ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

TENSÖR DEMETTE LİFT TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Aydın GEZER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2008

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Aydın GEZER tarafından hazırlanan bu çalışma 02.01.2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Yusuf YAYLI	*İmza :*
Üye : Prof. Dr. Arif SALİMOV	*İmza :*
Üye : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN	*İmza :*
Üye : Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN	*İmza :*
Üye : Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza :*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

(imza)

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

TENSÖR DEMETTE LİFT TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Aydın GEZER

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde, C^{∞}-sınıfından olan M_n manifoldu üzerindeki (1,1) tipli tensör alanı $K_X Y$ ile belirlenmiş olan $D_{K_X Y}$ türevinin liftleri araştırıldı ve bu liftlerle, bilinen liftler arasındaki ilişki incelendi. Ayrıca (1,1) tipli tensör alanının sözde pür olarak adlandıracağımız kesit boyunca (p,q) tipli tensör demete tam liftin bileşenleri Tachibana operatörü vasıtasıyla hesaplandı. Son olarak, pür kesit boyunca (p,q) tipli tensör demete tam lifti alınan (1,1) tipli tensör alanın hemen hemen kompleks yapı olması için M_n manifoldu üzerindeki (1,1) tipli tensör alanın kompleks yapı olması gerektiği ispatlandı.

2008, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tensör demet, tam lift, hemen hemen kompleks yapı, pür kesit, Tachibana operatörü, holomorfik tensör alanı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF LİFT ON TENSOR BUNDLES

Aydın GEZER

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALIMOV

In this thesis, A derivation $D_{K_X Y}$ determined by a tensor field $K_X Y$ of type $(1,1)$ was investigated and discussed relations between lifts of $D_{K_X Y}$ and lifts of already known. In addition, it was determined components of complete lift of tensor fields of type $(1,1)$ along cross-section so-called pure to tensor bundle of type (p,q), $p>1$ by using Tachibana operator. Finally, it was proved that if $n-dimensional$ differentiable manifold M admits an complex structure, then the complete lift of tensor fields of type $(1,1)$ along pure cross-section is an almost complex structure on tensor bundle of type (p,q), $p>1$. The proofs depend on some generalizations of the notions of lifting derivations.

2008, 66 pages

Keywords: Tensor bundle, complete lift, almost complex structure, pure cross-section, Tachibana operator, holomorphic tensor field.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a ve değerli fikirlerinden faydalandığım Sayın Doç. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nejmi CENGİZ ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKCI'ya şükranlarımı sunarım

Çalışmalarım boyunca kendisinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güveninden dolayı eşime teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Aydın GEZER

Ocak 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T^*(M_n)$	M_n Manifoldunun Kotanjant Demeti
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu üzerinde (p,q) tipli Tensör Demet
σ_ξ	(p,q) tipli ξ Tensör Alanı Tarafından Tanımlanmış Pür Kesit
D	Türev operatörü
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi
Γ_{ij}^h	Cristoffel Semboli
$R_{ijk}{}^h$	Eğrilik Tensörü
T_{ij}^h	Burulma Tensörü
π	Tabii İzdüşüm
Φ	Tachibana Operatörü
C	Tam Lift
V	Dikey Lift
H	Yatay Lift

1. GİRİŞ

Diferensiyel Geometri objelerinin tensör demetlere liftlerinin (genişlemelerinin) incelenmesi, geometrinin hızlı bir şekilde gelişen bölümlerinden birisidir. $(1,0)$ tipli tensör demeti olan tanjant demette lift problemlerine, Yano ve Kobayashi (1966) çalışmasıyla başlanmıştır. Daha sonra bu çalışma referans alınarak bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Ama "lift" kavramı "genişleme" anlamında Yano ve Kobayashi'den daha önce yapılan Sasaki (1958)'nin çalışmalarında "devam" adı altında görülmektedir. Ayrıca Yano ve Petterson (1967) çalışmasında lift konusu, $(0,1)$ tipli bir tensör demeti olan kotanjant demet için de incelenmiştir. Yano ve Ishihara (1973) çalışmasında ise, hem tanjant hem de kotanjant demetlerdeki dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca Talantova ve Shirokov (1975) çalışmasında, tanjant demet ile dual cebir üzerinde inşa edilmiş holomorf manifoldlar arasında bir bağlantı elde edilmiş ve bu bağlantı lift konusunda milad kabul edilebilecek yeni bir yaklaşım ortaya çıkarmıştır. Bu yaklaşımın sonucu olarak sinjektik lift denilen liftlerin incelenmesine başlanmıştır. Benzer liftler yarım tanjant demette yapılmıştır (Vishnevskii 1983). Yüksek mertebeli tanjant demetlerde lift konusu plyural cebir ile bağlantılı olarak Morimoto (1968) ve Vishnevskii, Shirokov ve Shurygin (1985) çalışmalarında incelenmiştir.

(p,q) tipli tensör demette lift konusunun araştırılmasına Ledger ve Yano (1967) çalışmasıyla başlanmıştır. Bu çalışmada vektör alanın yatay ve tam liftleri ile türevleme işlemlerinin liftleri arasındaki bağlantılar araştırılmıştır. (1,1) tipli tensör demetin diferensiyel geometrisini Lai and Mok (2002)'de çalışmışlardır. Ayrıca Cengiz ve Salimov (2002) çalışmalarında, (p,q) tipli tensör demette türevlemelerin liftleri ile γ-operatör diye adlandırılan operatörler arasında bağlantı kurmuşlar ve vektör alanlarının lift teorisini daha da geliştirmişlerdir. (p,q) tipli tensör demette $(1,1)$ tipli tensör alanlarının liftleri araştırılmamıştır. Bu alanda yapılan diğer Salimov (1994), Mağden ve Salimov (2001) çalışmalarında da bu konu çözülmeye başlanmış ancak konu natural (doğal) çatıda yapılmıştır. $(1,q)$ tipli tensör demette $(1,1)$ tipli φ tensörünün ${}^{C}\varphi$ tam liftinin vektör alanının tam lifti olan ${}^{C}X$ ye etki etmesi sonucunda ortaya çıkan obje yine bir tam lift şeklindedir. Yani;

$${}^{C}\varphi({}^{C}X) = {}^{C}(\varphi(X))$$

dir. Ayrıca Mağden ve Salimov (2007) çalışmalarında $(0,q)$ tipli tensör demette $(1,1)$ tipli tensör alanının tam lifti araştırmışlar ve hemen hemen integrallenebilir cebirsel yapının kesit boyunca $(0,q)$ tipli tensör demette tam liftinin de cebirsel yapı olduğunu göstermişlerdir.

Tensör demette lift alma probleminin çözümünde Tachibana operatörü kullanılmıştır. Tachibana operatör teorisi ilk olarak Tachibana (1960, 1962) hemen hemen kompleks yapı ve genel afinor yapı için kullanmıştır. Daha sonra bu operatörün uygulamasıyla Yano (1965, 1966, 1968, 1973), Koto (1960, 1969) ve Ako gibi matematikçiler çalışmıştır. Hemen hemen kompleks yapı için bu operatörü tanjant demette Sekizawa (1969), Sato (1966) tarafından verilmiştir. Ayrıca Tachibana operatörü ile ilgili olarak Shirokov et al. (1985), Slenbodzinski (1964), Willmore (1968), Salimov (1992), Mağden ve Salimov (2001) çalışmışlardır.

Sunulan bu tezde $(1,1)$ tipli tensör alanlarının liftlerini (p,q) tipli tensör demetlere taşımak ve bu demette $(1,1)$ tipli tensör alanlarının tam liftini natural (doğal) olmayan çatılarda incelemektir. (p,q) tipli tensör demette lift sonucu elde edilmiş $(1,1)$ tipli tensör alanının hemen hemen kompleks yapı olabilmesini dikkate alırsak varacağımız sonuçların önemi görülmektedir. Bu amaçla ikinci ve üçüncü bölümlerde çalışmamızın anlaşılabilmesi için diferensiyellenebilir manifold, hemen hemen kompleks yapı, tanjant, kotanjant ve tensör demette liftler hakkında bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sırasıyla tensör demette özel tipli türevlerin liftleri araştırılmış ve bu liftlerle, bilinen liftler arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca $(1,1)$ tipli tensör alanının sözde pür olarak adlandıracağımız kesit boyunca (p,q) tipli tensör demete tam lifti Tachibana operatörü vasıtasıyla hesaplanmıştır. Son olarak pür kesit boyunca

(p,q) tipli tensör demete tam lifti alınan (1,1) tipli tensör alanının hemen hemen kompleks yapı olması için gerek ve yeter şart araştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

2.1.1. Tanım: X , Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \Re^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n-boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine de φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve harita (U,φ) şeklinde gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \Re^n$$

olur. Buradaki $x^1,...,x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

2.1.2. Tanım: Eğer X Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \quad \text{(A-indisler kümesi)}$$

ise, X e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

2.1.3. Tanım: X , Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X i örter, yani X , n-boyutlu topolojik manifolddur.
2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \ne \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne koordinatların dönüşümü $(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j),\ i,\ j = 1,...,n)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları ve u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ olması halinde, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2 şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jacobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

2.1.4. Tanım: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Haritaların C^k uzlaşması bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı C^k atlaslar kümesini denk atlasların ayrık denklik sınıflarına ayırır.

2.1.5. Tanım: X Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir.

C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir. X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \leq k)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ yapılara bakılacaktır.

2.1.6. Tanım: M **,** sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞-yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından difernsiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 1999) .

2.2. Tensör Alanları

2.2.1. Tanım: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p(M_n)$, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına $T_p(M_n)$ uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir.

f, M_n manifoldunda bir dönüşüm ise Xf de M_n manifoldunda

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunda bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

şeklinde yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i(x^1, ..., x^n), \quad i = 1, ..., n$$

dır.

2.2.2. Tanım: B_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j = 1, ..., q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*$, $i = 1, ..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\,(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir. Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda,\ \mu \in \Re$ olmak üzere

$$t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\,(\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \Re$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör denir ve $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere $s = p + q$ sayısına tensörün valentliği, (p, q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p, 0)$ tipli tensöre kontravaryant tensörler, $(0, q)$ tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

C^∞ sınıfından bir manifold M_n olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p, q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

2.2.3. Tanım: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p, q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p, q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1,\ q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, (1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise, her $x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. (0,1) tipli tensör alanları $\theta_1,...,\theta_p$ ve vektör alanları $X_1,...,X_q$ olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T(dx^{i_1},...,dx^{i_p},\partial_{j_1},...,\partial_{j_q})$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan (0,1) tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.2.1. Pür tensörler

2.2.4. Tanım: M_n manifoldu üzerinde $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanı verilmiş olsun. Eğer $t \in \Im_q^p(M_n)$ tensör alanı için

$$\varphi_{k_1}^{m} \xi_{mk_2 \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p} = \ldots = \varphi_{k_q}^{m} \xi_{k_1 k_2 \ldots m}^{h_1 \ldots h_p} = \varphi_{m}^{h_1} \xi_{k_1 \ldots k_q}^{m h_2 \ldots h_p} = \ldots = \varphi_{m}^{h_p} \xi_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 h_2 \ldots m} = \overset{*}{\xi}{}_{k_1 k_2 \ldots k_q}^{h_1 h_2 \ldots h_p}$$

şartı sağlanıyorsa, t ye φ ye göre pürdür denir. Vektörler ve kovektörler pür tensör olarak kabul edilir.

Pür tensörler aşağıdaki özelliklere sahiptir:

a) δ_j^i birim tensörü keyfi yapıya göre pürdür.
b) Pür tensörlerin toplamı pür tensördür.
c) Pür tensörlerin skalerle çarpımı pür tensör olur.
d) Pür tensörlerin simetrikleşme ve alterneleştirme işlemleri neticesinde bulunan tensörler de pür tensörlerdir.
e) Pür tensörlerin kontraksiyon işlemi sonucu yine pür tensör verir.

Diğer taraftan t ve g pür tensörlerse, $t \otimes g$ çarpımı pür tensör olmayabilir. Ancak t, (0,0) tipli ise pür kabul edilir. Eğer bu çarpımda kontraksiyon varsa sonuç pür tensördür. Örneğin t_{ij}, (0,2) tipli ve g^{ks}, (2,0) tipli tensörlerini alalım. Kontraksiyon sonucu

$$(t_{ik} g^{ks}) \varphi_j^i = (t_{ji} g^{ks}) \varphi_k^i = (t_{ji} g^{ik}) \varphi_k^s = (t_{jk} g^{ki}) \varphi_i^s$$

olarak bulunur yani pür tensördür.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

2.3.1. Tanım: M_n manifoldu üzerinde vektör alanlarının modülü $\Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

dönüşümü

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_Z(fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

Afin konneksiyonu γ eğrisinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{k}{a}^i,\ k=1,...n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$ nin bağımlılığı baz vektörlerin verilmiş eğri boyunca paralel kaydırılması kuralını ifade etsin. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d\,\underset{k}{a}^i \tag{2.1}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^{i}$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i v^i \tag{2.2}$$

yazılır. Burada $\underset{k}{a}^{i}$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\underset{k}{a}^{i} \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.2) ifadesi (2.1) da kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.3}$$

eşitliği elde edilir. (2.3) denkleminde ω_i^k,

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i \, d \underset{s}{a}^{k} \tag{2.4}$$

biçimindedir. (2.3) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.4) biçiminde dahil edilen ω_i^k objelerine konneksiyon (bağlantı) formları denir.

2.3.1. Teorem:

1. Konneksiyon formları $\underset{k}{a}^{i}$, $k = 1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdır.
2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ iki farklı baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0, \tag{2.5}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0. \tag{2.6}$$

şartlarını yazabiliriz. (2.5) ve (2.6) şartlarından, v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralını yazalım:

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}$$
$$\underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \dfrac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.7) deki ikinci eşitliğin diferensiyelini alırsak,

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i \, d\, \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.4) denkleminde (2.7) nin birinci eşitliği ve (2.8) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\, \underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} (dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i \, d\, \underset{k}{a}^{i'})$$

veya

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.9}$$

bulunur. (2.9) eşitliği ω_j^i konneksiyon formlarının, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Şimdi, kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

2.3.2. Tanım: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d(v^i \omega_i) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \tag{2.10}$$

eşitliği yazılabilir. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.11}$$

yazılır. (2.11) eşitliğini (2.10) ifadesinde yerinde yazarsak,

$$(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k) v^i = 0$$

bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.12}$$

biçiminde olur. Vektörün ve kovektörün (1-form) γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün de paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

verilmiş olsun. Vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde, Z fonksiyonunun diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} d\underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &\quad + \ldots + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots d\overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &= (dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{sj_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{si_2 \ldots i_p}_{sj_2 \ldots j_q} \\ &\quad + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q}) \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \end{aligned} \tag{2.13}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{sj_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{si_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q} \tag{2.14}$$

olarak alınırsa,

$$dZ = \delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.15}$$

elde edilir. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.14) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir. Tensörün mutlak diferensiyeli ile tüm eğri boyunca keyfi noktalarda uygulanmış tensörler arasındaki eşleme (2.15) eşitliği ile verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a) Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0\,,\ \delta\omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli bir tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b) Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta(\delta_i^j) = 0$$

olur.

(2.14) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1) $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,
2) $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,
3) $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$ -tensör çarpımını gösterir.
4) Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir

2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

2.3.3. Tanım: M diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyon verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan M diferensiyellenebilir manifolduna n - boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Bu tanımdaki lineerlik şartı şu şekilde ifade edilir: M manifoldunun keyfi X noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının X noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.16}$$

olarak yazılır. Burada v^i_k, v^i ye ve noktaya bağlı fonksiyondur. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + \omega^i_k v^k \tag{2.17}$$

olur. (2.16) ve (2.17) eşitliklerinden

$$\omega^i_k v^k = (v^i_s - \partial_s v^i) du^s \tag{2.18}$$

ifadesi bulunur. v^k, $\partial_s v^i$ ve v^i_s, u^i lerin fonksiyonlarıdır. ω^i_k formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω^i_k formları du^k nın lineer fonksiyonu olur. Yani,

$$\omega^i_k = \Gamma^i_{sk} du^s \tag{2.19}$$

olarak yazılır. Burada Γ^i_{sk} katsayıları afin uzayın bir noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi M de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ^i_{sk} afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.19) eşitliği kullanılarak

$$\omega^{i'}_{j'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} du^{k'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} A^{k'}_k du^k$$

eşitliği yazılabilir . Ayrıca

$$A^{j'}_j dA^i_{j'} = A^{j'}_j (\partial_k A^i_{j'}) du^k \tag{2.20}$$

olduğundan ve $A^{j'}_j A^i_{j'} = \delta^i_j$ eşitliğinin her iki tarafının ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$(\partial_k A^{j'}_j) A^i_{j'} + A^{j'}_j (\partial_k A^i_{j'}) = 0$$

$$\Rightarrow A^{j'}_j (\partial_k A^i_{j'}) = -(\partial_k A^{j'}_j) A^i_{j'}$$

olur. Bu son eşitlik (2.20) denkleminde kullanılırsa

$$A^{j'}_j dA^i_{j'} = -A^i_{j'} (\partial_k A^{j'}_j) du^k \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.21), (2.19) ve (2.9) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma^{i}_{kj} = A^{i}_{i'} A^{j'}_{j} A^{k'}_{k} \Gamma^{i'}_{k'j'} + A^{i}_{i'} A^{i'}_{kj} \tag{2.22}$$

olarak verilir. Burada $A^{i'}_{kj} = \partial_k A^{i'}_{j}$ biçimindedir.

(2.19) denklemini kullanılarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyeli

$$\delta v^{i} = (\partial_k v^{i} + \Gamma^{i}_{ks} v^{s}) du^{k} \tag{2.23}$$

biçiminde olur. (2.23) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^{i} = \partial_k v^{i} + \Gamma^{i}_{ks} v^{s} \tag{2.24}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür.

Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^{s}_{kj} \omega_s \tag{2.25}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür.

(2,19) eşitliğinden, (p,q) tipli $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (\partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{p}} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q}) du^{k} \tag{2.26}$$

biçiminde olur. (2.26) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre verilen $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{p}} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q} \tag{2.27}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türev tanımından, (p,q) tipli tensörünün kovaryant türevi $(p,q+1)$ tipli bir tensör olduğu görülür. Yani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık mertebesini bir artırır.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikler yazılır:

a) $\nabla_k (t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp g^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \nabla_k g^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

b) $\nabla_k (\lambda t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \mp \lambda \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, $\lambda \in F$ (F fonksiyonlar kümesi)

c) $\nabla_k (t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q}) = \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q} + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q}$

d) Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir.

2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1, ..., u^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonunun du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.28}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre, f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.29}$$

olmasıdır (Yano 1965).

Gradient kovektörü V_i nin kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.30}$$

biçimindedir. (2.30) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.29) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.31}$$

elde edilir. Burada

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} \tag{2.32}$$

olarak verilmiştir. (2.31) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli tensör olduğuna göre, S_{ij}^{k} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör ifade eder. (2.32) tensörüne, A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X , Y vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$S(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \tag{2.33}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanır.

Keyfi v^k vektörünün $\nabla_s v^i=\partial_s v^i+\Gamma_{sm}^{i}v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}\nabla_r\nabla_s v^i &= \partial_r\nabla_s v^i+\Gamma_{rm}^{i}\nabla_s v^m-\Gamma_{rs}^{m}\nabla_m v^i\\ &= \partial_r(\partial_s v^i+\Gamma_{sk}^{i}v^k)+\Gamma_{rm}^{i}(\partial_s v^m+\Gamma_{sk}^{m}v^k)-\Gamma_{rs}^{m}\nabla_m v^i\\ &= \partial_{rs}^{2}v^i+\partial_r\Gamma_{sk}^{i}v^k+\Gamma_{sk}^{i}\partial_r v^k+\Gamma_{rm}^{i}\partial_s v^m+\Gamma_{rm}^{i}\Gamma_{sk}^{m}v^k-\Gamma_{rs}^{m}\nabla_m v^i\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r ve s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i=R_{rsk}^{i}v^k-2S_{rs}^{k}\nabla_k v^i \tag{2.34}$$

denklemi elde edilir. (2.34) denkleminde

$$\begin{aligned}R_{rsk}^{i} &= \partial_r\Gamma_{sk}^{i}-\partial_s\Gamma_{rk}^{i}+\Gamma_{rm}^{i}\Gamma_{sk}^{m}-\Gamma_{sm}^{i}\Gamma_{rk}^{m}\\ &= 2(\partial_{[r}\Gamma_{s]k}^{i}+\Gamma_{[r|m|}^{i}\Gamma_{s]k}^{m})\end{aligned} \tag{2.35}$$

olarak alınmıştır. (2.34) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R_{rsk}^{i} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemannian-Christoffer tensörü denir.

(2.34) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılabilir:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k=-R_{rsk}^{m}\omega_m-2S_{rs}^{m}\nabla_m\omega_k\ , \tag{2.36}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi_i^j = R_{rsm}^j\varphi_i^m - R_{rsi}^m\varphi_m^j - 2S_{rs}^k\nabla_k\varphi_i^j , \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} &= R_{rsm}^{i_1}t_{j_1\ldots j_q}^{mi_2\ldots i_p} + \ldots + R_{rsm}^{i_p}t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots m} \\ &\quad - R_{rsj_1}^m t_{mj_2\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} - \ldots - R_{rsj_q}^m t_{j_1\ldots m}^{i_1\ldots i_p} - 2S_{rs}^k\nabla_k t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} . \end{aligned} \tag{2.38}$$

(2.37) formülüne φ_i^j afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.39}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmine bakalım. Bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, aynı bir X_n diferensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma, konneksiyonların birinden diğerine geçmeye, konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Aynı manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür. X_n manifoldu üzerinde Γ_{ij}^k ve $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m ,$$

$$\overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}_{km}^i v^m ,$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m \tag{2.40}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$T_{km}^i = \overline{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i \tag{2.41}$$

biçimindedir. (2.40) eşitliği ile verilen T^i_{km}, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon (gerilme) tensörü denir.

2.3.2. Teorem: T^i_{km}, (1,2) tipli tensör ve ∇ afin konneksiyonun katsayıları Γ^i_{km} olmak üzere (2.41) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}^i_{km}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.41) eşitliğinden

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij}$$

yazılır. Γ^k_{ij} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j (\overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} - T^{k'}_{i'j'}) + A^k_{k'} A^{k'}_{ij} \tag{2.42}$$

olur. Burada T^k_{ij} tensör olduğundan,

$$T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j T^{k'}_{i'j'} \tag{2.43}$$

eşitliği yazılabilir. (2.43) eşitliği (2.42) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} + A^k_{k'} A^{k'}_{ij}$$

olduğu bulunur. Bu ise $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ ler katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına dönüştüğünü ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim:

2.3.1. Sonuç: $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaler için

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{1+\lambda} \tag{2.44}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.44) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k} - \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}) \tag{2.45}$$

biçiminde yazılabilir. (2.45) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 2.3.1.Teoremine göre Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{2} \tag{2.46}$$

bulunur. $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonuna, $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

2.3.2. Sonuç: Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon verilmiş olsun. Bu durumda, $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k})$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} + 2S_{ij}^{k}, \ \tilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \tag{2.47}$$

yazılabilir. 2.3.1. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ ve Γ_{ji}^{k} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.3.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} = \tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^1,...,\overset{\circ}{u}{}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta^{i'}_k$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{2.48}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. (2.48) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i + \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p),\ A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.49}$$

biçiminde yazılır. (2.49) eşitliği O noktasında ve civarında $\det(A^{i'}_i) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.48) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.49) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i,\ A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.50}$$

olur. Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.50) ve (2.22) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \delta^{j'}_j \delta^{k'}_k \delta^i_{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta^i_{i'} \delta^{i'}_l \overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{k'j'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.48) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda

1. $R_{(rs)k}{}^i = 0,$
2. $R_{[rsk]}{}^i = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianci-Padov eşitliği).

eşitlikleri geçerlidir.

Bu eşitliklerin her üçünün de invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.51}$$

olarak gösterilsin. (2.51) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} = \nabla_k a_{ij} ,$$

$$\partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} = \nabla_i a_{jk} ,$$

$$\partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} = \nabla_j a_{ki} .$$

eşitlikleri yazılır. Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \tag{2.52}$$

bulunur. (2.52) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma^r_{ij} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}) \tag{2.53}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}) \tag{2.54}$$

biçimindedir. (2.54) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

2.3.4. Tanım: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} \mp e & e_s \neq e_n \\ 0 & e_s = e_n \end{cases}$,

n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.55}$$

olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.55) denkleminden

$$\delta e_{i_i \ldots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_i \ldots i_n} = 0 \tag{2.56}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.56) denklemiyle belirlenir. (2.56) şartı

$$\partial_k e_{i_i \ldots i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{2.57}$$

biçiminde yazılabilir. n–vektörün antisimetrikliğine göre (2.57) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12 \ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2 \ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12 \ldots s} = 0 \tag{2.58}$$

denklemine denk olur. $e_{12 \ldots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.58) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.59}$$

yazılabilir. Eş afin uzay bu şart ile de karakterize edilebilir. (2.59) eşitliği eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyenttir ve potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} \tag{2.60}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.61}$$

şart ile de karakterize edebiliriz.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,\ R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını göz önüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.62}$$

yazabiliriz. (2.61) ve (2.62) eşitlikleri eş afin konneksiyonun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile karakterize edilebileceğini gösterir.

2.3.5. Tanım: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik (0,2) tipli g tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunduğu uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g tensörüne metrik tensör de denir.

2.3.6. Tanım: Metrik uzayın g metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ ise böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

2.3.7. Tanım: Eğer Weyl uzay eş-afin uzay olursa bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.63}$$

şartı ile karakterize edilir. V_n Riemannian uzayın konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.64}$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.64) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ olmak üzere

1. $R_{(ij)kl} = 0$

2. $R_{[ijk]l} = 0$

3. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

4. $R_{ij(kl)} = 0$

5. $R_{ijkl} = R_{klij}$

eşitlikleri geçerlidir.

2.3.5. Riemannian manifoldu

Her bir $x \in M_n$ noktasında her $Y \in T_x(M_n)$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y) = 0$ eşitliğinde $X = 0$ olursa g ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n, g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right)$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian konneksiyonu denir.

2.4. Hemen Hemen Kompleks Yapı

M_n diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_n üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -I$ olan tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir. (M_n, φ) ise hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır. Eğer φ hemen hemen kompleks yapısı vasıtasıyla tanımlanan

$$N_{\varphi}(X,Y)=[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-[X,Y]$$

Nijenhuis tensörü sıfır olursa, φ hemen hemen kompleks yapı integrallenebilir yapı olur ve ona kompleks yapı denir.

Bir hemen hemen kompleks manifoldunda

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğine Hermitian metrik denir. Hermitian metrikli hemen hemen kompleks manifolda hemen hemen Hermitian manifold denir.

Bir hemen hemen Hermitian manifoldunda

$$\Omega(X,Y)=g(X,\varphi Y)=(g\circ\varphi)(X,Y)$$

esas 2-form olmak üzere

$$d\Omega=0$$

olan hemen hemen Hermitian manifolduna hemen hemen Kahler manifold denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir bir M_n manifoldunun P noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$ nin herhangi bir $\tilde{P} \in T_p(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet izdüşümü $\tilde{P} \to P$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{P}) = P$ olur. $\pi^{-1}(P) = \tilde{P} \in T_p(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının P noktasındaki fibre denir. Doğal olarak M_n de vektör alanı veya $T(M_n)$ in kesiti tanımlanır: $f : M_n \to T(M_n)$ dönüşümü $\pi \circ f = I_{M_n}$ (I_{M_n}, M_n de özdeşlik dönüşümüdür) şartını sağlarsa f e $T(M_n)$ in kesiti veya M_n üzerinde vektör alanı denir. Sıfır kesit M_n temel uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $T(M_n)$ de diferensiyellenebilir imbedding olmuş altmanifolddur.

U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar (x^h) olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi için $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times R^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada R^n, R üzerindeki $n-$boyutlu vektör uzayıdır. $\tilde{P} \in T_p(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h})$ doğal bazında $\tilde{P}$ nin $(y^h) = (x^{\bar{h}})$, $\bar{h} = n+1, ..., 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $P=\pi(\tilde{P})$ nin koordinatları (x^h), $h=1,...,n$ ile gösterilirse $\tilde{P}$ noktası uygun $(x^h,x^{\bar{h}})\to\tilde{P}\in\pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Böylelikle $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h,x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Buradaki $(x^h,x^{\bar{h}})$ ya, $\pi^{-1}(U)$ da (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $P=\pi\left(\tilde{P}\right)$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\left\{U',x^{h'}\right\}$ ise $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\tilde{P}$ noktasını ihtiva eder. $\pi^{-1}(U')$ ne göre $\tilde{P}$ noktasının indirgenmiş koordinatları $(x^{h'},y^{h'})$ ile verilir. Koordinatlar arasındaki dönüşüm

$$\begin{cases} x^{h'}=x^{h'}(x^h) \\ y^{h'}=\dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h}y^h \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklindedir. $x^{h'}(x^h)$, P noktasındaki $x^1,x^2,...,x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}}=y^h$, $x^{\bar{h}'}=y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{H'}=x^{H'}(x^H)\,,\ H=1,...,2n\,,\ H=(h,\bar{h})\,,\ h=1,...,n\,,\ \bar{h}=n+1,...,2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^{\bar{H}}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

matrisi ile verilir. (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^{h}=x^{h}(x^{h'}) \\ y^{h}=\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^H=x^H(x^{H'}) \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{\bar{H}}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \dfrac{\partial^{2} x^{h}}{\partial x^{h'}\partial x^{i'}} & \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir.

M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesinin $\Im_s^r(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini $\Im(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\Im_s^r(M_n)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini de $\Im_s^r(T(M_n))$ şeklinde göstereceğiz.

f, M_n de bir fonksiyon olsun. $T(M_n)$ tanjant demette ${}^{V}f$ fonksiyonuna bakalım. $f:M_n\to R$ ve $\pi:T(M_n)\to M_n$ olmak üzere ${}^{V}f=f\circ\pi$, ${}^{V}f:T(M_n)\to R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$$\tilde{P}\in\pi^{-1}(U),\ \ \tilde{P}=\left(x^{i},y^{i}\right)=\left(x^{i},x^{\bar{i}}\right)$$

koordinatlarına sahiptir.

$${}^{V}f\left(\tilde{P}\right)={}^{V}f\left(x,y\right)=f\circ\pi\left(\tilde{P}\right)=f\left(P\right)=f\left(x\right)$$

olduğundan ${}^{V}f\left(\tilde{P}\right)$ değeri fibre boyunca sabittir ve $P=\pi^{-1}\left(\tilde{P}\right)\in M_n$ noktasındaki $f\left(P\right)$ değerine eşit olur (Yano and Ishihara 1973).

$\tilde{X}\in\Im_0^1(T(M_n))$ alalım. Her $f\in\Im_0^0(M_n)$ için $\tilde{X}\,{}^{V}f=0$ ise buradaki $\tilde{X}$ e dikey vektör alanı denir. $\tilde{X}$ vektör alanının lokal koordinatlarda bileşenleri $\begin{pmatrix}\tilde{X}^{h}\\ \tilde{X}^{\bar{h}}\end{pmatrix}$ olsun.

$$\tilde{X}\,{}^{V}f=\tilde{X}^{i}\partial_i f+\tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}} f=0$$

buradan da

$$\tilde{X}^{i}=0 \text{ ve } \tilde{X}^{\bar{i}}\neq 0$$

bulunur.

X , M_n manifoldunda bir vektör alanı olsun. $T(M_n)$ de $\imath w = w_i dx^i$ olmak üzere ${}^V X(\imath w) = {}^V(w(X))$ ile ${}^V X$ bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına M_n manifoldundan $T(M_n)$ tanjant demete X vektör alanının dikey lifti denir. Şimdi ${}^V X$ dikey liftinin bileşenlerini bulalım:

$$ {}^V X(\imath w) = {}^V(w(X)) $$

$$ \tilde{X}^j(\partial_j w_i) + \tilde{X}^{\bar{j}} w_j = w_i X^i $$

$$ \tilde{X}^{\bar{j}} w_j = w_i X^i \,. $$

Buradan da

$$ \tilde{X}^{\bar{j}} = X^j $$

olur.

$$ {}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix} \tag{3.8} $$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

$f \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere $T(M_n)$ de $\imath(df) = y^s \partial_s f = \partial f = {}^C f$ dir. Buradaki ${}^C f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

$X \in \Im_0^1(M_n)$ olsun. ${}^C X\, {}^C f = {}^C(Xf)$ ile tanımlanan ${}^C X$ ye, X vektör alanının tam lifti denir. Şimdi ${}^C X = \begin{pmatrix} {}^C X^i \\ {}^C X^{\bar{i}} \end{pmatrix}$ bileşenlerini bulalım:

$$ {}^C X^i \partial_i\, {}^C f + {}^C X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}}\, {}^C f = y^s \partial_s (X^i \partial_i f) $$

$$ {}^C X^i \partial_i (y^s \partial_s f) + {}^C X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} (y^s \partial_s f) = y^s (\partial_s X^i) \partial_i f + y^s X^i \partial_s \partial_i f $$

$$ {}^C X^i = X^i \,,\; {}^C X^{\bar{i}} = y^s \partial_s X^i \,. $$

Buradan da

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^i \\ y^s \partial_s X^i \end{pmatrix} \tag{3.9} $$

olur

3.1.1. Kesit boyunca vektör alanının tam ve dikey liftleri

M_n manifoldunda bir vektör alanı tanjant demette bir kesit tanımlar. Biz şimdi bir vektör alanının, tensör demette kesit boyunca tam ve dikey liflerini araştıracağız.

M_n manifoldunda bir V vektör alanı verilsin. O zaman $P \in M_n$ noktasındaki V vektörünün değeri V_p olmak üzere $P \to V_p$ karşı koyma işlemi bir $\beta_V : M_n \to T(M_n)$ dönüşümünü tanımlar ve n-boyutlu $\beta_V(M_n)$ alt manifoldu V vektör alanı tarafından tanımlanan kesit olarak adlandırılır. Eğer M_n manifoldunda V vektör alanlarının lokal bileşenleri V^h ise, o zaman $\beta_V(M_n)$ kesiti lokal olarak $T(M_n)$ deki indirgenmiş $x^A = (x^h, y^h)$ koordinatlarına göre

$$ \begin{cases} x^h = x^h \\ y^h = V^h(x) \end{cases} \tag{3.10} $$

şeklinde ifade edilir. (3.10) ifadelerini x^j ye göre diferansiyelini alırsak, $\beta_V(M_n)$ e teğet olan n tane $B_{(i)}$ vektörlerinin, $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ B_i^A = \frac{\partial x^A}{\partial x^i} $$

veya

$$ B_{(i)} = \left(B_i^A\right) = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ \partial_i V^h \end{pmatrix} $$

şeklindedir.

Lokal bileşenleri X^h olan X vektör alanı için, lokal bileşenleri

$$BX = \left(B_i^{\ A} X^i\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ X^i \partial_i V^h \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

olan tanjant demette bir BX vektör alanı tanımlayabiliriz. Burada BX , $\beta_V\left(M_n\right)$ kesitine teğettir ve global olarak $\beta_V\left(M_n\right)$ boyunca tanımlıdır. $X \to BX$ karşı koyma işlemi, $B : \Im_0^1\left(M_n\right) \to \Im_0^1\left(\beta_V(M_n)\right)$ dönüşümünü tanımlar. Buradaki B dönüşümü, $\beta_V : M_n \to T\left(M_n\right)$ dönüşümünün diferensiyelidir ve $\Im_0^1(M_n)$ den $\Im_0^1(\beta_V(M_n))$ üzerine bir izomorfizmdir.

Diğer taraftan, y^h parametre olmak üzere, fibre lokal olarak

$$\begin{cases} x^h = sbt \\ y^h = y^h \end{cases}$$

ifade edildiği için,

$$C_{(i)} = \left(C_{(i)}^{\ \ A}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix}$$

vektör alanları fibreye teğettir. Lokal bileşenleri X^h olan $X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ için, lokal bileşenleri

$$CX = \left(C_{(i)}^{\ \ A} X^i\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

olan ve fibreye teğet olan CX vektör alanı tanımlanabilir. O zaman $X \to CX$ karşı koyma işlemi, $C : \Im_0^1\left(M_n\right) \to \Im_0^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ izomorfizm dönüşümünü tanımlar.

(3.11) ve (3.12) eşitliklerinden, $X, Y \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ için,

$$\left[BX, BY\right] = B\left[X, Y\right],\ \left[CX, CY\right] = 0$$

olduğu kolayca görülür.

M_n manifoldunda koordinat komşuluğu U olmak üzere, $\pi^{-1}\left(U\right)$ koordinat komşuluğunda, $\beta_V\left(M_n\right)$ kesiti boyunca $2n$ - lokal vektör alanı $B_{(i)}$ ve $C_{(i)}$

$$B_{(i)} = B\frac{\partial}{\partial x^i}\ ,\ C_{(i)} = C\frac{\partial}{\partial x^i}$$

şeklindedir. Burada $2n$-lokal vektör alanları $\beta_V\left(M_n\right)$ kesiti boyunca $\left\{B_{(i)}, C_{(i)}\right\}$ lokal çatı aileleri oluştururlar. Bu $\left\{B_{(i)}, C_{(i)}\right\}$ çatı aileleri, $\pi^{-1}\left(U\right)$ koordinat komşuluğunda $\beta_V\left(M_n\right)$ kesitinde adapte olunmuş çatı olarak adlandırılır.

Bir vektör alanının tam ve dikey liftlerinin tanımlarını dikkate alarak ve aynı zamanda (3.11) ve (3.2) den, kesit boyunca

$$^{C}X = BX + C\left(L_V X\right) \text{ ve } {}^{V}X = CX \tag{3.13}$$

formülleri elde edilir.

$B_{(\bar{i})} = C_{(i)}$ alındığında, $\beta_V\left(M_n\right)$ kesitinde adapte olunmuş çatı $\left\{B_{(i)}, B_{(\bar{i})}\right\}$ şeklinde yazılabilir. (3.13) den X vektör alanının $\beta_V\left(M_n\right)$ kesiti boyunca adapte olunmuş çatıya göre tam ve dikey liftleri sırasıyla

$$^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ L_V X^h \end{pmatrix},\ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.2. Kotanjant Demet

M_n diferensiyellenebilir n-boyutlu manifold ve $T_P^*(M_n)$ ise $P \in M_n$ noktasındaki kotanjant uzay yani P noktasındaki $T_P(M_n)$ tanjant uzayının dual uzayı olsun.

$$T^*(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P^*(M_n)$$

kümesine kotanjant demet denir.

M_n baz uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü kabul edelim. Burada (x^h), U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. R^n, R üzerinde $n-$boyutlu vektör uzayı olmak üzere $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizimdir. $\tilde{P} \in T_P^*(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, p) sıralı çifti ile gösterilir ve $p \in R^n$ kovektörünün bileşenleri $T_p^*(M_n)$ kotanjant uzayında dx^h doğal çatıya göre $\tilde{P}$ nın (p_i) bileşenleri ile verilir. U komşuluğunda $P = \pi(\tilde{P})$ noktasının koordinatları (x^h) $h = 1, ..., n$ ile gösterilirse, $\tilde{P}$ noktası uygun $(x^h, p_i) \to \tilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Dolayısıyla $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesinde (x^h, p_i) lokal koordinatlar sistemi elde edilmiş olur. Burada (x^h, p_i) lokal koordinatlar sistemine (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda koordinatlar denir.

$p = p_i dx^i$ $1-$formuna $T^*(M_n)$ kotanjant uzayın temel $1-$formu denir. p temel $1-$formunun dp dış diferensiyeli $2-$formdur ve $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda

$$dp = dp_i \wedge dx^i$$

olarak yazılır. Bu nedenle

$$dp = \frac{1}{2}\Im_{CB} dx^C \wedge dx^B$$

yazılırsa,

$$\left(\Im_{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_i^j & 0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) matrisi regüler olduğundan $\Im^{BA}\Im_{CB} = \delta_C^A$ olacak şekilde $\Im^{BA}$ ters matrisi vardır ve bu

$$\left(\Im^{BA}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T^*(M_n) \to M_n$ izdüşümü olmak üzere

$$^V f = f \circ \pi$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun kotanjant demette dikey lifti denir. Böylece tanımdan $\tilde{P} \in T_p^*(M_n)$ olmak üzere

$$^V f\left(\tilde{P}\right) = f\left(P\right)$$

elde edilir.

$w \in \Im_1^0\left(M_n\right)$ olmak üzere lokal bileşenleri

$$\tilde{w}^A = \tilde{w}_B \mathfrak{L}^{BA}$$

olan $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde vektör alanı elde edilir. Bu vektör alanına M_n manifoldunda w $1-$formunun dikey lifti denir ve $^V w$ ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973).

$^V w$ dikey lifti $T^*(M_n)$ kotanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre

$$^V w = \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. Açıkça $^V w$ bir dikey vektör alanıdır.

Verilen $X \in \Im_0^1(M_n)$ için, $\iota X = p_i X^i$ kotanjant demette bir fonksiyon tanımlar. X^h, U koordinat komşuluğunda X vektör alanının bileşenleri olmak üzere dış diferensiyel

$$d(\iota X) = p_i(\partial_a X^i)dx^a + X^i dp_i$$

ifadesi $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğuna göre bir 1-form tanımlar. Kotanjant demette bir vektör alanının tam lifti $^C X$

$$^C \tilde{X}^A = \tilde{X}_B \Im^{BA}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\tilde{X}_B$, $d(\iota X)$ in bileşenleridir. O zaman, $\pi^{-1}(U)$ deki (x^h, p_i) lokal koordinat sistemine göre tam lift $^C X$

$$\begin{pmatrix} X^h \\ -p_i(\partial_h X^i) \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir.

3.2.1. Kesit boyunca kotanjant demette tensör alanlarının tam ve dikey lifti

M_n manifoldunda θ 1-formu verildiğinde, bu 1-form vasıtasıyla $T^*(M_n)$ kotanjant demette bir kesit tanımlanabilir. Biz bu bölümde kotanjant demette kesit boyunca vektör alanının tam liftini ve 1-formun dikey liftini inceleyeceğiz.

M_n manifoldunda θ 1-formu verilsin. θ_p, M_n manifoldunda P noktasındaki θ 1-formunun değeri olmak üzere, $P \to \theta_p$ karşı koyma işlemi, $\beta_\theta : M_n \to T^*(M_n)$ dönüşümünü tanımlar. $\beta_\theta(M_n)$ kesiti, kotanjant demetin bir alt manifoldudur. Bu $\beta_\theta(M_n)$ alt manifoldu, θ tarafından tanımlanan kesit olarak adlandırılır. $\beta_\theta(M_n)$ kesiti, kotanjant demetteki (x^h, p_h) indirgenmiş koordinatlara göre lokal olarak

$$\begin{cases} x^h = x^h \\ p_h = \theta_h(x) \end{cases} \tag{3.15}$$

şeklinde ifade edilir. (3.15) denkleminin x^h lara göre diferensiyeli alındığında

$$B_i^A = \frac{\partial x^A}{\partial x^i}$$

bileşenlerine sahip n-lokal $B_{(i)}$ vektör alanları elde edilir. Buradaki $B_{(i)}$ vektör alanları $\beta_\theta(M_n)$ kesitine teğettirler. Böylece $B_{(i)}$, kotanjant demetteki indirgenmiş koordinatlara göre

$$B_{(i)} : \left(B_{(i)}{}^A\right) = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ \partial_i \theta_h \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir.

X^h bileşenlerine sahip herhangi bir X vektör alanı için, $\beta_\theta\left(M_n\right)$ kesiti boyunca bileşenleri

$$BX = \left(B_i^A X^i\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ X^i \partial_i \theta_h \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

olan BX vektör alanı tanımlanabilir.

O zaman (3.16) eşitliğiyle $B : \Im_0^1\left(M_n\right) \to \Im_0^1\left(\beta_\theta\left(M_n\right)\right)$ dönüşümü tanımlıdır. Buradaki B dönüşümü, $\beta_\theta : M_n \to T^*\left(M_n\right)$ dönüşümünün diferensiyelidir ve aynı zamanda bir izomorfizmdir.

Diğer taraftan, fibre lokal olarak

$$\begin{cases} x^h = sbt \\ p_h = p_h \end{cases} \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilir. (3.17) ifadesinin p_h lara göre diferensiyeli alınırsa, bileşenleri

$$C_{(i)} = \left(C_i^A\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_h^i \end{pmatrix}$$

olan n-lokal $C_{(\bar{i})} = {}^V\left(dx^i\right)$ vektör alanını elde ederiz. Bu $C_{(\bar{i})}$ vektör alanları fibreye teğettir. Aynı zamanda fibreye teğet olan ve bileşenleri

$$Cw : \left(C_i^A w_i\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

şeklinde olan Cw vektör alanları tanımlanabilir. O zaman (3.18) eşitliği $C : \Im_1^0\left(M_n\right) \to \Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ dönüşümünü tanımlar. Bu C dönüşümü $\Im_1^0\left(M_n\right)$ den $\Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ üzerine bir izomorfizmdir.

(3.16) ve (3.18) eşitliklerinden, her $X, Y \in \Im_0^1\left(M_n\right)$ ve her $\psi, w \in \Im_1^0\left(M_n\right)$ için

$$\left[BX, BY\right] = B\left[X, Y\right],\ \left[C\psi, Cw\right] = 0 \tag{3.19}$$

ifadeleri kolayca yazılabilir.

Biz şimdi $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $\beta_\theta(M_n)$ kesiti boyunca $B_{(i)} = B\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ve $C_{(i)} = Cdx^i$ $2n$-lokal vektör alanlarını düşünelim. Onlar $\beta_\theta(M_n)$ boyunca $\{B_{(i)}, C_{(i)}\}$ çatılarının bir lokal ailesi formundadırlar. $\{B_{(i)}, C_{(i)}\}$ çatısı, $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $\beta_\theta(M_n)$ kesitinin adapte olunmuş çatısı olarak adlandırılır.

X vektör alanının tam lifti ve w 1-formun dikey lifti tanımlarından ve aynı zamanda (3.16) ve (3.18) den, $\beta_\theta(M_n)$ kesiti boyunca

$$^C X = BX + C(-L_X\theta)$$

$$^V w = Cw$$

formüllerini elde ederiz. O zaman, X vektör alanının $\beta_\theta(M_n)$ kesiti boyunca $\{B_{(i)}, C_{(i)}\}$ çatısına göre tam lifti ve w 1-formunun dikey lifti sırasıyla

$$^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ -L_X\theta_h \end{pmatrix}, \quad {}^V w = \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Tensör Demet

M_n, C^∞ sınıfından $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $T_q^p(Q)$, M_n manifoldunun Q noktasındaki (p,q) tipli tensör uzay olsun.

$$T_q^p(M_n) = \bigcup_{Q\in M_n} T_q^p(Q)$$

ile tanımlanan $T_q^p(M_n)$ kümesine tensör demet denir.

M_n manifoldu üzerinde $\pi : T_q^p(M_n) \to M_n$ tabii izdüşümü verilsin. M_n manifoldunun bir Q noktasının U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatları x^j, $j = 1,...,n$ olarak verilir. $Q \in M_n$ noktasına karşılık gelen $T_q^p(M_n)$ demetinin elemanı olan $\tilde{Q} \in \pi^{-1}(U)$ noktasının lokal ifadesi

$$(x^j, t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) = (x^j, x^{\overline{j}}),\ x^{\overline{j}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},\ \overline{j} = n+1, \dots, n+n^{p+q}$$

biçimindedir. Burada $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, t tensörünün ∂_j tabii çatısına göre bileşenleridir. $T_q^p(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olarak $(x^j, x^{\overline{j}})$ ifadesini alabiliriz.

M_n manifoldu üzerindeki koordinat dönüşümü $x^{j'} = x^{j'}(x^j)$ biçiminde olduğundan $T_q^p(M_n)$ demetinde karşılık gelen koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{j'} = x^{j'}(x^j), \\ x^{\overline{j}'} = t_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_p}^{i'_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)} x^{\overline{j}}, \end{cases} \tag{3.20}$$

biçiminde olur. Burada $A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)} = A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_p}^{i'_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q}$, $A_{i_1}^{i'_1} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $A_{j'_1}^{j_1} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$ olarak alınmıştır. $J = (j, \overline{j})$, $J = 1, \dots, n+n^{p+q}$, $t_{(k)}^{(i)} = t_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}$ olmak üzere, (3.20) denkleminin Jacobian matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{J'}}{\partial x^J} \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} & \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\overline{j}}} \\[2ex] \dfrac{\partial x^{\overline{j}'}}{\partial x^j} & \dfrac{\partial x^{\overline{j}'}}{\partial x^{\overline{j}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^{j'} & 0 \\ t_{(k)}^{(i)} \partial_j (A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(k)}) & A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

olarak verilir.

M_n manifoldu üzerinde C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonların halkası $F(M_n)$ olmak üzere, C^∞ sınıfından (p,q) tipli tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülünü $\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

Eğer $\alpha \in \Im_p^q(M_n)$ ise kontraksiyonla $T_q^p(M_n)$ uzayında fonksiyon $\iota\alpha$ ile tanımlanır. Öyle ki, $U(x^i) \subset M_n$ koordinat komşuluğunda α nın lokal ifadesi

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_q} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$$

biçiminde ise $\iota\alpha$ nın $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğundaki $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlara göre lokal ifadesi

$$\iota\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

olur.

3.3.1. Tensör alanların tensör demete dikey lifti ve $\gamma -$operatörü

3.1. Yardımcı Teorem: $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_q^p(M_n)$ olsun. Her $\alpha \in T_p^q(M_n)$ için $\tilde{X}(\iota\alpha) = \tilde{Y}(\iota\alpha)$ ise $\tilde{X} = \tilde{Y}$ olur.

İspat: Eğer $\tilde{Z}(\iota\alpha) = (\tilde{X} - \tilde{Y})(\iota\alpha)$ olarak yazılırsa $\tilde{Z} = 0$ olduğunu göstermek yeterli olur. $\tilde{Z}$ nın $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\tilde{Z}^j$ bileşenleri

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(\iota\alpha) &= \tilde{Z}^j \partial_j (\alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) + \tilde{Z}^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}} (\alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) \\ &= \tilde{Z}^j t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_j \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \tilde{Z}^{\bar{j}} \alpha_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = 0\end{aligned}$$

denklemini sağlar. $\alpha \in \Im_p^q(M_n)$ keyfi olarak alındığından dolayı, homojen lineer denklem sisteminden

$$\tilde{Z}^j t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = 0, \; \tilde{Z}^{\bar{j}} = 0 \tag{3.22}$$

yazılır. (3.22) nin ilk denkleminde eğer $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin tüm noktalarında $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ nin tüm bileşenleri sıfır değil ise $\tilde{Z}$ bileşenleri sürekli olmasından dolayı M_n baz manifoldu üzerinde $\tilde{Z}^j = 0$ olur. Böylece $\pi^{-1}(U)$ un tüm noktalarında $\tilde{Z}^j = 0$ yazılır. (3.22) denkleminin ikincisi de dikkate alındığında $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\tilde{Z} = 0$ olduğu bulunur. Böylece $T_q^p(M_n)$ tensör demetinde $\tilde{Z} = 0$ yazılır.

$A \in \Im_q^p(M_n)$ olsun. $\alpha \in \Im_p^q(M_n)$ olmak üzere

$$ {}^{V}A(\iota\alpha) = \alpha(A) \circ \pi = {}^{V}(\alpha(A)) \tag{3.23} $$

eşitliğini sağlayan ${}^{V}A \in \Im_0^1(T_q^p(M_n))$ vektör alanına A vektör alanının $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey lifti denir (Ledger and Yano 1967). Burada ${}^{V}(\alpha(A))$ ifadesi $\alpha(A) \in F(M_n)$ fonksiyonunun dikey liftidir. Diğer taraftan $f \in F(M_n)$ keyfi fonksiyonun ${}^{V}f = f \circ \pi$ dikey lifti $\pi^{-1}(P) = T_q^p(P)$ fibresi boyunca sabittir.

${}^{V}A = {}^{V}A^k \partial_k + {}^{V}A^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}}$ olarak yazılırsa, $x^{\bar{k}} = t_{k_1 \ldots k_q}^{l_1 \ldots l_p}$ olmak üzere (3.23) eşitliğinden

$$ {}^{V}A^k t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \partial_k \alpha_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} + {}^{V}A^{\bar{k}} \alpha_{l_1 \ldots l_p}^{k_1 \ldots k_q} = \alpha_{l_1 \ldots l_p}^{k_1 \ldots k_q} A_{k_1 \ldots k_q}^{l_1 \ldots l_p} $$

sonucu elde edilir. 3.1 Yardımcı Teoremin ispatında kullanılan benzer yöntemle $T_q^p(M_n)$ nin $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre ${}^{V}A$ dikey liftinin bileşenleri

$$ {}^{V}A = \begin{pmatrix} {}^{V}A^j \\ {}^{V}A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \end{pmatrix} \tag{3.24} $$

olarak elde edilir.

$\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanının lokal koordinatlarla ifadesi

$$ \varphi = \varphi_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j $$

olarak verilmiş olsun. $T_q^p(M_n)$ tensör demette $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre $\gamma\varphi$ vektör alanı

$$ \begin{cases} \gamma\varphi = \left(\sum\limits_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} \varphi_m^{i_\lambda}\right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, & (p \geq 1,\ q \geq 0) \\ \tilde{\gamma}\varphi = \left(\sum\limits_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \varphi_{j_\mu}^{m}\right) \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, & (p \geq 0,\ q \geq 1) \end{cases} \tag{3.25} $$

olarak tanımlanır (Cengiz and Salimov 2002).

(3.21) den, $\gamma\varphi$, $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey vektör alanıdır. Biz $\gamma\varphi$ ye $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ afinorun $T_q^p(M_n)$ tensör demette dikey-vektör lifti olarak adlandıracağız. $\gamma\varphi$ dikey-vektör liftinin lokal koordinatlarla ifadesi

$$\gamma\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \varphi_{j_\mu}^{m} \end{pmatrix} \qquad (3.26)$$

olarak bulunur.

3.3.2. Türevlerin tam liftleri

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm tensör modüllerinin direkt toplamını $\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p(M_n)$ ile gösterelim. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$D : \Im(M_n) \to \Im(M_n)$$

dönüşümüne M_n manifoldu üzerinde türev operatörü denir.

a) $D(aS + bT) = aDS + bDT$, $\forall S, T \in \Im_q^p(M_n)$, $a, b \in R$,

b) D tensör alanının tipini korur.

c) $D(T_1 \otimes T_2) = (DT_1) \otimes T_2 + T \otimes (DT_2)$, $\forall T_1, T_2 \in \Im(M_n)$,

d) $D(cT) = c(DT)$, $c-$kontraksiyon.

Tensör türevinin tanımından, M_n üzerindeki $(1,1)$ tipli $I = (\delta_j^i)$ birim tensör alanı için

$$DI = 0 \qquad (3.27)$$

olur.

M_n manifoldunda D operatörü için

$$Pf = Df\,,\ f \in \Im(M_n) \tag{3.28}$$

olacak şekilde bir P vektör alanı mevcuttur.

Eğer M_n manifoldunun herhangi bir U koordinat komşuluğunda

$$D(\partial_i) = Q_i^h \partial_h \tag{3.29}$$

olarak alınırsa (3.27) eşitliğinden ve $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$ olmasından dolayı

$$D(dx^h) = -Q_i^h dx^i \tag{3.30}$$

elde edilir.

$\Im_p^q(M_n)$ modülünün α elemanı $\alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_q} \otimes dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p}$ biçiminde ifade edilmiş olsun. (3.29) ve (3.30) denklemlerinden $D\alpha$ nın bileşenleri

$$D\alpha : (\,p^m \partial_m \alpha_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} + \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots m \ldots j_q} Q_m^{j_\mu} - \sum_{\lambda=1}^{p} \alpha_{i_1 \ldots m \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} Q_{i_\lambda}^m) \tag{3.31}$$

olarak elde edilir. Burada p^m, (3.28) ile verilen $P \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanının bileşenleri olur. (p^h, Q_i^h) çiftine ise U koordinat komşuluğunda D türevinin bileşenleri denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerinde türev operatörü D olmak üzere $\alpha \in \Im_p^q(M_n)$ için 3.1 Yardımcı Teorem'e göre

$$^{C}D(\iota\alpha) = \iota(D\alpha) \tag{3.32}$$

olacak şekilde bir tek $^{C}D \in \Im_0^1(T_q^p(M_n)$ vektör alanı vardır. ^{C}D vektör alanına $T_q^p(M_n)$ tensör demetinde D nin tam lifti denir (Ledger and Yano 1967).

(3.31), (3.32) ve 3.1. Yardımcı Teorem'den ^{C}D vektör alanının $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre bileşenleri:

$$^{C}D = \begin{pmatrix} p^j \\ \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} Q_{j_\mu}^m - \sum_{\lambda=1}^{p} \alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} Q_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

şeklinde olur.

M_n manifoldu üzerinde D_1 ve D_2 türevleri verilmiş olsun. (3.33) kullanarak

$$\left[{}^C D_1, {}^C D_2\right] = {}^C\left[D_1, D_2\right]$$

elde edilir (Cengiz and Salimov 2001).

3.3.3. Lie türevinin tam lifti

$V \in \Im_0^1(M_n)$ olsun. $T_q^p(M_n)$ tensör demette V vektör alanının ${}^C V$ tam liftinin bileşenleri

$$^C V = \begin{pmatrix} ^C V^j \\ ^C V^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^j \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} \partial_m V^{i_\lambda} - \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \partial_{j_\mu} V^m \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

biçiminde verilmiştir (Salimov 1994).

L_V, V vektör alanına göre Lie türevi olsun. L_V,

$$L_V f = Vf, \ \forall f \in F(M_n)$$

$$L_V W = \left[V, W\right], \ \forall V, W \in \Im_0^1(M_n)$$

eşitliklerini sağlar. Burada $\left[V, W\right]$, V ve W vektör alanlarının Lie parantezidir. $\left[V, W\right]^h = V^i \partial_i W^h - W^i \partial_i V^h$ olduğu göz önüne alınarak Lie türevi koordinatlarla

$$L_V = \left(V^h, -\partial_i V^h\right) \tag{3.35}$$

şeklinde yazılabilir.

L_V nin tam lifti ise (3.32), (3.33) ve (3.35) eşitliklerinden

$$^C(L_V) = {}^C V$$

sonucu elde edilir (Cengiz and Salimov 2001).

3.3.4. Kovaryant türevin tam lifti

M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu ve V vektör alanına göre ∇_V kovaryant türevi tanımlanmış olsun. ∇_V

$$\nabla_V f = Vf$$

$$\nabla_{fV+gW} X = f\nabla_V X + g\nabla_W X,\ \forall f,g \in F(M_n),\ \forall V,W,X \in \Im_0^1(M_n)$$

şartlarını sağlayan bir tensör türevidir. ∇_V kovaryant türevi M_n manifoldu üzerinde

$$\nabla_V = (V^h, V^j \Gamma_{ji}^h) \tag{3.36}$$

bileşenlerine sahiptir. (3.33) ve (3.36) kullanılarak ${}^C(\nabla_V)$ tam liftinin bileşenleri

$${}^C(\nabla_V) = \begin{pmatrix} V^j \\ \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} V^j \Gamma_{j j_\mu}^m - \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} V^j \Gamma_{jm}^{i_\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

olur.

Şimdi M_n manifoldu üzerinde yeni bir $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonun

$$\breve{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - S(X,Y) = \nabla_X Y - (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])$$
$$= \nabla_Y X + [X,Y] \tag{3.38}$$

denklemiyle verildiğini kabul edelim. Burada $S(X,Y)$, ∇ afin konneksiyonun burulma tensörüdür. (3.38) eşitliğinden

$$\breve{\Gamma}_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$$

elde edilir. Burada $\breve{\Gamma}_{ji}^h$, $\breve{\nabla}$ yeni afin konneksiyonun bileşenleridir.

(3.26), (3.34) ve (3.37) formüllerinden

$${}^C V - {}^C(\nabla_V) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} (\partial_m V^{i_\lambda} + \Gamma_{jm}^{i_\lambda} V^j) - \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} (\partial_{j_\mu} V^m + \Gamma_{j j_\mu}^m V^j) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} (\partial_m V^{i_\lambda} + \breve{\Gamma}_{mj}^{i_\lambda} V^j) - \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\partial_{j_\mu} V^m + \breve{\Gamma}_{j_\mu j}^{m} V^j) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} (\breve{\nabla}_m V^j) - \sum_{\mu=1}^{q} t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\breve{\nabla}_{j_\mu} V^m) \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(\breve{\nabla} V) - \tilde{\gamma}(\breve{\nabla} V)$$

sonucu bulunur. Böylece

$$^{C}(\nabla_V) = {}^{C}V - \gamma(\breve{\nabla} V) + \tilde{\gamma}(\breve{\nabla} V) \tag{3.39}$$

elde edilir. (3.39) denkleminde eğer $\breve{\nabla} V = 0$ olursa

$$^{C}(\nabla_V) = {}^{C}V = {}^{C}(L_V)$$

bulunur.

∇ simetrik afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu takdirde $\breve{\nabla} V = \nabla V$ olur. (3.39) denkleminden

$$^{C}(\nabla_V) = {}^{C}V - \gamma(\nabla V) + \tilde{\gamma}(\nabla V)$$

$$= \begin{pmatrix} V^j \\ V^s \left(\sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{sj_\mu}^{m} t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{sm}^{i_\lambda} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p}\right) \end{pmatrix}$$

$$= {}^{H}V \tag{3.40}$$

eşitliği elde edilir. Burada ^{H}V, $T_q^p(M_n)$ tensör demette V vektör alanının yatay liftidir (Salimov 1994).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, çalışmamızda elde ettiğimiz bulgulara yer verilecektir.

4.1. $D_{K_X Y}$ Operatörü Tarafından Belirlenmiş Türevleme ve Onun Uygulamaları

M_n manifoldu üzerinde D türev operatörü her $f \in \Im(M_n)$ için $Df = 0$ şartını sağlasın. D türevini her $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ için $DX = \varphi X$ ile tanımlanan türeve φ ile tayin edilmiş türev denir ve D_φ ile gösterilir. $D_\varphi f = 0$ ve $D_\varphi X = \varphi X$ eşitliklerinden D_φ türevinin bileşenleri

$$D_\varphi : (0, \varphi_i^h),\ p^h = 0,\ Q_i^h = \varphi_i^h \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada φ_i^h, φ afinorun lokal bileşenleridir. (3.26), (3.33) ve (4.1) eşitliklerinden

$$^{C}(D_\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{j_1 \ldots m \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \varphi_{j_\mu}^{m} - \sum_{\lambda=1}^{p} \alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots m \ldots i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}$$

veya

$$^{C}(D_\varphi) = \tilde{\gamma}\varphi - \gamma\varphi \tag{4.2}$$

eşitlikleri elde edilir (Cengiz and Salimov 2002).

X vektör alanına göre ∇ burulmasız afin konneksiyonun Lie türevi olan $L_X \nabla$, (1,2) tipli bir tensör alanıdır ve herhangi $Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi biz (1,1) tipli $K_X Y$ tensör alanını

$$(K_x Y)Z = (L_X \nabla)(Y, Z) = \left[L_X, \nabla_Y\right] Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{4.4}$$

olacak şekilde tanımlayalım. (4.4) eşitliğinde gerekli kısaltmaları yaptığımızda ve $\varphi = K_X Y$ olmak üzere

$$D_{K_X Y} = \left[L_X , \nabla_Y \right] - \nabla_{[X,Y]} \tag{4.5}$$

D_φ türevlemesi verilmiş olur. Eğer (4.5) eşitliğinin her iki tarafının tam lifti alınırsa (4.2) denkleminden

$$\tilde{\gamma}(K_X Y) - \gamma(K_X Y) = {}^C(D_{K_X Y}) = {}^C\left[L_X , \nabla_Y \right] - {}^C(\nabla_{[X,Y]}) \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. (3.40) ve (4.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(K_X Y) - \gamma(K_X Y) = {}^C(D_{K_X Y}) &= \left[{}^C(L_X), {}^C(\nabla_Y) \right] - {}^C(\nabla_{[X,Y]}) \\ &= \left[{}^C X , {}^H Y \right] - {}^H \left[X , Y \right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. Buradan da aşağıdaki Teoremi ifade edebilir:

4.1.1. Teorem: Her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$\left[{}^C X , {}^H Y \right] = {}^H \left[X , Y \right] + \tilde{\gamma}(K_X Y) - \gamma(K_X Y) \tag{4.8}$$

dir.

$L_X \nabla = 0$ ise $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanına infinitesimal afin dönüşüm denir. O zaman (4.3) ve (4.8) eşitliklerinden aşağıdaki Teorem ifade edilebilir:

4.1.2. Teorem: $X \in \Im_0^1(M_n)$ infinitesimal afin dönişüm ise

$$\left[{}^C X , {}^H Y \right] = {}^H \left[X , Y \right] \tag{4.9}$$

dir.

(4.9) denkleminde, $\nabla X = 0$ olması durumunda, ${}^C X = {}^H X$ olur. Bu durumda aşağıdaki Teoremi yazabiliriz.

4.1.3. Teorem: X , Riemannian kovaryant türevi sıfır olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\left[{}^H X , {}^H Y \right] = {}^H \left[X , Y \right]$$

dır. Yani yatay lift alma işlemi ${}^{H}:\Im_0^1(M_n)\to\Im_0^1(T_q^p(M_n))$ bir homomorfizmdir.

4.1.4. Teorem: $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ ve $F,G\in\Im_1^1(M_n)$ için

a) $\left[\tilde{\gamma}F-\gamma F,\tilde{\gamma}G-\gamma G\right]=\tilde{\gamma}\left[F,G\right]-\gamma\left[F,G\right]$

b) $\left[{}^{C}X,\tilde{\gamma}F-\gamma F\right]=\tilde{\gamma}(L_X F)-\gamma(L_X F)$

c) $\left[{}^{H}X,\tilde{\gamma}F-\gamma F\right]=\tilde{\gamma}(L_X F+(\nabla X)F-F(\nabla X))-\gamma(L_X F+(\nabla X)F-F(\nabla X))$

dır.

İspat:

a) $F,G\in\Im_1^1(M_n)$ için

$$\left[D_F,D_G\right]=D_{[F,G]} \tag{4.10}$$

türevlemesini tanımlayabiliriz. Burada $\left[F,G\right]=F\circ G-G\circ F$ şeklinde tanımlanmıştır. Eğer (4.10) eşitliğinin her iki tarafının tam liftini alırsak,

$$\begin{aligned}\left[\tilde{\gamma}F-\gamma F,\tilde{\gamma}G-\gamma G\right]&=\left[{}^{C}(D_F),{}^{C}(D_G)\right]={}^{C}\left[D_F,D_G\right]={}^{C}(D_{[F,G]})\\&=\tilde{\gamma}\left[F,G\right]-\gamma\left[F,G\right]\end{aligned}$$

olur.

b) $\left[L_X,D_F\right]=L_X D_F-D_F L_X$ türevlemesini düşünelim. Gerçekten, $f\in F(M_n)$ için

$$\left[L_X,D_F\right]f=L_X D_F f-D_F L_X f=-D_F(Xf)=0$$

olduğundan, $\left[L_X,D_F\right]\in\Im_1^1(M_n)$ tarafından tanımlanan

$$\left[L_X,D_F\right]=D_{[L_X,D_F]} \tag{4.10}$$

türevlemesi tanımlanabilir. (4.10) eşitliğinin her iki tarafının tam lifti alınırsa,

$$\left[{}^{C}X,\tilde{\gamma}F-\gamma F\right]={}^{C}\left[L_X,D_F\right]={}^{C}(D_{[L_X,D_F]}) \tag{4.11}$$

elde edilir. $(L_X F)Y=L_X(D_F Y)-D_F(L_X Y)=L_X(FY)-F(L_X Y)$ eşitliğinden, $L_X F=\left[L_X,D_F\right]$ eşitliği elde edilir. (4.11) denkleminden

$$\left[{}^{C}X, \tilde{\gamma}F - \gamma F\right] = {}^{C}(D_{[L_X, D_F]}) = {}^{C}(D_{L_X F})$$
$$= \tilde{\gamma}(L_X F) - \gamma(L_X F)$$

sonucu elde edilir.

c) (a), (b) ve (3.40) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\left[{}^{H}X, \tilde{\gamma}F - \gamma F\right] &= \left[{}^{C}X + \tilde{\gamma}(\nabla X) - \gamma(\nabla X), \tilde{\gamma}F - \gamma F\right] \\ &= \left[{}^{C}X, \tilde{\gamma}F - \gamma F\right] + \left[\tilde{\gamma}(\nabla X) - \gamma(\nabla X), \tilde{\gamma}F - \gamma F\right] \\ &= \left[{}^{C}X, {}^{C}(D_F)\right] + \left[{}^{C}(D_{(\nabla X)}), {}^{C}(D_F)\right] \\ &= \tilde{\gamma}(L_X F) - \gamma(L_X F) + \tilde{\gamma}\left[(\nabla X), F\right] - \gamma\left[(\nabla X), F\right] \\ &= \tilde{\gamma}(L_X F + (\nabla X)F - F(\nabla X)) - \gamma(L_X F + (\nabla X)F - F(\nabla X))\end{aligned}$$

olur.

4.2. Tensör Demette Kesit

4.2.1. Kesit boyunca tensör demete tam lift, dikey lift ve $\gamma -$ operatörü

M_n manifoldu üzerinde $\xi \in \Im_q^p(M_n)$ tensör alanı verilmiş olsun. $\pi \circ \sigma_\xi = id_{M_n}$ olmak üzere $\sigma_\xi : M_n \to T_q^p(M_n)$ dönüşümüne, ξ ile verilmiş kesit denir. Burada π tabii izdüşümüdür.

σ_ξ dönüşümü, $x \in M_n$ noktasına $x \to \xi_x$ tensörünü karşılık getirir. $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti, $T_q^p(M_n)$ nün $n-$boyutlu bir altmanifoldudur. Diğer taraftan ξ tensör alanı $\xi_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p}(x^k)$ lokal birleşenlerine sahipse, $T_q^p(M_n)$ tensör demetin $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti $(x^k, x^{\bar{k}})$ koordinatlarına göre lokal olarak

$$\begin{cases} x^k = x^k \\ x^{\bar{k}} = \xi_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p}(x^k) \end{cases} \tag{4.12}$$

şeklinde ifade edilir. (4.12) denkleminin x^j ye göre diferensiyeli, $\sigma_\xi(M_n)$ kesitinde B_j ile gösterilir ve $n-$ tanjant vektör alanını verir. B_j vektör alanı, $T_q^p(M_n)$ demette $\left\{\partial_k, \partial_{\bar{k}}\right\}$ tabii çatıya göre

$$(B_j^K) = (\frac{\partial x^K}{\partial x^j}) = \begin{pmatrix} \delta_j^k \\ \partial_j \xi_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

bileşenlerine sahiptir.

Diğer taraftan, fibre lokal olarak

$$\begin{cases} x^k & = const, \\ t_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p} & = t_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p}, \end{cases} \tag{4.14}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $t_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p}$ parametreler olarak göz önüne alınmıştır. Böylece (4.14) denkleminin $x^{\bar{j}} = t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ ye göre diferensiyeli, fibrenin $C_{\bar{j}}$ ile gösterilen n^{p+q} tanjant vektör alanını verir ve $T_q^p(M_n)$ demette $\left\{\partial_k, \partial_{\bar{k}}\right\}$ tabii çatıya göre

$$(C_{\bar{j}}^K) = (\frac{\partial x^K}{\partial x^{\bar{j}}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{k_1}^{j_1} \ldots \delta_{k_q}^{j_q} \delta_{i_1}^{h_1} \ldots \delta_{i_p}^{h_p} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

şeklinde olur.

$\pi^{-1}(U) \subset T_q^p(M_n)$ komşuluğunda $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti boyunca B_j ve $C_{\bar{j}}$, $n + n^{p+q}$ lokal vektör alanlarını göz önüne alalım. Bu vektör alanları $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti boyunca $\left\{B_j, C_{\bar{j}}\right\}$ ile gösterilen lokal bir çatı ailesi oluşturur. Bu çatıya $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda adapte olunmuş $(B, C)-$çatısı denir.

$V \subset T_q^p(M_n)$ vektör alanının (p,q) tipli tensör demetinin $\sigma_\xi(M_n) \subset T_q^p(M_n)$ kesiti boyunca $T_q^p(M_n)$ demetine ${}^C V$ tam liftinin $\left\{B, C\right\}$ çatısındaki koordinatlarının

$${}^C V = \begin{pmatrix} {}^C\tilde{V}^h \\ {}^C\tilde{V}^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^h \\ -L_V \xi_{h_1 \ldots h_q}^{k_1 \ldots k_p} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

biçiminde olduğunu gösterelim: Burada L_V, V vektör alanına göre Lie diferensiyelleme operatörüdür. $i=1,...,n$, $\bar{i}=n+1,...,n+n^{p+q}$ olmak üzere $\{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ doğal çatısında $V \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanının $T_q^p(M_n)$ tensör demetine $\sigma_\xi(M_n) \subset T_q^p(M_n)$ kesiti boyunca tam lifti

$$
{}^C V^A = \begin{pmatrix} {}^C V^h \\ {}^C V^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^h \\ \sum_{\lambda=1}^{p} \xi_{h_1...h_q}^{k_1...m...k_p} \partial_m V^{k_\lambda} - \sum_{\mu=1}^{q} \xi_{h_1...m...h_q}^{k_1...k_p} \partial_{h_\mu} V^m \end{pmatrix} \tag{4.17}
$$

biçimindedir (Salimov 1994). $\{B, C\}$ çatısında ${}^C V$ nin tam lifti

$$
{}^C V^A = {}^C \tilde{V}^i B_i^{\ A} + {}^C \tilde{V}^{\bar{i}} C_{\bar{i}}^{\ A} \tag{4.18}
$$

olarak yazılabir. (4.18) eşitliğinde $A=h$ alındığında,

$$
{}^C V^h = {}^C \tilde{V}^i \delta_i^h = {}^C \tilde{V}^h
$$

olur. (4.18) eşitliğinden ${}^C \tilde{V}^h = V^h$ bulunur. $A = \bar{h}$ olursa,

$$
\sum_{\lambda=1}^{p} \xi_{h_1...h_q}^{k_1...m...k_p} \partial_m V^{k_\lambda} - \sum_{\mu=1}^{q} \xi_{h_1...m...h_q}^{k_1...k_p} \partial_{h_\mu} V^m = {}^C \tilde{V}^i B_i^{\ \bar{h}} + {}^C \tilde{V}^{\bar{i}} C_{\bar{i}}^{\ \bar{h}}
$$

$$
= V^i \partial_i \xi_{h_1...h_q}^{k_1...k_p} + {}^C \tilde{V}^{\bar{h}}
$$

elde edilir. Buradan

$$
{}^C \tilde{V}^{\bar{h}} = -L_V \xi_{h_1...h_q}^{k_1...k_p}
$$

bulunur. Böylece ${}^C V$ tam lifti

$$
{}^C V = V^i B_i + (-L_V \xi_{h_1...h_q}^{k_1...k_p}) C_{\bar{i}} \tag{4.19}
$$

biçiminde yazılabilir. Benzer şekilde, $A \in \Im_q^p(M_n)$ ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanlarının $\sigma_\xi(M_n) \subset T_q^p(M_n)$ kesiti boyunca $T_q^p(M_n)$ demetine ${}^V A$ dikey liftinin ve $\gamma\varphi$ dikey-vektör liftinin $\{B, C\}$ çatısındaki koordinatları sırasıyla

$$
\gamma\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} \xi_{j_1...j_q}^{i_1...m....i_p} \varphi_m^{i_\lambda} \end{pmatrix}, \tag{4.20}
$$

$$
\tilde{\gamma}\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu=1}^{q} \xi_{j_1...m....j_q}^{i_1...i_p} \varphi_{j_\mu}^m \end{pmatrix}, \tag{4.21}
$$

$$
{}^{V}A = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \end{pmatrix} \tag{4.22}
$$

şeklindedir.

S, M_n manifoldunda (1,2) tipli tensör alanı olsun. Bu durumda γS ve ${}^{V}(S \circ \xi)$ tensör alanları adapte olunmuş (B,C)-çatıya göre $\sigma_\xi(M_n)$ kesiti boyunca

$$
\gamma S = ((\tilde{\gamma}\tilde{S})^{I}_{J}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} S^{j_\lambda}_{jm} \xi^{j_1 \dots m \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.23}
$$

$$
({}^{V}(S \tilde{\circ} \xi)^{I}_{J}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^{j_1}_{jm} \xi^{m j_2 \dots j_p}_{i_1 \dots i_q} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.24}
$$

bileşenlerine sahip afinor alanlarıdır. Burada $S^{j_1}_{jm}$, (1,2) tipli S tensör alanının M_n manifoldundaki lokal bileşenleridir.

4.2.2. Afinor alanlarının pür kesit üzerine tam liftleri

Her $X_1, X_2, \dots, X_q \in \Im^1_0(M_n),\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \Im^0_1(M_n)$ elemanları için;

$$
\begin{aligned}
&\xi(\varphi X_1, X_2, \dots, X_q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \xi(X_1, \varphi X_2, \dots, X_q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \dots = \\
&= \xi(X_1, X_2, \dots, \varphi X_q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \xi(X_1, X_2, \dots, X_q, \varphi' \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \\
&= \xi(X_1, X_2, \dots, X_q, \alpha_1, \varphi' \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \dots = \xi(X_1, X_2, \dots, X_q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \varphi' \alpha_p)
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

şartını sağlayan $\xi \in \Im^p_q(M_n)$ tensör alanına, $\varphi \in \Im^1_1(M_n)$ ye göre pürdür denir. Burada $X \in \Im^1_0(M_n)$ $, \alpha \in \Im^0_1(M_n)$ için $(\varphi' \alpha)(X) = \alpha(\varphi X)$ şeklinde tanımlanmıştır (Tachibana 1960). Özellikle, vektörlerin ve kovektörlerin pür olduğu düşünülecektir.

φ ye göre pür olan tüm $\xi \in \Im^p_q(M_n)$ tensör alanları bir modül tanımlar. Bu modülü $\overset{*}{\Im}{}^p_q(M_n)$ ile gösterelim. Şimdi, $\xi \in \overset{*}{\Im}{}^p_q(M_n)$, $p > 1$, $q \geq 0$ tarafından tanımlanan $\sigma^\varphi_\xi(M_n)$ pür kesitini düşünelim:

Lokal vektör alanları

$$ {}^{C}X_{(j)} = {}^{C}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right) = {}^{C}\left(\delta_{j}^{h}\frac{\partial}{\partial x^{h}}\right) = \begin{pmatrix} \delta_{j}^{h} \\ 0 \end{pmatrix} $$

ve

$$ \begin{aligned} {}^{V}X^{(\bar{j})} &= {}^{V}(\partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_p} \otimes dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_q}) \\ &= {}^{V}(\delta_{h_1}^{i_1} \ldots \delta_{h_q}^{i_q} \delta_{j_1}^{k_1} \ldots \delta_{j_p}^{k_p} \partial_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{k_p} \otimes dx^{h_1} \otimes \ldots \otimes dx^{h_q}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{h_1}^{i_1} \ldots \delta_{h_q}^{i_q} \delta_{j_1}^{k_1} \ldots \delta_{j_p}^{k_p} \end{pmatrix} \end{aligned} $$

$j = 1,\ldots,n$, $\bar{j} = n+1,\ldots,n+n^{p+q}$, $\pi^{-1}(U)$ deki vektör alanlarının modülünü örter. Böylece herhangi bir tensör alanı, lokal vektör alanları ${}^{C}X_{(j)}$ ve ${}^{V}X^{(\bar{j})}$ vasıtasıyla $\pi^{-1}(U)$ da tanımlanabilir. O zaman, $\sigma_{\xi}^{\varphi}(M_n)$ pür kesit boyunca ${}^{C}\varphi \in \Im_1^1(T_q^p(M_n))$ tensör alanını

$$ \begin{cases} {}^{C}\varphi({}^{C}V) = {}^{C}(\varphi(V)) - \gamma(L_V\varphi) + {}^{V}((L_V\varphi)\circ\xi), \ \forall V \in \Im_0^1(M_n), & (i) \\ {}^{C}\varphi({}^{V}A) = {}^{V}(\varphi(A)), \ \forall A \in \Im_q^p(M_n), & (ii) \end{cases} \tag{4.26} $$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada $\varphi(A) \in \Im_q^p(M_n)$, $((L_V\varphi)\circ\xi)(X_1,\ldots,X_q;\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ $= \xi(X_1,\ldots,X_q;(L_V\varphi)'\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ şeklindedir ve ${}^{C}\varphi$ tensör alanı, $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanının $\sigma_{\xi}^{\varphi}(M_n)$ boyunca $T_q^p(M_n)$, $p > 1$, $q \geq 0$ tensör demete tam lifti olarak adlandırılır. Özellikle, $p = 1$, $q > 0$ alınırsa, o zaman

$$ \gamma(L_V\varphi) = {}^{V}((L_V\varphi)\circ\xi) $$

olur. Bu eşitlik (4.26) de yerine yazılırsa,

$$ {}^{C}\varphi({}^{C}V) = {}^{C}(\varphi(V)), \ {}^{C}\varphi({}^{V}A) = {}^{V}(\varphi(A)) $$

elde eldir (Salimov and Mağden 1998).

4.2.1. Sonuç: (4.26) denklemi $\sigma_{\xi}^{\varphi}(M_n)$ pür kesiti boyunca ${}^{C}L(\iota\alpha) = \iota(L_V\alpha)$ denkleminin afinor alanlarına bir genişlemesidir.

$\sigma_{\xi}^{\varphi}(M_n)$ pür kesitinin adapte olunmuş (B,C)-çatısına göre, ${}^{C}\varphi$ tensör alanının bileşenleri ${}^{C}\tilde{\varphi}_{L}^{K}$ olsun. (4.21), (4.22), (4.23) ve (4.25) den

$$\begin{cases} {}^{C}\tilde{\varphi}_{L}^{K}\,{}^{C}\tilde{V}^{L} = {}^{C}(\varphi\tilde{(}V))^{K} - (\gamma(\tilde{L}_{V}\varphi))^{K} + {}^{V}((L_{V}\varphi\tilde{)}\circ\xi)^{K}, & (i) \\ {}^{C}\tilde{\varphi}_{L}^{K}\,{}^{V}\tilde{A}^{L} = {}^{V}(\varphi\tilde{(}A))^{K}, & (ii) \end{cases} \tag{4.27}$$

elde edilir. Burada $({}^{V}(\varphi\tilde{(}A))^{K}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{m}^{h_1} A_{k_1 \ldots k_q}^{m h_2 \ldots h_p} \end{pmatrix}$, ${}^{V}((L_{V}\varphi\tilde{)}\circ\xi)^{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ (L_{V}\varphi_{m}^{i_1})\xi_{k_1 \ldots k_q}^{m h_1 \ldots h_p} \end{pmatrix}$ ve

$\gamma(\tilde{L}_{V}\varphi)^{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p}((L_{V}\varphi)_{m}^{h_\lambda})\xi_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots m \ldots h_p} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

İlk olarak, $K = k$ olması durumunu düşünelim. Bu durumda (4.27) denklemlerindeki (i) eşitliği

$${}^{C}\tilde{\varphi}_{l}^{k}\,{}^{C}\tilde{V}^{l} + {}^{C}\tilde{\varphi}_{\bar{l}}^{k}\,{}^{C}\tilde{V}^{\bar{l}} = {}^{C}(\varphi\tilde{(}V))^{k} = (\varphi(V))^{k} = \varphi_{l}^{k}V^{l} \tag{4.28}$$

şekline dönüşür. (4.28) eşitliğinin sağ tarafı sadece x^{i} baz koordinatlarına bağlı fonksiyonlar olduğu için, (4.28) eşitliğinin sol tarafı da x^{i} baz koordinatlarına bağlı fonksiyonlar olmalıdır. Bu durumda, ${}^{C}V^{\bar{l}}$ fibre koordinatlara bağlıdır. (4.28) den

$${}^{C}\tilde{\varphi}_{\bar{l}}^{k} = 0 \tag{4.29}$$

sonucu bulunur. (4.28) ve (4.29) den,

$${}^{C}\tilde{\varphi}_{l}^{k}\,{}^{C}\tilde{V}^{l} = {}^{C}\tilde{\varphi}_{l}^{k}V^{l} = \varphi_{l}^{k}V^{l}$$

elde eldir. Burada V^{i}, keyfi seçilmiş bir elemandır. Bu da

$${}^{C}\tilde{\varphi}_{l}^{k} = \varphi_{l}^{k} \tag{4.30}$$

olduğunu gösterir.

$K = k$ olduğunda, (4.27) denkleminin (ii) eşitliği, (4.22) ve (4.29) vasıtasıyla yeniden yazıldığında sağlandığı görülür.

$K = \bar{k}$ olduğunda, (4.27) denkleminin (ii) eşitliği, her $A \in \Im_{q}^{p}(M_{n})$ için,

$${}^{C}\tilde{\varphi}_{l}^{\bar{k}}\,{}^{V}\tilde{A}^{l} + {}^{C}\tilde{\varphi}_{\bar{l}}^{\bar{k}}\,{}^{V}\tilde{A}^{\bar{l}} = {}^{V}(\varphi\tilde{(}A))^{\bar{k}}$$

veya

$$ {}^{C}\tilde{\varphi}_{\bar{l}}^{\tilde{k}} A_{r_1...r_q}^{s_1...s_p} = \varphi_m^{h_1} A_{k_1...k_q}^{mh_2...h_p} = \delta_{k_1}^{r_1}...\delta_{k_q}^{r_q}\varphi_{s_1}^{h_1}\delta_{s_2}^{h_2}...\delta_{s_p}^{h_p} A_{r_1 r_2...r_q}^{s_1 s_2...s_p} $$

şeklinde yazılır. Buradan da

$$ {}^{C}\tilde{\varphi}_{\bar{l}}^{\bar{k}} = \delta_{k_1}^{r_1}...\delta_{k_q}^{r_q}\varphi_{s_1}^{h_1}\delta_{s_2}^{h_2}...\delta_{s_p}^{h_p} \tag{4.31} $$

sonucu elde edilir. Burada $x^{\bar{l}} = t_{r_1...r_q}^{s_1...s_p}$, $x^{\bar{k}} = t_{k_1...k_q}^{h_1...h_p}$ şeklindedir.

$K = \bar{k}$ olduğunda, (4.27) denkleminin (i) eşitliği,

$$ {}^{C}\tilde{\varphi}_{l}^{\bar{k}}\,{}^{C}\tilde{V}^{l} + {}^{C}\tilde{\varphi}_{\bar{l}}^{\bar{k}}\,{}^{C}\tilde{V}^{\bar{l}} = {}^{C}(\varphi(\tilde{V}))^{\bar{k}} - \sum_{\lambda=2}^{p}(L_V\varphi_l^{h_\lambda})\xi_{k_1...k_q}^{h_1...l...h_p} \tag{4.32} $$

veya

$$ {}^{C}\tilde{\varphi}_{l}^{\bar{k}}\,{}^{C}\tilde{V}^{l} + \varphi_{s_1}^{h_1}\delta_{s_2}^{h_2}...\delta_{s_p}^{h_p}\delta_{k_1}^{r_1}...\delta_{k_q}^{r_q}\,{}^{C}\tilde{V}^{\bar{l}} + \sum_{\lambda=2}^{p}(L_V\varphi_l^{h_\lambda})\xi_{k_1...k_q}^{h_1h_2...l...h_p} = {}^{C}(\varphi(\tilde{V}))^{\bar{k}} \tag{4.33} $$

şekline dönüşür.

Şimdi, Tachibana operatörünü kullanarak, ${}^{C}\varphi \in \Im_1^1(T_q^p(M_n))$ tensör alanının ${}^{C}\tilde{\varphi}_l^{\bar{k}}$ bileşenini bulmaya çalışacağız. Tachibana operatörü pür modül $\overset{*}{\Im}{}_q^p(M_n)$ üzerinde

$$ (\Phi_\varphi\xi)_{lk_1...k_q}^{h_1...h_p} = \varphi_l^m\partial_m\xi_{k_1...k_q}^{h_1...h_p} - \partial_l\overset{*}{\xi}{}_{k_1...k_q}^{h_1...h_p} + \sum_{a=1}^{q}\left(\partial_{k_a}\varphi_l^m\right)\xi_{k_1...m...k_q}^{h_1...h_p} + 2\sum_{\lambda=1}^{p}\partial_{[l}\varphi_{m]}^{h_\lambda}\xi_{k_1...k_q}^{h_1...m...h_p}\ , \tag{4.34} $$

şeklinde tanımlanmıştır (Tachibana 1960; Mağden 2004). Burada

$$ \varphi_{k_1}^m\xi_{mk_2...k_q}^{h_1...h_p} = \varphi_{k_2}^m\xi_{k_1m...k_q}^{h_1...h_p} = ... = \varphi_{k_q}^m\xi_{k_1k_2...m}^{h_1...h_p} = \varphi_m^{h_1}\xi_{k_1...k_q}^{mh_2...h_p} = \varphi_m^{h_2}\xi_{k_1...k_q}^{h_1m...h_p} = ... = \varphi_m^{h_p}\xi_{k_1...k_q}^{h_1h_2...m} = \overset{*}{\xi}{}_{k_1k_2...k_q}^{h_1h_2...h_p} $$

dır.

Birkaç hesaplamadan sonra, herhangi $V \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$ V^l(\Phi_\varphi\xi)_{lk_1...k_q}^{h_1...h_p} = (L_{\varphi V}\xi)_{k_1...k_q}^{h_1...h_p} - (L_V\overset{*}{\xi})_{k_1...k_q}^{h_1...h_p} + \sum_{\lambda=1}^{p}(L_V\varphi_m^{h_\lambda})\xi_{k_1...k_q}^{h_1...m...h_p} \tag{4.35} $$

veya

$$ V^l(\Phi_\varphi\xi)_{lk_1...k_q}^{h_1...h_p} + \varphi_m^{h_1}(L_V\xi)_{k_1...k_q}^{mh_2...h_p} + \xi_{k_1...k_q}^{mh_2...h_p}(L_V\varphi)_m^{h_1} - \sum_{\lambda=1}^{p}(L_V\varphi_m^{h_\lambda})\xi_{k_1...k_q}^{h_1...m...h_p} = $$

$$ = (L_{\varphi V}\xi)_{k_1...k_q}^{h_1...h_p} \tag{4.36} $$

elde edilir.

(4.16) eşitliğini kullanarak, (4.36) den

$$V^{l}(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1\dots h_p}_{lk_1\dots k_q}+\varphi^{h_1}_{m}(L_V\xi)^{mh_2\dots h_p}_{k_1\dots k_q}+\xi^{mh_2\dots h_p}_{k_1\dots k_q}(L_V\varphi^{h_1}_{m})-\sum_{\lambda=1}^{p}(L_V\varphi^{h_\lambda}_{m})\xi^{h_1\dots m\dots h_p}_{k_1\dots k_q}=$$

$$=V^{l}(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1\dots h_p}_{lk_1\dots k_q}+\varphi^{h_1}_{s_1}\delta^{h_2}_{s_2}\dots\delta^{h_p}_{s_p}\delta^{r_1}_{k_1}\dots\delta^{r_q}_{k_q}(L_V\xi)^{s_1\dots s_p}_{r_1\dots r_q}-\sum_{\lambda=2}^{p}(L_V\varphi^{h_\lambda}_{m})^{h_1\dots m\dots h_p}_{k_1\dots k_q}=$$

$$={}^{C}V^{l}(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1\dots h_p}_{lk_1\dots k_q}-\varphi^{h_1}_{s_1}\delta^{h_2}_{s_2}\dots\delta^{h_p}_{s_p}\delta^{r_1}_{k_1}\dots\delta^{r_q}_{k_q}\,{}^{C}V^{\bar{l}}-\sum_{\lambda=2}^{p}(L_V\varphi^{h_\lambda}_{m})\xi^{h_1\dots m\dots h_p}_{k_1\dots k_q}=-{}^{C}(\varphi(V))^{\bar{l}}$$

veya

$$(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1\dots h_p}_{lk_1\dots k_q}\,{}^{C}V^{l}-\varphi^{h_1}_{s_1}\delta^{h_2}_{s_2}\dots\delta^{h_p}_{s_p}\delta^{r_1}_{k_1}\dots\delta^{r_q}_{k_q}\,{}^{C}V^{\bar{l}}-\sum_{\lambda=2}^{p}(L_V\varphi^{h_\lambda}_{m})\xi^{h_1h_2\dots m\dots h_p}_{k_1\dots k_q}=-{}^{C}(\varphi(V))^{\bar{l}} \quad (4.37)$$

elde edilir.

(4.33) ve (4.37) karşılaştırdığımızda

$${}^{C}\varphi^{\bar{k}}_{l}=-(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1\dots h_p}_{lk_1\dots k_q}$$

olduğu görülür.

Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

4.2.1. Teorem: $\varphi\in\Im^{1}_{1}(M_n)$ olmak üzere $T^{p}_{q}(M_n)$ tensör demetinin φ ye göre tanımlanmış pür kesiti σ^{φ}_{ξ} olsun. Bu durumda $\sigma^{\varphi}_{\xi}(M_n)$ pür kesiti boyunca adapte olunmuş (B,C)-çatıya göre φ afinorun ${}^{C}\varphi\in\Im^{1}_{1}(T^{p}_{q}(M_n))$ tam lifti,

$$\begin{cases}{}^{C}\tilde{\varphi}^{k}_{l}=\varphi^{k}_{l},\ {}^{C}\tilde{\varphi}^{k}_{\bar{l}}=0,\ {}^{C}\tilde{\varphi}^{\bar{k}}_{l}=-(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1\dots h_p}_{lk_1\dots k_q},\\ {}^{C}\tilde{\varphi}^{\bar{k}}_{\bar{l}}=\varphi^{h_1}_{s_1}\delta^{h_2}_{s_2}\dots\delta^{h_p}_{s_p}\delta^{r_1}_{k_1}\dots\delta^{r_q}_{k_q}\end{cases} \quad (4.38)$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Burada $\Phi_{\varphi}\xi$ Tachibana operatörüdür ve $x^{\bar{k}}=t^{h_1\dots h_p}_{k_1\dots k_q}$, $x^{\bar{l}}=t^{s_1\dots s_p}_{r_1\dots r_q}$ dır.

4.2.2. Sonuç: (4.38) formundaki ${}^{C}\varphi$, (4.26) denkleminin tek çözümüdür. Böylece $\overset{*}{\varphi}({}^{C}V) = {}^{C}\varphi({}^{C}V) = {}^{C}(\varphi(V)) - \gamma(L_V\varphi) + {}^{V}((L_V\varphi)o\xi)\,, \overset{*}{\varphi}({}^{V}A) = {}^{C}\varphi({}^{V}A) = {}^{V}(\varphi(A))$ şartlarını sağlayan $\overset{*}{\varphi} \in \Im_1^1(T_q^p(M))$ için $\overset{*}{\varphi} = {}^{C}\varphi$ dir.

Şimdi, ${}^{C}\varphi \in \Im_1^1(T_q^p(M_n))$ tensör alanının bileşenlerini doğal çatıya göre ifade edelim: $B_{\bar{j}} = C_{\bar{j}}$ aldığımızda, $\sigma_\xi^\varphi(M_n)$ pür kesitinin adapte olunmuş (B,C)-çatısını $B_J = \{B_j, B_{\bar{j}}\}$ şeklinde yazabiliriz. $\tilde{B}^I(B_J) = \delta_J^I$ eşitliğiyle $\sigma_\xi^\varphi(M_n)$ pür kesitinin $\tilde{B}^J$ koçatısını tanımlayalım. (4.13), (4.15), eşitliklerinden ve $B_J^K \tilde{B}_K^I = \delta_J^I$ olduğundan $\tilde{B}^I$ kovektör alanlarının $(dx^k, dx^{\bar{k}})$ doğal koçatıya göre

$$\tilde{B}^i = (\tilde{B}_K^i) = (\delta_k^i, 0)$$

$$\tilde{B}^{\bar{i}} = (\tilde{B}_K^{\bar{i}}) = (-\partial_k \xi_{i_1 \ldots i_q}^{j_1 \ldots j_p}\,,\ \delta_{i_1}^{k_1} \ldots \delta_{i_q}^{k_q} \delta_{h_1}^{j_1} \ldots \delta_{h_p}^{j_p}) \tag{4.39}$$

bileşenlerine sahip olduğu kolayca görülebilir. Tensör demette (1,1) tipli tensör alanı ${}^{C}\varphi$ tam liftinin doğal çatıya göre bileşenlerini bulmak için gerekli formül

$$\begin{aligned}
{}^{C}\varphi_L^K &= {}^{C}\varphi(dx^k, \partial_L) = {}^{C}\tilde{\varphi}_I^J B_J \otimes \tilde{B}^I(dx^k, \partial_L) \\
&= {}^{C}\tilde{\varphi}_I^J dx^K(B_J)\tilde{B}^I(\partial_L) = {}^{C}\tilde{\varphi}_I^J dx^K(B_J^H \partial_H)\tilde{B}_L^I \\
&= {}^{C}\tilde{\varphi}_I^J B_J^H \delta_H^K \tilde{B}_L^I = {}^{C}\tilde{\varphi}_I^J B_J^K \tilde{B}_L^I\,,
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu dönüşüm formülünden ve aynı zamanda (4.13), (4.20), (4.21), (4.23), (4.24) ve (4.39) den, ${}^{C}\varphi$ afinorunun $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin $\sigma_\xi^\varphi(M_n)$ pür kesitinde $\{\partial_h, \partial_{\bar{h}}\}$ doğal çatısına göre bileşenleri

$$\begin{aligned}
{}^{C}\varphi_l^k &= \varphi_l^k\,,\quad {}^{C}\varphi_{\bar{l}}^k = 0, \\
{}^{C}\varphi_{\bar{l}}^{\bar{k}} &= \varphi_{s_1}^{h_1} \delta_{s_2}^{h_2} \ldots \delta_{s_p}^{h_p} \delta_{k_1}^{r_1} \ldots \delta_{k_q}^{r_q}\,, \qquad (4.40) \\
{}^{C}\varphi_l^{\bar{k}} &= (\partial_l \varphi_m^{h_1}) \xi_{k_1 \ldots k_q}^{m h_2 \ldots h_p} - \sum_{\mu=1}^{q} (\partial_{k_\mu} \varphi_l^m) \xi_{k_1 \ldots m \ldots k_q}^{h_1 \ldots h_p} - \sum_{\lambda=1}^{p} (\partial_l \varphi_m^{h_\lambda} - \partial_m \varphi_l^{h_\lambda}) \xi_{k_1 \ldots k_q}^{h_1 \ldots m \ldots h_p}
\end{aligned}$$

şeklindedir (Salimov 1994).

4.2.3. Tensör demette hemen hemen kompleks yapılar

4.2.2. Teorem: φ, M_n manifoldu üzerinde kompleks yapı ise, φ afinorunun $\sigma_\xi^\varphi(M_n)$ pür kesiti boyunca $T_q^p(M_n)$ tensör demete ${}^C\varphi$ tam lifti de bir hemen hemen kompleks yapıdır.

İspat: $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ ve $S \in \Im_2^1(M_n)$ tensör alanları olsun. (4.16), (4.5), (4.6) ve (4.38) eşitliklerini kullanarak,

$$\gamma(\varphi \pm \psi) = \gamma\varphi \pm \gamma\psi,\ {}^C\varphi(\gamma\psi) = \gamma(\varphi \circ \psi) = \gamma(\psi \circ \varphi),\ (\gamma S)^C V = \gamma S_V \quad (4.41)$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada S_V, her $W \in \Im_0^1(M_n)$ için $S_V(W) = S(V,W)$ şeklinde tanımlı M_n manifoldu üzerinde (1,1) tipli tensör alanıdır.

$V \in \Im_0^1(M)$ olsun. (4.26) ve (4.41) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
({}^C\varphi)^2({}^CV) &= ({}^C\varphi \circ {}^C\varphi)^CV = {}^C\varphi({}^C\varphi({}^CV)) = {}^C\varphi({}^C(\varphi(V))) - \gamma(L_V\varphi) + {}^V((L_V\varphi)\circ\xi) \\
&= {}^C\varphi({}^C(\varphi(V))) - {}^C\varphi(\gamma(L_V\varphi)) + {}^C\varphi({}^V((L_V\varphi)\circ\xi)) \\
&= {}^C(\varphi(\varphi(V))) - \gamma(L_{\varphi(V)}\varphi) - {}^C\varphi(\gamma(L_V\varphi)) + {}^C\varphi({}^V((L_V\varphi)\circ\xi)) + {}^V((L_{\varphi(V)}\varphi)\circ\xi) \\
&= {}^C((\varphi\circ\varphi)(V)) - \gamma(L_{\varphi(V)}\varphi) - \gamma((L_V\varphi)\circ\varphi) + {}^V(\varphi((L_V\varphi)\circ\xi) + (L_{\varphi(V)}\varphi)\circ\xi) \\
&= {}^C((\varphi\circ\varphi)(V)) - \gamma(L_{\varphi(V)}\varphi + (L_V\varphi)\circ\varphi) + {}^V((L_{\varphi(V)}\varphi) \\
&\quad +(L_V\varphi)\circ\xi) + {}^V((L_V(\varphi\circ\varphi))\circ\xi) \\
&= {}^C(\varphi\circ\varphi)({}^CV) + \gamma(L_V(\varphi\circ\varphi)) - \gamma(L_{\varphi(V)}\varphi + (L_V\varphi)\circ\varphi) \\
&= {}^C(\varphi\circ\varphi)({}^CV) - \gamma(L_{\varphi(V)}\varphi - \varphi\circ(L_V\varphi)) + {}^V((L_{\varphi(V)}\varphi) - \varphi(L_V\varphi)\circ\xi) \\
&= {}^C(\varphi\circ\varphi)({}^cV) - \gamma N_V + {}^V(N_V\circ\xi) \\
&= {}^C(\varphi\circ\varphi)({}^CV) - (\gamma N)({}^CV) + {}^V(N\circ\xi)({}^CV) \\
&= ({}^C(\varphi^2) - \gamma N + {}^V(N\circ\xi))({}^CV) \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $N_V = L_{\varphi(V)}\varphi - \varphi\circ(L_V\varphi)$ ve $(\Phi_\varphi\varphi)(V,W) = (L_{\varphi(V)}\varphi - \varphi\circ(L_V\varphi))W =$ $= [\varphi V, \varphi W] - \varphi[V, \varphi W] - \varphi[\varphi V, W] + \varphi^2[V,W] = N_V W$ eşitliği φ afinoru vasıtasıyla belirlenen Tachibana operatörü veya Nijenhuis-Shirokov tensörü $N(V,W) \in \Im_2^1(M_n)$ den başka bir şey değildir (Yano and Ako 1968; Kruchkovich 1972).

Benzer şekilde eğer $A \in \Im_q^p(M_n)$ ise bu durumda (4.26) eşitliğinden

$$({}^C\varphi)^2({}^V A) = ({}^C\varphi \circ {}^C\varphi)^V A = {}^C\varphi({}^C\varphi^V A) = {}^C\varphi({}^V(\varphi(A))) = {}^V(\varphi(\varphi(A))) =$$
$$= {}^V((\varphi \circ \varphi)(A)) = {}^C(\varphi \circ \varphi)^V A = {}^C(\varphi^2)^V A \tag{4.43}$$

elde edilir.

φ hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilme şartı, Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır. Eğer φ nin integrallenebilme şartından dolayı Nijenhuis tensörü $N = 0$ alınırsa, o zaman 4.2.2. Sonuç'dan, (4.42), (4.43) ve tam liftin lineerliğinden

$$({}^C\varphi)^2 = {}^C(\varphi^2) = {}^C(-I) = -I$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

M_n ve N_m, φ ve ψ kompleks yapılarına sahip iki manifold olsunlar. Her bir $P \in M_n$ noktası için

$$df_p \circ \varphi_p = \psi_{f(p)} \circ df_p \tag{4.44}$$

şartı sağlanıyorsa, $f : M_n \mapsto N_m$ diferensiyellenebilir dönüşümü holomorfik dönüşüm olarak adlandırılır (Salimov 1992).

$f : M_n \to N_m \; (m = n + n^{p+q})$ dönüşümünü, $\varphi-$yapıya göre pür tensör alanı olan $\xi \in \Im_q^p(M_n)$ tarafından tanımlanan bir $\sigma_\xi^\varphi : M_n \to T_q^p(M_n)$ kesitini alalım. Bir $\sigma_\xi^\varphi : M_n \to T_q^p(M_n)$ pür kesiti lokal olarak (4.12) ile ifade edilir. (4.44) eşitliğinde, eğer ψ, ${}^C\varphi$ hemen hemen kompleks yapı ise (bakınız 4.2.2. Teorem), ξ pür kesitinin holomorfik tensör alanı olma şartı lokal olarak

$$\varphi_l^{\ m} \, \partial_m x^K = {}^C\varphi_M^{\ K} \, \partial_l x^M \, , \tag{4.45}$$

şeklindedir. Burada ${}^C\varphi_M^{\ K}$, $\{\partial_k, \partial_{\bar{k}}\}$ doğal çatısına göre $\sigma_\xi^\varphi(M_n)$ pür kesiti boyunca ${}^C\varphi$ tam liftinin bileşenleridir.

$K = k$ durumunda, (4.12) ve (4.40) eşitliklerinden $\varphi_l^k = \varphi_l^k$ elde ederiz. $K = \bar{k}$ olduğunda, (4.12), (4.25) ve (4.40) eşitliklerinden (4.45) eşitliği

$$(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1 \dots h_p}_{l k_1 \dots k_q} = \varphi^m_l \partial_m \xi^{h_1 \dots h_p}_{k_1 \dots k_q} - \partial_l \overset{*}{\xi}{}^{h_1 \dots h_p}_{k_1 \dots k_q} + \sum_{a=1}^{q} \left(\partial_{k_a} \varphi^m_l \right) \xi^{h_1 \dots h_p}_{k_1 \dots m \dots k_q} + 2 \sum_{\lambda=1}^{p} \partial_{[l} \varphi^{h_\lambda}_{m]} \xi^{h_1 \dots m \dots h_p}_{k_1 \dots k_q} = 0 , \quad (4.46)$$

olur. Burada $\Phi_{\varphi}\xi$, Tachibana operatörüdür. Böylece ξ holomorfik tensör alanı $\{\partial_i , \partial_{\bar{i}}\}$ doğal çatısına göre (4.46) eşitliği ile verilir.

5. SONUÇLAR

Sunulan bu tezde (1,1) tipli tensör alanının pür kesit boyunca tensör demete tam lifti Tachibana operatörü vasıtasıyla tanımlanmış ve (1,1) tipli tensör alanının tam liftinin (p,q), $p>1, q\geq 0$ tipli tensör demetlerde hemen hemen kompleks yapı olması incelenmiştir.

Bu çalışmada ilk olarak, $(K_X Y)Z = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$ şeklinde tanımlı (1,1) tipli tensör alanı $K_X Y$ tarafından tanımlanan $D_{K_X Y}$ türevlemesi tanımlandı ve tensör demette zaten bilinen liftlerle $D_{K_X Y}$ türevlemesinin liftleri arasındaki ilişkiler araştırıldı.

İkinci olarak, $\varphi \in \Im_1^1(M)$ afinorun pür kesit boyunca $T_q^p(M_n)$, $p>1, q\geq 0$ tensör demetine tam lifti

$$\begin{cases} {}^C\varphi({}^C V) = {}^C(\varphi(V)) - \gamma(L_V\varphi) + {}^V((L_V\varphi)\circ\xi), \ \forall V \in \Im_0^1(M_n), & (i) \\ {}^C\varphi({}^V A) = {}^V(\varphi(A)), \ \forall A \in \Im_q^p(M_n), & (ii) \end{cases}$$

şeklinde tanımlandı. Burada $\varphi(A) \in \Im_q^p(M_n)$, $((L_V\varphi)\circ\xi)(X_1,\dots,X_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ $=\xi(X_1,\dots,X_q;(L_V\varphi)'\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ şeklindedir. Pür kesit boyunca adapte olmuş (B,C)-çatıya göre ${}^C\varphi \in \Im_1^1(T_q^p(M_n))$ afinorun bileşenleri Tachibana operatörü kullanılarak bulundu.

Üçüncü olarak, $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ afinorunun pür kesit boyunca $T_q^p(M_n)$, $p>1, q\geq 0$ tensör demetine ${}^C\varphi$ tam liftinin tensör demette hemen hemen kompleks yapı olması için gerek ve yeter şartın φ afinorun M_n manifoldu üzerinde kompleks yapı olması gerektiği bulundu.

Son olarak, ξ pür kesitinin holomorfik tensör alanı olma şartı araştırıldı ve ξ holomorfik tensör alanı $\{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ doğal çatısına göre

$$(\Phi_{\varphi}\xi)^{h_1\dots h_p}_{lk_1\dots k_q} = \varphi^m_l \partial_m \xi^{h_1\dots h_p}_{k_1\dots k_q} - \partial_l \overset{*}{\xi}{}^{h_1\dots h_p}_{k_1\dots k_q} + \sum_{a=1}^{q}\left(\partial_{k_a}\varphi^m_l\right)\xi^{h_1\dots h_p}_{k_1\dots m\dots k_q} + 2\sum_{\lambda=1}^{p}\partial_{[l}\varphi^{h_\lambda}_{m]}\xi^{h_1\dots m\dots h_p}_{k_1\dots k_q} = 0$$

eşitliği ile verildiği bulundu. Burada $\Phi_{\varphi}\xi$, Tachibana operatörüdür.

5. KAYNAKLAR

Bishop, R.L. and Goldberg, S.I., 1968, Tensor Analysis on Manifolds, The Mcmillan Company, New York, p.19-135.

Cengiz, N., Salimov, A.A., 2002, Complete lifts of derivations to tensor bundles, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 8, 3, 75-82.

Davies, E.T., 1966, Some Applications of the Theory of Parallel Distributions, Hlavaty Testscript, 80-90.

Davies, E.T., 1969, On the Curvature of the Tangent Bundle, Annali di Mat.,(I∇), 81, 193-204.

Dombrowski, P., 1962, On the Geometry of the Tangent Bundles, Jour.reine und angew. Math., 210, 73-88

Hacısalihoğlu, H.H., 1993, Difarensiyel Geometri A.Ü.Fen Fakültesi

Kobayashi, S., and Nomızu, K., 1963, Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers.

Kruchkovich, G.I., 1972, Hypercomplex structure on a manifold, I. Tr. Sem. Vect. Tens. Anal., Moscow Univ., 16, 174-201.

Lai, K. F., Mok, K. P., 2002, On the differential geometry of the (1,1) tensor bundle. Tensor (N.S.)**,** no. 1, 15-27.

Ledger, A.J., and Yano, K., 1965, The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space, Jour. London Math. Soc., 40, 487-492.

Ledger, A.J., and.Yano, K, 1967, Almost Complex Structures on Tensör Bundles, Jour. Diff. Geom., 355-368.

Mağden, A., 2004, On applications of the Tachibana operator, Applied Mathematics and Computation, 147, N1, 45-55.

Mağden, A., Salimov, A.A., 2001, Horizontal lifts of tensor fields to sections of a tensor bundles, Izv. Vyssh. Uchebu. Zaved. Math., 45, 3, 73-76.

Mağden, A., Salimov, A.A., 2008, Complete lifts of tensor fields on a pure cross-section in the tensor bundle, Journal of Geometry, to appear.

Mağden, A., Cengiz, N., Salimov, A.A., 2004, Horizontal lifts of affinor structures and its applications, Applied Mathematics and Computation, 156, 255-261.

Salimov, A.A., 1992, Almost ψ-holomorphic tensors and their properties, Dokl. Russian, AN 324, N 3, 533-536.

Salimov, A.A., 1994, Generalized Yano-Ako operator and the complete lift of tensor fields, Tensor (N.S.), 55, 2, 142-146.

Salimov, A.A.**,** 1994, A new method in theory of lifts of tensor fields to a tensor bundle, Iz. Vuz. Matematika, 3, 69-73.

Salimov, A.A., Mağden, A., 1998, Complete lift of tensor fields on a pur cross-section in the tensor bundle, Note di Matematica (Lecce), 18, No.1, 27-37.

Salimov, A.A., ve Mağden, A., 1999, Diferensiyel Geometriye Giriş, Atatürk Üniversitesi.

Sasaki S., 1958, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tohoku Math. Jour. J., 10, 338-358.

Sekizawa, M., 1969, A note on the complete lift of Φ-tensors to a tangent bundle. TRU Math., **5,** 43--45.

Tachibana, S., and M. Okumara, 1962, On Almost-Complex Structure of Riemannian Spaces, Tohoku Math. Jour., 14,156-161

Tachibana, S., 1960, Analytic tensor and its generalization, Tohoku Math. J., 12, 208-221.

Vishnevskii, V.V., Shirokov, A.P., Shurygin, V.V., 1985, Spaces over algebras, Kazan Gos. University, Kazan, Russian.

Yano, K., Ako, M., 1968, On certain operators associated with tensor fields, Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436.

Yano, K., Kobayashi S., 1966, Prolongations of Tensor fields and Connections to Tangent Bundles, I. General Theory, Jour. Math. Soc. Japan, 18, 194-210.

Yano, K., Patterson E.M., 1967, Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundle, Jour. Math. Soc. Japan, 19, 91-113.

Yano, K., and Ishahara, S., 1966, Differential Geometry in Tangent Bundle, Kodai Math. Sem. Rep., 18, 271-292

Yano, K., and Ishahara, S., 1967, Almost complex structures induced in tangent bundles Kodai Math. Sem. Rep., 19, 1-27.

Yano, K., and Ishahara, S., 1973, Tangent and Cotangent Bundles., Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano,K., and Davies, E.T., 1963, On the Tangent Bundles of Finsler and Riemannian Manifolds. Rend. Circ. Mat. Palermo, 12, 211-228

Yano,K., and Davies, E.T.,1971, Metrics and Connections in the Tangent Bundle, Kodai Math. Sem. Rep., 23, 493-504

Yano, K., 1967, Tensör Fields and Connections on Cross-Sections in the Cotangent Bundle, Tohoku Math. Jour., 19, 32-48

Yano, K., 1967, Tensör Fields and Connections on Cross-Sections in the Tangent Bundle of Differentiable Manifold, Proc. Royal Soc. Edinburg, Sect. ALXVII, 277-288

Yano, K., Kobayashi S., 1966, Prolongations of Tensör fields and Connections to Tangent Bundles, II, Affine Automorphisms, Jour. Math. Soc. Japon, 18, 236-246

Yano, K., Kobayashi S., 1966, Prolongations of Tesör fields and Connections to Tangent Bundles, III, Holonomy Groups, Jour. Math. Soc. Japon, 19, 486-488

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Manisa'nın Demirci ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Demirci'de, orta ve lise öğrenimini Salihli'de tamamladı. 1994 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Amasya Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümüne girerek, 1998'de mezun oldu. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. 1998-2002 yılları arasında Erzurum ilinin Hınıs ve Aşkale ilçelerindeki çeşitli okullarda, 2002-2003 yılları arasında da Erzincan Nevzat Ayaz Fen Lisesi'nde matematik öğretmenliği yaptı. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2004 yılında yüksek lisansını tamamlayarak aynı üniversitede Doktora programına kayıt oldu. Halen Atatürk Üniversitesinde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.