TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÖK

Hakan KARAYILAN

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
TOPOLOJİ ANA BİLİM DALI

2000- EDİRNE

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# $w$-UZAKLIK FONKSİYONU VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Hakan KARAYILAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

95259

TOPOLOJİ ANA BİLİM DALI

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ

2000-EDİRNE

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# $w$ - UZAKLIK FONKSİYONU VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Hakan KARAYILAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİ ANA BİLİM DALI

Bu tez 20/10/2000 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ
Danışman

Prof. Dr. Hasan AKBAŞ
Üye

Doç. Dr. Hülya İŞCAN
Üye

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET

Bu çalışmada $w$-uzaklık fonksiyonları ile oluşturulan sabit nokta teoremleri ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiş, ayrıca, fonksiyonların sabit noktalarıyla metrik yapısı arasında karakterizasyonlar belirlenmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın,

Birinci bölümde, sabit noktanın tanımı ve örnekleriyle birlikte sabit nokta teorisinde ne tür problemlerle karşılaşılabileceğine dair bir takım bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, literatürdeki önemli bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, $w$- uzaklık fonksiyonunun tanımı ve bunların bazı özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $w$- uzaklık fonksiyonuyla genelleştirilmiş bazı sabit nokta teoremleri verilmiş ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar çıkarılmıştır.

Son bölümde, zayıf daraltan ve zayıf Kannan dönüşümlerinin sabit noktalarıyla uzayın karakterizasyonu verilmiştir.

# SUMMARY


In this study, fixed point theorems formed by $w$-distance functions and their relations were examined and characteristics between fixed points of the functions and their metric structure were also studied.

The study has five chapters.

In the first chapter, definition of the fixed point was made along with examples and some information was provided as to what problems are likely to arise related to the fixed theory.

In the second chapter, some important fixed point theorems in the literature were studied.

In the third chapter, the definition of $w$-distance function and some characteristics of this were provided.

In the fourth chapter, some fixed point theorems generalized by $w$-distance function were given and some conclusions were drawn from the related information.

In the last chapter characterization of the space was provided with fixed points of weak contractive and weak Kannan mappings.

# ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında emeği geçen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hakan KARAYILAN

# I. BÖLÜM

# GİRİŞ

## 1.1. FONKSİYONLARIN SABİT NOKTASI

**1.1.1 Tanım :** Boş olmayan bir $X$ kümesiyle, $X$'ten $X$'e tanımlı bir $T$ dönüşümü verilsin. Eğer bir $x \in X$ için $Tx = x$ ise bu $x$ noktasına $T$'nin bir ***sabit noktası*** denir.

**1.1.2 Örnekler :**

**(*i*)** $a \neq 0$ olmak üzere, $f : R \to R$ ; $f(x) = x + a$ biçiminde tanımlanan öteleme dönüşümlerinin hiçbir sabit noktası yoktur.

**(*ii*)** $g : R \to R$ ; $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + x - \arctan x$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun hiçbir sabit noktası yoktur.

**(*iii*)** $0 < \alpha < 2\pi$ olmak üzere,

$$h : R^2 \to R^2 \;\; ; \;\; h(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun tek bir sabit noktası vardır, o da $(0,0)$'dır.

**(*iv*)** $t : R^2 \to R^2$ ; $t(\lambda, \mu) = (\lambda, -\mu)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon için $\{(\lambda, 0) : \lambda \in R\}$ kümesinin her bir elemanı $t$ için sabit noktadır.

**(*v*)** $u : R \to R$ ; $u(x) = x^2$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun iki tane sabit noktası vardır. Bu noktalar $x = 0$ , $x = 1$ noktalarıdır.

Verilen örneklerden de görüldüğü gibi, bazı dönüşümlerin sabit noktası olmadığı halde bazılarının sabit noktası var ve hatta bunların sayıları birden fazla olabilmektedir.

## 1.2 SABİT NOKTA TEORİSİ VE TEMEL PROBLEMLER

1.1.2 Örnek'teki fonksiyonlar incelendiğinde, doğal olarak *"hangi dönüşümlerin sabit noktaları var, eğer sabit noktalar var ise hangi tür dönüşümler için bu noktalar tek olabilir?"* sorusu akla gelebilir.

Bu türden problemlerin çözümü, matematiğin pek çok dalında, özellikle analizde, varlık ve teklik problemlerinin çözümlerinde önemli rol oynamışlardır. Günümüzde pek çok matematikçi, sabit nokta ile ilgili problemleri genişleterek, değişik uygulama alanları bulmaya çalışmaktadırlar. Bu da matematiğin gelişimine önemli katkılar sağlamaktadır.

Yukarıda belirtilen sabit nokta ile ilgili problemleri aşağıdaki biçimde çoğaltmak mümkündür.

**(*a*)** Verilen bir $T$ dönüşümünün, en az bir sabit noktasının var olması veya bu noktanın tek olması için $T$ ne tür koşullar sağlamalıdır?

**(*b*)** Bir $T$ dönüşümünün sabit noktasının varlığını garanti etmek için, tanımlı olduğu $X$ kümesi üzerine ne tür koşullar yüklenebilir?

**(*c*)** Verilen bir $T$ dönüşümünün bütün noktalarının kümesi ne tür bir yapıdadır?

**(*d*)** $T$'nin iterasyonları durumu hakkında ne söylenebilir?

**(*e*)** Verilen bir $T$ dönüşümünün sabit noktasının varlığı ile fonksiyonun tanımlı olduğu uzayın yapısı hakkında ne söylenebilir?

Bu çalışmada, yukarıda verilen problemlerden bir kısmına, dönüşümlere ve tanımlı oldukları uzaylara bağlı olarak kısmi çözümler getirilecektir.

# II. BÖLÜM

# BANACH DARALMA İLKESİ VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde ilk olarak daraltan dönüşüm tanıtımıyla birlikte, literatürde *Banach Daralma İlkesi* olarak da bilinen Banach'ın sabit nokta teoremi verilecek ,daha sonra da değişik türden bazı sabit nokta teoremleri incelenecektir.

## 2.1 BANACH DARALMA İLKESİ

**2.1.1 Tanım :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T$, $X$'ten $X$'e herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha . d(x,y) \tag{2.1.1}$$

bağıntısını sağlayan bir $0 \leq \alpha < 1$ sayısı varsa $T$'ye **daraltan dönüşüm** denir.

Örneğin; $T:[a,b] \to [a,b]$ sürekli fonksiyonu $(a,b)$'de türevlenebilir ve her $x \in (a,b)$ için $|T'(x)| \leq \alpha < 1$ ise $T$ daraltan bir dönüşümdür.

1922'de Banach, daraltan dönüşümleri kullanarak tam metrik uzaylar üzerinde aşağıdaki teoremi vermiştir.

**2.1.2 Teorem (Banach Daralma İlkesi) :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daraltan dönüşüm ise $T$'nin $X$'te bir $u$ sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

**Kanıt :** $x_0$, $X$'te herhangi bir nokta olmak üzere bir $\{x_n\}$ dizisi tümevarımsal olarak,

$$x_1 = T(x_0)\,,\ x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)\,,\ \ldots\,,\ x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$$

biçiminde tanımlansın. Her $n \in \mathrm{N}$ için (2.1.1) eşitsizliği kullanıldığında,

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_{n-1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \le \alpha . d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&= \alpha . d(T(x_{n-2}), T(x_{n-3})) \le \alpha^2 . d(x_{n-2}, x_{n-3}) \\
&\le \ldots \le \alpha^{n-1} . d(x_1, x_0)
\end{aligned}
$$

yani her $n \in \mathrm{N}$ için,

$$
d(x_n, x_{n-1}) \le \alpha^{n-1} . d(x_1, x_0) \tag{2.1.2}
$$

olduğu görülür.

$m > n$ olmak üzere üçgen eşitsizliği kullanıldığında,

$$
d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n)
$$

olup, buna (2.1.2) eşitsizliği uygulandığında

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\le (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \ldots + \alpha^n) . d(x_1, x_0) \\
&= \alpha^n (\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \ldots + 1) . d(x_1, x_0) \\
&= \alpha^n \left( \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) . d(x_1, x_0) \\
&< \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} . d(x_1, x_0)
\end{aligned}
$$

bulunur. $0 \le \alpha < 1$ olduğundan $n \to \infty$ iken $\alpha^n \to 0$ dır. Dolayısıyla $\{x_n\}$, $X$'te bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan $\{x_n\}$, $X$'te bir $u$ noktasına yakınsar. $T$ sürekli olduğundan,

$$
u = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} T(x_n) = T\left( \lim_{n \to \infty} x_n \right) = Tu \ ,
$$

yani, $u = Tu$ olur. $T$'nin bu $u$ noktası tektir. Gerçekten, $Tv = v$ olacak biçimde $T$'nin başka bir $v \in X$ sabit noktası olsaydı,

$$
d(u, v) = d(T(u), T(v)) \le \alpha . d(u, v)
$$

olurdu ki, $\alpha < 1$ olduğundan, bunun olması ancak $d(u, v) = 0$, yani, $u = v$ olması ile mümkün olacaktır.

Gerçekte bu teorem Euler ve Cauchy (1844)'nin *"$f$ sürekli türevlenebilir fonksiyon olmak üzere*

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\
y(x_0) = y_0
\end{cases}
$$

*diferansiyel denklemin varlığı ve tekliği"* üzerindeki çalışmalarında kullanılmıştır. 1922'de Banach bu çalışmaları bir formül altında toplayarak matematikteki varlık ve teklik problemlerinin çözümünde önemli sonuçların bulunmasına öncülük etmiştir.

Sonraki çalışmalarda, Banach'ın çalışması esas alınarak bu alanda birçok genellemeler yapılmıştır. Dikkat edilirse verilen bir $T$ daraltan dönüşümü aynı zamanda sürekli, hatta, düzgün sürekli bir dönüşümdür. Şu halde eğer $T$ sürekli değil ise o zaman daraltan dönüşüm de olamaz.

## 2.2 KANNAN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Banach sabit nokta teoreminden, $X$ metrik uzayı üzerindeki bazı koşullar zayıflatılıp, $T$ üzerine de yeni bazı daralma koşulları eklenerek yeni sonuçlar üretmek mümkündür.

Aşağıda verilen teoremlerde uzayın tamlık koşulu kaldırılmış olup, farklı koşullar altında Banach teoremindeki gibi benzer sonuçlar elde edilmiştir.

**2.2.1 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T: X \to X$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşüm olsun.

***(i)*** $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ ve her $p,q \in X$ için

$$d(T(p),T(q)) \leq \alpha.\{\ d(p,T(p)) + d(q,T(q))\ \}$$

***(ii)*** $T$, bir $\xi \in X$ noktasında sürekli ,

***(iii)*** En az bir $x \in X$ vardır, öyle ki, $\{T^n(x)\}$ iterasyon dizisinin $\xi$'ye yakınsayan bir $\{T^{n_i}(x)\}$ alt dizisi vardır.

O zaman $T$'nin $X$'te tek bir $\xi$ sabit noktası vardır.

*(Kannan, R., 1969)*

**Kanıt :** $T$, $\xi$ noktasında sürekli ve $\{T^{n_i}(x)\} \to \xi$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} T^{n_i+1}(x) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n_i}(x)) = T\left(\lim_{n\to\infty} T^{n_i}(x)\right) = T(\xi)$$

yani, $\{T^{n_i+1}(x)\} \to T(\xi)$ olur.

Bir an için $T(\xi)\neq\xi$ olduğu varsayılsın. $\eta>0$ ve $\eta<\frac{1}{3}d(\xi,T(\xi))$ olmak üzere, sırasıyla $\xi$ ve $T(\xi)$ merkezli $\eta$ yarıçaplı $B_1=B_1(\xi,\eta)$ ve $B_2=B_2(T(\xi),\eta)$ yuvarları göz önüne alınsın.

$$(n\to\infty)\ ,\ \{T^{n_i}(x)\}\to\xi \quad \text{ve} \quad \{T^{n_i+1}(x)\}\to T(\xi)$$

olduğundan $\exists\ N_1\in \mathrm{N}\ \ni\ \forall\, i>N_1$ için $T^{n_i}(x)\in B_1$ ve $T^{n_i+1}(x)\in B_2$ dir. Böylece $(i>N_1)$;

$$d(T^{n_i}(x),T^{n_i+1}(x))>\eta \tag{2.2.1}$$

olur. Diğer taraftan (*i*)'den,

$$d(T^{n_i+1}(x),T^{n_i+2}(x))\leq\alpha.\{d(T^{n_i}(x),T^{n_i+1}(x))+d(T^{n_i+1}(x),T^{n_i+2}(x))\}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$d(T^{n_i+1}(x),T^{n_i+2}(x))\leq\frac{\alpha}{1-\alpha}.d(T^{n_i}(x),T^{n_i+1}(x))$$

bulunur. Böylece $l>j>N_1$ için

$$\begin{aligned} d(T^{n_l}(x),T^{n_l+1}(x)) &\leq\frac{\alpha}{1-\alpha}.d(T^{n_l-1}(x),T^{n_l}(x)) \\ &\leq\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 d(T^{n_l-2}(x),T^{n_l-1}(x)) \\ &\ \vdots \\ &\leq\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n_l-n_j} d(T^{n_j}(x),T^{n_j-1}(x)) \end{aligned}$$

bulunur. $0<\alpha<\frac{1}{2}$ olduğundan $\frac{\alpha}{1-\alpha}<1$ olup, $l\to\infty$ için bu son ifade sıfıra yaklaşır. Bu ise (2.2.1) ile çelişir. Şu halde $T(\xi)=\xi$ , yani, $\xi$, $T$'nin bir sabit noktası olur. Ayrıca $T$'nin bu $\xi$ sabit noktası tektir. Gerçekten, $\delta\in X$ , $\delta=T(\delta)$ ise (*i*)'den

$$d(\delta,\xi)=d(T(\delta),T(\xi))\leq\alpha.\{d(\delta,T(\delta))+d(\xi,T(\xi))\}$$

olup, buradan $d(\delta,\xi)\leq 0$ bulunur. Bu ise ancak $d(\delta,\xi)=0$ olması ile mümkündür. Bu durumda $\delta=\xi$, yani, sabit nokta tektir.

Eğer uzay tam ise, bu türden dönüşümler için benzer bir sonuç 2.1.2 Teorem'indeki yöntem kullanılarak kanıtlanabilir. □

**2.2.2 Teorem :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(T(x),T(y)) \le \alpha.\{d(x,T(x)) + d(y,T(y))\} \tag{2.2.2}$$

koşulu sağlanıyorsa, $T$'nin $X$ uzayında tek bir sabit noktası vardır.

(*Kannan, R., 1968*)

**2.2.3 Not :** Dikkat edilirse, burada $T$ üzerine herhangi bir süreklilik koşulu konmamıştır. 2.2.2 Teorem'inde Banach sabit nokta teoreminden farklı olarak $x = T(x)$ olduğu gösterilirken, aşağıdaki metot kullanılabilir. 2.1.2 Teorem'deki gibi, benzer metotla $\{x_n\}$'nin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. Uzay tam olduğundan, $x_n \to x$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. (2.2.2) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},T(x)) = d(T(x_n),T(x)) &\le \alpha.\{d(x_n,T(x_n)) + d(x,T(x))\} \\ &= \alpha.\{d(x_n,x_{n+1}) + d(x,T(x))\} \end{aligned}$$

olup, eşitsizliğin her iki tarafından $n \to \infty$ için limite geçildiğinde,

$$d(x,T(x)) \le \alpha.d(x,T(x))$$

olur. $\alpha < \frac{1}{2}$ olduğundan, $x = T(x)$ olmak zorundadır.

**2.2.4 Uyarı :** 2.2.1 ve 2.2.2 Teorem'leri karşılaştırıldığında, 2.2.1 Teorem'inde uzayın tamlığı kaldırılmış olup, (*ii*) ve (*iii*) koşulları varsayılmıştır. Fakat (*ii*) ve (*iii*) koşulları uzayın tamlığını garanti etmez.

Örneğin; $X = [0,1)$ ve $T: X \to X$ , $T(x) = \frac{x}{2}$ olsun. $X$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ mutlak değer metriği göz önüne alındığında; $T$, (*ii*) ve (*iii*) koşullarını sağladığı halde, $X$, $d$'ye göre tam değildir.

Banach sabit nokta teoremi ile Kannan'ın bu iki teoremi karşılaştırıldığında, (2.1.1) eşitsizliğinin verilen dönüşümün sürekli olmasını garanti etmesine karşın, (2.2.2) eşitsizliğinin dönüşümün sürekli olmasını garanti etmeyeceği gözlemlenebilir. Bu nedenle (2.1.1) ve (2.2.2) bağımsız koşullardır. Bu durum aşağıdaki örneklerle gözlemlenebilir.

**2.2.5 Örnekler :**

**1-** $X=[0,1]$ ve $d(x,y)=|x-y|$ olsun.

$$T: X \to X \quad , \quad T(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{4} \; ; & x\in[\,0,\dfrac{1}{2}) \\ \dfrac{x}{5} \; ; & x\in[\,\dfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$T$, $x=\dfrac{1}{2}$ noktasında sürekli olmadığından (2.1.1) eşitsizliği sağlanamaz. Yani $T$, $X$ üzerinde daraltan bir dönüşüm değildir. Fakat $\alpha=\dfrac{4}{9}$ için (2.2.2) eşitsizliği sağlanır.

**2-** $X=[0,1]$ ve $d(x,y)=|x-y|$ olsun. $T: X\to X$ , $T(x)=\dfrac{x}{3}$ olarak tanımlansın. Her $x,y\in X$ için,

$$d(T(x),T(y))=\left|\frac{x}{3}-\frac{y}{3}\right|=\frac{1}{3}|x-y|$$

olduğundan (2.1.1) eşitsizliği sağlanır. Yani $T$ daraltan bir dönüşümdür. Buna karşın, $x=\dfrac{1}{3}$ , $y=0$ seçildiğinde (2.2.2) eşitsizliği sağlanmaz.

**2.2.6 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T: X\to X$ aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun.

**(*i*)** $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ olmak üzere, $X$'in yoğun bir $M$ alt kümesi üzerinde her $x,y\in M$ için

$$d(T(x),T(y)) \le \alpha.\{d(x,T(x))+d(y,T(y))\}$$

sağlanıyor,

**(*ii*)** En az bir $x\in X$ vardır, öyle ki, $\{T^n(x)\}$ iterasyon dizisinin $\xi$'ye yakınsayan bir $\{T^{n_i}(x)\}$ alt dizisi vardır.

O zaman $T$'nin $X$'te tek bir $\xi$ sabit noktası vardır.

(*Kannan, R., 1969*)

**Kanıt :** ($i$) koşulunu her $x, y \in X$ nokta çifti için gerçeklendiği gösterilirse, 2.2.1 Teorem'inden sonuç doğrudan elde edilir.

$x$ ve $y$, $X$'in herhangi iki elemanı olsun. Eğer $x \in M$ ve $y \in X \setminus M$ ise o zaman, $y \in \overline{M}$ olup, $M$'de $z_n \to y$ olacak biçimde bir $\{z_n\}$ dizisi vardır.

Üçgen eşitsizliği ve ($i$)'den,

$$\begin{aligned} d(T(x),T(y)) &\leq d(T(x),T(z_n)) + d(T(z_n),T(y)) \\ &\leq \alpha.\{\, d(x,T(x)) + d(z_n,T(z_n))\} + d(T(z_n),T(y)) \\ &\leq \alpha.\{\, d(x,T(x)) + d(z_n,y) + d(y,T(y)) + d(T(y),T(z_n))\,\} + d(T(z_n),T(y)) \\ &= \alpha.\{\, d(x,T(x)) + d(y,T(y))\,\} + (1+\alpha) d(T(z_n),T(y)) + \alpha.d(z_n,y) \end{aligned}$$

bulunur.

$n \to \infty$ için limit alındığında, $z_n \to y$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik; her $x \in M$ ve $y \in X \setminus M$ için,

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha.\{\, d(x,T(x)) + d(y,T(y))\,\} \tag{2.2.3}$$

olur.

Benzer durum $x \in X \setminus M$ ve $y \in M$ için de gösterilebilir.

Eğer $x \in X \setminus M$ ve $y \in X \setminus M$ ise o zaman $M$'de $x_n \to x$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

Üçgen eşitsizliğinden,

$$d(T(x),T(y)) \leq d(T(x),T(x_n)) + d(T(x_n),T(y))\,\}$$

olup, $x_n \in M$ ve $y \in X \setminus M$ olduğundan, (2.2.3)'ten

$$d(T(x),T(y)) \leq d(T(x),T(x_n)) + \alpha.\{\, d(x_n,T(x_n)) + d(y,T(y))\,\}$$

olur. $n \to \infty$ için eşitsizliğin her iki yanından limite geçildiğinde,

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha.\{\, d(x,T(x)) + d(y,T(y))\,\}$$

olur.

Böylece, her $x, y \in X$ için

$$d(T(x),T(y)) \leq \alpha.\{\, d(x,T(x)) + d(y,T(y))\,\}$$

bulunur. □

**2.2.7 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $T$'nin bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğu varsayılsın. Eğer $\{T^n(x)\}$ iterasyon dizisi $x_0$ noktasına yakınsayacak biçimde bir $x \in X$ noktası varsa, o zaman $x_0$, $T$'nin bir sabit noktasıdır. Ayrıca, $\xi \in X$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$d(T(x_0),T(\xi)) \le \alpha . d(x_0,\xi) \tag{2.2.4}$$

ise, $x_0$, $T$'nin tek bir sabit noktası olur.

*(Kannan, R., 1969)*

**Kanıt :** $x_n = T^n(x)$ olsun, o zaman $n \to \infty$ için $x_n \to x_0$ dır. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(T(x_0),x_0) &\le d(T(x_0),x_n) + d(x_n,x_0) \\ &= d(T(x_0),T(x_{n-1})) + d(x_n,x_0) \end{aligned}$$

olup, $n \to \infty$ için limite geçildiğinde, $d(T(x_0),x_0) \le 0$ olur ki, bu ise ancak $x_0 = T(x_0)$ olması ile mümkündür.

Şimdi (2.2.4) eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilsin.

Eğer bir $z \in X$ için $z = T(z)$ ve $z \ne x_0$ ise (2.2.4)'ten

$$d(x_0,z) = d(T(x_0),T(z)) \le \alpha . d(x_0,z)$$

olur ki, bu bir çelişkidir. Şu halde $x_0$ tektir. □

## 2.3 CIRIC SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Ciric, 1974'te Banach'ın ve Kannan'ın teoremlerinde kullandıkları fonksiyonlar için vermiş oldukları bağlantıları, biraz daha genişleterek ve uzaydaki tamlık tanımını, teoreminde kullandığı dönüşümlere göre tanımlayarak sabit nokta teorisine yeni bir yorum katmıştır.

**2.3.1 Tanım :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$A \subset X$ olmak üzere;

$$\delta(A) = \sup\{ d(a,b) : a,b \in A \} \ ,$$

$$\mathrm{O}(x,n) = \{ x, Tx, T^2x, \dots, T^n x \} \qquad (n = 1,2,\dots) \ ,$$

$$O(x,\infty)=\{\ x,Tx,T^2x,\ldots\ \}$$

olarak tanımlansın.

Eğer bir $x\in X$ için, $O(x,\infty)$'daki her Cauchy dizisi $X$'te yakınsak ise $X$'e $T$-**yörüngesel tamdır** denir.

**2.3.2 Not :** Eğer $(X,d)$ uzayı tam ise bunun $T$-yörüngesel tam olduğu açıktır. Fakat $(X,d)$ uzayı $T$-yörüngesel tam ise bu, uzayın tamlığını vermez.

Örneğin; $X=(0,1]$ kümesi ve $d(x,y)=|x-y|$ metriği verilsin. $X$'in $d$'ye göre tam olmadığı açıktır. Yine $T:X\to X$ , $T(x)=\frac{x}{2}$ alındığında $X$, $T$-yörüngesel tam değildir. Buna karşın $S:X\to X$ , $S(x)=\frac{x+1}{2}$ alındığında $X$, $S$-yörüngesel tam uzay olur.

**2.3.3 Tanım :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü verilsin. $0\le q<1$ olmak üzere eğer $T$, her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le q.\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(y,Tx),d(x,Ty)\} \qquad (2.3.1)$$

koşulunu sağlıyorsa $T$'ye **quasi-daraltan dönüşüm** denir.

(*Ciric, 1974*)

**2.3.4 Not :** Eğer $T$, (2.1.1) veya (2.2.2) eşitsizliklerinden herhangi birini sağlıyorsa, o zaman $T$'nin (2.3.1) eşitsizliğini sağladığı, yani, bir quasi-daraltan dönüşüm olacağı açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir. (2.3.1) eşitsizliği, (2.1.1) ve (2.2.2) eşitsizliklerini gerektirmez. Bunu aşağıdaki örnekte görmek mümkündür.

**2.3.5 Örnek :**

$$X_1=\left\{\ \frac{m}{n}\ ;\ m=0,1,3,9,\ldots\quad ;\ n=1,4,\ldots,3k+1,\ldots\right\}$$

$$X_2=\left\{\ \frac{m}{n}\ ;\ m=1,3,9,27,\ldots\ \ ;\ n=2,5,\ldots,3k+2,\ldots\right\}$$

$X=X_1\cup X_2$ ve $d(x,y)=|x-y|$ olsun.

$$T : X \to X \quad , \quad T(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{5} & ; \ x \in X_1 \\ \dfrac{x}{8} & ; \ x \in X_2 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $q = \dfrac{3}{5}$ olarak alınırsa, $T$'nin bir quasi-daraltan dönüşüm olduğu görülür. Gerçekten;

$x$ ve $y$'nin her ikisi $X_1$'de ise,

$$d(T(x),T(y)) = |T(x) - T(y)| = \left| \frac{3x}{5} - \frac{3y}{5} \right| = \frac{3}{5}|x-y| = \frac{3}{5}d(x,y)$$

$x$ ve $y$'nin her ikisi $X_2$'de ise,

$$d(T(x),T(y)) = |T(x) - T(y)| = \left| \frac{x}{8} - \frac{y}{8} \right| = \frac{1}{8}|x-y| < \frac{3}{5}|x-y| = \frac{3}{5}d(x,y)$$

$x \in X_1$ ve $y \in X_2$ ise,

$$x > \frac{5}{24}y \ \text{ için } \ d(T(x),T(y)) = \frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{24}y\right) < \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{8}y\right) = \frac{3}{5}d(x,Ty)$$

$$x < \frac{5}{24}y \ \text{ için } \ d(T(x),T(y)) = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{24}y - x\right) < \frac{3}{5}(y-x) = \frac{3}{5}d(y,x)$$

Benzer olarak diğer durumları da görmek mümkündür. Böylece

$$d(T(x),T(y)) \le \frac{3}{5}\max\{\, d(x,y), d(x,Ty), d(y,Tx) \,\}$$

olur ki, bu ise $d$'nin $X$ üzerinde bir quasi-daraltan dönüşüm olduğunu gösterir.

Özel olarak $x = 1$ ve $y = \dfrac{1}{2}$ için; $\alpha < 1$ olmak üzere,

$$\alpha.d(x,y) = \alpha.\frac{1}{2} < \frac{43}{80} = d(T(x),T(y))$$

olur ki, bu ise $T$'nin (2.1.1) eşitsizliğini sağlamadığını gösterir.

Yine benzer biçimde, $\alpha < \dfrac{1}{2}$ olmak üzere,

$$\alpha.\{d(x,T(x)) + d(y,T(y))\} = \alpha.\left\{\frac{2}{5} + \frac{7}{16}\right\} = \alpha.\frac{67}{80} < \frac{43}{80} = d(T(x),T(y))$$

olduğundan $T$, (2.2.2) eşitsizliğini sağlamaz.

**2.3.6 Ön Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T$, $X$ üzerinde quasi-daraltan dönüşüm olsun. O zaman $n \in \mathrm{N}$ olmak üzere her $x \in X$ ve her $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ için;

$$d(T^i(x),T^j(x)) \leq q.\delta[\mathrm{O}(x,n)] \tag{2.3.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

(*Ciric, 1974*)

**Kanıt :** $x \in X$, $n \in \mathrm{N}$ ve $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ olsun. O zaman,

$$T^{i-1}(x),T^i(x),T^{j-1}(x),T^j(x) \in \mathrm{O}(x,n)$$

dir (burada $T^0(x) = x$ dir).

$T$, quasi-daraltan bir dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned} d(T^i(x),T^j(x)) &= d(TT^{i-1}(x),TT^{j-1}(x)) \\ &\leq q.\max\{d(T^{i-1}(x),T^{j-1}(x)),d(T^{i-1}(x),T^i(x)),d(T^{j-1}(x),T^j(x)), \\ &\qquad ,d(T^{i-1}(x),T^j(x)),d(T^i(x),T^{j-1}(x))\} \\ &\leq q.\delta[\mathrm{O}(x,n)] \end{aligned}$$

olur. □

**2.3.7 Not :** Eğer $T$ quasi-daraltan bir dönüşüm ve $x \in X$ ise o zaman 2.3.6. Ön Teorem'inden her bir $n \in \mathrm{N}$ için,

$$d(x,T^k(x)) = \delta[\mathrm{O}(x,n)] \tag{2.3.3}$$

koşulunu sağlayan bir $k \leq n$ pozitif tamsayısının varlığı gösterilebilir.

**2.3.8 Ön Teorem :** Eğer $T$, $(X,d)$ metrik uzayı üzerinde bir quasi-daraltan dönüşüm ise o zaman $x \in X$ için

$$\delta[\mathrm{O}(x,\infty)] \leq \frac{1}{1-q}\, d(x,T(x))$$

dir.

(*Ciric, 1974*)

**Kanıt :** $x$, $X$'te herhangi bir nokta olsun.

$$\delta[\mathrm{O}(x,1)] \leq \delta[\mathrm{O}(x,2)] \leq \dots$$

olduğundan

$$\delta[\mathrm{O}(x,\infty)] = \sup\{\delta[\mathrm{O}(x,n)] : n \in \mathrm{N}\}$$

dir. Dolayısıyla her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\delta[O(x,n)] \le \frac{1}{1-q} d(x,T(x))$$

olduğunu göstermek kanıt için yeterli olacaktır. Herhangi bir $n \in N$ alınsın. 2.3.7 Not'tan,

$$d(x,T^k(x)) = \delta[O(x,n)]$$

olacak biçimde $T^k(x) \in O(x,n)$ , $(1 \le k \le n)$ vardır.

Üçgen eşitsizliği uygulandığında ve 2.3.6. Ön Teorem'den;

$$\begin{aligned} d(x,T^k(x)) &\le d(x,T(x)) + d(T(x),T^k(x)) \\ &\le d(x,T(x)) + q.\delta[O(x,n)] \\ &= d(x,T(x)) + q.d(x,T^k(x)) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\delta[O(x,n)] = d(x,T^k(x)) \le \frac{1}{1-q} d(x,T(x))$$

bulunur. □

**2.3.9 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir quasi-daraltan dönüşüm olsun. Eğer, $X$, $T$-yörüngesel tam uzay ise o zaman,

***(i)*** $T$'nin $X$'te tek bir $u$ sabit noktası vardır ,

***(ii)*** $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = u$ ,

***(iii)*** Her $x \in X$ için

$$d(T^n(x), u) \le \left(\frac{q^n}{1-q}\right) d(x,T(x))$$

olur.

(Ciric, 1974)

**Kanıt :** $x$, $X$'te herhangi bir nokta olsun. Bu durumda $\{T^n(x)\}$ iterasyonlar dizisi bir Cauchy dizisidir. Gerçekten;

$n < m$ olmak üzere, $n,m \in N$ olsun. $T$, quasi-daraltan olduğundan, 2.3.6 Ön Teorem'inden

$$d(T^n(x),T^m(x)) = d(TT^{n-1}(x),T^{m-n+1}T^{n-1}(x)) \le q.\delta[O(T^{n-1}(x),m-n+1)]$$

olur.

2.3.7 Not'tan,

$$\delta[\mathrm{O}(T^{n-1}(x),m-n+1)]=d(T^{n-1}(x),T^{k_1}T^{n-1}(x))$$

olacak biçimde $1\le k_1\le m-n+1$ koşulunu sağlayan bir $k_1\in\mathrm{N}$ vardır. 2.3.6 Ön Teorem'ine uygulandığında,

$$\begin{aligned} d(T^{n-1}(x),T^{k_1}T^{n-1}(x)) &= d(TT^{n-2}(x),T^{k_1+1}T^{n-2}(x)) \\ &\le q.\delta[\mathrm{O}(T^{n-2}(x),k_1+1)] \\ &\le q.\delta[\mathrm{O}(T^{n-2}(x),m-n+2)] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} d(T^{n}(x),T^{m}(x)) &\le q.\delta[\mathrm{O}(T^{n-1}(x),m-n+1)] \\ &= d(T^{n-1}(x),T^{k_1}T^{n-1}(x)) \\ &\le q.q.\delta[\mathrm{O}(T^{n-2}(x),m-n+2)] \end{aligned}$$

olur. Bu biçimde devam edildiğinde,

$$\begin{aligned} d(T^{n}(x),T^{m}(x)) \le q.\delta[\mathrm{O}(T^{n-1}(x),m-n+1)] \le q^2.\delta[\mathrm{O}(T^{n-2}(x),m-n+2) \le \ldots \\ \ldots \le q^n.\delta[\mathrm{O}(x,m)] \end{aligned}$$

olur.

2.3.7. Ön Teorem'inden,

$$d(T^{n}(x),T^{m}(x))\le \frac{q^n}{1-q}\,d(x,T(x)) \tag{2.3.4}$$

bulunur. $0\le q<1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ dır. Bu ise $\{T^n(x)\}$'nin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

$X$, $T$-yörüngesel tam olduğundan $\{T^n(x)\}$, $X$'te bir $u$ noktasına yakınsar. Üçgen eşitsizliği ve $T$'nin quasi-daraltan olması kullanıldığında,

$$\begin{aligned} d(u,T(u)) &\le d(u,T^{n+1}(x))+d(TT^{n}(x),T(u)) \\ &\le d(u,T^{n+1}(x))+q.\max\{\, d(T^{n}(x),u),d(T^{n}(x),T^{n+1}(x)),d(u,T(u)), \\ &\qquad d(T^{n}(x),T(u)),d(T^{n+1}(x),u)\,\} \\ &\le d(u,T^{n+1}(x))+q.\{\, d(T^{n}(x),T^{n+1}(x))+d(T^{n}(x),u)+d(u,T(u))+ \\ &\qquad +d(T^{n+1}(x),u)\,\} \end{aligned}$$

ve buradan,

$$d(u,T(u))\le \frac{1}{1-q}\,[(1+q)d(u,T^{n+1}(x))+q.d(u,T^{n}(x))+q.d(T^{n}(x),T^{n+1}(x))]$$

olur. $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$ olduğundan, eşitsizliğin her iki yanından $n \to \infty$ için limit alındığında,

$$d(u, T(u)) \leq 0$$

bulunur. Bunun gerçekleşmesi ancak $d(u,T(u))=0$ durumunda mümkündür. O halde $T(u) = u$ 'dur.

$u$ 'nun tekliği, $T$ 'nin quasi-daraltanlığı kullanılarak kolayca gösterilebilir. Böylece (*i*) ve (*ii*) kanıtlanmış olur. (*iii*) için; (2.3.4) eşitsizliğinde $m \to \infty$ için limite geçildiğinde,

$$\lim_{m\to\infty} d(T^n(x), T^m(x)) \leq \lim_{m\to\infty} \frac{q^n}{1-q} d(x, T(x))$$

ve böylelikle

$$d(T^n(x), u)) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, T(x))$$

bulunur. □

2.3.9 Teorem'inin ardından hemen aşağıdaki sonucu vermek mümkündür.

**2.3.10 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $(X,d)$, $T$ -yörüngesel tam ve bir $k \in \mathrm{N}$ için $T^k$ bir quasi-daraltan dönüşüm ise,

**(*i*)** $T$ 'nin $X$ 'te tek bir $u$ sabit noktası vardır.

**(*ii*)** $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$

**(*iii*)** $a(x) = \max\{\, d(T^i(x), T^{i+k}(x)) : i = 0,1,2, \ldots, k-1 \,\}$ ve $m = E\left(\frac{n}{k}\right)$

($m$ , $\frac{n}{k}$ 'yı geçmeyen en büyük tamsayı)

olmak üzere her bir $x \in X$ için;

$$d(T^n(x), u) \leq \frac{q^m}{1-q} a(x)$$

olur.

(Ciric, 1974)

**Kanıt :** Bir $k \in \mathrm{N}$ için, $T^k$, quasi-daraltan olduğundan, 2.3.9 Teorem'den $T^k$'nın tek bir $u$ sabit noktası vardır.

$$T^k(Tu) = T(T^k u) = Tu$$

olduğundan, $Tu$ da $T^k$'nın bir sabit noktası olur. $u$'nun tekliğinden, $u = T(u)$ olur. $T$ için $u$'nun tek olması açıktır.

(*iii*) ve (*ii*) için;

$n \in \mathrm{N}$ olsun. O zaman $n = mk + j$ , $0 \le j < k$ , $m \ge 0$ ve her bir $x \in X$ için;

$$T^n(x) = (T^k)^m.T^j(x)$$

dir. $T^k$ quasi-daraltan olduğundan ve 2.3.9 Teorem'inin (*iii*) şıkkından;

$$\begin{aligned} d(T^n(x),u) &= d((T^k)^m.T^j(x),u) \\ &\le \frac{q^m}{1-q} d(T^j(x),T^kT^j(x)) \\ &\le \frac{q^m}{1-q}.\max.\ \{d(T^i(x),T^{i+k}(x)) : i = 0,1,2,\ldots,k-1\} \\ &= \frac{q^m}{1-q} a(x) \end{aligned}$$

olur. Yani

$$d(T^n(x),u) \le \frac{q^m}{1-q} a(x)$$

olur. Buradan da (*ii*) ve (*iii*) 'nin kanıtı görülür. □

# III. BÖLÜM

# $w$- UZAKLIK FONKSİYONU

İkinci bölümde verilen teoremlerde, fonksiyonların sabit noktalarının var ve tek olduğunu belirlerken fonksiyonlara ve onların tanımlı oldukları kümelere bazı özellikler yüklenmişti.

Bir sonraki bölümde, bu bölümde verilecek olan $w$-uzaklık fonksiyonu yardımıyla uzay ve fonksiyonlar üzerine değişik özellikler yüklenerek bazı önemli sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır. Bu nedenle bu bölümde, $w$-uzaklık fonksiyonuna bir giriş yapılacak ve bu fonksiyonun, değişik örneklerle birlikte, bazı özellikleri incelenecektir.

## 3.1 $w$-UZAKLIK FONKSİYONUNUN TANIMI VE BAZI ÖRNEKLER

$w$-uzaklık fonksiyonu kavramı ilk olarak, *Kada*, *Suzuki* ve *Takahashi*'nin 1996'da ortak olarak yapmış oldukları konveks olmayan minimizasyon problemleri çalışmaları sırasında tanımlanmış ve daha sonra bu tanımı sabit nokta teorisinde kullanarak önemli bir takım sonuçlar elde etmişlerdir.

**3.1.1 Tanım :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $p: X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $p$ fonksiyonu;

**(*i*)** Her $x,y,z\in X$ için

$$p(x,z)\leq p(x,y)+p(y,z)$$

**(*ii*)** Herhangi bir $x\in X$ için;

$$p(x,\cdot): X\to[0,\infty)$$

alttan yarı süreklidir. (Yani $p$ ikinci değişkene göre alttan yarı sürekli)

***(iii)*** Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $p(z,x) \le \delta$ ve $p(z,y) \le \delta$ iken $d(x,y) \le \varepsilon$ 'dur

koşullarını sağlıyorsa, $p$ 'ye $X$ üzerinde bir $w$ **-uzaklık** denir.

**3.1.2 Örnekler :**

**1-** $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Eğer $p = d$ alınırsa, $p$, $X$ üzerine bir $w$-uzaklık olur.

**Kanıt :** $(i)$ ve $(ii)$ açıktır.

$(iii)$ Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ alındığında,

$$d(z,x) \le \delta \quad \text{ve} \quad d(z,y) \le \delta$$

ise,

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \le \delta + \delta = \varepsilon$$

olur.

**2-** $(X, \|.\|)$, normlu lineer uzay ve $p : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ için;

$$p(x,y) = \|x\| + \|y\|$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda , $p$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

**Kanıt :**

$(i)$ Her $x,y,z \in X$ için;

$$p(x,z) = \|x\| + \|z\| \le \|x\| + \|y\| + \|y\| + \|z\| = p(x,y) + p(y,z)$$

olur.

$(ii)$ Normlu uzaylar sürekli olduğundan $p(x,\cdot) : X \to [0,\infty)$ alttan yarı süreklidir.

$(iii)$ Her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ alındığında

$$p(z,x) \le \delta \quad \text{ve} \quad p(z,y) \le \delta$$

ise

$$d(x,y) = \|x - y\| \le \|x\| + \|y\| \le p(z,x) + p(z,y) \le \delta + \delta = \varepsilon$$

olur.

**3-** $(X,\|.\|)$, normlu lineer uzay ve $p: X\times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu, her $x,y\in X$ için;

$$p(x,y)=\|y\|$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $p$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

**Kanıt :**

(*i*) Her $x,y,z\in X$ için;

$$p(x,z)=\|z\|\le\|y\|+\|z\|=p(x,y)+p(y,z)$$

olur.

(*ii*) Normlu uzaylar sürekli olduğundan $p(x,\cdot): X\to[0,\infty)$ alttan yarı süreklidir.

(*iii*) Her $\varepsilon>0$ için $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ alındığında $p(z,x)\le\delta$ ve $p(z,y)\le\delta$ ise

$$\begin{aligned} d(x,y)=\|x-y\|&\le\|x\|+\|y\| \\ &=p(z,x)+p(z,y)\le\delta+\delta=\varepsilon \end{aligned}$$

olur.

**4-** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T: X\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. $p: X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y\in X$ için;

$$p(x,y)=\max\{\, d(T(x),y), d(T(x),T(y))\,\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $p$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

**Kanıt :**

(*i*) $x,y,z\in X$ olsun.

$$d(T(x),z)\ge d(T(x),T(z))$$

ise,

$$\begin{aligned} p(x,z)=d(T(x),z)&\le d(T(x),T(y))+d(T(y),z) \\ &\le\max\{\, d(T(x),y), d(T(x),T(y))\,\}+\max\{d(T(y),z), d(T(y),T(z))\,\} \\ &=p(x,y)+p(y,z) \end{aligned}$$

olur.

Eğer $d(T(x),T(z))\ge d(T(x),z)$ ise,

$$\begin{aligned} p(x,z) &= d(T(x),T(z)) \le d(T(x),T(y)) + d(T(y),T(z)) \\ &\le \max\{\, d(T(x),y), d(T(x),T(y)) \,\} + \max\{ d(T(y),z), d(T(y),T(z)) \,\} \\ &= p(x,y) + p(y,z) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece her $x,y,z \in X$ için

$$p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z)$$

sağlanır.

($ii$) $T$ sürekli olduğundan, $p(x,\cdot\,) : X \to [0,\infty)$ alttan yarı süreklidir.

($iii$) Her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ alındığında

$$p(z,x) \le \delta \text{ ve } p(z,y) \le \delta$$

yani,

$$p(x,z) = \max\{\, d(T(z),x), d(T(x),T(x)) \,\} \le \delta$$
$$p(z,y) = \max\{\, d(T(z),y), d(T(x),T(y)) \,\} \le \delta$$

ise,

$$d(T(z),x) \le \delta \text{ ve } d(T(z),y) \le \delta$$

olacağından, $d(x,y)$ 'ye üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(T(z),x) + d(T(z),y) \\ &\le \delta + \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

olur.

5- $X = R$ ve $d(x,y) = |x-y|$ mutlak değer metriği alınsın. $f : X \to [0,\infty]$ , $r > 0$ olmak üzere

$$\inf_{x \in X} \int_x^{x+r} f(u)du > 0$$

koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman, her $x,y \in X$ için

$$p(x,y) = \left| \int_x^y f(u)du \right|$$

biçiminde tanımlansın.

$p : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olur.

**Kanıt :**

($i$) Her $x, y, z \in X$ için;

$$p(x,z) = \left| \int_x^z f(u)du \right| = \left| \int_x^y f(u)du + \int_y^z f(u)du \right|$$

$$\leq \left| \int_x^y f(u)du \right| + \left| \int_y^z f(u)du \right|$$

$$= p(x,y) + p(y,z)$$

olur.

($ii$) İntegralin temel teoreminden $p$, ikinci bileşene göre sürekli, dolayısıyla, alttan yarı süreklidir.

($iii$) Her $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta$,

$$0 < \delta < \inf_{x \in X} \int_x^{x+\frac{\varepsilon}{2}} f(u)du \tag{3.1.1}$$

biçiminde alınsın. $p(z,x) \leq \delta$ ve $p(z,y) \leq \delta$ ise

$$|z - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |z - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Gerçekten; $z \leq x$ ise, (3.1.1) eşitsizliğinden

$$p(x,z) = \int_z^x f(u)du \leq \delta < \int_z^{z+\frac{\varepsilon}{2}} f(u)du$$

bulunur. Bu ise $x \leq z + \frac{\varepsilon}{2}$ olduğunu gösterir. Böylece $x - z \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

$x \leq z$ ise, benzer biçimde $z - x \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olup, buradan $|z - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olduğu görülür.

Benzer işlemler takip edildiğinde, $|z - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ olduğu gösterilebilir.

Buna göre;

$$d(x,y) = |x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq \varepsilon$$

bulunur.

**6-** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $F$ de $X$'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $c$ bir sabit sayı ve $c \geq \delta(F)$, $\big(\delta(F) = \sup\{\, d(a,b) \,:\, a,b \in F\,\}$ ; $F$'nin çapı$\big)$ olmak üzere $F$, $X$'in en az iki noktasından oluşsun. O zaman

$$p(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & ; x,y \in F \\ c & ; x \notin F \text{ veya } y \notin F \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $p : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

**Kanıt :**

$(i)$ Her $x,y,z \in X$ için;

$x,z \in F$ alınırsa;

$$\begin{aligned} p(x,z) = d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &\leq p(x,y) + p(y,z) \end{aligned}$$

$x \notin F$ veya $y \notin F$ alınırsa;

$$p(z,x) = c \leq p(x,y) + p(y,z)$$

olduğu açıktır.

$(ii)$ $p$'nin alttan yarı sürekli olduğunu görmek için

$$\{\, x : p(a,x) > s \,\} \quad , (a \in X,\, s \in R)$$

kümesinin $X$'te açık olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$c \geq \delta(F)$ olduğundan, her $x,y \in F$ için $d(x,y) \leq c$ olduğu için aşağıdaki iki durumu incelemek yeterlidir.

$s \geq c$ ise,

$\{\, x : p(a,x) > s \,\} = \varnothing$ olduğundan, $X$'te açık;

$s < c$ ise,

$\{\, x : p(a,x) > s \,\} = X$ olduğundan, $X$ açık

olur.

$(iii)$ Her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \dfrac{c}{2}$ olarak alındığında, herhangi iki $x,y \in X$ için $p(x,y) \leq \delta$ ise, o zaman $x,y \in F$ olmak zorundadır.

Bu durumda,

$$p(z,x) = d(z,x) \leq \frac{c}{2}$$

ve

$$p(z,y) = d(z,y) \le \frac{c}{2}$$

ise, $x, y, z \in F$ olup, buradan;

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \le \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

olur.

## 3.2 $w$-UZAKLIĞIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde, sabit nokta teoremlerinde kullanılacak olan $w$-uzaklığın bazı özellikleri incelenecektir.

**3.2.1 Teorem :** Bir $(X,d)$ metrik uzayı ile, $X$ üzerinde bir $p-w$- uzaklığı verilsin. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ $X$'te iki dizi, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ de $[0,\infty)$'da $0$'a (sıfır) yakınsayan diziler ise her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki önermeler doğrudur.

(*i*) Her $n \in \mathrm{N}$ için $p(x_n, y) \le \alpha_n$ ve $p(x_n, z) \le \beta_n$ ise, o zaman $y = z$ olur. Özel olarak , $p(x,y) = 0$ ve $p(x,z) = 0$ ise $y = z$'dir.

(*ii*) Her $n \in \mathrm{N}$ için $p(x_n, y_n) \le \alpha_n$ ve $p(x_n, z) \le \beta_n$ ise $\{y_n\}$ dizisi $z$'ye yakınsar.

(*iii*) Eğer $p(x_n, y_n) \le \alpha_n$ ve $p(x_n, z_n) \le \beta_n$ ise $\{d(y_n, z_n)\}$, $0$'a yakınsar.

(*iv*) $m > n$ olmak üzere, her $n, m \in \mathrm{N}$ için $p(x_n, x_m) \le \alpha_n$ ise, o zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olur.

(*v*) Her $n \in \mathrm{N}$ $p(y, x_n) \le \alpha_n$ ise, o zaman $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

(*Kada, O., vd., 1996 ; Suzuki, T., 1997*)

**Kanıt :** (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) gerektirmesinin doğruluğu açıktır.

Şu halde (*i*), (*ii*) ve (*iii*)'nin kanıtı için sadece (*iii*)'yi kanıtlamak yetecektir.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $w$-uzaklığın tanımından $\exists\ \delta > 0 \ \ni$

$$p(u,v) \le \delta \text{ ve } p(u,z) \le \delta \text{ ise } d(v,z) \le \varepsilon \tag{3.2.1}$$

olur.

$\alpha_n \to 0$ olduğundan, $\exists\, N_1 \in \mathrm{N} \ni$ her $n \geq N_1$ için $\alpha_n < \delta$

ve benzer biçimde

$\beta_n \to 0$ olduğundan, $\exists\, N_2 \in \mathrm{N} \ni$ her $n \geq N_2$ için $\beta_n < \delta$

olur.

$n_0 = \max\{N_1, N_2\}$ olarak alındığında, her $n \geq n_0$ için $\alpha_n < \delta$ ve $\beta_n < \delta$ olur. Böylece her $n \geq n_0$ için

$$p(x_n, y_n) \leq \alpha_n < \delta \quad \text{ve} \quad p(x_n, z_n) \leq \beta_n < \delta$$

olur ki, o zaman (3.2.1)'den $d(y_n, z_n) \leq \varepsilon$ bulunur. Bu ise $\{d(y_n, z_n)\}$'nin 0'a yakınsadığını gösterir.

$(iv)$'nin kanıtı için;

$\varepsilon > 0$ verilsin. (3.2.1)'de olduğu gibi $\delta > 0$ seçilsin. $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan, yine $\exists\, n_0 \in \mathrm{N} \ni$ her $n \geq n_0$ için $\alpha_n < \delta$ dir. Böylece her $n, m \geq n_0 + 1$ için;

$$p(x_{n_0}, x_n) \leq \alpha_{n_0} < \delta \quad \text{ve} \quad p(x_{n_0}, x_m) \leq \alpha_{n_0} < \delta$$

olup, buradan $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ bulunur. Şu halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

$(v)$ için;

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta > 0$ ve $n_0 \in \mathrm{N}$ $(iii)$'nin kanıtındaki gibi seçildiğinde, her $n, m \geq n_0$ için,

$$p(y, x_n) \leq \alpha_n < \delta \quad \text{ve} \quad p(y, x_m) \leq \alpha_n < \delta$$

olup, buradan $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ bulunur. □

Bir $(X, d)$ metrik uzayı üzerinde tanımlı olan $w$-uzaklıkları ile başka $w$-uzaklıkları da tanımlanabilir.

**3.2.2 Teorem :** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $p_1$, $p_2$ de $X$ üzerinde $w$-uzaklıklar olsun.

**(i)** Her $x, y \in X$ için;

$$p(x, y) = \max\{\, p_1(x, y)\,,\, p_2(x, y)\,\}$$

*(ii)* Her $x, y \in X$ için $\alpha$ ve $\beta$ negatif olmayan gerçel sayılar olmak üzere ($\alpha \neq 0$ veya $\beta \neq 0$ ) olur ki,

$$p(x,y) = \alpha.p_1(x,y) + \beta.p_2(x,y)$$

biçiminde tanımlanan $p$ fonksiyonları $X$ üzerinde $w$-uzaklıktır.

(*Kada, O., v.d., 1996*)

**Kanıt :**

(*i*) Her $x, y, z \in X$ için;

$$\begin{aligned} p(x,z) &= \max\{ p_1(x,z), p_2(x,z)\} \\ &\leq \max\{ p_1(x,y)+p_1(y,z) \,,\, p_2(x,y)+p_2(y,z)\} \\ &\leq \max\big\{\max\{ p_1(x,y), p_2(x,y)\} + \max\{ p_1(y,z), p_2(y,z)\}, \\ &\qquad \max\{ p_1(x,y), p_2(x,y)\} + \max\{ p_1(y,z), p_2(y,z)\}\big\} \\ &= \max\{ p(x,y) + p(y,z) \,,\, p(x,y) + p(y,z) \} \\ &= p(x,y) + p(y,z) \end{aligned}$$

olur.

Her $x \in X$ için

$$p(x,\cdot) = \max\{ p_1(x,\cdot) \,,\, p_2(x,\cdot)\}$$

olup, $p_1$ ve $p_2$, $X$ üzerinde $w$-uzaklık olduğundan, $p(x,\cdot)$ alttan yarı süreklidir.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $p_1$, $w$-uzaklık olduğundan $\exists\, \delta > 0 \ni p_1(z,x) \leq \delta$ ve $p_2(z,y) \leq \delta$ ise $d(x,y) \leq \varepsilon$ dur.

Eğer $p(z,x) \leq \delta$ ve $p(z,y) \leq \delta$ ise o zaman, $p$ 'nin tanımı gereği, $p_1(z,x) \leq \delta$ ve $p_1(z,y) \leq \delta$ olacağından $d(x,y) \leq \varepsilon$ bulunur.

Şu halde $p(x,y) = \max\{ p_1(x,y) \,,\, p_2(x,y)\}$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

(*ii*) $\alpha > 0$ olduğunu varsaymak genelliği bozmaz. Her $x, y, z \in X$ için;

$$\begin{aligned} p(x,z) &= \alpha.p_1(x,z) + \beta.p_2(x,z) \\ &\leq \alpha.(p_1(x,y) + p_1(y,z)) + \beta.(p_2(x,y) + p_2(y,z)) \\ &= \alpha.p_1(x,y) + \beta.p_2(x,y) + \alpha.p_1(y,z) + \beta.p_2(y,z) \\ &= p(x,y) + p(y,z) \end{aligned}$$

olur.

$p_1$ ve $p_2$, alttan yarı sürekli olduğundan, her $x \in X$ için $\alpha.p_1(x,\cdot)$, $\beta.p_2(x,\cdot)$'de alttan yarı süreklidir. Dolayısıyla $p(x,\cdot) = \alpha.p_1(x,\cdot) + \beta.p_2(x,\cdot)$ alttan yarı sürekli olur.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $p_1$, $w$-uzaklık olduğundan $\ni$ $\delta' > 0$ için;

$$p_1(z,x) \leq \delta' \text{ ve } p_1(z,y) \leq \delta' \text{ ise } d(x,y) \leq \varepsilon \tag{3.2.2}$$

dur.

$\delta = \alpha.\delta'$ olarak alınsın. $p(z,x) \leq \delta$ ve $p(z,y) \leq \delta$ ise,

$$p(z,x) = \alpha.p_1(z,x) + \beta.p_2(z,x) \leq \delta$$

ve

$$p(z,y) = \alpha.p_1(z,y) + \beta.p_2(z,y) \leq \delta$$

olup, buradan

$$\alpha.p_1(z,x) \leq \delta \text{ ise } p_1(z,x) \leq \delta'$$

ve

$$\alpha.p_1(z,y) \leq \delta \text{ ise } p_1(z,y) \leq \delta'$$

bulunur. Böylece (3.2.2)'den $d(x,y) \leq \varepsilon$ olur.

Şu halde $p(x,y) = \alpha.p_1(x,y) + \beta.p_2(x,y)$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır. □

**3.2.3 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay, $p$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık ve $\alpha : X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. O zaman $q : X \times X \to [0,\infty)$, her $x,y \in X$ için;

$$q(x,y) = \max\{\alpha(x), p(x,y)\}$$

biçiminde tanımlanan $q$ fonksiyonu, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

(*Kada, O., v.d.,1996*)

**Kanıt :** Her $x,y,z \in X$ için;

$$\begin{aligned} q(x,z) &= \max\{\alpha(x), p(x,z)\} \\ &\leq \max\{\alpha(x)+\alpha(y), p(x,y)+p(y,z)\} \\ &\leq \max\big\{ \max\{\alpha(x),p(x,y)\} + \max\{\alpha(y),p(y,z)\}, \\ &\qquad \max\{\alpha(x),p(x,y)\} + \max\{\alpha(y),p(y,z)\} \big\} \\ &= \max\{q(x,y)+q(y,z)\,,\, q(x,y)+q(y,z)\} \\ &= q(x,y)+q(y,z) \end{aligned}$$

bulunur.

Her $x \in X$ için $q(x,\cdot) = \max\{\alpha(x), p(x,\cdot)\}$, $p$ bir $w$-uzaklık olduğundan alttan yarı süreklidir. $x$ sabit tutulduğundan $\alpha(x)$'i $x$'e göre sabit fonksiyon gibi düşünüldüğünde $q(x,\cdot)$'in alttan yarı sürekli olduğu açıktır.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $p$, $w$-uzaklık olduğundan $\exists\ \delta > 0$ öyle ki,

$$p(z,x) \le \delta \text{ ve } p(z,y) \le \delta \text{ ise } d(x,y) \le \varepsilon \qquad (3.2.3)$$

dur. Eğer $q(z,x) \le \delta$ ve $q(z,y) \le \delta$ ise $q$'nun tanımından;

$$p(z,x) \le \delta \text{ ve } p(z,y) \le \delta$$

olup, (3.2.3)'ten $d(x,y) \le \varepsilon$ bulunur.

Şu halde $q(x,y) = \max\{\alpha(x), p(x,y)\}$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır. □

**3.2.4 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay, $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık ve $f : X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $q : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $(x,y) \in X \times X$ için,

$$q(x,y) = f(x) + p(x,y)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $q$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

(*Suzuki, T., 1997*)

**Kanıt :** 3.2.3 Teorem'in kanıtında olduğu gibi benzer biçimde kanıtlanır.

# IV. BÖLÜM

# $w$-UZAKLIK FONKSİYONU İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE SONUÇLARI

Bu bölümde $w$-uzaklık kavramı kullanılarak, tam metrik uzay üzerinde, ikinci bölümde verilen sabit nokta teoremlerinin bazı genellemeleri verilecektir. Üç kesimden oluşacak bu bölümde ilk olarak ön teoremler, ikinci olarak temel teoremler ve son olarak da bunların sonuçları incelenecektir.

## 4.1 ÖN TEOREMLER

Bu kesimde, bir sonraki kesimde verilecek olan teoremlere esas teşkil edecek ön teoremler verilecektir.

$(X,d)$'deki bir $p$-uzaklığına göre bir $A \subset X$ **kümesinin çapı**;

$$\delta(A) = \sup\{\, p(x,y) : x,y \in A \,\}$$

biçiminde tanımlanır.

**4.1.1 Ön Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T : X \to X$ dönüşümü, $q \in [0,1)$ olmak üzere her $x,y \in X$ için;

$$p(Tx,Ty) \le q.\max\{\, p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty), p(x,Ty), p(y,Tx)\} \qquad (4.1.1)$$

koşulunu sağlıyorsa, o zaman;

***(i)*** Her $x \in X$ ve $n \in \mathrm{N}$ için $i,j \le n$ , $i,j \in \mathrm{N}$ olmak üzere

$$p(T^i x, T^j x) \le q.\delta(\mathrm{O}(x,n)) \ ,$$

***(ii)*** Her $x \in X$ ve $n \in \mathrm{N}$ için

$$\delta(\mathrm{O}(x,n)) = \max\{\, p(x,x), p(x,T^k x), p(T^l x, x) \,\}$$

olacak biçimde, $k,l \le n$ koşulunu sağlayan $k,l \in \mathrm{N}$ sayıları vardır.

**(*iii*)** Her $x \in X$ için;

$$\delta(\mathrm{O}(x,\infty)) \leq \frac{1}{1-q}\{\, p(x,x)+p(x,Tx)+p(Tx,x)\,\}$$

**(*iv*)** Her $x \in X$ için, $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizisidir.

(Ume, J. S., 1998).

**Kanıt :**

(*i*) $x \in X$, $n \in \mathrm{N}$ ve $i,j \in \mathrm{N}$'de $i,j \leq n$ için; 2.3.6 Ön Teorem'in kanıtında olduğu gibi tamamen benzer biçimde $p$ $w$-uzaklığı için kanıt yapıldığında (*i*) kanıtlanır.

(*ii*) Herhangi bir $n \in \mathrm{N}$ alınsın. O zaman

$$\delta(\mathrm{O}(x,n)) = \max\{\; p(T^i x, T^j x) \;:\; 0 \leq i,j \leq n \;\}$$

olacağından, $\exists\; k,l \leq n \;\ni$

$$\delta(\mathrm{O}(x,n)) = p(T^k x, T^l x)$$

dir. Eğer $k$ ve $l$ sıfırdan farklı ise ön teorem'in (*i*) şıkkından,

$$\delta(\mathrm{O}(x,n)) = p(T^k x, T^l x) \;\leq q.\delta(\mathrm{O}(x,n))$$

olur ki, $0 \leq q < 1$ olduğundan bu durum bir çelişkidir.

Şu halde $k = l = 0$ veya $k = 0$ , $l \neq 0$ veya $k \neq 0$ , $l = 0$ dir. Böylece;

$$\delta(\mathrm{O}(x,n)) = \max\{\, p(x,x), p(x,T^k x), p(T^l x, x)\,\}$$

bulunur.

(*iii*) (*ii*)'den $x \in X$ ve $n \in \mathrm{N}$ için,

$$\max\{\, p(x,x), p(x,T^k x), p(T^l x,x)\,\} = \delta(\mathrm{O}(x,n))$$

olacak biçimde $k,l \leq n$ , $k,l \in \mathrm{N}$ sayıları vardır. Üçgen eşitsizliği ve ön teoremin (*i*) şıkkı kullanıldığında;

$$\begin{aligned} p(x,T^k x) &\leq p(x,Tx)+p(Tx,T^k x) \\ &\leq p(x,Tx)+q.\delta(\mathrm{O}(x,n)) \\ &\leq p(x,x)+p(Tx,x)+p(x,Tx)+q.\delta(\mathrm{O}(x,n)) \end{aligned}$$

ve benzer biçimde;

$$\begin{aligned} p(T^l x,x) &\leq p(T^l x,Tx)+p(Tx,x) \\ &\leq q.\delta(\mathrm{O}(x,n))+p(Tx,x) \\ &\leq p(x,x)+p(Tx,x)+p(x,Tx)+q.\delta(\mathrm{O}(x,n)) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$p(x,x) \le p(x,x) + p(Tx,x) + p(x,Tx) + q.\delta(\mathrm{O}(x,n))$$

dir. Böylece

$$\delta(\mathrm{O}(x,n)) \le q.\delta(\mathrm{O}(x,n)) + p(x,x) + p(x,Tx) + p(Tx,x)$$

ve buradan

$$\delta(\mathrm{O}(x,n)) \le \frac{1}{1-q}\{p(x,x) + p(x,Tx) + p(Tx,x)$$

bulunur. Bu her $n \in \mathrm{N}$ için doğru olacağından,

$$\delta(\mathrm{O}(x,\infty)) \le \frac{1}{1-q}\{p(x,x) + p(x,Tx) + p(Tx,x)\}$$

olur.

(*iv*) $x$, $X$ 'te herhangi bir nokta olmak üzere, her $n \in \mathrm{N}$ için $x_n = T^n x$ dizisi tanımlansın. (4.1.1) eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) &= p(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\le q.\max\{p(x_{n-1}, x_n), p(x_{n-1}, x_n), p(x_n, x_{n+1}), p(x_{n-1}, x_{n+1}), p(x_n, x_n)\} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

olup,

$$\begin{aligned} p(x_{n-1}, x_n) &= p(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) \\ &\le q.\max\{p(x_{n-2}, x_{n-1}), p(x_{n-2}, x_{n-1}), p(x_{n-1}, x_n), p(x_{n-2}, x_n), p(x_{n-1}, x_{n-1})\} \ , \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned} p(x_{n-1}, x_{n+1}) &= p(Tx_{n-2}, Tx_n) \\ &\le q.\max\{p(x_{n-2}, x_n), p(x_{n-2}, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}), p(x_{n-2}, x_{n+1}), p(x_n, x_{n-1})\} \ , \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

$$\begin{aligned} p(x_n, x_n) &= p(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}) \\ &\le q.\max\{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_{n-1}, x_n), p(x_{n-1}, x_n), p(x_{n-1}, x_n), p(x_{n-1}, x_n)\} \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

olacağından; (4.1.3), (4.1.4) ve (4.1.5) eşitsizlikleri (4.1.2)'de yerine yazılırsa ve bu işlemlere benzer biçimde devam edilirse,

$$p(x_n,x_{n+1}) \le q.\max\ \{ q.\max\{ p(x_{n-2},x_{n-1}), p(x_{n-1},x_n), p(x_{n-2},x_n), p(x_{n-1},x_{n-1})\}, \\ q.\max\{ p(x_{n-2},x_n), p(x_{n-2},x_{n-1}), p(x_n,x_{n+1}), p(x_{n-2},x_{n+1}), p(x_n,x_{n-1})\}, \\ q.\max\{ p(x_{n-1},x_{n-1}), p(x_{n-1},x_n)\} \}$$

olup,

$$\begin{aligned} p(x_n,x_{n+1}) &\le q^2 \max\ \{ p(x_i,x_j) : n-2 \le i \le n\ , n-1 \le j \le n+1 \} \\ &\le q^3 \max\ \{ p(x_i,x_j) : n-3 \le i \le n\ , n-2 \le j \le n+1 \} \\ &\vdots \\ &\le q^{n-1} \max\ \{ p(x_i,x_j) : 1 \le i \le n\ , 2 \le j \le n+1 \} \\ &\le q^{n-1} \frac{1}{1-q} \left( p(x,x) + p(x,Tx) + p(Tx,x) \right) \end{aligned}$$

bulunur. $a(x) = p(x,x) + p(x,Tx) + p(Tx,x)$ denirse,

$$p(x_n,x_{n+1}) \le \frac{q^{n-1}}{1-q}.a(x) \tag{4.1.6}$$

olur. $n < m$ için, üçgen eşitsizliği ve (4.1.6)'dan,

$$\begin{aligned} p(x_n,x_m) &\le p(x_n,x_{n+1}) + p(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + p(x_{m-1},x_m) \\ &= \sum_{k=0}^{m-n-1} p(x_{n+k},x_{n+k+1}) \\ &\le \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{q^{n+k-1}}{1-q}.a(x) \\ &\le \frac{q^{n-1}}{(1-q)^2}.a(x) \end{aligned}$$

olur. Yani $n < m$ için,

$$p(x_n,x_m) \le \frac{q^{n-1}}{(1-q)^2}.a(x) \tag{4.1.7}$$

olup, $q \in [0,1)$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yakınsar. 3.2.1 Teorem'in *(iv)* şıkkından $\{x_n\} = \{T^n x\}$ bir Cauchy dizisidir. □

**4.1.2 Ön Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $T$ quasi-daraltan, yani, (2.3.1) eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm ise, o zaman $y \ne Ty$ koşulunu sağlayan her bir $y \in X$ için, $\inf\{d(x,y) + d(x,Tx) : x \in X\} > 0$ dır.

*(Kada, O., v.d., 1996 ; Ume, J. S., 1998)*

**Kanıt :** $z \neq Tz$ olmak üzere, bir $z \in X$ için

$$\inf\{d(x,z)+d(x,Tx)\ :\ x \in X\}=0$$

olduğu varsayılsın. O zaman

$$\lim_{n\to\infty}\{d(z_n,z)+d(z_n,Tz_n)\}=0$$

olacak biçimde $X$ 'te bir $\{z_n\}$ dizisi vardır.

Böylece, $d(z_n,z)\to 0$ ve $d(z_n,Tz_n)\to 0$ olacağından, üçgen eşitsizliğinden

$$d(Tz_n,z)\leq d(Tz_n,z_n)+d(z_n,z)$$

olup, eşitsizliğin sağ tarafi sıfıra yakınsayacağından, $\{Tz_n\}$, $z$ 'ye yakınsar.

$T$ quasi-daraltan olduğundan;

$$d(Tz,Tz_n)\leq q.\max\{d(z,z_n),d(z,Tz),d(z_n,Tz_n),d(z,Tz_n),d(z_n,Tz)\}$$

olup, $n\to\infty$ limite geçildiğinde,

$$d(Tz,z)\leq q.d(z,Tz)$$

bulunur. Böylece,

$$d(Tz,z)\leq q.d(z,Tz)<d(z,Tz)$$

olur ki, bu bir çelişkidir.

O halde $y\neq Ty$ koşulunu sağlayan her bir $y\in X$ için,

$$\inf\{d(x,y)+d(x,Tx)\ :\ x\in X\}>0$$

olur. □

**4.1.3 Ön Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olsun. Eğer $T:X\to X$ sürekli dönüşüm ve $q\in[0,1)$ olmak üzere, her $x\in X$ için;

$$p(Tx,T^2x)\leq q.\max\{p(x,Tx),\ p(x,T^2x)\} \tag{4.1.8}$$

koşulunu sağlıyorsa, o zaman $y\neq Ty$ koşulunu sağlayan her $y\in X$ için

$$\inf\{p(x,y)+p(x,Tx)\ :\ x\in X\}>0$$

dir.

(*Ume, J. S., 1998*)

**Kanıt :** 4.1.2 Ön Teorem'inin kanıtında kullanılan metot, $p$ $w$-uzaklık için benzer biçimde uygulanarak yapılacaktır.

$z \neq Tz$ olmak üzere bir $z \in X$ için

$$\inf \{ p(x,z) + p(x,Tx) \ : \ x \in X \} = 0$$

olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \{ p(z_n,z) + p(z_n,Tz_n) \} = 0$$

olacak biçimde $X$'te bir $\{z_n\}$ dizisi vardır. Böylece $p(z_n,z) \to 0$ ve $p(z_n,Tz_n) \to 0$ olacağından, 3.2.1 Teorem'inin (*ii*) şıkkından, $\{Tz_n\}$, $z$'ye yakınsar.

Üçgen eşitsizliği ve (4.1.8) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} p(z_n,T^2z_n) &\leq p(z_n,Tz_n) + p(Tz_n,T^2z_n) \\ &\leq p(z_n,Tz_n) + q.\max\{ p(z_n,Tz_n), p(z_n,T^2z_n) \} \end{aligned}$$

bulunur. Eğer,

$$\max\{ p(z_n,Tz_n), p(z_n,T^2z_n) \} = p(z_n,Tz_n)$$

ise

$$p(z_n,T^2z_n) \leq (1+q).p(z_n,Tz_n)$$

olacağından, $n \to \infty$ için, $p(z_n,T^2z_n) \to 0$ olur. Eğer,

$$\max\{ p(z_n,Tz_n), p(z_n,T^2z_n) \} = p(z_n,T^2z_n)$$

ise,

$$p(z_n,T^2z_n) \leq \frac{1}{1-q}.p(z_n,Tz_n)$$

olup, $n \to \infty$ için yine $p(z_n,T^2z_n) \to 0$ bulunur.

Böylece, $p(z_n,z) \to 0$ , $p(z_n,T^2z_n) \to 0$

olduğundan, 3.2.1 Teorem'in (*ii*) şıkkından $\{T^2z_n\}$, $z$'ye yakınsar. $T$ sürekli olduğundan,

$$Tz = T\left( \lim_{n\to\infty} Tz_n \right) = \lim_{n\to\infty} T^2z_n = z$$

yani, $Tz = z$ olur ki, bu bir çelişkidir.

O halde, $y \neq Ty$ koşulunu sağlayan her bir $y \in X$ için,

$$\inf \{ p(x,y) + p(x,Tx) \ : \ x \in X \} > 0$$

olur. □

## 4.2 TEMEL TEOREMLER

Bu kesimde, 4.1 kesimde verilen ön teoremler yardımıyla $w$-uzaklık fonksiyonu kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

**4.2.1 Teorem :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T : X \to X$ dönüşümü (4.1.1 ) eşitsizliğini sağlıyor ve $u \neq Tu$ koşulunu sağlayan her bir $u \in X$ için,

$$\inf \{ p(x,u) + p(x,Tx) \; : \; x \in X \} > 0$$

oluyorsa, o zaman

**(*i*)** $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = y$ ,

**(*ii*)** $a(x) = p(x,x) + p(x,Tx) + p(Tx,x)$ olmak üzere, her $x \in X$ için;

$$p(T^n x, y) \leq \left[ \frac{q^{n-1}}{(1-q)^2} \right] .a(x) \quad ,$$

**(*iii*)** $T$'nin $X$'te tek bir $y$ sabit noktası vardır ve $p(y,y) = 0$ dır.

(*Ume, J. S., 1998*)

**Kanıt :**

(*i*) $x$, $X$'te herhangi bir nokta olmak üzere, her $n \in \mathrm{N}$ için $x_n = T^n x$ biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. 4.1.1 Ön Teorem'in (*iv*) şıkkından, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir ve $(X,d)$ tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $X$'te bir $y$ noktasına yakınsar.

$\{x_n\}$, (4.1.7) eşitsizliğini sağladığından, $p$'nin alttan yarı sürekliliği kullanıldığında,

$$p(x_n, y) \leq \liminf_{n\to\infty} p(x_n, x_m) \leq \frac{q^{n-1}}{(1-q)^2} .a(x) \qquad (4.2.1)$$

olacağından, (*ii*) kanıtlanmış olur.

(*iii*) için,

$y \neq Ty$ olduğu varsayılsın. (4.1.6) ve (4.1.7) eşitsizliklerinden,

$$
\begin{aligned}
0 &< \inf\{\, p(x,y)+p(x,Tx) \,:\, x\in X \,\} \\
&\le \inf\{\, p(x_n,y)+p(x_n,Tx_n) \,:\, n\in \mathrm{N} \,\} \\
&\le \inf\left\{ \frac{q^{n-1}}{(1-q)^2}.a(x)+\frac{q^{n-1}}{1-q}.a(x) \;:\; n\in \mathrm{N} \right\} \\
&= \inf\left\{ q^{n-1}.a(x)\left(\frac{1}{(1-q)^2}+\frac{1}{1-q}\right) \;:\; n\in \mathrm{N} \right\} \\
&= \inf\left\{ q^{n-1}.a(x).\frac{(2-q)}{(1-q)^2} \;:\; n\in \mathrm{N} \right\} \\
&= \inf\left\{ \frac{(2-q)}{(1-q)^2}.a(x).q^{n-1} \;:\; n\in \mathrm{N} \right\} \\
&= \frac{(2-q)}{(1-q)^2}.a(x).\inf\{\, q^{n-1} : n\in \mathrm{N} \}
\end{aligned}
$$

olur ki, $q\in[0,1)$ olduğundan, $\inf\{\, q^{n-1} : n\in \mathrm{N}\}=0$ dır. Bu ise bir çelişki olur. Şu halde $y=Ty$ dir.

Eğer $v=Tv$ ise, (4.1.1) eşitsizliğinden,

$$p(v,v)=p(Tv,Tv)\le q.\max\{\, p(v,v), p(v,Tv), p(v,Tv), p(v,Tv), p(v,Tv)\}$$

olur ki, buradan,

$$p(v,v)\le q.p(v,v)$$

bulunur. $q\in[0,1)$ olduğundan, bu ancak $p(v,v)=0$ olmasıyla mümkündür.

$T$ 'nin sabit noktasının tekliği için, eğer,

$$u=Tu \text{ ve } v=Tv$$

ise, (4.1.1) eşitsizliği kullanıldığında,

$$p(u,v)=p(Tu,Tv)\le q.\max\{\, p(u,v), p(v,u)\}$$

ve

$$p(v,u)=p(Tv,Tu)\le q.\max\{\, p(u,v), p(v,u)\}$$

olur ki, bu ancak

$$p(u,v)=p(v,u)=0$$

olmasıyla mümkündür.

3.2.1 Teorem'in ($i$) şıkkından, $u=v$ olur. □

**4.2.2 Teorem :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olsun. $T : X \to X$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın.

(*i*) Her $x \in X$ için $q \in [0,1)$ olmak üzere,

$$p(Tx,T^2x) \leq q.\max\{p(x,Tx), p(x,T^2x)\} \quad , \tag{4.2.2}$$

(*ii*) $\sup_{x \in X}\left\{\dfrac{p(x,T^2x)}{p(x,Tx)}\right\} < \dfrac{1}{q}$ , ( $p(x,Tx) \neq 0$ ) ,

(*iii*) $y \neq Ty$ koşulunu sağlayan her bir $y \in X$ için,

$$\inf\{p(x,y)+p(x,Tx) : x \in X\} > 0$$

dır.

O zaman $T$'nin $X$'te bir sabit noktası vardır. Eğer $v = Tv$ ise $p(u,v) = 0$ dır.

(*Ume, J. S., 1998*)

**Kanıt :**

$\beta = \sup_{x \in X}\left\{\dfrac{p(x,T^2x)}{p(x,Tx)}\right\}$ ve $k = \max\{q , \beta q\}$ olsun. O zaman $k \in [0,1)$ dir .

(*i*)'den her $x \in X$ için

$$p(Tx,T^2x) \leq q.\max\{p(x,Tx), p(x,T^2x)\}$$

dir. Eğer $\max\{p(x,Tx), p(x,T^2x)\} = p(x,Tx)$ ise

$$p(Tx,T^2x) \leq q.p(x,Tx) \leq k.p(x,Tx)$$

olur. Eğer .$\max\{p(x,Tx), p(x,T^2x)\} = p(x,T^2x)$ ise , bu durumda,

$$p(Tx,T^2x) \leq q.p(x,T^2x)$$

olur. (*ii*)'den

$$\frac{p(x,T^2x)}{p(x,Tx)} \leq \beta$$

olduğundan,

$$p(Tx,T^2x) \leq \beta.p(x,Tx)$$

olup,

$$p(Tx,T^2x) \leq q.p(x,T^2x) \leq \beta.q.p(x,Tx) \leq k.p(x,Tx)$$

bulunur.

Böylece $k \in [0,1)$ olmak üzere, her $x \in X$ için,

$$p(Tx,T^2x) \leq k.p(x,Tx) \tag{4.2.3}$$

dir.

$u$, $X$'te herhangi bir nokta olmak üzere, her $n \in \mathrm{N}$ için, $u_n = T^n u$ biçiminde bir $\{u_n\}$ dizisi tanımlansın. (4.2.3) eşitsizliğinden,

$$p(u_n,u_{n+1}) \leq k.p(u_{n-1},u_n) \leq \ldots \leq k^{n-1}p(u_1,u_2) \tag{4.2.4}$$

bulunur. Eğer $m > n$ ise,

$$\begin{aligned} p(u_n,u_m) &\leq p(u_n,u_{n+1}) + p(u_{n+1},u_{n+2}) + \ldots + p(u_{m-1},u_m) \\ &= \sum_{i=0}^{m-n-1} p(u_{n+i},u_{n+i+1}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} k^{n+i-1} p(u_1,u_2) \\ &\leq \frac{k^{n-1}}{1-k} p(u_1,u_2) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

dir.

$k \in [0,1)$ olduğundan, $n \to \infty$ limite geçildiğinde, eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yakınsar. Böylece 3.2.1 Teorem'in $(iv)$ şıkkından, $\{u_n\}$ bir Cauchy dizisidir ve $(X,d)$ tam metrik uzay olduğundan, $\{u_n\}$ dizisi $X$'te bir $y$ noktasına yakınsar.

$p(u_n,\cdot)$'nin alttan yarı sürekliliği ve (4.2.5) eşitsizliği kullanıldığında,

$$p(u_n,y) \leq \liminf_{m \to \infty} p(u_n,u_m) \leq \frac{k^{n-1}}{1-k}.p(u_1,u_2) \tag{4.2.6}$$

bulunur.

$y \neq Ty$ olsun. O zaman (4.2.4) ve (4.2.6) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} 0 &< \inf\{p(x,y) + p(x,Tx) : x \in X\} \\ &\leq \inf\{p(u_n,y) + p(u_n,u_{n+1}) : n \in \mathrm{N}\} \\ &\leq \inf\left\{\frac{k^{n-1}}{1-k}.p(u_1,u_2) + k^{n-1}.p(u_1,u_2) \ : n \in \mathrm{N}\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{(2-k)}{1-k}.k^{n-1}p(u_1,u_2) \ : n \in \mathrm{N}\right\} \\ &= \frac{(2-k)}{1-k}.p(u_1,u_2).\inf\{k^{n-1} : n \in \mathrm{N}\} \end{aligned}$$

olur ki, $k \in [0,1)$ olduğundan, $\inf\{\, k^{n-1} : n \in \mathrm{N}\} = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Şu halde $y = Ty$ dir.

Eğer $v = Tv$ ise,

$$p(v,v) = p(Tv,T^2v) \le k.p(v,Tv) = k.p(v,v)$$

bulunur. $k \in [0,1)$ olduğundan, bu ancak $p(v,v) = 0$ olmasıyla mümkündür. □

**4.2.3 Teorem :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olsun. Bir $T : X \to X$ dönüşümü $r \in [0,1)$ olmak üzere, her $x \in X$ için,

$$p(T^2x,Tx) \le r.p(Tx,x) \tag{4.2.7}$$

koşulunu sağlasın. Eğer

(*i*) $\{x_n\}$, $y$'ye ve $\{p(Tx_n,x_n)\}$, $0$'a yakınsıyorsa, o zaman $p(Ty,y) = 0$ dır.

(*ii*) $\{x_n\}$ ve $\{Tx_n\}$, $y$'ye yakınsıyorsa, o zaman $y = Ty$ dir.

(*iii*) $T$ süreklidir.

koşullarından en az biri doğruysa, o zaman $x_0 = Tx_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır ve eğer $v = Tv$ ise, $p(v,v) = 0$ dır.

(*Suzuki, T., 1996*)

**Kanıt :** $p(Ty,y) = 0$ olması $Ty = y$ olması ile denktir. Gerçekten, $p(Ty,y) = 0$ ise, (4.2.7)'den

$$p(T^2y,Ty) \le r.p(Ty,y) = 0$$

ve üçgen eşitsizliğinden,

$$p(T^2y,Ty) \le p(T^2y,Ty) + p(Ty,y) = 0$$

bulunur. 3.2.1 Teorem'inin (*i*) şıkkından, $Ty = y$ olur.

Tersine, $Ty = y$ ise, (4.2.7) eşitsizliğinden,

$$p(Ty,y) = p(T^2y,Ty) \le r.p(Ty,y)$$

olur ki, bu ise ancak $p(Ty,y) = 0$ olmasıyla mümkündür.

Eğer (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) ve (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) gerektirmeleri gösterilirse ve (*i*) şıkkı için teoremi kanıtlamak yeterli olacaktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ ;

$\{x_n\}$, $x_n \to y$ ve $p(Tx_n, x_n) \to 0$ olacak biçimde $X$'te bir dizi olsun. O zaman (4.3.7) eşitsizliği uygulanıp, $n \to \infty$ için limite geçildiğinde,

$$p(T^2x_n, Tx_n) \leq r.p(Tx_n, x_n) \to 0$$

ve burada üçgen eşitsizliğinden, $n \to \infty$ için limite geçildiğinde,

$$p(T^2x_n, x_n) \leq p(T^2x_n, Tx_n) + p(Tx_n, x_n) \to 0$$

olur. 3.2.1 Teorem'in $(iii)$ şıkkından, $d(Tx_n, x_n) \to 0$ olur. $x_n \to y$ olduğundan, $\{Tx_n\} \to y$ dir. Şu halde $(ii)$'den $y = Ty$ dir. Böylece $p(Ty, y) = 0$ dır.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ ;

$T$ sürekli, $\{x_n\}$ ve $\{Tx_n\}$ de $y$'ye yakınsasın. O zaman,

$$Ty = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$$

olur.

Sabit noktanın varlığı;

$(i)$ koşulu doğru olsun. $u$, $X$'te herhangi bir nokta olmak üzere, her $n \in \mathrm{N}$ için $u_n = T^n u$ biçiminde bir $\{u_n\}$ dizisi tanımlansın. Buradan her $n \in \mathrm{N}$ için,

$$p(u_{n+1}, u_n) \leq r.p(u_n, u_{n-1}) \leq \ldots \leq r^n.p(u_1, u)$$

bulunur. Eğer $m > n$ ise,

$$\begin{aligned} p(u_m, u_n) &\leq p(u_m, u_{m-1}) + \ldots + p(u_{n+1}, u_n) \\ &\leq r^{m-1}.p(u_1, u) + \ldots + r^n p(u_1, u) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r}.p(u_1, u) \end{aligned}$$

olur. 3.2.1 Teorem'in $(iv)$ şıkkından $\{u_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan, $\{u_n\}$ bir $x_0 \in X$ noktasına yakınsar.

$$p(Tu_n, u_n) \leq r^n p(u_1, u)$$

olup, $n \to \infty$ için limite geçildiğinde, $p(Tu_n, u_n) \to 0$ olur. Böylece $(i)$'den $p(Tx_0, x_0) = 0$ bulunur ve buradan $Tx_0 = x_0$ olur.

Eğer $v = Tv$ ise $p(v, v) = 0$ olduğu açıktır. □

## 4.3 SONUÇLAR

4.2 Kesimde, tam metrik uzaylarda $w$-fonksiyonu kullanılarak sabit nokta teoremleri verilmişti. Bu kesimde de bu teoremleri kullanarak değişik bazı sonuçlar elde edilecektir. Bu sonuçlar 2. Bölümde verilen bazı teoremlerin $w$-uzaklığıyla genelleştirilmiş biçimleri veya özel biçimleri olacaktır.

**4.3.1 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $p$ de $X$ üzerinde $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T:X\to X$ sürekli dönüşümü 4.2.2 Teorem'inin ($i$) ve ($ii$) koşullarını sağlarsa, o zaman $T$'nin $X$'te bir sabit noktası vardır. Eğer $v=Tv$ ise $p(v,v)=0$ dır.

(*Ume, J. S., 1998*)

**Kanıt :** 4.1.3 Ön Teorem'inden , $y\neq Ty$ koşulunu sağlayan her $y\in X$ için

$$\inf\{\,p(x,y)+p(x,Tx):x\in X\,\}>0$$

dır. Böylece 4.2.2 Teorem'inden $T$'nin $y=Ty$ olacak biçimde bir sabit noktası vardır ve eğer $v=Tv$ için $p(v,v)=0$ dır. □

$p$, $(X,d)$ metrik uzayında bir $w$-uzaklık olsun. Eğer $T:X\to X$ dönüşümü $r\in[0,1)$ olmak üzere her $x\in X$ için,

$$p(Tx,T^2x)\leq r.p(x,Tx) \qquad (4.3.1)$$

koşulunu sağlıyorsa, o zaman $q\in[0,1)$ olmak üzere her $x\in X$ için,

$$p(Tx,T^2x)\leq q.\max\{\,p(x,Tx),p(x,T^2x)\}$$

eşitsizliği de sağlanır. Ayrıca $x,y\in X$ için $p(x,y)\neq p(y,x)$ olduğundan

$$p(T^2x,Tx)\leq r.p(Tx,x)$$

eşitsizliği sağlanmayabilir.

Kada, O., v.d. (1996) ve Ume, J. S. (1998), (4.3.1) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

**4.3.2 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $p$ de $X$ üzerinde $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T:X\to X$ dönüşümü (4.3.1) eşitsizliğini ve $y\neq Ty$ koşulunu sağlayan her $y\in X$ için

$$\inf\{p(x,y)+p(x,Tx):x\in X\}>0$$

koşulunu sağlıyorsa, o zaman $T$'nin $X$'te bit sabit noktası vardır ve eğer $v=Tv$ ise $p(v,v)=0$ dır.

**Kanıt :** 4.2.2 Teorem'inin (*i*) ve (*ii*) koşullarının (4.3.1) eşitsizliğini gerçeklediği aynı teoremin kanıtında gösterilmişti. Buradan hareket edilerek $T$'nin sabit noktasının varlığı ve diğer özellikler kanıtlanmıştı. Şu halde sonuçta (4.3.1) eşitsizliği hipotezde var olduğundan, istenenler 4.2.2 Teorem'inden kolayca görülür. □

Eğer $T$ sürekli alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir. Bu sonuç aynı zamanda Subrahmanyam (1974)'ın $(X,d)$ tam metrik uzayında $p$-uzaklık ile bir genellemesi olmaktadır.

**4.3.3 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $p$ de $X$ üzerinde $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T:X\to X$ sürekli dönüşümü, (4.3.1) eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman $z=Tz$ olacak biçimde bir $z\in X$ vardır. Eğer $v=Tv$ ise $p(v,v)=0$ dır.

(*Kada, O., v.d., 1996*)

**Kanıt :** $y\neq Ty$ olmak üzere bir $y\in X$ için

$$\inf\{p(x,y)+p(x,Tx):x\in X\}=0$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty}\{p(x_n,y)+p(x_n,Tx_n)\}=0$$

olacak biçimde $X$'te bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Böylece $p(x_n,y)\to 0$ ve $p(x_n,Tx_n)\to 0$ olacağından, 3.2.1 Teorem'in (*ii*) şıkkından, $\{Tx_n\}$, $y$'ye yakınsar.

Üçgen eşitsizliği ve (4.3.1) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} p(x_n,T^2x_n) &\le p(x_n,Tx_n)+p(Tx_n,T^2x_n) \\ &\le p(x_n,Tx_n)+r.p(x_n,Tx_n) \\ &=(1+r).p(x_n,Tx_n) \end{aligned}$$

olup, $n\to\infty$ için limite geçildiğinde, $p(x_n,T^2x_n)\to 0$ bulunur.

$p(x_n,y)\to 0$ ve $p(x_n,T^2x_n)\to 0$ olduğundan 3.2.1 Teorem'in (*ii*) şıkkından, $\{T^2x_n\}$ de $y$'ye yakınsar. $T$ sürekli olduğundan,

$$Ty = T(\lim_{n\to\infty} Tx_n) = \lim_{n\to\infty} T^2 x_n = y \ ,$$

yani, $y = Ty$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $y \neq Ty$ koşulunu sağlayan her $y \in X$ için

$$\inf\{p(x,y) + p(x,Tx) : x \in X\} > 0$$

olur. Böylece 4.3.2 Sonuç'tan istenenler elde edilir. □

**4.3.4 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olsun. Bir $T : X \to X$ dönüşümü, $r \in [0,1)$ olmak üzere her $x \in X$ için,

(*a*) $\max\{p(T^2x,Tx), p(Tx,T^2x)\} \le r.\max\{p(Tx,x), p(x,Tx)\}$

veya

(*b*) $p(T^2x,Tx) + p(Tx,T^2x) \le r.p(Tx,x) + r.p(x,Tx)$

koşullarından biri sağlansın.

(*i*) $y \neq Ty$ olmak üzere $\inf\{p(x,Tx) + p(Tx,x) + p(x,y) : x \in X\} > 0$ ,

(*ii*) $T$ süreklidir ,

koşullarından en az biri doğru ise, o zaman $x_0 = Tx_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır ve eğer $v = Tv$ ise $p(v,v) = 0$ dır.

(*Suzuki, T., 1997*)

**Kanıt :**

$$q_1 : X \times X \to [0,\infty) \ , \ q_1(x,y) = \max\{p(Tx,x), p(x,y)\}$$

ve

$$q_2 : X \times X \to [0,\infty) \ , \ q_2(x,y) = p(Tx,x) + p(x,y)$$

fonksiyonları tanımlansın. 3.2.3 ve 3.2.4 Teorem'lerinden, $q_1$ ve $q_2$ birer $w$-uzaklık fonksiyonlarıdır.

Eğer $T$, (*a*)'yı sağlıyorsa,

$$\begin{aligned} q_1(Tx,T^2x) &= \max\{p(T^2x,Tx), p(Tx,T^2x)\} \\ &\le r.\max\{p(Tx,x), p(x,Tx)\} \\ &\le r.q_1(x,Tx) \end{aligned}$$

olur.

Benzer biçimde $T$, $(b)$'yı sağlıyorsa,

$$\begin{aligned} q_2(Tx,T^2x) &= p(T^2x,Tx)+p(Tx,T^2x) \\ &\le r.(p(Tx,x)+p(x,Tx)) \\ &\le r.q_2(x,Tx) \end{aligned}$$

olur. Böylece her iki durum için de, her $x \in X$ ve $i=1,2$ olmak üzere

$$q_i(Tx,T^2x) \le r.q_i(x,Tx)$$

olur. Eğer $T$ sürekli ise, 4.3.3 Sonuç'tan istenen elde edilir.

$T$ sadece $(i)$ koşulunu sağlasın. O zaman $i=1,2$ olmak üzere $y \neq Ty$ koşulunu sağlayan her bir $y \in X$ için,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2}.\inf\{p(x,Tx)+p(Tx,x)+p(x,y) \ : \ x \in X\} \\ &\le \inf\{q_i(x,Tx)+q_i(x,y) \ : \ x \in X\} \end{aligned}$$

olur ki, o zaman 4.3.2 Sonuç'tan $x_0 = Tx_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır. Eğer $v = Tv$ ise $p(v,v)=0$ dır. □

**4.3.5 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T : X \to X$ dönüşümü, $\alpha \in [0, 1/2)$ olmak üzere her $x,y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.\{p(x,Tx)+p(y,Ty)\} \tag{4.3.2}$$

ve $y \neq Ty$ koşulunu sağlayan her $y \in X$ için

$$\inf\{p(x,y)+p(Tx,x) \ : x \in X\} > 0$$

koşulunu sağlıyorsa, o zaman $T$'nin $X$'te tek bir sabit noktası vardır ve eğer $v = Tv$ ise $p(v,v)=0$ dır.

(*Ume, J. S., 1998*)

**Kanıt :** (4.3.2) eşitsizliğinde $y = Tx$ alındığında

$$p(Tx,T^2x) \le \alpha.\{p(x,Tx)+p(Tx,T^2x)\}$$

olup, buradan,

$$p(Tx,T^2x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}.p(x,Tx)$$

bulunur. $\alpha < 1/2$ olduğundan, $\frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$ dir. Böylece $\frac{\alpha}{1-\alpha} = r$ alınırsa, $T$'nin (4.3.1) eşitsizliğini sağladığı görülür. Böylece 4.3.2 Sonuç'tan, $T$'nin bir sabit noktası vardır ve $v = Tv$ ise $p(v,v) = 0$ dır.

$T$'nin sabit noktası tektir. Gerçekten, $u = Tu$ ve $v = Tv$ ise, o zaman (4.3.2) eşitsizliğinden,

$$0 \le p(u,v) = p(Tu,Tv) \le \alpha.\{p(u,u) + p(v,v)\} = 0$$

ve

$$0 \le p(v,u) = p(Tv,Tu) \le \alpha.\{p(v,v) + p(u,u)\} = 0$$

olduğundan,

$$p(u,v) = p(v,u) = 0$$

olur. 3.2.1 Teorem'inin ($i$) şıkkından, $u = v$ bulunur. □

**4.3.6 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T : X \to X$ sürekli dönüşümü, (4.3.2) eşitsizliğini veya $\alpha \in [0, 1/2)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.\{p(x,Tx) + p(Ty,y)\} \tag{4.3.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman $T$'nin tek bir sabit noktası vardır ve eğer $v = Tv$ ise $p(v,v) = 0$ dır.

(*Suzuki, T., 1997*)

**Kanıt :**

(4.3.2) eşitsizliği için;

4.3.3 Sonuç'tan $T$'nin bir sabit noktası vardır ve $v = Tv$ için $p(v,v) = 0$ dır. Sabit noktanın tekliği, 4.3.5 Sonucunun kanıtında olduğu gibi yapılır.

(4.3.3) eşitsizliği için; (4.3.3) eşitsizliğinde $y$ yerine $Tx$ alınırsa,

$$p(Tx,T^2x) \le \alpha.p(x,Tx) + \alpha.p(T^2x,Tx) \ , \tag{4.3.4}$$

benzer biçimde, (4.3.3) eşitsizliğinde $x$ yerine $Tx$ ve $y$ yerine $x$ alınırsa,

$$p(T^2x,Tx) \le \alpha.p(Tx,T^2x) + \alpha.p(Tx,x) \tag{4.3.5}$$

bulunur. (4.3.4) ve (4.3.5) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$p(Tx,T^2x)+p(T^2x,Tx) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}.p(x,Tx)+\frac{\alpha}{1-\alpha}.p(Tx,x)$$

bulunur. $r=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ alınırsa, $r\in[0,1)$ olup,

$$p(Tx,T^2x)+p(T^2x,Tx) \le r.p(x,Tx)+r.p(Tx,x)$$

olur. Böylece 4.3.4 Sonuç'tan, $T$'nin tek bir sabit noktası vardır. □

**4.3.7 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde $w$-uzaklık olsun. Eğer bir $T:X\to X$ dönüşümü, $\alpha\in[0,1/2)$ olmak üzere her $x,y\in X$ için,

$$p(Tx,Ty)\le \alpha.\{p(Tx,x)+p(Ty,y)\} \tag{4.3.6}$$

veya

$$p(Tx,Ty)\le \alpha.\{p(Tx,x)+p(y,Ty)\} \tag{4.3.7}$$

koşullarından birini sağlıyorsa, o zaman $T$'nin tek bir sabit noktası vardır ve eğer $v=Tv$ ise $p(v,v)=0$ dır.

(*Suzuki, T., 1997*)

**Kanıt :** (4.3.6) eşitsizliği göz önüne alınsın. $r=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ olarak alınırsa, $\alpha\in[0,1/2)$ olduğundan $r\in[0,1)$ olup, (4.3.6) eşitsizliğinden her $x\in X$ için,

$$p(T^2x,Tx)\le r.p(Tx,x)$$

bulunur. $X$'teki bir $\{x_n\}$ dizisi için $x_n\to y$ ve $p(Tx_n,x_n)\to 0$ olduğu varsayılsın. O zaman $p$, ikinci bileşene göre alttan yarı sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned}
p(Ty,y) &\le \liminf_{n\to\infty} p(Ty,x_n)\\
&\le \liminf_{n\to\infty} \{p(Ty,Tx_n)+p(Tx_n,x_n)\}\\
&\le \liminf_{n\to\infty} \{\alpha.p(Ty,y)+\alpha.p(Tx_n,x_n)+p(Tx_n,x_n)\}\\
&= \alpha.p(Ty,y)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $\alpha\in[0,1/2)$ olduğundan ancak $p(Ty,y)=0$ olması durumunda mümkündür.

Böylece 4.2.3 Teorem'inden $x_0 = Tx_0$ olacak biçimde $x_0 \in X$ vardır ve $v = Tv$ ise $p(v,v) = 0$ dır.

Ayrıca $T$'nin tek bir sabit noktası vardır. Gerçekten, $z = Tz$ ise $p(z,z) = 0$ olup, (4.3.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} p(x_0, z) = p(Tx_0, Tz) &\le \alpha.p(Tx_0, x_0) + \alpha.p(Tz, z) \\ &= \alpha.p(x_0, x_0) + \alpha.p(z,z) = 0 \end{aligned}$$

olur. 3.2.1 Teorem'inin ($i$) şıkkından $x_0 = z$ dir.

(4.3.7) eşitsizliği göz önüne alındığında, $r = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \in [0,1)$ alınırsa,

$$p(Tx, T^2x) \le r.p(Tx, x) \quad \text{ve} \quad p(T^2x, Tx) \le r.p(x, Tx)$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$p(Tx, T^2x) + p(T^2x, Tx) \le r.p(Tx, x) + r.p(x, Tx)$$

bulunur.

$p(x_n, Tx_n) \to 0$ ve $p(x_n, y) \to 0$ olduğu varsayılsın. 3.2.1 Teorem'inin ($ii$) şıkkından, $\{Tx_n\}$, $y$'ye yakınsar. Böylece $p$ alttan yarı sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} p(Ty, y) &\le \lim_{n\to\infty} \inf p(Ty, Tx_n) \\ &\le \lim_{n\to\infty} \inf \{\alpha.p(Ty, y) + \alpha.p(x_n, Tx_n)\} \\ &= \alpha.p(Ty, y) \end{aligned}$$

olur ki, buradan $p(Ty, y) = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$p(Ty, T^2y) \le r.p(Ty, y) = 0$$

ve 3.2.1 Teorem'in ($i$) şıkkından $y = T^2y$ olur. Bu nedenle

$$p(y, Ty) = p(T^2y, Ty) \le r.p(y, Ty)$$

olur ki, bu ancak $p(y, Ty) = 0$ olmasıyla mümkündür. Üçgen eşitsizliğinden,

$$p(y, y) \le p(y, Ty) + p(Ty, y) = 0$$

olup, 3.2.1 Teorem'in ($i$) şıkkından $y = Ty$ dir.

Buna göre $y \neq Ty$ için,

$$0 < \inf \{ p(x,Tx) + p(x,y) \ : \ x \in X \}$$
$$\leq \inf \{ (x,Tx) + p(Tx,x) + p(x,y) \ : \ x \in X \}$$

dir.

Gerçekten,

$$\inf \{ p(x,Tx) + p(x,y) \ : \ x \in X \} = 0$$

olsaydı, o zaman $p(z_n, Tz_n) \to 0$ ve $p(z_n, y) \to 0$ olacak biçimde $X$'te bir $\{z_n\}$ dizisi var olduğundan $y = Ty$ bulunurdu ki, bu ise $y \neq Ty$ olmasıyla çelişirdi. Böylece 4.3.4 Sonuç'tan $x_0 = Tx_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır ve $v = Tv$ ise $p(v,v) = 0$ dır. $x_0$'ın tekliği ise (4.3.6) durumunda olduğu gibi gösterilir. □

$p = d$ ise 4.3.2 sonucundan, ikinci bölümde verilen Kannan'ın 2.2.2 Teorem'i elde edilir.

**4.3.8 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T$, bir Kannan dönüşümü, yani (2.2.2) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman $T$'nin $X$'te tek bir sabit noktası vardır.

**Kanıt :** 4.3.5 Sonucunun kanıtında olduğu gibi $r = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ olarak alınırsa, her $x \in X$ için,

$$d(Tx, T^2x) \leq r.d(x,Tx)$$

bulunur. $y \neq Ty$ olmak üzere bir $y \in X$ için

$$\inf \{ d(x,y) + d(x,Tx) \ : \ x \in X \} = 0$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{n \to \infty} \{ d(x_n, y) + d(x_n, Tx_n) \} = 0$$

olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Buradan $n \to \infty$ için,

$$d(x_n, y) \to 0 \quad \text{ve} \quad d(x_n, Tx_n) \to 0$$

olacağından $d(Tx_n, y) \to 0$ olur. Diğer taraftan (2.2.2) eşitsizliğinden her $n \in \mathrm{N}$ için,

$$d(Tx_n, Ty) \leq \alpha.\{ d(x_n, Tx_n) + d(y, Ty) \}$$

olup, $n \to \infty$ için her iki taraftan limite geçildiğinde,

$$d(y,Ty) \leq \alpha.d(y,Ty)$$

bulunur. $\alpha < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Şu halde, $y \neq Ty$ koşulunu sağlayan her $y \in X$ için,

$$\inf \{d(x,y) + d(x,Tx) \; : \; x \in X \} > 0$$

olur.

Böylece 4.3.2 Sonuç'tan $z = Tz$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır ve bunun tekliği de açıktır. □

Yine $p = d$ alındığında 4.2.1 Teorem'inden ve 4.1.2 Ön Teorem'inden Ciric'in tam metrik uzaylar için 2.3.9 Teorem'i elde edilir.

**4.3.9 Sonuç :** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T$ de $X$'ten $X$'e bir dönüşüm olsun. Eğer $T$, quasi-daraltan yani, (2.3.1) eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm ise $T$'nin tek bir sabit noktası vardır.

**4.3.10 Not :** $p$ bir $(X,d)$ metrik uzayı üzerinde tanımlı bir $w$-uzaklık olsun. $T : X \to X$ dönüşümünde her $x,y \in X$ için $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere,

$$p(Tx,Ty) \leq \alpha.p(x,y)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda her $x \in X$ için

$$p(Tx,T^2x) \leq \alpha.p(x,Tx)$$

olacağından Banach sabit nokta teoremi için de benzer sonuçlar elde edilir.

# V. BÖLÜM

# ZAYIF DARALTAN VE ZAYIF KANNAN DÖNÜŞÜMLERİ VE UZAYIN TAMLIĞI

Bu bölümde ilk olarak zayıf daraltan dönüşümleri ve zayıf Kannan dönüşümleri arasındaki ilişki incelenecek ve dönüşümler için sabit noktanın varlığıyla bağlantılı olarak, uzayın tamlık karakterizasyonları verilecektir.

Önce bunlarla ilgili bazı gösterim ve tanımları vermekte fayda olacaktır.

## 5.1 BAZI TANIM VE GÖSTERİMLER

$(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun.

**(*1*)** $X$ üzerindeki bütün *w*-uzaklıkların kümesi $\boldsymbol{W(X)}$ ile gösterilsin.

**(*2*)** $X$ üzerindeki bir $p$-uzaklığı, eğer her $x,y \in X$ için $p(x,y) = p(y,x)$ özelliğini sağlıyorsa, $p$'ye **simetriktir** denir.

$X$ üzerindeki bütün simetrik *w*-uzaklıklarının kümesi $\boldsymbol{W_0(X)}$ ile gösterilsin.

**(*3*)** $r \in [0,1)$ olmak üzere, her $x,y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le r.p(x,y)$$

koşulunu sağlayan bir $p \in W(X)$ varsa, $T$'ye **zayıf daraltan dönüşüm** denir.

(2.1.1 Tanım'ından eğer $p = d$ ise $T$'ye **daraltan dönüşüm olur**.)

Bütün bu zayıf daraltan dönüşümlerin kümesi $\boldsymbol{WC_1(X)}$ ile gösterilir.

**(*4*)** Her $x,y \in X$ için ,

$$p(Tx,Ty) \le r.p(y,x)$$

koşulunu sağlayan bir $r \in [0,1)$ ve $p \in W(X)$ varsa $T \in \boldsymbol{WC_2(X)}$'tir denir.

**(*5*)** Her $x,y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le r.p(x,y)$$

koşulunu sağlayan bir $r \in [0,1)$ ve $p \in W_0(X)$ varsa $T \in \boldsymbol{WC_0(X)}$'tir denir.

(*6*) Her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.(p(Tx,x)+p(Ty,y))$$

veya

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.(p(Tx,x)+p(y,Ty))$$

koşullarından birini sağlayabilecek biçimde bir $p \in W(X)$ ve $\alpha \in [0,1/2)$ varsa $T$'ye **Zayıf Kannan Dönüşümü** denir.

(*7*) Her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.(p(Tx,x)+p(Ty,y))$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha \in [0,1/2)$ ve $p \in W(X)$ varsa $T \in \boldsymbol{WK_1(X)}$'tir denir.

(*8*) Her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.(p(Tx,x)+p(y,Ty))$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha \in [0,1/2)$ ve $p \in W(X)$ varsa $T \in \boldsymbol{WK_2(X)}$'tir denir.

(*9*) Her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.(p(Tx,x)+p(Ty,y))$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha \in [0,1/2)$ ve $p \in W(X)$ varsa $T \in \boldsymbol{WK_0(X)}$'tir denir.

**Not :** $W_0(X) \subset W(X)$ olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $T \in WK_1(X) \cup WK_2(X)$ ise $T$ zayıf Kannan dönüşüm olur.

## 5.2 ZAYIF DARALTAN VE ZAYIF KANNAN DÖNÜŞÜMLERİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

**5.2.1 Ön Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $p$ de $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olsun. $T: X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, eğer bir $u \in X$ için,

$$\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u, T^n u) = 0$$

ise, o zaman her $x \in X$ için,

$$\lim_{k\to\infty} p(T^k u, x) \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to\infty} p(x, T^k u)$$

limitleri vardır.

Bundan başka,

$$\beta,\gamma : X \to [0,\infty) \ ;$$

$$\beta(x) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, x) \quad \text{ve} \quad \gamma(x) = \lim_{k\to\infty} p(x, T^k u)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlarsa, o zaman,

***(i)*** $\beta$, $X$ üzerinde alttan yarı süreklidir,

***(ii)*** Her $\varepsilon > 0$ için, en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\beta(x) \le \delta$ ve $\beta(y) \le \delta$ iken $d(x,y) \le \varepsilon$ dir. Ayrıca $\{\, x \in X : \beta(x) = 0 \,\}$ kümesinin en fazla bir noktası vardır.

***(iii)*** $q_1, q_2 : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonları,

$$q_1(x,y) = \beta(x) + \beta(y) \quad \text{ve} \quad q_2(x,y) = \gamma(x) + \beta(y)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $q_1$ ve $q_2$, $X$ üzerinde $w$-uzaklıktır. (*Shioji, N., v.d., 1998*)

**Kanıt** : $x \in X$ olsun. Herhangi iki $m,n \in \mathrm{N}$ için, üçgen eşitsizliği kullanıldığında,

$$p(T^m u, x) \le p(T^m u, T^n u) + p(T^n u, x)$$

ve

$$p(T^m u, x) - p(T^n u, x) \le p(T^m u, T^n u) \le \max\{\, p(T^m u, T^n u), p(T^n u, T^m u) \} \qquad (5.2.1)$$

olur. Benzer biçimde,

$$p(T^n u, x) \le p(T^n u, T^m u) + p(T^m u, x) \ ,$$

$$p(T^n u, x) - p(T^m u, x) \le p(T^n u, T^m u) \le \max\{\, p(T^m u, T^n u), p(T^n u, T^m u) \} \ ,$$

$$-\big(p(T^m u, x) - p(T^n u, x)\big) \le \max\{\, p(T^m u, T^n u), p(T^n u, T^m u) \} \ ,$$

$$p(T^m u, x) - p(T^n u, x) \ge -\max\{\, p(T^m u, T^n u), p(T^n u, T^m u) \} \qquad (5.2.2)$$

olup, (5.2.1) ve (5.2.2)'den

$$\left| p(T^m u, x) - p(T^n u, x) \right| \le \max\{\, p(T^m u, T^n u), p(T^n u, T^m u) \}$$

bulunur.

$$\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u, T^n u) = 0$$

olduğundan $\{\, p(T^k u, x) \}$, $R$'de bir Cauchy dizisi olur.

Yine benzer biçimde,

$$\left| p(x,T^m u) - p(x,T^n u) \right| \le \max\{ p(T^m u, T^n u), p(T^n u, T^m u)\}$$

olacağından $\{ p(x,T^k u)\}$ de $R$'de bir Cauchy dizisidir.

$R$ tam olduğundan, $\lim_{k\to\infty} p(T^k u, x)$ ve $\lim_{k\to\infty} p(x, T^k u)$ limitleri vardır.

Ayrıca, $x = y$ ise $\lim_{k\to\infty} p(T^k u, x) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, y)$ dir ve böylece $\beta(x) = \beta(y)$ olur. Benzer biçimde $x = y$ ise $\gamma(x) = \gamma(y)$ dir. Bu ise $\beta$ ve $\gamma$ 'nın iyi tanımlı olduğunu gösterir.

$(i)$'nin kanıtı;

Sabit bir $x \in X$ alınsın ve bir $\{x_n\}$ dizisi de $x$'e yakınsasın.

$$\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u, T^n u) = 0 \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, x)$$

olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $m \ge k_0$ için,

$$p(T^{k_0} u, x) \ge \beta(x) - \varepsilon \quad \text{ve} \quad p(T^{k_0} u, T^m u) \le \varepsilon$$

olacak biçimde bir $k_0 \in \mathrm{N}$ vardır. Sabit bir $n \in \mathrm{N}$ için,

$$p(T^{k_1} u, x) \le \beta(x_n) + \varepsilon$$

olacak biçimde $k_1 \ge k_0$ seçildiğinde, her $n \in \mathrm{N}$ için,

$$p(T^{k_0} u, x_n) \le p(T^{k_0} u, T^{k_1} u) + p(T^{k_1} u, x_n) \le \beta(x_n) + 2\varepsilon$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \beta(x) \le p(T^{k_0} u, x) + \varepsilon &\le \varliminf_{n\to\infty} p(T^{k_0} u, x_n) + \varepsilon \\ &\le \varliminf_{n\to\infty} \beta(x_n) + 3\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$\beta(x) \le \varliminf_{n\to\infty} \beta(x_n)$$

olur. Bu ise $\beta$'nın $X$ üzerinde alttan yarı sürekli olduğunu gösterir.

$(ii)$'nin kanıtı;

$\varepsilon > 0$ verilsin. $p$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklık olduğundan, $\delta > 0$ ise,

$$p(z,v) \le 2\delta \quad \text{ve} \quad p(z,w) \le 2\delta \quad \Rightarrow d(v,w) \le \varepsilon$$

olacak biçimde seçilebilir.

$\beta(x) \leq \delta$ ve $\beta(y) \leq \delta$ olsun.

$$p(T^{k_2}u,x) \leq 2\delta \quad \text{ve} \quad p(T^{k_2}u,y) \leq 2\delta$$

olacak biçimde bir $k_2 \in \mathrm{N}$ var olduğundan, $d(x,y) \leq \varepsilon$ olur.

$\{ x \in X : \beta(x) = 0 \}$ kümesi, $x \in X$ ve $y \in X$ gibi iki noktadan oluşsun. O zaman,

$$\beta(x) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, x) = 0 \quad \text{ve} \quad \beta(y) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, y) = 0$$

olur. O zaman 3.2.1 Teorem'inin (*i*) şıkkından, $x = y$ olur. Yani, en fazla tek bir eleman bulundurur.

(*iii*)'nin kanıtı;

(*i*) ve (*ii*)'den $q_3 : X \times X \to [0,\infty)$ , $q_3(x,y) = \beta(y)$ biçiminde tanımlansın. $q_3$ fonksiyonu $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

Böylece 3.2.4 Teorem'inden, $q_1$ ve $q_2$ $X$ üzerinde birer $w$-uzaklık olurlar. □

**5.2.2 Ön Teorem :** $WC_1(X) \subset WK_0(X)$ 'tir.

(*Shioji, N., v.d., 1998*)

**Kanıt :** $T \in WC_1(X)$ ise, her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \leq r.p(x,y)$$

koşulunu sağlayan bir $r \in [0,1)$ ve $p \in W(X)$ vardır. $n,m \in \mathrm{N}$ ve $n > m$ olmak üzere, üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
p(T^m u, T^n u) &\leq p(T^m u, T^{m+1}u) + p(T^{m+1}u, T^{m+2}u) + \ldots + p(T^{n-1}u, T^n u) \\
&\leq r^m p(u,Tu) + r^{m+1} p(u,Tu) + \ldots + r^{n-1} p(u,Tu) \\
&= (r^m + r^{m+1} + \ldots + r^{n-1}) p(u,Tu) \\
&= r^m (1 + r + \ldots + r^{n-m-1}) p(u,Tu) \\
&\leq r^m \left( \sum_{i=0}^{\infty} r^i \right) p(u,Tu) \\
&= \frac{r^m}{1-r}\, p(u,Tu) \\
&\leq \frac{r^m}{1-r} \max\{ p(u,u), p(Tu,u), p(u,Tu) \}
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece her $m,n \in \mathrm{N}$ için,

$$p(T^m u, T^n u) \le \frac{r^{\min\{n,m\}}}{1-r} \max\{p(u,u), p(Tu,u), p(u,Tu)\}$$

olur. $0 \le r < 1$ olduğundan, $\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u, T^n u) = 0$ dır. 5.2.1 Ön Teorem'inden, $\beta(x) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, x)$ iyi tanımlıdır ve $q_1(x,y) = \beta(x) + \beta(y)$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

$$\beta(Tx) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u, Tx) \le r.\lim_{k\to\infty} p(T^{k-1}u, x)$$

olduğundan, her $x \in X$ için,

$$\beta(Tx) \le r.\beta(x)$$

bulunur.

Böylece her $x,y \in X$ için,

$$\begin{aligned} q_1(Tx,Ty) &= \beta(Tx) + \beta(Ty) \\ &\le r.\beta(x) + r.\beta(y) \\ &= r.(\beta(x) + \beta(y)) \\ &= r.(\beta(Tx) - \beta(Tx) + \beta(x) + \beta(Ty) - \beta(Ty) + \beta(y)) \\ &= r.(q_1(Tx,x) + q_1(Ty,y) - q_1(Tx,Ty)) \end{aligned}$$

ve böylece

$$(1+r)q_1(Tx,Ty) \le r.(q_1(Tx,x) + q_1(Ty,y))$$

olur. Buradan,

$$q_1(Tx,Ty) \le \frac{r}{1+r}.(q_1(Tx,x) + q_1(Ty,y))$$

bulunur. $r < 1$ olduğundan, $\frac{r}{1+r} < \frac{1}{2}$ olur.

Şu halde $T \in WK_0(X)$ dir. □

**5.2.3 Ön Teorem :** $WK_1(X) \subset WC_0(X)$ dir.

(*Shoiji, N., v.d., 1998*)

**Kanıt :** $T \in WK_1(X)$ olsun. O halde her $x,y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \le \alpha.(p(Tx,x) + p(Ty,y))$$

koşulunu sağlayan $\alpha \in [0,1/2)$ ve $p \in W(X)$ vardır.

Burada $x$ yerine $Tx$ ve $y$ yerine $x$ alındığında, her $x \in X$ için,

$$p(T^2x,Tx) \leq \alpha.p(T^2x,Tx)+\alpha.p(Tx,x)$$

$$(1-\alpha)p(T^2x,Tx) \leq \alpha.p(Tx,x)$$

bulunur. $r = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ alındığında $r<1$ olup, böylece her $x \in X$ için,

$$p(T^2x,Tx) \leq r.p(Tx,x)$$

bulunur. Sabit bir $u \in X$ alınsın, $m,n \in N$ için,

$$\begin{aligned} p(T^m u,T^n u) &\leq \alpha.p(T^m u,T^{m-1}u)+\alpha.p(T^n u,T^{n-1}u) \\ &\leq \alpha.(r^{m-1}p(Tu,u)+r^{n-1}p(Tu,u)) \\ &= \alpha.(r^{m-1}+r^{n-1}).p(Tu,u) \end{aligned}$$

olup, $r \in [0,1)$ olduğundan $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(T^m u,T^n u)=0$ dır. 5.2.1 Ön Teorem'inden, $\beta(x)=\lim\limits_{k\to\infty} p(T^k u,x)$ iyi tanımlıdır ve $q_1(x,y)=\beta(x)+\beta(y)$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır.

Üçgen eşitsizliği ve $T \in WK_1(X)$ olduğu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} p(Tx,x) &\leq p(Tx,T^k u)+p(T^k u,x) \\ &\leq \alpha.p(Tx,x)+\alpha.p(T^k u,T^{k-1}u)+p(T^k u,x) \end{aligned}$$

ve buradan,

$$(1-\alpha).p(Tx,x) \leq \alpha.p(T^k u,T^{k-1}u)+p(T^k u,x)$$

olup,

$$p(Tx,x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}.p(T^k u,T^{k-1}u)+\frac{1}{1-\alpha}.p(T^k u,x)$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} p(T^k u,Tx) &\leq \alpha.p(T^k u,T^{k-1}u)+\alpha.p(Tx,x) \\ &\leq \alpha.p(T^k u,T^{k-1}u)+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}.p(T^k u,T^{k-1}u)+\frac{\alpha}{1-\alpha}.p(T^k u,x) \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha}.p(T^k u,T^{k-1}u)+\frac{\alpha}{1-\alpha}.p(T^k u,x) \end{aligned}$$

olur ki, böylece,

$$p(T^k u,Tx) \leq r.p(T^k u,T^{k-1}u)+r.p(T^k u,x)$$

olduğu görülür. Her iki taraftan $k \to \infty$ için limite geçildiğinde,

$$\lim_{k\to\infty} p(T^k u, Tx) \leq r.\lim_{k\to\infty} p(T^k u, T^{k-1}u) + r.\lim_{k\to\infty} p(T^k u, x)$$

olur. $\lim_{k\to\infty} p(T^k u, T^{k-1}u) = 0$ olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} p(T^k u, Tx) \leq r.\lim_{k\to\infty} p(T^k u, x)$$

bulunur. Buradan,

$$\beta(Tx) \leq r.\beta(x)$$

olur. Böylece her $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} q_1(Tx, Ty) &= \beta(Tx) + \beta(Ty) \\ &\leq r.\beta(x) + r.\beta(y) \\ &= r.(\beta(x) + \beta(y)) \\ &= r.q_1(x, y) \end{aligned}$$

olur ki, bu ise $T \in WC_0(X)$ olduğunu gösterir. □

**5.2.4 Ön Teorem :** $WC_2(X) = WK_2(X)$ dir.

(*Shoiji, N., v.d., 1998*)

**Kanıt :** Kanıt için önce $WC_2(X) \subset WK_2(X)$ ve sonra da $WK_1(X) \subset WC_2(X)$ olduğu gösterilirse bunların eşitliği görülmüş olur.

$T \in WC_2(X)$ olsun. O zaman her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx, Ty) \leq r.p(y, x)$$

koşulunu sağlayan bir $r \in [0,1)$ ve $p \in W(X)$ vardır. Sabit bir $u \in X$ ve $m, n \in \mathrm{N}$ alınsın. Eğer $m > n$ ise,

$$p(T^m u, T^n u) \leq p(T^m u, T^{m-1}u) + p(T^{m-1}u, T^{m-2}u) + \ldots + p(T^{n+1}u, T^n u)$$

ve

$$p(T^n u, T^m u) \leq p(T^n u, T^{n+1}u) + p(T^{n+1}u, T^{n+2}u) + \ldots + p(T^{m-1}u, T^m u)$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} p(T^m u, T^n u) + p(T^n u, T^m u) &\leq p(T^{n+1}u, T^n u) + p(T^n u, T^{n+1}u) + p(T^{n+2}u, T^{n+1}u) \\ &\quad + p(T^{n+1}u, T^{n+2}u) + \ldots + p(T^m u, T^{m-1}u) + p(T^{m-1}u, T^m u) \\ &\leq r^n.\{p(Tu, u) + p(u, Tu)\} + r^{n+1}\{p(Tu, u) + p(u, Tu)\} \\ &\quad + \ldots + r^{m-1}\{p(Tu, u) + p(u, Tu)\} \end{aligned}$$

$$= r^n(1+r+r^2+...+r^{m-n-1}).\{p(Tu,u)+p(u,Tu)\}$$
$$\leq r^n.\left(\sum_{i=0}^{\infty} r^i\right)\{p(Tu,u)+p(u,Tu)\}$$
$$= \frac{r^n}{1-r}\{p(Tu,u)+p(u,Tu)\}$$

bulunur.

Eğer $m=n$ ise, $p(T^m u,T^n u) \leq r^m p(u,u)$ dur. Böylece,

$$p(T^m u,T^n u)+p(T^n u,T^m u) \leq \frac{r^{\min\{m,n\}}}{1-r}\{p(u,u)+p(u,Tu)+p(Tu,u)\}$$

olur. $r \in [0,1)$ olduğundan, $\lim_{m,n\to\infty} p(T^m u,T^n u)=0$ dır. 5.2.1 Ön Teorem'den,

$$\beta(x)=\lim_{k\to\infty} p(T^k u,x) \quad \text{ve} \quad \gamma(x)=\lim_{k\to\infty} p(x,T^k u)$$

iyi tanımlı olup, $q_2(x,y)=\gamma(x)+\beta(y)$, $X$ üzerinde *w*-uzaklıktır.

Her $x \in X$ için,

$$\beta(Tx)=\lim_{k\to\infty} p(T^k u,Tx) \leq r.\lim_{k\to\infty} p(x,T^{k-1}u)=r.\gamma(x)$$

ve

$$\gamma(Tx)=\lim_{k\to\infty} p(Tx,T^k u) \leq r.\lim_{k\to\infty} p(T^{k-1}u,x)=r.\beta(x)$$

olduğundan, her $x,y \in X$ için,

$$\begin{aligned} q_2(Tx,Ty) &= \gamma(Tx)+\beta(Ty) \\ &\leq r.(\beta(x)+\gamma(y)) \\ &= r.(\beta(x)+\gamma(Tx)-\gamma(Tx)+\beta(Ty)-\beta(Ty)+\gamma(y)) \\ &= r.(q_2(Tx,x)+q_2(y,Ty)-q_2(Tx,Ty)) \end{aligned}$$

ve buradan

$$(1+r).q_2(Tx,Ty) \leq r.(q_2(Tx,x)+q_2(y,Ty))$$

bulunur. Böylece,

$$q_2(Tx,Ty) \leq \frac{r}{1+r}.(q_2(Tx,x)+q_2(y,Ty))$$

olup $r<1$ olduğundan bu ise $T \in WK_2(X)$ olduğunu gösterir.

Şu halde $WC_2(X) \subset WK_2(X)$ olur.

$T \in WK_2(X)$ olsun. O zaman her $x, y \in X$ için,

$$p(Tx,Ty) \leq \alpha.p(Tx,x) + \alpha.p(y,Ty)$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha \in [0,1/2)$ ve $p \in W(X)$ vardır. Burada $x$ yerine $Tx$ ve $y$ yerine $x$ alındığında, her $x \in X$ için,

$$p(T^2x,Tx) \leq \alpha.p(T^2x,Tx) + \alpha.p(x,Tx)$$
$$(1-\alpha).p(T^2x,Tx) \leq \alpha.p(x,Tx)$$

bulunur. $r = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ alındığında $r < 1$ olup, her $x \in X$ için,

$$p(T^2x,Tx) \leq r.p(x,Tx)$$

elde edilir. Benzer biçimde, her $x \in X$ için,

$$p(Tx,T^2x) \leq r.p(Tx,x)$$

bulunur. Sabit bir $u \in X$ alınsın. $m, n \in \mathrm{N}$ için,

$$\begin{aligned} p(T^m u,T^n u) &\leq \alpha.p(T^m u,T^{m-1}u) + \alpha.p(T^{n-1}u,T^n u) \\ &\leq p(T^m u,T^{m-1}u) + p(T^{n-1}u,T^n u) \\ &\leq r^{m-1}p(Tu,u) + r^{n-1}p(u,Tu) \\ &\leq (r^{m-1} + r^{n-1}).(p(Tu,u) + p(u,Tu)) \end{aligned}$$

olup, $r \in [0,1)$ olduğundan, $\lim\limits_{m,n\to\infty} p(T^m u,T^n u)=0$ olur. 5.2.1 Ön Teorem'den,

$$\beta(x) = \lim_{k\to\infty} p(T^k u,x) \quad \text{ve} \quad \gamma(x) = \lim_{k\to\infty} p(x,T^k u)$$

iyi tanımlı ve $q_2(x,y) = \gamma(x) + \beta(y)$, $X$ üzerinde bir $w$-uzaklıktır. Her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} p(x,Tx) &\leq p(x,T^k u) + p(T^k u,Tx) \\ &\leq p(x,T^k u) + \alpha.p(T^k u,T^{k-1}u) + \alpha.p(x,Tx) \end{aligned}$$

ve böylece,

$$(1-\alpha).p(x,Tx) \leq p(x,T^k u) + \alpha.p(T^k u,T^{k-1}u)$$

ve

$$p(x,Tx) \leq \frac{1}{1-\alpha}.p(x,T^k u) + \frac{\alpha}{1-\alpha}.p(T^k u,T^{k-1}u)$$

bulunur. Buradan,

$$p(T^k u,Tx) \le \alpha.p(T^k u,T^{k-1}u)+\alpha.p(x,Tx)$$
$$\le \alpha.p(T^k u,T^{k-1}u)+\frac{\alpha}{1-\alpha}.p(x,T^k u)+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}.p(T^k u,T^{k-1}u)$$
$$=\frac{\alpha}{1-\alpha}.p(T^k u,T^{k-1}u)+\frac{\alpha}{1-\alpha}.p(x,T^k u)$$

olduğu görülür. Her iki taraftan $k \to \infty$ için limite geçildiğinde,

$$\lim_{k\to\infty} p(T^k u,Tx) \le r.\lim_{k\to\infty} p(T^k u,T^{k-1}u)+r.\lim_{k\to\infty} p(x,T^k u)$$

olur. $\lim_{k\to\infty} p(T^k u,T^{k-1}u)=0$ olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} p(T^k u,Tx) \le r.\lim_{k\to\infty} p(x,T^k u)$$

bulunur. Böylece,

$$\beta(Tx) \le r.\gamma(x)$$

olur.

Tamamen benzer biçimde,

$$\gamma(Tx) \le r.\beta(x)$$

olduğu da gösterilebilir. Böylece her $x,y \in X$ için,

$$\begin{aligned} q_2(Tx,Ty) &= \gamma(Tx)+\beta(Ty) \\ &\le r.\beta(x)+r.\gamma(y) \\ &= r.(\beta(x)+\gamma(y)) \\ &= r.q_2(y,x) \end{aligned}$$

olur ki, bu ise $T \in WC_2(X)$ olduğunu gösterir.

Şu halde, $WK_2(X) \subset WC_2(X)$ olup, böylece $WC_2(X)=WK_2(X)$ olduğu kanıtlanmış olur. □

**5.2.5 Teorem :** $X$ bir metrik uzay ise, o zaman

$$WC_1(X)=WC_0(X)=WK_1(X)=WK_0(X) \subset WC_2(X)=WK_2(X)$$

dir.

(*Shoiji, N., v.d., 1998*)

**Kanıt :** 5.2.2 Ön Teorem'den $WC_1(X) \subset WK_0(X)$, 5.2.3 Ön Teorem'den $WK_1(X) \subset WC_0(X)$, 5.2.4 Ön Teorem'den $WC_2(X)=WK_2(X)$ dir.

Ayrıca $W_0(X) \subset W(X)$ olduğu da açık ve $WC_0(X) \subset WC_1(X)$ ve $WK_0(X) \subset WK_1(X)$ oldukları da açıktır.

$WC_1(X) \subset WC_0(X)$ 'tir.

Gerçekten;

$$WC_1(X) \subset WK_0(X) \subset WK_1(X) \subset WC_0(X) \text{ dir.}$$

O halde, $WC_1(X) = WC_0(X)$ 'tir.

$WK_1(X) \subset WK_0(X)$ 'tir. Gerçekten;

$$WK_1(X) \subset WC_0(X) \subset WC_1(X) \subset WK_0(X)$$

dir. O halde, $WK_1(X) = WK_0(X)$ 'tir.

$WC_0(X) \subset WK_1(X)$ 'tir. Gerçekten;

$$WC_0(X) \subset WC_1(X) \subset WK_0(X) \subset WK_1(X)$$

dir. O halde, $WC_0(X) = WK_1(X)$ 'tir.

Bu durumda,

$$WC_0(X) = WC_1(X) = WK_0(X) = WK_1(X)$$

bulunur. Böylece,

$$WC_0(X) = WC_1(X) = WK_0(X) = WK_1(X) \subset WC_2(X) = WK_2(X)$$

dir. □

## 5.3 SABİT NOKTANIN VARLIĞIYLA METRİK UZAYIN KARAKTERİZASYONU

4. Bölümde metrik uzayın tam olması durumunda Kannan dönüşümlerinin değişik koşullar altında sabit noktalarının var olduğu gösterilmiştir. Doğal olarak *"Bir fonksiyonun sabit noktasıyla uzayın tamlığı arasında bir ilişki var mıdır?"* sorusu akla gelebilir. Yani, Kannan dönüşümünün sabit noktasının var olması, uzayın tam olmasını garanti eder mi?

**5.3.1 Tanım :** $(X,d)$ bir metrik uzay olsun.

*(i)* Eğer her daraltan dönüşümün $X$'te bir sabit noktası varsa, $(X,d)$ uzayına daraltan dönüşüm için sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

*(ii)* Eğer her Kannan dönüşümünün $X$'te bir sabit noktası varsa, $(X,d)$ uzayına Kannan dönüşümü için sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

Hu, T. K. (1967), *"Bir $(X,d)$ metrik uzayının her bir kapalı alt uzayı daraltan dönüşüm için sabit nokta özelliğine sahipse, uzayın kendisinin tam olduğunu"* göstermiştir. Yine, Reich, S. (1971) *"Bir metrik uzayının her bir kapalı alt uzayı Kannan dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip ise uzayın tam olduğunu"* göstermiştir.

Her ne kadar Hu ve Reich'in verdiği teoremler metriğin tamlığını karakterize etseler de, uzayın tamamı üzerine tanımlanan daraltan ya da Kannan dönüşümleri için uzayın karakterize edilmesi açık bir soru olarak kalmıştır.

Bununla ilgili teoremi vermeden önce birkaç tanıma ihtiyaç vardır.

**5.3.2 Tanım :** $\ell^\infty$ üzerinde tanımlı ve $\|\mu\| = 1 = \mu(1)$ koşulunu sağlayan sürekli bir doğrusal $\mu$ fonksiyoneline N üzerinde bir **ortalama (mean)** denir. Böylece $\mu$'nün N üzerinde bir ortalama olması için gerekli ve yeterli koşul her $a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^\infty$ için,

$$\inf_{n \in \mathrm{N}} a_n \leq \mu(a) \leq \sup_{n \in \mathrm{N}} a_n$$

olmasıdır. Burada duruma göre $\mu(a)$ yerine $\mu_n(a_n)$ kullanılacaktır.

Her bir $a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^\infty$ için $\mu_n(a_n) = \mu_n(a_{n+1})$ oluyorsa, N üzerinde ortalamaya bir **Banach limiti** denir. (*Banach, S., 1932*)

Eğer $\mu$ bir Banach limiti ise, o zaman her bir $a = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^\infty$ için

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n \leq \mu_n(a_n) \leq \overline{\lim}_{n \to \infty} a_n$$

dir.

**5.3.3 Teorem :** $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denk ifadelerdir.

**(*i*)** $X$ tamdır ,

**(*ii*)** Her bir $T : X \to X$ Kannan dönüşümü $X$ 'te bir sabit noktaya sahiptir ,

**(*iii*)** $X$ 'teki her $\inf_{x \in X} \mu_n d(x_n, x) = 0$ koşulunu sağlayan her bir $\{x_n\}$ sınırlı dizisi ve N üzerindeki $\mu$ ortalaması ve $\mu_n d(x_n, x_0) = 0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır.

(*Shioji, N., v.d., 1998.*)

**Kanıt :**

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) : 2.2.2 Teorem'inde verilmişti.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) : $\{x_n\}$, $X$ 'te sınırlı bir dizi ve $\mu$ de $\inf_{x \in X} \mu_n d(x_n, x) = 0$ koşulunu sağlayan N üzerindeki bir ortalama olsun. Bir $T : X \to X$ dönüşümü, her $x \in X$ için

$$\mu_n d(x_n, Tx) \leq \frac{1}{4} \mu_n d(x_n, x)$$

koşulunu sağlıyorsa bu $T$ dönüşümü bir Kannan dönüşümüdür. Gerçekten; $x$ ve $y$, $X$ 'te keyfi noktalar olmak üzere, üçgen eşitsizliğinden,

$$\mu_n d(x_n, Tx) \leq \frac{1}{4} \mu_n d(x_n, x) \leq \frac{1}{4} (\mu_n d(x_n, Tx) + \mu_n d(Tx, x))$$

ve buradan,

$$(1 - 1/4) \mu_n d(x_n, Tx) \leq \frac{1}{4} \mu_n d(Tx, x)$$

olup, böylece

$$\mu_n d(x_n, Tx) \leq \frac{1}{3} \mu_n d(Tx, x)$$

ve

$$\mu_n d(x_n, Tx) \leq \frac{1}{3} d(Tx, x)$$

bulunur.

Benzer biçimde,

$$\mu_n d(x_n,Ty) \leq \frac{1}{3}\mu_n d(Ty,y)$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) = \mu_n d(Tx,Ty) &\leq \mu_n d(Tx,x_n) + \mu_n d(x_n,Ty) \\ &= \mu_n d(x_n,Tx) + \mu_n d(x_n,Ty) \\ &\leq \frac{1}{3} d(Tx,x) + \frac{1}{3} d(Ty,y) \end{aligned}$$

bulunur ki, bu $T$'nin Kannan dönüşümü olduğunu verir. (*ii*)'den Kannan dönüşümleri için $Tx_0 = x_0$ olacak biçimde $x_0 \in X$ noktası var olduğu bilinmektedir. O zaman,

$$\mu_n d(x_n,x_0) = \mu_n d(x_n,Tx_0) \leq \frac{1}{4}\mu_n d(x_n,x_0)$$

olur. Bu ise, ancak $\mu_n d(x_n,x_0) = 0$ olmasıyla mümkündür.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) ;

$\{x_n\}$, $X$ içinde herhangi bir Cauchy dizisi ve $\mu$ de bir Banach limit olsun. O zaman her $x \in X$ için,

$$\mu_n d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x)$$

ve

$$\inf_{x\in X} \mu_n d(x_n,x) = 0$$

dır. Böylece (*iii*)'den $\mu_n d(x_n,x_0) = 0$ olacak biçimde $x_0 \in X$ vardır. Buradan $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0) = 0$ olur. Şu halde $x_n \to x_0$ olup, $X$ tamdır. □

**5.3.4 Sonuç :** $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir.

**(*i*)** $X$ tamdır ,

**(*ii*)** Her bir $T: X \to X$ zayıf daraltan dönüşümü $X$'te bir sabit noktaya sahiptir ,

**(*iii*)** Her bir $T: X \to X$ zayıf Kannan dönüşümü $X$'te bir sabit noktaya sahiptir.

(*Shioji, N., v.d., 1998*)

**Kanıt :**

4.3.10 Not'undan $(i) \Rightarrow (ii)$ olduğu açıktır. 5.2.5 Teorem'inden,

$$WC_1(X) \subset WK_1(X) \cup WK_2(X)$$

olduğu açıktır. Bu ise $(ii) \Rightarrow (iii)$ olduğunu gösterir.

Yine 5.2.5 Teorem'inden,

$$WK_0(X) = WC_1(X) \subset WK_1(X) \cup WK_2(X)$$

olduğu bilinmektedir. $WK_0(X)$, $X$'ten $X$'e tanımlı bütün Kannan dönüşümlerini temsil ettiğinden, 5.3.3 Teorem'inden $(iii) \Rightarrow (i)$ olduğu anlaşılır. □

# KAYNAKLAR


1- **Banach, S.** ; 1922, *Sur les opérations dans les ensemble abstraits et leurs applications*, Fund. Math., 3, 133-181

2- **Banach, S.** ; 1932, *Théorie des opérations linéaries*, Monografie Mat., PWN, Warszawa.

3- **Čirič, L. J.** ; 1974, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

4- **Goebel, K.** and **Kirk, W. A.** ; 1990, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press.

5- **Hu, T. K.** ; 1967, *On a fixed point theorem for metric spaces*, Amer. Math. Soc., 1, 443-474.

6- **Istrătescu, V. I.** ; 1981, *Fixed point theory and introduction*, D. Reidel Publ. Comp.

7- **Kada, O.** ; **Suzuki, T** and **Takahashi, W.** ; 1996, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japonica, 44, 381-391.

8- **Kannan, R.** ; 1968, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., 60, 71-76.

9- **Kannan , R.** ; 1969, *Some results on fixed point-II* , Amer. Math. Monthly, 76, 405-408.

10- **Kreyszig, E.** ; 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley&Sons.

11- **Reich, S.** ; 1971, *Kannan's fixed point theorem*, Boll. Un. Math. Ital. 4, 1-11.

12- **Shioji, N.** ; **Suzuki, T.** and **Takahashi, W.** ; 1998, *Contractive mappings, Kannan mappings and metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., 126, 3117-3124.

13- **Subrahmanyam, P. V.** ; 1974, *Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle*, J. Math. Physi. Sci., 8, 445-457.

14- **Suzuki, T.** ; 1997, *Several fixed point theorems in complete metric spaces*, Yokohama Math. J., 44, 61-72.

15- **Ume, J. S.** : 1998, *Fixed point theorems related to Čirič's contraction principle*, J. Math. Anal. Applications, 225, 630-640.

16- **Zeidler, E.** ; 1993, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I : Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag.

# ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Hakan KARAYILAN

**Doğum Yeri** : İzmir

**Doğum Tarihi** : 06.01.1975

**EĞİTİM VE AKADEMİK DURUMU :**

**İlkokul** : Ali Akatlar İlkokulu

**Ortaokul** : İzmir Türk Koleji

**Lise** : İzmir Türk Koleji

**Lisans** : Trakya Üniv. Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

**Yabancı Dil** : İngilizce

**İŞ TECRÜBESİ :**

Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.