases} x^{h'} = x^h + \tilde{X}^h (x^1, ..., x^h) \Delta t \\ x^{\bar{h}'} = x^{\bar{h}} + \tilde{X}^{\bar{h}} (x^1, ..., x^h, x^{h+1}, ..., x^{2h}) \Delta t \end{cases} \tag{4.16}$$

ifadesinden görülür ki, $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\tilde{X}$ fibre-koruyan infinitesimal dönüşüm M_n baz uzayında $\tilde{X}^h$ bileşenli bir X infinitesimal dönüşüm indirger. Ayrıca $\partial \Gamma^k_{ji} \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h$=0 ve $H^k_{ji} \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h$ =0 olduğundan ve (4.2) den aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.2.1. Teorem: Eğer $\tilde{X}$, ${}^{s}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de fibre koruyan infinitesimal afin dönüşümü ise $\tilde{X}$ den M_n üzerine indirgenen X infinitesimal dönüşümü de ∇ konneksiyonuna göre afin dönüşümdür.

4.2.2. Teorem: ∇, M_n de bir Riemannian konneksiyonu olmak üzere her $X \in \Im^1_0(M_n)$ için $L_{{}^{c}X} {}^{s}\nabla = {}^{c}(L_X \nabla) + {}^{v}(L_X H)$ *dir.*

İspat: Her $Y, Z \in \Im^1_0(M_n)$ için,

$$(L_{{}^{c}X} {}^{s}\nabla)({}^{c}Y, {}^{c}Z) = L_{{}^{c}X} ({}^{s}\nabla_{{}^{c}Y} {}^{c}Z) - {}^{s}\nabla_{{}^{c}Y} (L_{{}^{c}X} {}^{c}Z) - {}^{s}\nabla_{[{}^{c}X, {}^{c}Y]} {}^{c}Z$$

$$= L_{{}^cX}({}^c\nabla_{{}^cY}{}^cZ + {}^vH({}^cY, {}^cZ)) - {}^s\nabla_{{}^cY}{}^c[X,Z] - {}^s\nabla_{{}^c[X,Y]}{}^cZ$$

$$= L_{{}^cX}{}^c\nabla_{{}^cY}{}^cZ + L_{{}^cX}{}^vH({}^cY, {}^cZ) - {}^c\nabla_{{}^cY}{}^c[X,Z]$$

$$- {}^vH({}^cY, {}^c[X,Z]) - {}^c\nabla_{{}^c[X,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^c[X,Y], {}^cZ)$$

$$= {}^c(L_X\nabla)({}^cY, {}^cZ) + L_{{}^cX}{}^v(H(Y,Z))$$

$$= {}^v(L_X H(Y,Z)) - {}^v(H(Y,[X,Z])) - {}^v(H([X,Y],Z))$$

$$= {}^c(L_X\nabla)({}^cY, {}^cZ) + {}^v((L_X H)(Y,Z))$$

$$= {}^c(L_X\nabla)({}^cY, {}^cZ) + {}^v(L_X H)({}^cY, {}^cZ)$$

$$= ({}^c(L_X\nabla) + {}^v(L_X H))({}^cY, {}^cZ).$$

$\tilde{X}$ ve X, Teorem 4.2.1 de verildiği gibi olsun. Teorem 4.2.2 den görürüz ki, eğer $L_X H = 0$ ise ${}^cX$, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür. ${}^cX$ nin bileşenleri $\begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$ olduğundan $\tilde{X} - {}^cX$ nin, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.2.3. Teorem: Eğer $\tilde{X}$, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm ve $L_X H = 0$ ise bu durumda $\tilde{X} = {}^cX + {}^vD + \gamma C$ Teorem 4.1.1 deki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlar. Burada D ve C, sırasıyla, (1,0) ve (1,1) tipli tensörlerdir.

${}^sX$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ nin synectic lifti (Talantova and Shirokov, 1975) ve a, M_n de herhangi bir vektör alanı olmak üzere ${}^sX = {}^cX + {}^va$ olsun. Bu durumda

$$(L_{{}^sX}{}^s\nabla)({}^cY, {}^cZ) = L_{{}^sX}({}^s\nabla_{{}^cY}{}^cZ) - {}^s\nabla_{{}^cY}(L_{{}^sX}{}^cZ) - {}^s\nabla_{[{}^sX, {}^cY]}{}^cZ$$

$$= L_{{}^sX}({}^c\nabla_{{}^cY}{}^cZ + {}^vH({}^cY,{}^cZ)) - {}^s\nabla_{{}^cY}[{}^sX,{}^cZ] - {}^s\nabla_{[{}^sX,{}^cY]}{}^cZ$$

$$= L_{{}^sX}({}^c\nabla_{{}^cY}{}^cZ) + L_{{}^sX}({}^vH({}^cY,{}^cZ)) - {}^s\nabla_{{}^cY}([{}^cX,{}^cZ]+[{}^va,{}^cZ]) - {}^s\nabla_{[{}^cX,{}^cY]+[{}^va,{}^cY]}{}^cZ$$

$$= L_{{}^sX}{}^c(\nabla_Y Z) + L_{{}^sX}{}^v(H(Y,Z)) - {}^s\nabla_{{}^cY}{}^c[X,Z] - {}^s\nabla_{{}^cY}{}^v[a,Z] - {}^s\nabla_{{}^c[X,Y]}{}^cZ - {}^s\nabla_{{}^v[a,Y]}{}^cZ$$

$$=[{}^cX+{}^va,{}^c(\nabla_YZ)]+[{}^cX+{}^va,{}^v(H(Y,Z))] - {}^c\nabla_{{}^cY}{}^c[X,Z] - {}^vH({}^cY,{}^c[X,Z])$$

$$-{}^c\nabla_{{}^cY}{}^v[a,Z] - {}^vH({}^cY,{}^v[a,Z]) - {}^c\nabla_{{}^c[X,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^c[X,Y],{}^cZ) - {}^c\nabla_{{}^v[a,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^v[a,Y],{}^cZ)$$

$$= {}^c[X,(\nabla_YZ)] + {}^v[X,H(Y,Z)] - {}^c(\nabla_Y[X,Z]) - {}^v(H(Y,[X,Z]))$$

$$-{}^c(\nabla_{[X,Y]}Z) - {}^v(H([X,Y],Z)) + [{}^va,{}^c(\nabla_YZ)] + [{}^va,{}^v(H(Y,Z))]$$

$$-{}^c\nabla_{{}^cY}{}^v[a,Z] - {}^vH({}^cY,{}^v[a,Z]) - {}^c\nabla_{{}^v[a,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^v[a,Y],{}^cZ)$$

$$= {}^c[X,(\nabla_YZ)] + {}^v[X,H(Y,Z)] - {}^c(\nabla_Y[X,Z]) - {}^v(H(Y,[X,Z]))$$

$$-{}^c(\nabla_{[X,Y]}Z) - {}^v(H([X,Y],Z)) + {}^v[a,\nabla_YZ] - {}^v(\nabla_Y[a,Z]) - {}^v(\nabla_{[a,Y]}Z)$$

$$= {}^c(L_X\nabla_YZ - \nabla_YL_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z) + {}^c((L_XH)(Y,Z)) + {}^v(L_a\nabla_YZ - \nabla_YL_aZ - \nabla_{[a,Y]}Z)$$

$$= {}^c(L_X\nabla)({}^cY,{}^cZ) + {}^v(L_XH)({}^cY,{}^cZ) + {}^v(L_a\nabla)({}^cY,{}^cZ)$$

$$=({}^c(L_X\nabla)+{}^v(L_XH)+{}^v(L_a\nabla))({}^cY,{}^cZ)$$

olur. Buradan

$$L_{{}^sX}{}^s\nabla = {}^c(L_X\nabla) + {}^v(L_XH) + {}^v(L_a\nabla) \tag{4.17}$$

eşitliği yazılır. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

4.2.4. Teorem : ∇ konneksiyonuna göre bir infinitesimal afin dönüşüm a olsun. Eğer ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir fibre koruyan infinitesimal afin dönüşüm $\tilde{X}$ ve $L_XH=0$ ise bu durumda $\tilde{X} = {}^sX + {}^vD + \gamma C = {}^cX + {}^va + {}^vD + \gamma C$ dir. Burada X ve D, ∇ konneksiyonuna göre M_n de infinitesimal afin dönüşümler ve C, Teorem 4.1.1 deki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlayan (1,1) tipli bir parallel tensör alanıdır.

4.3. ${}^{s}g$ Metriği ile Tanımlanan İnfinitesimal İzometriler (Killing Vektör Alanları)

g metriğine sahip bir M_n Riemannian manifoldunda bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı için eğer $L_X g = 0$ ise bu vektör alanına infinitesimal izometri veya Killing vektör alanı denir (Mayers and Steenrod 1939). X in bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart

$$L_X g_{ij} = X^{\alpha}\nabla_{\alpha} g_{ij} + g_{\alpha j}\nabla_i X^{\alpha} + g_{i\alpha}\nabla_j X^{\alpha} = \nabla_j X_i + \nabla_i X_j$$

olmasıdır. Burada g metriği ile tanımlanan Riemannian konneksiyonu ∇, X in bileşenleri X^{α} ve g nin bileşenleri g_{ij} dir.

$\tilde{X}$ vektör alanı $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $(\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda ${}^{s}\nabla\tilde{X}$ in kovaryant türevi, indirgenmiş koordinatlara göre,

$$ {}^{s}\nabla_I \tilde{X}^J = \partial_I X^J + {}^{s}\Gamma_{IM}^{J}\tilde{X}^M \tag{4.18}$$

bileşenlerine sahiptir, burada ${}^{s}\Gamma_{IM}^{J}$ ler ${}^{s}\Gamma_{IJ}^{K} = {}^{c}\Gamma_{IJ}^{K} + {}^{v}H_{IJ}^{K}$ şeklindedir.

$\Gamma_i^h x^i = y^s \Gamma_{si}^h x^i$ olmak üzere $T\left(M_n\right)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanının ${}^{V}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ dikey lifti, ${}^{C}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ tam lifti ve ${}^{H}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ yatay liftinin bileşenleri, sırasıyla,

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ x^h \end{pmatrix}, \qquad {}^{C}X = \begin{pmatrix} x^h \\ \partial x^h \end{pmatrix}, \qquad {}^{H}X = \begin{pmatrix} x^h \\ -\Gamma_i^h x^i \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

şeklindedir.

Şimdi ${}^{V}X$, ${}^{C}X$ ve ${}^{H}X$ vektör alanlarının ${}^{s}g$ metriğine göre Lie türevlerini, (4.19) denklemini kullanılarak hesaplarsak sırasıyla,

$$L_{{}^{V}X}\, {}^{s}g = ({}^{s}\nabla_I\, {}^{V}X^J + {}^{s}\nabla_J\, {}^{V}X^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_j X^i + \nabla_i X^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{{}^cX}\,{}^sg = ({}^s\nabla_I\,{}^cX^J + {}^s\nabla_J\,{}^cX^I)$$
$$= \begin{pmatrix} \nabla_i X^j + \nabla_j X^i & 0 \\ y^s\partial_s(\nabla_j X^i + \nabla_i X^j) + (H^i_{jh} + H^j_{ih})X^h & \nabla_i X^j + \nabla_j X^i \end{pmatrix} \tag{4.20}$$
$$L_{{}^HX}\,{}^sg = ({}^s\nabla_I\,{}^HX^J + {}^s\nabla_J\,{}^HX^I)$$
$$= \begin{pmatrix} \nabla_i X^j + \nabla_j X^i & 0 \\ -\Gamma^j_h\,\nabla_i X^h - \Gamma^i_h\,\nabla_j X^h + (R_{kih}{}^j + R_{kjh}{}^i)y^k x^h + (H^i_{jh} + H^j_{ih})X^h & 0 \end{pmatrix}$$

denklemleri elde edilir. $\nabla_i X^h = 0$ olduğu dikkate alınırsa $R^j_{kih}X^h = 0$ ve $R^i_{kjh}X^h = 0$ olur. Ayrıca eğer (0,2) tipli simetrik a tensörünün kovaryant türevi sıfır, yani $\nabla a = 0$, ise $(H^i_{jh} + H^j_{ih})X^h = 0$ olur. Buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.3.1. Teorem: M_n deki bir X vektör alanının ${}^sg$ metriğine sahip $T(M_n)$ ye

a) ${}^VX \in \Im^1_0(T(M_n))$ dikey

b) ${}^cX \in \Im^1_0(T(M_n))$ tam

c) ${}^HX \in \Im^1_0(T(M_n))$ yatay

liftlerinin $T(M_n)$ de Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart, sırasıyla,

a) X in M_n de Killing vektör alanı olması,

b) X in Killing vektör alanı ve (0,2) tipli simetrik tensörünün kovaryant türevinin sıfır olması,

c) X in M_n de kovaryant türevi sıfır olan Killing vektör alanı ve (0,2) tipli simetrik tensörünün kovaryant türevinin sıfır olmasıdır.

Eğer X ve Y, M_n de Killing vektör alanları ise Killing vektörün tanımından

$$L_{[x,y]}g = L_X(L_Y g) - L_Y(L_X g) = 0, \tag{4.21}$$

yani $[X,Y]$, M_n de Killing vektör alanıdır (Kobayashi ve Nomizu , 1963).

Verilen her $X,Y \in \Im^1_0(M_n)$ için $(1,1)$ tipinden $A_X Y$ tensör alanı

$$(A_X Y)Z = (L_X\nabla)(Y,Z) = [L_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z\,,\ \forall Z \in \Im^1_0(M_n) \tag{4.22}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\left[{}^{V}X,{}^{c}Y\right]={}^{V}\left[X,Y\right],\ \left[{}^{c}X,{}^{c}Y\right]={}^{c}\left[X,Y\right],\ \left[{}^{c}X,{}^{H}Y\right]={}^{H}\left[X,Y\right]-\gamma(A_XY) \qquad (4.23)$$

şeklinde yazılır, burada $\gamma(A_XY)\in\Im_0^1(M_n)$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix}0\\ y^s(A_XY)_s^h\end{pmatrix}$ dır.

Bir $X\in\Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. Eğer X vektör alanı $L_X\nabla=0$ şartını sağlıyor ise X vektör alanına ∇ afin konneksiyonuna göre infinitesimal dönüşüm denir. Buna göre (4.22) ve (4.23) den

$$\left[{}^{c}X,{}^{H}Y\right]={}^{H}\left[X,Y\right] \qquad (4.24)$$

eşitliğini yazarız. ${}^{s}g$ metriğinin ${}^{V}\left[X,Y\right]$ ve ${}^{c}\left[X,Y\right]$ ye göre Lie türevleri hesaplanırsa

$$L_{{}^{V}[X,Y]}{}^{s}g=L_{\left[{}^{V}X,{}^{c}Y\right]}{}^{s}g=L_{{}^{V}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{s}g)-L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{V}X}{}^{s}g)$$

$$L_{{}^{c}[X,Y]}{}^{s}g=L_{\left[{}^{c}X,{}^{c}Y\right]}{}^{s}g=L_{{}^{c}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{s}g)-L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{c}X}{}^{s}g) \qquad (4.25)$$

elde edilir. Böylece (4.20) ve (4.25) den aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.3.2. Teorem: M_n deki $\left[X,Y\right]$ vektör alanının dikey ve tam liftlerinin $T(M_n)$ de ${}^{s}g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de Killing vektör alanları olması ve (0,2) tipli simetrik a tensörünün kovaryant türevinin sıfır, yani $\nabla a=0$, olmasıdır.

M_n de X bir infinitesimal afin dönüşüm olsun. (4.3.4) ve (4.3.8) den

$$L_{{}^{H}[X,Y]}{}^{s}g=L_{\left[{}^{c}X,{}^{H}Y\right]}{}^{s}g=L_{{}^{c}X}(L_{{}^{H}Y}{}^{s}g)-L_{{}^{H}Y}(L_{{}^{c}X}{}^{s}g) \qquad (4.26)$$

yazılır. Buna göre (4.21) ve (4.26) göz önüne alınırsa aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.3.3. Teorem: M_n deki $\left[X,Y\right]$ vektör alanının yatay liftinin $T(M_n)$ de ${}^{s}g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de Killing vektör alanları olması, Y vektör alanının kovaryant türevinin sıfır, yani

$\nabla_i Y^h = 0$, ve (0,2) tipli simetrik a tensörünün kovaryant türevinin sıfır, yani $\nabla a = 0$, olmasıdır.

4.4. Tanjant Demette Afin Konneksiyonun Horizontal (Yatay) Liftine Göre İnfinitesimal Afin Dönüşümler

M_n de g metriği ile tanımlanan Riemannian konneksiyonu ∇ ve konneksiyon katsayıları ise Γ_{ij}^k olsun. Ayrıca $T(M_n)$ de $\tilde{X} = \tilde{X}^i \partial_i + \tilde{X}^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}}$ vektör alanı verilmiş olsun. Burada $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$, $\bar{i} = n+1,...,2n$, şeklinde tarif edilir.

$${}^H\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, \, {}^H\Gamma_{i\bar{j}}^k = {}^H\Gamma_{\bar{i}j}^k = {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^k = \ {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = \ 0, \quad {}^H\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = y^s \partial_s \Gamma_{ij}^k - y^s R_{sij}{}^k, \quad {}^H\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = {}^H\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^k,$$

eşitlikleri ve $L_X \nabla = 0$ denklemi dikkate alınırsa, $\tilde{X} = \tilde{X}^\alpha \partial_\alpha \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki (4.27)-(4.34) şartlarını sağlamasıdır:

$$\partial_j \partial_i \tilde{X}^h + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - (\Gamma_{ji}^k \partial_k \tilde{X}^h + \partial\Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h) + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + y^s R_{sji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h = 0, \quad (4.27)$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0, \quad (4.28)$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_i \tilde{X}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k = 0, \quad (4.29)$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^h = 0, \quad (4.30)$$

$$\partial_j \partial_i \tilde{X}^{\bar{h}} + (\tilde{X}^k \partial_k \partial\Gamma_{ji}^h + \tilde{X}^{\bar{k}} \partial_k \Gamma_{ji}^h) - (\Gamma_{ji}^k \partial_k \tilde{X}^{\bar{h}} + \partial\Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}}) + (\partial\Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^{\bar{k}}) \quad (4.31)$$

$$+(\partial\Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^{\bar{k}}) - \tilde{X}^{\bar{k}} R_{kji}^h - y^s \tilde{X}^k \partial_k R_{sji}^h + y^s R_{sji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} - y^s R_{ski}^h \partial_j \tilde{X}^k - y^s R_{sjk}^h \partial_i \tilde{X}^k = 0$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + (\partial\Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{k}}) - y^s R_{sjk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0, \quad (4.32)$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_i \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + (\partial\Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^{\bar{k}}) + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k - y^s R_{ski}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k = 0, \quad (4.33)$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} - \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0, \quad (4.34)$$

$\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olsun. Bu durumda indirgenmiş koordinatlara göre $\tilde{X}$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ dır. Böylece (4.34) denkleminden $\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{\bar{h}}=0$ bulunur. Buradan

$$\tilde{X}^{\bar{h}} = C_i^h y^i + D^h \tag{4.35}$$

yazılır. Burada C_i^h ve D^h bileşenleri sadece $\tilde{X}^h$ değişkenlerine bağlıdır. $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir vektör alanı olduğundan $C = C_i^h \partial_h \otimes dx^i$ ve $D = D^h \partial_h$, sırasıyla, $\Im_1^1(M_n)$ ve $\Im_0^1(M_n)$ nin elemanları olarak tanımlanır.

4.4.1. Teorem: Eğer $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre bir dikey infinitesimal afin dönüşüm ise, bu durumda

a) $L_D\nabla + C(D \otimes R) = 0$, $D = \partial^h \dfrac{\partial}{\partial x^h}$, $D \in \Im_0^1(M_n)$ ve $C(D \otimes R) = D^k R_{kji}{}^h$ dir.

b) C , ∇ ya göre paraleldir, yani $\nabla C = 0$ dır.

c) ∇ nın T torsion tensörü C ye göre pürdür. Yani, her $Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$C(T(Y,Z)) = T(CY,Z) = T(Y,CZ).$$

d) Her $Y,Z,W \in \Im_0^1(M_n)$ için $C(\nabla_Z T)(Y,W) = (\nabla_{CZ}T)(Y,W)$.

Tersine, eğer C ve D (a) , (b) , (c) ve (d) şartlarını sağlıyor ise

$$\tilde{X} = (C_i^h y^i + D^h)\frac{\partial}{\partial y^h} = \gamma C + {}^vD$$

vektör alanı, ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür, burada $\gamma C = \begin{pmatrix} 0 \\ y^i C_i^h \end{pmatrix}$ bir dikey vektör alanıdır.

İspat: (a) (4.35) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.31) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_j\partial_i C_s^h + C_s^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k C_s^h - \partial_s \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j C_s^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i C_s^k - C_s^k R_{kji}^h + R_{sji}^k C_k^h = 0, \tag{4.36}$$

ve $L_D\nabla + C(D \otimes R) = 0$ anlamına gelen

$$\partial_j\partial_i D^h + D^k\partial_k\Gamma^h_{ji} - \Gamma^k_{ji}\partial_k D^h + \Gamma^h_{ki}\partial_j D^k + \Gamma^h_{jk}\partial_i D^k - D^k R^h_{kji} = 0 \ , \qquad (4.37)$$

eşitlikleri bulunur.

(b) (4.35) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.33) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_i C^h_j - \Gamma^k_{ji} C^h_k + \Gamma^h_{ki} C^k_j = 0 \, , \qquad (4.38)$$

(4.35) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.32) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_j C^h_i - \Gamma^k_{ji} C^h_k + \Gamma^h_{jk} C^k_i = 0 \, , \qquad (4.39)$$

bulunur ki, bu da C nin M_n de paralel olmasıdır.

(c) (4.39) denkleminde i ve j, indislerinin yerleri değiştirilirse,

$$\partial_i C^h_j - \Gamma^k_{ij} C^h_k + \Gamma^h_{ik} C^k_j = 0 \, ,$$

ve (4.38) eşitliğinden çıkarılırsa,

$$T^k_{ji} C^h_k = T^h_{ki} C^k_j \ , \qquad (4.40)$$

elde edilir. Burada her $Y, Z \in \Im^1_0(M_n)$ için

$$C(T(Y,Z)) = T(CY,Z) \qquad (4.41)$$

(4.40) denkleminden $T(Y,CZ)) = -T(CZ,X) = C(T(Z,Y)) = C(T(Y,Z))$

ve $C(T(Y,Z)) = T(CY,Z) = T(Y,CZ)$ eşitlikleri elde edilir

(d) (4.38) ve (4.39) denklemlerindeki kısmi türevleri (4.36) denkleminde yerine yazarsak, C^h_j nin tüm kısmi türevleri yok olur. Böylece herhangi $X,Y,Z \in \Im^1_0(M)$ için

$$C^h_k \nabla_j T^k_{li} = \nabla_k T^h_{li} C^k_j \, , \qquad (4.42)$$

denklemi elde edilir. Burada T , C ye göre ϕ- tensörüdür.

Tersine, eğer (a), (b), (c) ve (d) şartları mevcut ise, $\tilde{X}$ in bir infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür. Böylece Teorem 4.4.1 ispatlanmış olur.

4.5. Tanjant Demette $^H\nabla$ Konneksiyonuna Göre Fibre-Koruyan İnfinitesimal Afin Dönüşümler

$T(M_n)$ nin her bir fibresini yine bir fibreye dönüştüren dönüşüme fibre-koruyan dönüşüm denir. Ayrıca, $T(M_n)$ deki bir infinitesimal afin dönüşüm fibre-koruyan dönüşümlerin bir lokal bir parametreli grubunu üretiyorsa, yine bu dönüşüme fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm denir.

$\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\tilde{X}$ infinitesimal dönüşümünün fibre-koruyan olması için gerek ve yeter şart $\tilde{X}^h (h=1,2,...,n)$ bileşenlerinin sadece $T(M_n)$ deki (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre $x^1,...,x^n$ değişkenlerine bağlı olmasıdır (Yano and Ishihara, 1973).

$$\begin{cases} x^{h'} = x^h + \tilde{X}^h (x^1,...,x^n)\Delta t \\ x^{\bar{h}'} = x^{\bar{h}} + \tilde{X}^{\bar{h}} (x^1,...,x^n, x^{n+1},...,x^{2n})\Delta t \end{cases}$$

ifadesinden görülür ki, $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\tilde{X}$ fibre-koruyan infinitesimal dönüşüm M_n baz uzayında $\tilde{X}^h$ bileşenli bir X infinitesimal dönüşüm indirger. Ayrıca (4.27) denkleminde $\partial\Gamma^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h$=0 ve $y^s R^k_{sji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h = 0$, olduğundan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.5.1. Teorem : Eğer $\tilde{X}$, ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de fibre koruyan infinitesimal afin dönüşümü ise $\tilde{X}$ den M_n üzerine indirgenen X infinitesimal dönüşümü de ∇ konneksiyonuna göre afin dönüşümdür.

4.5.2. Teorem: ∇, M_n de bir Riemannian konneksiyonu olmak üzere her $X \in \Im^1_0(M_n)$ için

$$(L_{{}^C X}{}^H\nabla)({}^C Y, {}^C Z) = {}^C (L_X\nabla)({}^C Y, {}^C Z) + \gamma(L_X R)(\ ,Y,Z)$$

şeklindedir.

İspat: $(L_{{}^C X}{}^H\nabla)({}^C Y, {}^C Z) = L_{{}^C X}({}^H\nabla_{{}^C Y}{}^C Z) - {}^H\nabla_{{}^C Y}(L_{{}^C X}{}^C Z) - {}^H\nabla_{[{}^C X, {}^C Y]}{}^C Z$

$$= L_{{}^C X}[{}^C(\nabla_Y Z) - \gamma(R(\ ,Y)Z)] - {}^H\nabla_{{}^C Y}{}^C(L_X Z) - {}^H\nabla_{{}^C [X,Y]}{}^C Z$$

$$=[{}^C X, {}^C \nabla_X Y] - [{}^C X, \gamma(R(\ ,Y)Z)] - {}^C(\nabla_Y(L_X Z)) + \gamma(R(\ ,Y)L_X Z)$$

$$-{}^C(\nabla_{[X,Y]}Z) + \gamma R([X,Y]Z)]$$

$$={}^C(L_X \nabla_X Y) - {}^C(\nabla_Y(L_X Z)) - {}^C(\nabla_{[X,Y]}Z) - \gamma(L_X R(\ ,Y)Z)$$

$$+\gamma(R(\ ,Y)L_X Z) + \gamma(R(\ ,L_X Y)Z)$$

$$={}^C(L_X \nabla)({}^C Y, {}^C Z) + \gamma(-L_X R(\ ,Y)Z + R(\ ,Y)L_X Z + R(\ ,L_X Y)Z)$$

$$={}^C(L_X \nabla)({}^C Y, {}^C Z) + \gamma(L_X R)(\ ,Y,Z).$$

Burada $R(\ ,X)Y$ her $Z \in \Im_0^1(M_n)$ için $W(Z) = R(Z,X)Y$ şeklinde bir (1,1) tipli W tensörü tanımlar.

$\tilde{X}$ ve X, Teorem 4.5.1 de verildiği gibi olsun. Teorem 4.5.2 den görürüz ki, eğer X, W göre infinitesimal automorphism ise ${}^c X$, ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür. ${}^c X$ nin bileşenleri $\begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$ olduğundan $\tilde{X} - {}^c X$ nin, ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.5.3. Eğer $\tilde{X}$, ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm ve W göre infinitesimal automorphism ise bu durumda $\tilde{X} = {}^c X + {}^v D + \gamma C$ Teorem 4.4.1 deki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlar. Burada D ve C, sırasıyla, (1,0) ve (1,1) tipli tensörlerdir.

4.6 ${}^H g$ Metriği ile Tanımlanan İnfinitesimal İzometriler (Killing Vektör Alanları)

$\tilde{X}$ vektör alanı $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $(\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda ${}^H\nabla\tilde{X}$ in kovaryant türevi, indirgenmiş koordinatlara göre,

$$ {}^{H}\nabla_{I}\tilde{X}^{J} = \partial_{I}X^{J} + {}^{H}\Gamma^{J}_{IM}\tilde{X}^{M} \tag{4.43} $$

bileşenlerine sahiptir, burada ${}^{H}\Gamma^{J}_{IM}$ ler ${}^{H}\nabla$ konneksiyonunun katsayılarıdır.

$\Gamma^{h}_{i}x^{i} = y^{s}\Gamma^{h}_{si}x^{i}$ olmak üzere $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre bir $X \in \Im^{1}_{0}(M_n)$ vektör alanının ${}^{V}X \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ dikey lifti, ${}^{C}X \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ tam lifti ve ${}^{H}X \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ yatay liftinin bileşenleri, sırasıyla,

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{h} \end{pmatrix}, \quad {}^{C}X = \begin{pmatrix} x^{h} \\ \partial x^{h} \end{pmatrix}, \quad {}^{H}X = \begin{pmatrix} x^{h} \\ -\Gamma^{h}_{i}x^{i} \end{pmatrix} \tag{4.44} $$

şeklindedir.

Şimdi ${}^{V}X$, ${}^{C}X$ ve ${}^{H}X$ vektör alanlarının ${}^{H}g$ metriğine göre Lie türevlerini, (4.44) denklemi ve ${}^{H}\nabla$ konneksiyonunun katsayılarını kullanılarak hesaplarsak sırasıyla,

$$ \left.\begin{array}{l} L_{{}^{V}X}{}^{H}g = ({}^{H}\nabla_{I}{}^{V}X^{J} + {}^{H}\nabla_{J}{}^{V}X^{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_{j}X^{i} + \nabla_{i}X^{j} & 0 \end{pmatrix} \\ L_{{}^{c}X}{}^{H}g = ({}^{H}\nabla_{I}{}^{c}X^{J} + {}^{H}\nabla_{J}{}^{c}X^{I}) = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X^{j} + \nabla_{j}X^{i} & 0 \\ y^{s}\partial_{s}(\nabla_{j}X^{i} + \nabla_{i}X^{j}) - y^{s}(R_{sik}{}^{j} + R_{sjk}{}^{i})X^{k} & \nabla_{i}X^{j} + \nabla_{j}X^{i} \end{pmatrix} \\ L_{{}^{H}X}{}^{H}g = ({}^{H}\nabla_{I}{}^{H}X^{J} + {}^{H}\nabla_{J}{}^{H}X^{I}) = \begin{pmatrix} \nabla_{i}X^{j} + \nabla_{j}X^{i} & 0 \\ -\Gamma^{j}_{h}\nabla_{i}X^{h} - \Gamma^{i}_{h}\nabla_{j}X^{h} & \nabla_{i}X^{j} + \nabla_{j}X^{i} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \tag{4.45} $$

denklemleri elde edilir.

$\nabla_{i}X^{k} = 0$ olduğu dikkate alınırsa $R_{sik}{}^{j}X^{k} = 0$ ve $R_{sjk}{}^{i}X^{k} = 0$ olur. Buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.6.1. Teorem: M_n deki bir X vektör alanının ${}^{H}g$ metriğine sahip $T(M_n)$ ye

a) ${}^{V}X \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ dikey

b) ${}^{c}X \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ tam

c) ${}^{H}X \in \Im^{1}_{0}(T(M_n))$ yatay

liftlerinin yine $T(M_n)$ de Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart, sırasıyla,

a) X in M_n de Killing vektör alanı olması,

b) X in M_n de kovaryant türevi sıfır olan Killing vektör alanı olması,

c) X in M_n de kovaryant türevi sıfır olan Killing vektör alanı olmasıdır.

Eğer X ve Y, M_n de Killing vektör alanları ise Killing vektörün tanımından

$$L_{[x,y]}g = L_X(L_Y g) - L_Y(L_X g) = 0, \tag{4.46}$$

yani $\left[X,Y\right]$, M_n de Killing vektör alanıdır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Verilen $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ için $(1,1)$ tipinden $A_X Y$ tensör alanını

$$(A_X Y)Z = (L_X\nabla)(Y,Z) = \left[L_X, \nabla_Y\right]Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \ \forall Z \in \Im_0^1(M_n) \tag{4.47}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\left[{}^{V}X, {}^{c}Y\right] = {}^{V}\left[X,Y\right], \ \left[{}^{c}X, {}^{c}Y\right] = {}^{c}\left[X,Y\right], \ \left[{}^{c}X, {}^{H}Y\right] = {}^{H}\left[X,Y\right] - \gamma(A_X Y) \tag{4.48}$$

şeklinde yazılır, burada $\gamma(A_X Y) \in \Im_0^1(M_n)$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ y^s (A_X Y)_s^h \end{pmatrix}$ dır.

Bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. Eğer X vektör alanı $L_X\nabla = 0$ şartını sağlıyor ise X vektör alanına ∇ afin konneksiyonuna göre infinitesimal dönüşüm denir. Buna göre (4.47) ve (4.48) den

$$\left[{}^{c}X, {}^{H}Y\right] = {}^{H}\left[X,Y\right] \tag{4.49}$$

eşitliğini yazarız. ${}^{H}g$ metriğinin ${}^{V}\left[X,Y\right]$ ve ${}^{c}\left[X,Y\right]$ ye göre Lie türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} L_{{}^{V}[X,Y]}{}^{H}g &= L_{\left[{}^{V}X, {}^{c}Y\right]}{}^{H}g = L_{{}^{V}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{H}g) - L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{V}X}{}^{H}g) \\ L_{{}^{c}[X,Y]}{}^{H}g &= L_{\left[{}^{c}X, {}^{c}Y\right]}{}^{H}g = L_{{}^{c}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{H}g) - L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{c}X}{}^{H}g) \end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir. Böylece (4.45) ve (4.50) den aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.6.2. Teorem : M_n deki $\left[X,Y\right]$ vektör alanının dikey ve tam liftlerinin $T(M_n)$ de ${}^{H}g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de kovaryant türevleri sıfır olan Killing vektör alanları olmasıdır.

M_n de X bir infinitesimal afin dönüşüm olsun. (4.46) ve (4.50) den

$$L_{{}^H[X,Y]}{}^H g = L_{[{}^c X,{}^H Y]}{}^H g = L_{{}^c X}(L_{{}^H Y}{}^H g) - L_{{}^H Y}(L_{{}^c X}{}^H g) \tag{4.51}$$

yazılır. Buna göre (4.45) ve (4.51) ifadeleri göz önüne alınırsa aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

4.6.3. Teorem: M_n deki $[X,Y]$ vektör alanının yatay liftinin $T(M_n)$ de ${}^H g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de kovaryant türevleri sıfır olan Killing vektör alanları olmasıdır.

4.7. İnfinitesimal Holomorphically Projective Dönüşümler

(M_n, g) bir Riemannian manifoldu, ∇, g metriği vasıtası ile tanımlanan Riemannian konneksiyonu ve Γ_{ji}^a ler de ∇ konneksiyonunun konneksiyon katsayıları olsun. $\{\partial_h\}$ doğal çatısında $\nabla_{\partial_j}\partial_i = \Gamma_{ji}^a \partial_a$ ve ∇ konneksiyonunun R eğrilik tensörü $R_{kji}{}^h$ şeklindedir.

M_n üzerinde verilen ∇ Riemannian konneksiyonu ile her $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ indirgenmiş koordinat komşuluğunda yeni bir çatı tanımlanır. M_n nin her $U(x^h)$ lokal haritasında

$$X_{(j)} = \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_j^h \frac{\partial}{\partial x^h} \in \Im_0^1(M)$$

eşitliği yazılır. Sayıları *2n* tane olan bu ${}^H X_{(j)}$ ve ${}^V X_{(j)}$ local vektör alanları, $T_P(T(M))$ tanjant uzayının her $\tilde{P} = \pi^{-1}(P)$ noktasında bir baz oluşturur ve bileşenleri de $T(M)$ deki $\left\{\frac{\partial}{\partial x^H}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^h}, \frac{\partial}{\partial x^{\bar{h}}}\right\}$ doğal çatıya göre

$${}^H X_{(j)} = \delta_j^h \partial_h - y^s \Gamma_{sj}^h \partial_{\bar{h}}, \tag{4.52}$$

$${}^V X_{(\bar{j})} = \delta_j^h \partial_{\bar{h}}, \tag{4.53}$$

şeklindedir. Burada δ_i^j -Kronecker deltasıdır. ${}^{H}X_{(j)}$ ve ${}^{V}X_{(j)}$ local vektör alanları lineer bağımsızdır ve sırasıyla ∇ konneksiyonunun yatay dağılımını ve $T(M)$ nin dikey dağılımını üretir.

$\left\{ {}^{H}X_{(j)}, {}^{V}X_{(\bar{j})} \right\}$ kümesine $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ de ∇ afin konneksiyonuna adapte olunmuş çatı denir. Özel olarak eğer $E_j = {}^{H}X_{(j)}$, $E_{\bar{j}} = {}^{V}X_{(\bar{j})}$ şeçilir ise adapte olunmuş çatı $\left\{ E_\beta \right\} = \left\{ E_j, E_{\bar{j}} \right\}$ şeklinde yazılır. Buradan aşağıdaki Lemma' yı elde ederiz.

4.7.1. Lemma : $T(M)$ de adapte olunmuş çatıda Lie parantezi aşağıdaki şartları sağlar:

$$\left.\begin{aligned} \left[E_j, E_i \right] &= y^b R_{ijb}{}^{a} E_{\bar{a}} \\ \left[E_j, E_{\bar{i}} \right] &= \Gamma_{ji}^{a} E_{\bar{a}} \\ \left[E_{\bar{j}}, E_{\bar{i}} \right] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

g , g_{ji} bileşenlerine sahip Riemannian metriği olmak üzere

$$\tilde{g} = a_{ji} dx^j dx^i + 2 g_{ji} dx^j \delta y^i \tag{4.55}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{g}$ metriği $T(M)$ de singüler olmayan bir Pseudo-Riemannian metriğidir. Burada $a = (a_{ji})$, M_n de (0,2) tipli simetrik tensör alanıdır. $\tilde{g}$ metriği $T(M)$ de adapte olunmuş çatıda

$$\tilde{g} = \left(\tilde{g}_{\beta\gamma} \right) = \begin{pmatrix} a_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Buradan $\tilde{g} = {}^{C}g + {}^{V}a$ eşitliği elde edilir ve sırasıyla ${}^{C}g$, g metriğinin $T(M)$ ye tam, ${}^{V}a$ ise a tensörünün $T(M)$ dikey liftleridir.

Şimdi $\pi^{-1}(U)$ de $\omega^\alpha = \tilde{A}^\alpha{}_B dx^B$ şeklinde tanımlanan ω^α lokal 1-formunu gözönüne alalım. Burada

$$\tilde{A}^\alpha{}_B = \begin{pmatrix} \tilde{A}^h{}_j & \tilde{A}^h{}_{\bar{j}} \\ \tilde{A}^{\bar{h}}{}_j & \tilde{A}^{\bar{h}}{}_{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^h & 0 \\ y^s \Gamma_{sj}^h & \delta_j^h \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

matrisi

$$\mathcal{A}_\beta{}^A = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_j{}^h & \mathcal{A}_{\bar{j}}{}^h \\ \mathcal{A}_j{}^{\bar{h}} & \mathcal{A}_{\bar{j}}{}^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^h & 0 \\ -y^s\Gamma_{sj}^h & \delta_j^h \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

matrisinin tersi olan matrisdir ve bu matrisin çatı (baz) değişimi ise $E_\beta = \mathcal{A}_\beta{}^A \partial_A$ şeklinde tarif edilir. Sayıları $2n$ tane olan bu ω^α 1-formları lineer bağımsızdır ve $\{\omega^\alpha\}$ kümesine de $T(M)$ de adapte olunmuş ko-çatı denir.

Çeşitli $a,b,c,i,j,h,...$ indislerinin değişim aralığı $\{1,...,n\}$ ve $\alpha,\beta,\lambda,\mu,...$ indislerinin ise $\{1,...,n;n+1,...,2n\}$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} E_j &= \mathcal{A}_j{}^A\partial_A = \partial_j - y^s\Gamma_{sj}^h\partial_{\bar{h}}, \\ E_{\bar{j}} &= \mathcal{A}_{\bar{j}}{}^A\partial_A = \partial_{\bar{j}} \end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

ve

$$\left.\begin{aligned} \omega^j &= \tilde{\mathcal{A}}^j{}_B dx^B = dx^j, \\ \omega^{\bar{j}} &= \tilde{\mathcal{A}}^{\bar{j}}{}_B dx^B = \delta y^h \end{aligned}\right\} \tag{4.59}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\delta y^h = dy^h + y^b\Gamma_{ba}^h dx^a$ şeklindedir.

$\{E_\beta\}$ adapte olunmuş çatısı non-holonomic olduğundan

$$\left[E_\alpha, E_\beta\right] = \Omega_{\alpha\beta}{}^\gamma E_\gamma$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Omega_{\gamma\beta}{}^\alpha$ ya non-holonomic obje denir ve

$$\Omega_{\gamma\beta}{}^\alpha = (E_\gamma\mathcal{A}_\beta{}^A - E_\beta\mathcal{A}_\gamma{}^A)\tilde{\mathcal{A}}^\alpha{}_A$$

şeklinde ifade edilir.

Böylece (4.56), (4.57) ve (4.58) eşitliklerinden $\Omega_{\gamma\beta}{}^\alpha$ non-holonomic objelerinin bileşenleri adapte olunmuş çatıda

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{l\bar{j}}{}^{\bar{r}} &= -\Omega_{\bar{j}l}{}^{\bar{r}} = \Gamma_{jl}^r \\ \Omega_{lj}{}^{\bar{r}} &= -\Omega_{jl}{}^{\bar{r}} = -R_{ljk}{}^r \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

şeklinde olup diğer bileşenler sıfırdır.

Eğer $\tilde{\nabla}$, $\tilde{g}$ metriği ile tanımlanan Levi-Civita konneksiyonu ise $\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \Im_0^1(T(M))$ için

$$\tilde{T}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} - \left[\tilde{X}, \tilde{Y} \right] = 0$$

ifadesinden adapte olunmuş çatıda

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} \tag{4.61}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}$ lar $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun katsayılarıdır.

Her $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \Im_0^1(T(M))$ için $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{g})(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = 0$, eşitliği adapte olunmuş çatıda

$$E_{\delta} \tilde{g}_{\gamma\beta} - \tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\gamma} \tilde{g}_{\varepsilon\beta} - \tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta} \tilde{g}_{\gamma\varepsilon} = 0 \tag{4.62}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece (4.61) ve (4.62) eşitliklerinden

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\varepsilon} (E_{\beta} \tilde{g}_{\varepsilon\gamma} + E_{\gamma} \tilde{g}_{\beta\varepsilon} - E_{\varepsilon} \tilde{g}_{\beta\gamma}) + \frac{1}{2} (\Omega_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \Omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta}), \tag{4.63}$$

elde edilir. Burada $\Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$ lar $\Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta} = \tilde{g}^{\alpha\varepsilon} \tilde{g}_{\delta\beta} \Omega_{\varepsilon\gamma}{}^{\delta}$ şeklinde ifade edilir.

Adapte olunmuş çatıda $\tilde{g}$ metriğinin $\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}$ kontravaryant bileşenleri

$$(\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{hr} \\ g^{hr} & -a^{hr} \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

şeklindedir.

(4.62), (4.63) ve (4.64) denklemlerinden adapte olunmuş çatıda

$$\tilde{\Gamma}^{h}_{ji} = \Gamma^{h}_{ji}, \; \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{ji} = y^{b} R_{bji}{}^{h} + H^{h}_{ji}, \; \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} = 0,$$

$$\tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}\bar{i}} = 0, \; \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = \Gamma^{h}_{ji}, \; \tilde{\Gamma}^{h}_{j\bar{i}} = 0, \; \tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}i} = 0, \; \tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}i} = 0 \tag{4.65}$$

şeklindedir. Burada Γ^{h}_{ji} lar $\{\partial_i\}$ doğal çatısında g metriği ile tanımlanan Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları ve H^{h}_{ji} ise M_n manifoldunda

$$H^{h}_{ji} = \frac{1}{2} g^{hr} (\nabla_j a_{ri} + \nabla_i a_{jr} - \nabla_r a_{ji})$$

şeklinde tarif edilen (1,2) tipli tensör alanıdır.

Eğer $\tilde{X}$, $T(M)$ de $\tilde{X}^{\alpha}$ frame bileşenlerine sahip bir vektör alanı ise bu frame bileşenler

$$\tilde{\nabla}_{\lambda}\tilde{X}_{\alpha}=E_{\lambda}(\tilde{X}_{\alpha})-\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\alpha}\tilde{X}_{\mu} \tag{4.66}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\mu}$ ler (2.15) de ifade edildiği gibidir.

(4.65) ve (4.66) dan aşağıdaki Lemma'yı yazabiliz:

4.7.2. Lemma: $T(M)$ de synectic lift metriği vasıtasıyla tanımlanan $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\nabla}_{E_j}E_i=\Gamma^{a}_{ji}E_a+\left(y^bR_{bji}{}^{a}+H^{a}_{ji}\right)E_{\bar{a}}\\&\tilde{\nabla}_{E_j}E_{\bar{i}}=\Gamma^{a}_{ji}E_{\bar{a}}\\&\tilde{\nabla}_{E_{\bar{j}}}E_i=0,\ \tilde{\nabla}_{E_{\bar{j}}}E_{\bar{i}}=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.67}$$

Şimdi $T(M)$ de her $X\in\Im^1_0(T(M))$ için

$$\tilde{J}\,{}^{H}X={}^{V}X\ ,\ \tilde{J}\,{}^{V}X=-{}^{H}X$$
$$\tilde{J}E_i=E_{\bar{i}}\ ,\ \tilde{J}E_{\bar{i}}=-E_i\ .$$

şeklinde tanımlanan (1,1) tipli $\tilde{J}$ tensör alanını göz önüne alalım. Buradan $\tilde{J}^2=-I$ elde edilir. Böylece $\tilde{J}$ tensor alanı $T(M)$ de almost kompleks yapı olur. Bu yapıya adapte olunmuş almost kompleks yapı denir ve $\tilde{J}$ tensör alanının integrallenmesi sadece ve sadece M_n manifoldunun lokal flat olması ile mümkündür.

4.7.1. Teorem: (M,g) Riemannian manifoldu ve almost kompleks yapı ile birlikte synectic lift metriği vasıtasıyla tanımlanan $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna sahip $T(M)$ tanjant demeti verilmiş olsun. $\tilde{V}$ vektör alanının $T(M)$ de $\tilde{\Omega}$ associated 1-formu vasıtasıyla tanımlanan infinitesimal holomorphically projective dönüşüm olabilmesi sadece ve sadece aşağıdaki şartları sağlayan $\varphi,\ \psi\in\Im^0_0(M)$, $B=(B^h)$, $D=(D^h)\in\Im^1_0(M)$, $A=(A^h_i),C=(C^h_i)\in\Im^1_1(M)$ var olması ile mümkündür:

1. $\begin{pmatrix}\tilde{V}^h\\ \tilde{V}^{\bar{h}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^h+y^aA^h_a+2\varphi y^h-y^a\Psi_a y^h\\ D^h+y^aC^h_a+2\psi y^h+y^a\Phi_a y^h\end{pmatrix},$

2. $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\Omega}_{\bar{i}}) = (\partial_i \psi, \partial_i \varphi) = (\Psi_i, \Phi_i)$,
3. $\nabla_i \Phi_j = 0$, $\nabla_i \Psi_j = 0$,
4. $\nabla_i A_j^a = \Phi_j \delta_i^a - \Phi_i \delta_j^a$,
5. $\nabla_i C_j^a = \Psi_j \delta_i^a - \Psi_i \delta_j^a - B^h R_{hij}{}^a - H_{hi}^a A_j^h - 2\varphi H_{ji}^a$,
6. $L_B \Gamma_{ji}^a = \nabla_j \nabla_i B^a + B^h R_{hji}{}^a = \Psi_j \delta_i^a + \Psi_i \delta_j^a + H_{ji}^h A_h^a + 2\varphi H_{ji}^a$,
7. $L_D \nabla = \nabla_j \nabla_i D^a + D^h R_{hji}{}^a = -\Phi_j \delta_i^a - \Phi_i \delta_j^a - B^h \nabla_h H_{ji}^a + H_{ji}^h C_h^a + 2\psi H_{ji}^a - H_{jh}^a \nabla_i B^h - H_{hi}^a \nabla_j B^h$,
8. $B^h \nabla_h R_{bji}{}^a = R_{bji}{}^h C_h^a - C_b^h R_{hji}{}^a - R_{bjh}{}^a \nabla_i B^h - R_{bhi}{}^a \nabla_j B^h - A_b^h (\nabla_h H_{ji}^a - \nabla_j H_{hi}^a) - 2\varphi \nabla_b H_{ji}^a$,
9. $A_b^h R_{hij}{}^a + 2\varphi R_{bij}{}^a = 0$,
10. $\Psi_l H_{ji}^a = 0$, $\Phi_l H_{ji}^a = 0$,
11. $\Phi_l R_{kji}{}^a = 0$, $\Psi_l R_{kji}{}^a = 0$.

Burada $\tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{V}^h \\ \tilde{V}^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \tilde{V}^a E_a + \tilde{V}^{\bar{a}} E_{\bar{a}}$ ve $\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega}_i, \tilde{\Omega}_{\bar{i}}) = \tilde{\Omega}_a dx^a + \tilde{\Omega}_{\bar{a}} \delta y^a$ şeklindedir.

İspat: $\tilde{V}$ vektör alanı $T(M)$ de $\tilde{\Omega}$ associated 1-formu vasıtasıyla tanımlanan infinitesimal holomorphically projective dönüşüm olsun. Yani $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Im_0^1(T(M))$ için

$$(L_{\tilde{V}} \tilde{\nabla})(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{\Omega}(\tilde{X})\tilde{Y} + \tilde{\Omega}(\tilde{Y})\tilde{X} - \tilde{\Omega}(\tilde{J}\tilde{X})\tilde{J}\tilde{Y} - \tilde{\Omega}(\tilde{J}\tilde{Y})\tilde{J}\tilde{X} \tag{4.68}$$

olsun. $(L_{\tilde{V}} \nabla)(E_{\bar{j}}, E_{\bar{i}}) = \tilde{\Omega}_{\bar{j}} E_{\bar{i}} + \tilde{\Omega}_{\bar{i}} E_{\bar{j}} - \tilde{\Omega}_j E_i - \tilde{\Omega}_i E_j$ eşitliğinden

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{V}^h = -\tilde{\Omega}_j \delta_i^h - \tilde{\Omega}_i \delta_j^h \tag{4.69}$$

ve

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{V}^{\bar{h}} = \tilde{\Omega}_{\bar{j}} \delta_i^h + \tilde{\Omega}_{\bar{i}} \delta_j^h . \tag{4.70}$$

yazılır. (4.69) eşitliğinden

$$\tilde{\psi} = -\varphi + y^a \Psi_a$$
$$\tilde{\Omega}_i = \partial_{\bar{i}} \tilde{\psi} = \Psi_i$$

ve

$$\tilde{V}^h = B^h + y^a A_a^h + 2\varphi y^h - y^a \Psi_a y^h$$

şartlarını sağlayan $\varphi \in \Im_0^0(M_n)$, $\Psi = (\Psi_i) \in \Im_0^1(M_n)$, $A = (A_i^h) \in \Im_1^1(M_n)$,

$B = (B^h) \in \Im_0^1(M_n)$ vardır. Burada $\tilde{\psi} = -\dfrac{1}{n+1} \partial_{\bar{a}} \tilde{V}^a$ şeklindedir.

Benzer şekilde (4.70) den

$$\tilde{\varphi} = \psi + y^a \Phi_a \tag{4.71}$$

$$\tilde{\Omega}_{\bar{i}} = \partial_{\bar{i}} \tilde{\varphi} = \Phi_i \qquad (4.72)$$

ve

$$\tilde{V}^{\bar{h}} = D^h + y^a C_a^h + 2\psi y^h + y^a \Phi_a y^h , \qquad (4.73)$$

şartlarını sağlayan $\psi \in \Im_0^0(M_n)$, $\Phi = (\Phi_i) \in \Im_1^0(M_n)$, $D = (D^h) \in \Im_0^1(M_n)$,

$C = (C_i^h) \in \Im_1^1(M_n)$ vardır. Burada $\tilde{\varphi} = \dfrac{1}{n+1} \partial_{\bar{a}} \tilde{V}^{\bar{a}}$ şeklindedir.

Ayrıca (4.68) eşitliğinden

$$(L_{\tilde{V}} \tilde{\nabla})(E_{\bar{j}}, E_i) = \Phi_j E_i + \Phi_i E_j + \Psi_j E_{\bar{i}} + \Psi_i E_{\bar{j}} \qquad (4.74)$$

veya

$$(L_{\tilde{V}} \tilde{\nabla})(E_j, E_{\bar{i}}) = \Phi_j E_i + \Phi_i E_j + \Psi_j E_{\bar{i}} + \Psi_i E_j \ .$$

yazılır. (4.74) den

$$\begin{aligned}
&(\Phi_j \delta_i^a + \Phi_i \delta_j^a) E_a + (\Psi_j \delta_i^a + \Psi_i \delta_j^a) E_{\bar{a}} = \\
&= \left\{ (\nabla_i A_j^a + 2\delta_j^a \partial_i \varphi) - y^b (\delta_b^a \nabla_i \Psi_j + \delta_j^a \nabla_i \Psi_b) \right\} E_a \qquad (4.75) \\
&+ \left\{ (\nabla_i C_j^a + 2\delta_j^a \partial_i \psi + B^h R_{hij}{}^a + H_{hi}^a A_j^h + 2\varphi H_{ji}^a) + y^b (A_b^h R_{hij}{}^a + A_j^h R_{bih}{}^a + 4\varphi R_{bij}{}^a \right. \\
&\left. + \delta_a^b \nabla_i \Phi_j + \delta_j^a \nabla_i \Phi_b - H_{bi}^a \Psi_j - H_{ji}^a \Psi_b) + y^b y^c (\Psi_j R_{icb}{}^a - 2\Psi_c R_{bij}{}^a) \right\} E_{\bar{a}} \ .
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}
&\Phi_j = \partial_j \varphi , \ \nabla_i \Phi_j = 0 \\
&\Psi_j = \partial_j \psi , \ \nabla_i \Psi_j = 0 \\
&\nabla_i A_j^a = \Phi_j \delta_i^a - \Phi_i \delta_j^a \qquad (4.76) \\
&\nabla_i C_j^a = \Psi_j \delta_i^a - \Psi_i \delta_j^a - B^h R_{hij}{}^a - H_{hi}^a A_j^h - 2\varphi H_{ji}^a \\
&A_b^h R_{hij}{}^a = -2\varphi R_{bij}{}^a , \ \Psi_l R_{kji}{}^a = 0 , \ \Psi_l H_{ji}^a = 0
\end{aligned}$$

yazılır.

Son olarak, $(L_{\tilde{V}} \tilde{\nabla})(E_j, E_i) = \Psi_j E_i + \Psi_i E_j - \Phi_j E_{\bar{i}} - \Phi_i E_{\bar{j}}$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&(\Psi_j \delta_i^a + \Psi_i \delta_j^a) E_a - (\Phi_j \delta_i^a + \Phi_i \delta_j^a) E_{\bar{a}} = \left\{ L_B \Gamma_{ji}^a - H_{ji}^h A_h^a - 2\varphi H_{ji}^a \right\} E_a \qquad (4.77) \\
&+ \left\{ \left(L_D \Gamma_{ji}^a + B^h \nabla_h H_{ji}^a - H_{ji}^h C_h^a - 2\psi H_{ji}^a + H_{jh}^a \nabla_i B^h + H_{hi}^a \nabla_j B^h \right) \right. \\
&+ y^b (C_b^h R_{hji}{}^a + B^h \nabla_h R_{bji}{}^a - R_{bji}{}^h C_h^a + R_{bjh}{}^a \nabla_i B^h + R_{bhi}{}^a \nabla_j B^h + A_b^h (\nabla_h H_{ji}^a
\end{aligned}$$

$$-\nabla_j H_{hi}^a) + 2\varphi \nabla_b H_{ji}^a - \Phi_i H_{jb}^a - 3\Phi_j H_{bi}^a \Big) + y^b y^c \Big(\Phi_c R_{bji}{}^a + \Phi_c R_{bij}{}^a - \Phi_j R_{cib}{}^a$$
$$-\Phi_i R_{cjb}{}^a + 2\varphi \nabla_c R_{bji}{}^a + 2\varphi \nabla_j R_{cib}{}^a + A_c^h \nabla_h R_{bji}{}^a + A_c^h \nabla_j R_{hib}{}^a \Big) \Big\} E_{\bar{a}} \,,$$

ifadesi yazılır ve buradan

$$L_B \Gamma_{ji}^a = \nabla_j \nabla_i B^a + R_{hji}{}^a B^h = \Psi_j \delta_i^a + \Psi_i \delta_j^a + H_{ji}^h A_h^a + 2\varphi H_{ji}^a \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned} L_D \nabla &= \nabla_j \nabla_i D^a + D^h R_{hji}{}^a \\ &= -\Phi_j \delta_i^a - \Phi_i \delta_j^a - B^h \nabla_h H_{ji}^a + H_{ji}^h C_h^a + 2\psi H_{ji}^a - H_{jh}^a \nabla_i B^h - H_{hi}^a \nabla_j B^h \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned} B^h \nabla_h R_{bji}{}^a &= R_{bji}{}^h C_h^a - C_b^h R_{hji}{}^a - R_{bjh}{}^a \nabla_i B^h - R_{bhi}{}^a \nabla_j B^h \\ &\quad - A_b^h (\nabla_h H_{ji}^a - \nabla_j H_{hi}^a) - 2\varphi \nabla_b H_{ji}^a \end{aligned} \tag{4.80}$$

ve

$$\Phi_l R_{bji}{}^a = 0 \,,\ \Phi_l H_{ji}^a = 0 \tag{4.81}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece Teorem 4.7.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.7.1 in kullanılmasıyla aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

4.7.2. Teorem : (M_n, g) Riemannian manifoldu ve almost kompleks yapı ile birlikte synectic lift metriği vasıtasıyla tanımlanan $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna sahip $T(M_n)$ tanjant demeti verilmiş olsun. Eğer $T(M_n)$ tanjant demetinde afin olmayan bir infinitesimal holomorphically projective dönüşüm varsa M_n manifoldu lokal flat ve (0,2) tipli (a_{ji}) simetrik tensör alanının kovaryant türevi sıfırdır.

İspat : $\tilde{V}$, M_n manifoldunda afin olmayan bir infinitesimal holomorphically projective dönüşüm olsun. Teorem 4.7.1 de (3) denkleminin kullanılmasıyla $\nabla_i \|\Phi\|^2 = \nabla_i \|\Psi\|^2 = 0$ eşitliğini yazarız. Böylece $\|\Phi\|$ ve $\|\Psi\|$ M_n manifoldunda sabit olur. Şimdi M_n manifoldunun lokal flat ve (0,2) tipli (a_{ji}) simetrik tensör alanının kovaryant türevinin sıfır olmadığını kabul edelim. Buradan Teorem 4.7.1 de (10) ve (11) denklemleri vasıtasıyla $\Phi = \Psi = 0$ yazılır ve bu da $\tilde{V}$ vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olması demektir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, M_n manifoldu lokal flat ve (0,2) tipli (a_{ji}) simetrik tensör alanının kovaryant türevi sıfırdır.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde amaç tanjant demette alınan vektör alanlarının yine bu demette alınan özel liftlere (synectic lift, horizontal lift) göre infinitesimal afin dönüşüm ve infinitesimal izometri olma durumları incelemektir.

Bu çalışmada ilk olarak tanjant demette ${}^{S}g$ synectic metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{S}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. Daha sonra yine ${}^{S}g$ synectic metriğine göre bir X vektör alanının infinitesimal izometri olması için gerek ve yeter şart ispatlandı.

İkinci olarak, tanjant demette ${}^{H}g$ metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart ispatlandı. Daha sonra yine ${}^{H}g$ metriğine göre bir X vektör alanının infinitesimal izometri olması için gerek ve yeter şart ispatlandı.

Ayrıca, son olarak yine ${}^{S}g$ synectic metriği vasıtasıyla tanımlanan ${}^{S}\nabla$ konneksiyonuna göre bir X vektör alanının IHPT (Infinitesimal Holomorphically Projective Transformation) olma durumları incelendi ve bu vektör alanın IHPT olması için gerek ve yeter şart ispatlandı.

KAYNAKLAR

Aras, M., 2005. $^{S}g = ^{C}g + ^{V}a$ Metrikli Riemannian Manifoldu. Atatürk Üniversitesi, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Erzurum.

Bishop R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Mcmillan Company, New York, p.19-135.

Cengiz N. and Salimov A.A., 2002. Complete lifts of Derivations to Tensor Bundles. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) vol. 8, 75-82.

Davies, E.T., 1966. Some Applications of the Theory of Parallel Distributions, Hlavaty Testscript, 80-90.

Davies, E.T., 1969. On the Curvature of the Tangent Bundle, Annali di Mat.,(I∇), 81, 193-204.

Hasegawa I. and Yamauchi K., 1979. On infinitesimal holomorphically projective transformations in compact Kaehlerian manifolds. Hokkaido Math. J. 8, 214-219.

Hasegawa I. and Yamauchi K., 2003. Infinitesimal holomorphically projective transformations on the tangent bundles with horizontal lift connection and adapted almost complex structure. Journal of Hokkaido Univ. of Education, 53, 1-8.

Hasegawa I. and Yamauchi K., 2003. Infinitesimal projective transformations on the tangent bundles with lift connections. Scientiae Mathematicae Japonicae 57, 3: e7, 489-503.

Hasegawa I. and Yamauchi K., 2005. Infinitesimal holomorphically projective transformations on the tangent bundles with complete lift connection. Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol. 7, 42-48.

Ishihara S., 1957. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold, Tôhoku Math. . J. 9, 273-297.

Kobayashi S. and Nomızu K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers.

Ledger, A.J., and Yano, K., 1965. The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space, Jour. London Math. Soc., 40, 487-492.

Ledger, A.J., and.Yano, K, 1967. Almost Complex Structures on Tensör Bundles, Jour. Diff. Geom., 355-368.

Magden A. and Salimov A. A., 2001. Horizontal lifts of tensor fields to sections of the tangent bundle. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., Vol: 3, p.77- 80.

Mağden, A., Cengiz, N. and Salimov, A.A., 2004. Horizontal lifts of affinor structures and its applications, Applied Mathematics and Computation, 156, 255-261.

Mayers S. B. and Steenrod N. E., 1939. The group of Isometries of a Riemannian manifold. Annals of Math. 40, 400-416.

Nomizu K. and Yano K., 1964. On infinitesimal transformations preserving the curvature tensor field and its covariant differentials, Annales de l'institutFourier, tome 14, 2, 227-236.

Pavlov E., 1992. Conformal-holomorphic metrics. Tensor, New Ser. 51, No.1, 26-32.

Salimov A.A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Sasaki S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tohoku Math. Jour. J., 10, 338-358.

Tachibana S. and Ishihara S., 1960. On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds, Tôhoku Math. . J. 10, 77-101.

Tachibana S., 1960. Some theorems on locally product Riemannian spaces. Tohoku Math. J., 12, 281-292.

Tachibana, S. and Okumara M., 1962. On Almost-Complex Structure of Riemannian Spaces, Tohoku Math. Jour., 14,156-161.

Talantova N. V. and Shirokov A.P., 1975. A note on a metric in the tangent bundle. Izv.Vyssh. Uchebu. Zaved. Math. 6: 143-146.

Vishnevskii V.V., 1970. Affinor structures of affine connection spaces. Izv. Vuzov. Math., No 1, 12-23.

Vishnevskii V.V., Shirokov A.P. and Shurygin V.V., 1985. Spaces over algebras. Kazan Gos. University, Kazan, Russian.

Yano K., 1957. The Theory of Lie Derivatives and Its Applications, Amsterdam.

Yano K., 1959. Affine connections in an almost product space. Kodai Math. Sem. Rep. 11, 1-24.

Yano, K. and Kobayashi S., 1966. Prolongations of Tensor fields and Connections to Tangent Bundles, I. General Theory, Jour. Math. Soc. Japan, 18, 194-210.

Yano, K. and Ishahara, S., 1966. Differential Geometry in Tangent Bundle, Kodai Math. Sem. Rep., 18, 271-292

Yano, K. and Ishahara, S., 1967. Almost complex structures induced in tangent bundles Kodai Math. Sem. Rep., 19, 1-27.

Yano K. and Patterson E.M., 1967. Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles, Jour. of Math. Soc., Japan.

Yano K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436.

Yano K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker Inc., New York.

Yano K. and Kon M., 1984. Structure on manifolds. World Scientific, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Erzurum'un Olur İlçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lise öğrenimini de Ankara Hasanoğlan Atatürk Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başlayıp bunun yanında Erzurum Nevzat Karabağ Anadolu Öğretmen Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.