T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

TEK PARAMETRELİ DAĞILIM AİLESİNDEKİ OLASILIK FONKSİYONLARININ DÜZENLİLİK (REGÜLARİTE) ŞARTLARININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan:Zeki KASAP

Danışman:Yrd.Dç. Dr. Murat KARAGÖZ

İnönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Lisans-Üstü
Eğitim Öğretim ve Sınav Yönergesinin Ekonometri Anabilim Dalı
İçin Öngördüğü Yüksek Lisans Tezi Olarak Hazırlanmıştır

MALATYA -1997

"Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü'ne"

İşbu çalışma , jurimiz tarafından Ekonometri Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir .

Başkan:

Üye:

Üye:

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım .

......./......./199..

Enstitü Müdürünün

Adı Soyadı :
İmza veTarih :

ÖNSÖZ

İstatistik, istatistiki verileri çeşitli **Matematiksel** metodlarla inceler.O halde İstatistik ciddi bir biçimde matematiği kullanmaktadır.İstatistik ve olasılık kuramları matematiğe dayanır. Bu sebepten dolayı uygulamalı matematiğin bir dalı olarak da kabul edilirler.

İstatistik, ilgilendiği olaylardan elde edilecek verilerin tesedüfü olmasına yani yansızlığa çok önem vermektedir. Bu sebeplede matematiğin **Olasılık** konusuyla çok yakın bir ilişkiye sahiptir. Olasılık dağılımlarından faydalanılarak belirli bir model bulunmaya çalışılır.

Bu tezde, Tek Parametri Olasılık Dağılımlarının Aileleri üzerinde durulmuştur. Bu Ailelirden biri olan Üstel Aileden türetilebilen fonksiyonlar incelenmiştir. Değişkenlerin süreklilik ve süreksizlik durumlarına göre; Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları, Birikimli Dağılım Fonksiyonları, Moment Çıkaran Fonksiyoları, Beklenen Değerleri ve Varyansları, Karekteristik Foksiyonları incelenmiş ve bulunmuştur. Sözkonusu dağılımların **Düzenlilik Şartlarına** haiz olup olmadıkları incelenmiştir. Yapılan matematiksel işlemlerin özellikleri dipnotlarda verilmiştir.

Bu çalışmada bana yardımcı olan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Murat KARAGÖZ'e teşekkürü bir borç bilirim .

Zeki KASAP

Temmuz , 1997

MALATYA

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM II : FONKSİYONLARIN DÜZENLİLİK DURUMU

BÖLÜM III : SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

TABLOLAR

ŞEKİLLER

GİRİŞ

Olasılık teorisi rassal olaylara egemen olan kanunları matematiksel yöntemlerle inceler.Bir deney aynı koşullar altında birçok kez tekrar edildiğinde sonuçlar belli bir kurala bağlı olmaksızın her kez değişebiliyorsa, bu deneyin belirli bir sonucuna bağımlı olarak gerçekleşen (yada gerçekleşemeyen) bir olaya **Rassal Olay** denir.Birçok doğal olay rassaldır.Rassal olaylara etki eden nedenlerin çokluğu ve karmaşıklığı bunların incelenmesi için özel yöntemleri gerekli kılmıştır.Bu yöntemler Olasılık Teorisi içinde geliştirilmiştir[1].

Olasılık Teorisi uygulamasında Olasılık Fonksiyonu veya Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu'nun bulunması yapılacak araştırmanın en önemli aşamasını oluşturmaktadır.Her özel araştırmada yeni bir fonksiyon arayışı içine girmemenin, böylece araştırmada zaman ve kaynak kullanımını optimize etmenin gerekliliği açıktır.Bu amaçla bir taraftan belirli özelliklerin sağlandığı rassal deney veya gözlemler için araştırmalar yapılarak genel modeller türetilmiş, diğer taraftan da özel araştırmalar için bulunan modeller aynı özellikteki rassal sistemlerde kullanılmak üzere genelleştirilmiştir[2].

Farklı şartlar altında tekrarlanan deneylere ait rassal değişkenler, birbirinden çok farklı bölünmelere sahip olabilirler.Teorik bölünmelerin tipik örneklerini oluşturan bu bölünmelerden (Dağılımlar) Bernoilli, Binom, Negatif,Binom,Geometrik, Poisson dağılımları **Kesiklidir**.Normal,Üstel,Gamma,Rayleigh,.....dağılımları ise **Süreklidir**.Bu araştırmanın kapsamı ise Üstel Aileden türetilebilen olasılık dağılımları olacaktır.Çeşitli yollar ile gözlemlenen veriler incelenerek bunlar hakkında bazı yargılara varılır.Verilerin arasındaki ilişkilerin varlığı veya yokluğu incelenir.

[1]KOUTSOYIANNIS,A.,Ekonometri Kuramı,.ANKARA,1989,s.7
[2]KARAGÖZ,M.,İstatistik Yöntemleri,MALATYA,1995, s.162

Her türlü istatistiksel araştırmanın temel meteryali veridir.Genel olarak bu verilere rassal değişkenler denir.Rassal değişkenlerin (x,y, ...) olasılık dağılımlarının bilinmesi belirli teknik ve metodların uygulanmasında son derece önemlidir.Bir rassal değişkenin **Aritmetik Ortalama, Varyans,Asimetri Ölçüsü** ve **Basıklık Ölçüsü** gibi bazı önemli karakteristiklerinin belirlenmesinde **Olasılık Fonksiyonu** veya **Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu**'nun bilinmesi gerekmektedir Rassal Değişkenler gerçekte bir dağılıma sahip olmayıp bazıdağılımlarla benzerlik kurulmaktadır.

Rassal Değişkenlerin gerçek dağılımı bulunamadığından olasılık teorisinde geliştirilmiş bir çok dağılım model olarak kullanılır.İncelenen olay ile ilgili rassal değişkenler oluşturulabilir. İlgilenilen tüm olasılıklar rassal değişkenlere bağlı olarak herhangi bir dağılımın veya Matematiksel modelin kullanılmasıyla ifade edilebilir.Ne varki yapılan her rassal deneyde ortaya çıkan sonuçlar için yeni bir fonksiyon arayışı içine girmenin hem para hemde zaman kaybına yol açacak bir davranış olduğu açıktır.

Rassal değişkenler özelliklerine göre eğer sayılabilirse kesikli, sayılamazsa sürekli değişken ismini alırlar. Olasılık Teorisinde geliştirilmiş ve en çok kullanılan dağılımlardan bazıları **Binom, Normal, Üstel, Düzgün, Geometrik, Bernoulli, Hipergeometrik, Poisson v.b.** dağılımlarıdır .Bu dağılımlar incelendiğinde aralarında birçok benzerlik olduğu ve bir kısmının aynı kümenin farklı elemanları olduğu görülmektedir. Bu çalışmada öncelikle Üstel Dağılım Ailesinden türetilebilen dağılımlardan Olasılık Teorisinde ençok kullanılanları tespit edilecektir.Bu dağılımlar hakkında geniş bir bilgi verilip hangi amaçlar için kullanıldıkları belirtilecektir.Esas olarakta Düzenlilik Şartlarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilecektir[3].

---

[3]SERPER,Özer,Uygulamalı İstatistik 2,İSTANBUL,1986,s.1

Belirli bir tanım aralığında hangi değeri alacağı önceden bilinmeyen ve bu değeri belli olasılıklarla alabilen değişken olarak tanımlayabiliriz. O halde tesadüfü değişkenin aldığı her değer için belirli olasılık değeri vardır.Böylece tesadüfü değişkenin diğer değişkenlerden farklı, mümkün değerleri belirli olasılıklarla almasıdır.

X tasadüfü değişken ve $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ bu tesadüfü değişkenin alabileceği değerler olsun.X tesadüfü değişkeninin herhangi bir x değerini alma olasılığı;

$$\mathbf{Pr\ \{X = x\}}$$

şeklinde gösterilir.Bu olasılık x'in dağılım yada olasılık kanunu olarak adlandırılır.Şu halde bizi ilgilendiren şey x tesadüfü değişkeninin aldıkları değerlerle birlikte bu değerleri hangi olasılıklarla aldıklarının bilinmesidir.Yani değişkenlerin olasılıkları toplamı **1**'e eşittir.Tesadüfü Değişkenler alabilecekleri değerler bakımından Süreksiz ve Sürekli olarak adlandırılırlar.

Bir x tesadüfü değişkeni, yalnız sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta değerler alıyor sa, bunlara **Süreksiz Tesadüfü Değişken** denir.Genellikle bunlar tamsayılardır.Şu şekilde gösterilir;

$$P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+\ldots\ldots\ldots\ldots+P(x_n)=\sum_{i=1}^{n} P(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$$

Bir **x** tesadüfü değişkeni sonsuz değerler alabiliyor ise,bu değişkene **Sürekli (Kesiksiz) Değişken** denir.Bu değişkenlerin alabileceği değerlerin sayısı sayılabilir çoklukta olmayıp sonsuz tanedir.Bundan dolayı belirli bir özelliğe göre araştırılan bireylerin elde edilen verileri sınıflandırmadan sınıfların düzeylerini belirlemek gerekir.Boy,ağırlık,yaş, v.s. bunlardan sadece bazılarıdır.

Bir tesadüfü değişkenin alabileceği değerler ile bu değerleri alabilme olasılıkları arasındaki ilişkiyi gösteren bağıntılardır.Genellikle 'f(x) veya **p(x)**' ile gösterilir. **p(x)** bir olasılık olduğundan dolayı **0** ile **1** arasında değişir.İfade olarak ise;

$$0 \leq p(x) \leq 1$$

şeklindedir.

Kesikli rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonları, p(x) ile gösterilir ve tamsayı karakterli değişkenlerdir.Yani **x** rassal değişkeni ancak ve ancak **0,1,2,3,...** gibi sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta tamsayılar alabilir.

Herhangi bir fonksiyonun kesikli bir x rassal değişkeni için, olasılık fonksiyonu olabilmesi **x=0,1,2,....,n** olmak üzere;

i) $0 \leq p(x) \leq 1$ (Olasılıklar sıfırdan küçük 1 den büyük olmalıdır.)

ii) $\sum p(x)=1$ (Bütün olasılıklar toplamı 1 olmalıdır.)

şartlarını sağlaması gerekmektedir.

Herhangi bir sürekli değişkenin olusturduğu olasılık fonksiyonu **Sürekli Olasılık Fonksiyonu, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu** yada sadece **Yoğunluk** veya **Sıklık Fonksiyonu** gibi isimlerle adlandırılır.

Sürekli bir tesadüfü değişkenin; **a** ve **b** gibi sabit iki sayı arasında kalan aralıktaki bir değer alma olasılığı, bu değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bu aralıkta integralinin alınmasıyle bulunmaktadır.

Sürekli bir tesadüfü değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx$$

şeklinde ifade edilir.Bu fonksiyonun çeşitli **X** değişkeninin **x** değerlerini alma olasılığı;

$$Pr\{X=x\}=\int f(x).dx$$

şeklinde bulunur. **a≤x≤b** aralığı için;

$$Pr\{a\leq x\leq b\}=\int_{a}^{b} f(x).dx$$

olarak genelleştirilmiş olur.Bir Sürekli Rassal Değişkenin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{R} f(x).dx = 1$ özelliklerini sağlaması gerekmektedir.

Bir **X** tesadüfü değişkeninin , **x**'in verilen bir değere eşit yada küçük çıkma olasılığını veren fonksiyona **Olasılık Dağılım Fonksiyonu** denir.

Olasılık Dağılım Fonksiyonu **F(x)** ile gösterilir.Aynı zamanda bu fonksiyona **Birikimli Olasılık Fonksiyonu**'da denir.Olasılık Dağılım veya Birikimli Olasılık Fonksiyonunu;

$$F(x)=Pr\{X\leq x\}$$

şeklinde ifade edilir.Bu olasılığın değeri **x**'e bağlıdır, **x**'in bir fonksiyonu olarak ortaya çıkar.Birikimli Dağılım Fonksiyonu **F(x)** ilgilenilen olasılıkları verdiğinden dolayı alabileceği değer **0** ile **1** arasında değişeceği açıktır.Bunu ifade edecek olursak,

$$0\leq F(x)\leq 1$$

şeklindedir.F(x) Birikimli Olasılık Fonksiyonunu ile f(x) olasılık yada olasılık yoğunluk fonksiyonu arasındaki bağıntı;

$$F(x)=\begin{cases}\sum\limits_{t=-\infty}^{x} f(t) & \text{(x, süreksiz tesadüfü değişken)}\\ \int\limits_{t=-\infty}^{x} f(t).dt & \text{(x, sürekli tesadüfü değişken)}\end{cases}$$

şeklindedir [4].Bu bağıntı sayesinde, olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiş bir tesadüfü değişkenin Olasılık Dağılım Fonksiyonunun nasıl bulunabileceğini göstermektedir.

---

[4] SARAÇOĞLU B. ve ÇEVİK F.Matematiksel İstatistik,ANKARA,1995,s.157

BÖLÜM I

FONKSİYONLAR VE AİLELERİ

1.1 Fonksiyon Aileleri

Olasılık dağılımları gözönüne aldığında bazılarının birbirine çok benzediği görülmektedir . Bu sebeple bu fonksiyonların bulunuşunda bir berzerlik varmıdır sorusu akıllara gelmektedir. Gerçekten incelendiğinde bazı fonksiyonlar aynı aileden türetildiği görülmektedir .

Uygulamada en çok kullanılan Bernoulli, Binom, Geometrik , Negatif Binom , Poisson , Üstel, Normal, Gamma , Beta dağılımlarıdır.Bu dağılımların bazıları **"Üstel Aileye"** aittir . Üstel aileden başka **" Couchy Dağılım Ailesi"** gibi farklı ailelerde vardır .

1.2. Üstel Aile

Genel olarak üslü fonksiyonlar ;

$$f(x) = h(x).a^{g(x)} \qquad , a \in R$$

şeklinde ifade edilebilir.Uygun fonksiyon seçimiyle bir başka fonksiyon türetebiliriz .

Örneğin uygun seçimiyle ;

h(x)	g(x)	f(x)	İsmi
1	1	a	Sabit fonksiyon
1	x	a^x	Üstel fonksiyon
1	$\ln e^x$	e^x	Logaritmik fonksiyon

fonksiyonlarını bulabiliriz . Bu fonksiyonların sayısı arttırılabilir . Fakat bu yazılan form parametresi olmayan basit üstel bir fonksiyonu gösterir . Görüldüğü gibi bu bir olasılık dağılımı olmayıp sadece basit üstel fonksiyonlardır.

1.3. Üstel Aileden Türetilebilecek Bazı Dağılımlar

Uygun fonksiyonların seçilmesiyle;

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp [Q(\theta).R(x)] \qquad (1.3)$$

formunda genel olarak yazılabilen tek parametreli dağılımlar ailesine "**Üstel Dağılımlar Ailesi**"ne aittir denilir[5].

Bu fonksiyonda " θ " parametre olup, herhangi bir işlem neticesinde bulunabileceği gibi özel olarakta **(x,p,α,......)** seçilebilir.Ayrıca (1.3) te; **B(θ)** ve Q(θ) fonksiyonları " θ" parametresine bağlı olarak bulunur.Örneklem değişikliklerinden hiçbir surette etkilenmez. **R(x)** ve **h(x)** fonksiyonları örneklem değerlerine göre değişken ifadelerdir. Her bir **x** değeri için farklı sonuç verir.(1.3) teki B(θ) ve Q(θ) fonksiyonları **f(x;θ)** ifadesinin bir olasılık fonksiyonu olması için, yani 0-1 aralığında değişimini sağlamak üzere genel fonksiyona dahil edilen ölçeklendirme unsurlarıdır.

---

[5]LİNDGREN B. W.,Statistical Theory,NEW YORK,1976,s.197

1.4. Üstel Aileden Türetilebilen Dağılımların Genel Formu

Üstel yazılmış şekli;

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

olan Üstel Dağılım Ailesinin Fonksiyonun genel olarak ifadesi[6];

$$f(x,\theta) = \exp[\ln B(\theta) .h(x) + Q(\theta).R(x)]$$

$$f(x,\theta) = \exp[\ln B(\theta) + \ln h(x) + Q(\theta).R(x)] \qquad (1.4)$$

şeklindedir[7].

(1.4) te B (θ) , Q(θ), R(x) ve h(x) in uygun seçilmesiyle elde edilebilen dağılımlarin bazıları aşağıda tablo halinde verilmiştir.

---

6 Genel formda kullanılan "exp" matematik dilinde "e" ile ifade edilmektedir.Değeri ise;

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ genel formunda x=1 alınır ise;

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ifadesi açılırsa

$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ bulunurki yaklaşık değeri $e \cong 2,71$ dir

7 Logaritmanın; $\log(a.b) = \log a + \log b$ ve $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$ özelliklerinden hareketle

$\ln B(\theta).h(x) = \ln B(\theta) + \ln h(x)$ şeklinde yazılabilir.

Tablo-1

Dağılımların Fonksiyon Olarak Ayrışım Tablosu[8]

İsmi	$f(x;\theta)$	$B(\theta)$	$Q(\theta)$	$R(x)$	$h(x)$
1- Bernouilli	$P^x(1-p)^{1-x}$	$1-p$	$\log_e\frac{p}{1-p}$	x	1
2- Binom	$\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$	$(1-p)^n$	$\log_e\frac{p}{1-p}$	x	$\binom{n}{x}$
3- Geometrik	$p(1-p)^x$	p	$\log_e\frac{p}{1-p}$	x	1
4- Negaf Binom	$\binom{r+x-1}{x}.p^r.(1-p)^x$	p^r	$\log_e\frac{p}{1-p}$	x	$\binom{r+x-1}{x}$
5- Poisson	$e^{-m}.\frac{m^x}{x!}$	e^{-m}	$\log_e m$	x	$\frac{1}{x!}$
6- Üstel	$1.e^{-\lambda x}$	λ	$-\lambda$	x	1
7- Normal $(0,\theta)$	$(2\pi\theta)^{-1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{\theta}\right]$	$(2\pi\theta)^{-1/2}$	$-(2\theta)^{-1/2}$	x^2	1
8- Normal $(\theta,1)$	$(2\pi\theta)^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right]$	$(2\pi\theta)^{-1/2}.\exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2\right)$	θ	x	$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$
9- Gamma	$\lambda^n x^{n-1}\frac{e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$	$\frac{\lambda}{(n-1)!}$	$-\lambda$	x	x^{n-1}
10-Rayleigh	$\frac{x}{\theta^2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\theta^2}\right]$	$\frac{1}{\theta^2}$	x^2	x	$-\frac{1}{2\theta^2}$

[8] LINDGREN,B. W.,a.g.e.,s.199

Bu dağılımların nasıl bulunduğu, fonksiyonların yerlerine yazılmasıyla açıkca görülecektir.Çeşitli matematik kurallar uygulanarak bulunuşları ileriki sayfalarda gösterilmiştir.Her nekadar θ parametresi indekslemek için kullanılmış ise de özel durumlarda $\sigma, \mu, x, \ldots$ kullanılmaktadır.Bu fonksiyonlar hakkında sonuç çıkarılacağı zaman neden bu kadar özelliklere sahip olduğunu göstermekten ziyade, bu fonksiyonların genel bir modelin özel durumları olduğunu göstermektir.Aksi takdirde her bir fonksiyon için ayrı ayrı elde edilmesi gereken bir çok sonucu, bir detaya mahsus olarak ve tümü için elde edilmesini mümkün kılmaktadır.

Aynı zamanda $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots\ldots\ldots,\theta_k)$ gibi çok boyutlu bir parametre ile indekslenen;

$$f(x;\theta)=B(\theta).h(x).\exp\left[Q_1(\theta).R_1(x)+\ldots\ldots\ldots+Q_k(\theta).R_k(x)\right]$$

biçiminde tanımlanan "**Üstel Dağılım Aileleri**"de vardır.

Genel şekliyle Normal Dağılım $\theta-(\mu,\sigma^2)$ gibi iki parametre ile tanımlanan bir yoğunluk fonksiyonudur.

$$f(x;\theta)=B(\theta).h(x).\exp\left[Q(\theta).R(x)\right]$$

genel formu üstel halde yazılırsa elde edilecek asıl üstel hal;

$$f(x;\theta)=\exp\left[\ln B(\theta).h(x)+Q(\theta).R(x)\right]$$

$$f(x;\theta)=\exp\left[\ln B(\theta)+\ln h(x)+Q(\theta).R(x)\right]$$

şeklinde ifade edilirki asıl üstel biçimdir.

Tablo-2

Dağılımların Genel Üstel Form Tablosu

İsmi	Genel $f(x;\theta)$	Genel Üstel $f(x;\theta)$
1.Bernoulli	$p^{x}(1-p)^{x}$	$\exp[x\ln p+(1-x)\ln(1-p)]$
2.Binom	$\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$	$\exp\left[\ln\binom{n}{x}+x\ln p+(n-x)\ln(1-p)\right]$
3.Geometrik	$p.(1-p)^{x}$	$\exp[\ln p+x\ln(1-p)]$
4.Negatif Binom	$\binom{r+x-1}{x}p^{r}(1-p)^{x}$	$\exp\left[\ln\binom{r+x-1}{x}+r\ln p+x\ln(1-p)\right]$
5.Poisson	$e^{-m}.\frac{m^{x}}{x!}$	$\exp[-m+x\ln p-\ln x!]$
6.Üstel	$\lambda.e^{-\lambda x}$	$\exp[\ln\lambda-\lambda x]$
7.Normal $(0;\theta)$	$(2\pi\theta)^{\frac{-1}{2}}.\exp\left[\frac{-x^{2}}{2\theta}\right]$	$\exp\left[\frac{-x^{2}}{2\theta}-\ln\sqrt{2\pi\theta}\right]$
8.Normal $(\theta;1)$	$(2\pi)^{\frac{-1}{2}}.\exp\left[\frac{-1}{2}.(x-\theta)^{2}\right]$	$\exp\left[\frac{-1}{2}.(x-\theta)^{2}-\ln\sqrt{2\pi}\right]$
9.Gamma	$\lambda^{n}.x^{n-1}.\frac{e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$	$\exp[-\lambda x+n\ln\lambda+(n-1)\ln x-\ln(n-1)!]$
10.Rayleigh	$\frac{x}{\theta^{2}}.\exp\left[\frac{-x^{2}}{2\theta^{2}}\right]$	$\exp\left[\frac{-x^{2}}{2\theta^{2}}+\ln x-2\ln\theta\right]$

Normal Dağılımı örneklenirse;

$$f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

ifadesi üstel fonksiyon ve logaritmanın özelliğine göre açılırsa;

$$f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right).\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+x.\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)\right)$$

formu elde edilir.Genel ifadesi;

$$f(x,\theta) = \exp[\ln B(\theta) + \ln h(x) + Q(\theta).R(x)]$$

olan bu form için fonksiyonları belirlersek;

$$B(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$Q_1(x)=-\frac{1}{2\sigma^2} \quad , \quad Q_2(x)=-\frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$R_1(x)=x^2 \quad , \quad R_2(x)=x$$

olarak tesbit edilir.Öyleyse bu Normal Dağılım **İki Parametreli Üstel Dağılım Ailesinden** türetilebilen fonksiyonlardan biridir.

Eğer $\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ rassal değişkenleri için bir çoklu dağılım yazılmaya çalışılırsa;

$$\mathbf{X}=(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n) \quad \text{ve} \quad \theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots\ldots,\theta_n)$$

için elde edilebilecek olan fonksiyonun kalıbı;

$$f(x;\theta)=B(\theta).h(x).\exp\left[Q_1(\theta).R_1(x)+\ldots\ldots\ldots+Q_k(\theta).R_k(x)\right]$$

formuna sahipse "**Üstel Dağılım Ailesine**" üyedir denilir.Dağılımı **Tekli Üstel Aileye** ait olan bir **x** rassal değişkeni üzerindeki "**n**" tane bağımsız gözlemin "Birleşik **Yoğunluk Fonksiyonu**" yukarıdaki formdadır.

Bunun için **x**'in **Tek Parametreli** durumlarında yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x;\theta)=C(\theta).g(x).\exp\left[Q(\theta).S(x)\right]$$

olduğundan, **x**'in n tane bağımsız parametresi durumunda "Birleşik **Yoğunluk Fonksiyonu**" ;

$$f(x;\theta)=\Pi f(x_i;\theta)=\left[C(\theta)\right]^n.\exp\left[Q(\theta).\Sigma S(x_i)\right].\Pi g(x_i)$$

olup burada toplam ve çarpım sembolleri **i =1,2,3,....,n** 'e kadar uzanır.

Bu formdaki fonksiyonların bileşenleri;

$$B(\theta)=\left[C(\theta)\right]^n$$

$$h(x)=\Pi g(x_i)$$

$$R(x)=\Sigma S(x_i)$$

şeklinde düşünülürse çoklu yoğunluk fonksiyonuda üstel aileye ait olur.

Dağılımlar incelendiğinde hepsinin Üstel Aileye ait olmadığı açıkca görülmektedir.Dağılımların ortak özelliklerine bakılarak bir sınıflandırılmaya tabi tutulmuş ve en belirgin özelliklerinin adıyla anılmışlardır.Aynı aileye ait olan dağılımlarında birbirine dönüştürülebilmesi üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Bu farklı olan ailelerden bazılarının **Cauchy Dağılım Ailesini**;

$$f(x)=\frac{\frac{a}{\pi}}{(x-m)^2+a^2}$$

$$f(x)=\frac{\frac{1}{\pi}}{x^2+1} \quad , \quad (a=1 \text{ ve } m=0 \text{ için})$$

özel olarak seçilmesiyle şeklinde gösterebiliriz. [0,θ] aralığında değişen **Düzgün Dağılım Cauchy Dağılım Ailesi**'ndendir [9].

[9] LINDGREN,B.W.,a.g.e.,s.200

1.5.Üstel Dağılım Ailesinden Türetilebilen Tek Parametreli Dağılılımların Fonksiyonlarına Ayrıştırılması

1.5.1. Bernoulli Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

üstel genel formunda;

$$B(\theta) = 1-\theta \qquad \text{ve} \qquad Q(\theta) = \ln\frac{\theta}{1-\theta}$$

$$R(x) = x \qquad \text{ve} \qquad h(x) = 1$$

şeklinde seçilirse[10];

$$f(x;\theta) = (1-\theta).e^{x.\ln\frac{\theta}{1-\theta}}$$

olarak bulunur[11].Bu ifade de logaritmanın özelliğine göre açılır ise;

$$f(x,\theta) = (1-\theta).e^{x.(\ln\theta-\ln(1-\theta))}$$

$$= (1-\theta).e^{x.\ln\theta-x.\ln(1-\theta)}$$

$$= (1-\theta).e^{x.\ln\theta}.e^{-x.\ln(1-\theta)}$$

$$= (1-\theta).e^{\ln\theta^{x}}.e^{\ln(1-\theta)^{-x}}$$ elde edilir[12].

---

10 $\ln x^n = n.\ln x$ 'e logaritmanın özelliğinden eşittir.Dolayısıyle $x.\ln p = \ln p^x$ şeklinde yazılabilir.

11 $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ dir. $\ln\frac{\theta}{1-\theta} = \ln\theta - \ln(1-\theta)$ olarak yazılır.

12 $a^{\log_a x} = x$ 'e eşittir. $e^{\log_e x} = e^{\ln x}$ tir.Buradan $e^{\ln p^x} = p^x$ olur.

$$= (1-\theta).\theta^{x}.(1-\theta)^{-x}$$

$$f(x;\theta)=\theta^{x}.(1-\theta)^{1-x}$$

fonksiyonuna Bernoilli Dağılımıdır. $\theta=p$ olarak seçilirse;

$$f(x;p)=p^{x}.(1-p)^{1-x}$$

bilinen formu elde edilir.

1.5.2.Binom Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

Üstel genel formunda;

$$B(\theta)=(1-\theta)^{n}$$

$$R(x)=x$$

$$Q(\theta)=\ln\frac{\theta}{1-\theta}$$

$$h(x)=\binom{n}{x}$$

şeklinde seçilmiş olsun.Yerlerine yazıldığında;

$$f(x,\theta) = \binom{n}{x}(1-\theta)^{n}.e^{x\cdot\left(\frac{\ln\theta}{\ln(1-\theta)}\right)}$$

şeklinde bulunur .Bu ifade üslü fonksiyonların özelliği kullanılarak basitleştirilirse;

$$f(x,\theta) = \binom{n}{x}(1-\theta)^{n}.e^{x.(\ln\theta-\ln(1-\theta))}$$

Bu ifadede üsler çarpılıp ayrı ayrı yazılır ise;

$$=\binom{n}{x}(1-\theta)^{n}.e^{x.\ln\theta-x.\ln(1-\theta)}$$

$$=\binom{n}{x}(1-\theta)^{n}.e^{x.\ln\theta}.e^{-x.\ln(1-\theta)}$$

$$=\binom{n}{x}(1-\theta)^{n}.e^{\ln\theta^{x}}.e^{\ln(1-\theta)^{-x}}$$

$$=\binom{n}{x}.(1-\theta)^{n}.\theta^{x}.(1-\theta)^{-x}$$

$$=\binom{n}{x}.(1-\theta)^{n-x}.\theta^{x}$$

olur ki bu ifadeye;

$$f(x;\theta)=\binom{n}{x}.(1-\theta)^{n-x}.\theta^{x}$$

Binom Dağılımı denir.θ **- p** olarak seçilmesiyle,

$$f(x;p)=\binom{n}{x}\ p^{x}.(1-p)^{n-x}$$

ifadesi Binom Dağılımının bilinen şeklidir.

Üstel olarak Binom Dağılımının genel ifadesi;

$$f(x;p)=\exp\left[\ln\binom{n}{x}+x\ln p+(n-x)\ln(1-p)\right]$$

olarak ifade edilmiş olur.

1.5.3.Geometrik Dağılım

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

üstel genel formunda;

$$B(\theta)=\theta$$

$$Q(\theta)=\ln(1-\theta)$$

$$R(x)=x$$

$$h(x)=1$$

olarak seçilirerek;yerlerine yazılır larsa,

$$f(x,\theta)=\theta\,.e^{x\ln(1-\theta)}$$

bulunur. Bu ifadede üslü sayıların özellikleri kullanılarak açılırsa;

$$=\theta.e^{\ln(1-\theta)^{x}}$$

$$=\theta\,.(1-\theta)^{x}$$ olur ki;

$$f(x,\theta) =\theta\,.(1-\theta)^{x}$$

şeklinde bulunur. $\theta = p$ ve $0 \leq p \leq 1$ olarak seçilir ise;

$$f(x;p)= p(1-p)^{x}$$

bulunan bu ifade ise Geometrik Dağılımdır.

Üstel olarak Geometrik Dağılımının genel ifadesi;

$$f(x;p)=\exp[\ln p+x\ln(1-p)]$$

olarak bulunur.

1.5.4.Negatif Binom Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

genel formunda;

$$B(\theta) = \theta^r$$

$$Q(\theta) = \ln(1-\theta)$$

$$R(x) = x$$

$$h(x) = \binom{x-1}{r-1}$$

şeklinde seçilip genel formda yerlerine yazılırsa;

$$f(x,\theta) = \theta^r.\binom{x-1}{r-1}.e^{x.\ln(1-\theta)}$$

olarak bulunur. Bu ifade üslü sayıların özelliklerine göre açılır ise;

$$= \theta^r.\binom{x-1}{r-1}.e^{\ln(1-\theta)^x}$$

$$= \theta^r.\binom{x-1}{r-1}.(1-\theta)^x$$

$$f(x;\theta) = \binom{x-1}{r-1}.\theta^r.(1-\theta)^x$$

ifadesi bulunur. $\theta = p$ ve $0 \leq p \leq 1$ olarak seçilir ise Negatif Binom Dağılımı;

$$f(x;p) = \binom{x-1}{r-1}.p^r.(1-p)^x$$

bulunur. Üstel olarak Negatif Binom Dağılımının genel ifadesi;

$$f(x;p) = \exp\left[\ln\binom{x-1}{r-1} + r\ln(1-p) + x.\ln(1-p)\right]$$

1.5.5.Poisson Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

genel üstel formunda fonksiyonları tespit edelim.

$$B(\theta) = e^{-\theta}$$

$$Q(\theta) = \ln\theta$$

$$R(x) = x$$

$$h(x) = \frac{1}{x!}$$

olarak seçilirse[13];

$$f(x,\theta) = e^{-\theta}.\frac{1}{x!}.e^{x.\ln\theta}$$

şeklinde bulunur.Üslü sayıların özelliklerinden faydalanılarak basit hale indirgemeye çalışalım.

$$= e^{-\theta}.\frac{1}{x!}.e^{\ln\theta^{x}}$$

$$= e^{-\theta}.\frac{1}{x!}.\theta^{x}$$

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}.\frac{1}{x!}.\theta^{x}$$

ifadesine **Poisson Dağılımı** denir.

---

[13] $x! = x.(x-1)!$ ve $x = 1,2,3..........$

$= x.(x-1).(x-2)! = x.(x-1).(x-2)..........2.1$ şeklindedir O halde;

$\frac{1}{x!} = \frac{1}{x.(x-1).(x-2)..........2.1}$ ifadesine eşittir.

Bu fonksiyonda **p - λ** ve **0 ≤ p≤ 1** olarak seçilir ise;

$$\mathbf{f(x;\lambda)= e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}}$$

bulunan bu ifade Negatif Binom Dağılımının bilinen şeklidir.

Üstel olarak Poisson Dağılımının genel ifadesi;

$$\mathbf{f(x;\lambda)=exp[-\lambda+x\ln\lambda-\ln x!]}$$

formundadır.

1.5.6.Üstel Dağılım

$$\mathbf{f(x,\theta) = B(\theta).h(x).exp[Q(\theta).R(x)]}$$

genel üstel formunda fonksiyonları tespit edelim.

$$\mathbf{B(\theta)=\theta}$$

$$\mathbf{Q(\theta)= -\theta}$$

$$\mathbf{R(x)=x}$$

$$\mathbf{h(x)=1}$$

olarak seçilmesiyle;

$$f(x,\theta) =\theta.1.e^{-\theta}$$

bulunur ki eğer $\theta = \lambda$ alınırsa;

$$f(x,\lambda) =\lambda.1.e^{-\lambda}$$

ifadesine **Üsteil Dağılım** denir.Genel olarak üstel formu;

$$f(x,\lambda) =\exp(\ln\lambda -\lambda.x)$$

şeklindedir.

1.5.7.Normal $(0,\theta)$ Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

Normal Dağılımda $\mu=0$ alınmıştır.Genel üstel formda fonksiyonları tespit edelim.

$$Q(\theta)=-(2\theta)^{-1}$$

$$R(x)=x^2$$

$$B(\theta)=(2\pi\theta)^{\frac{-1}{2}}$$

$$h(x)=1$$

olarak seçilmesiyle;

$$f(x;\theta)=(2\pi\theta)^{\frac{-1}{2}}.e^{-(2\theta)^{-1}.x^2}$$

olarak bulunur.Üstel fonksiyonların özelliklerinden faydalanılarak basit hale indirgenirse,

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}.e^{-(2\theta)^{-1}.x^2}$$

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}.e^{\frac{-x^2}{2\theta}}$$

ifadesine **Normal $(0,\theta)$ Dağılımı** denir.

Normal dağılımın bu ifadesini genel üstel formda yazalım.

$$f(x;\theta) = \exp\left\{ \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} + \frac{-x2}{2\theta} \right\}$$

$$= \exp\left\{ \ln(2\pi\theta)^{-1/2} + \frac{-x2}{2\theta} \right\}$$

$$f(x;\theta) = \exp\left\{ \frac{-1}{2}.\ln(2\pi\theta) + \frac{-x2}{2\theta} \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Buradaki fikir, logaritmanın $e^{\ln x} = x$ özelliğinden haraketle;
$f(x) = h(x)$ ifadesi tersden düşünülürse;

$f(x) = e^{\ln h(x)}$ şeklinde yazılabilir.

Bu form üstel olarak $f(x) = \exp[\ln h(x)]$ şeklinde yazılabilir.

1.5.8.Normal (θ;1) Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

Normal Dağılımda σ=0 alınmıştır.Genel üstel formunda forksiyonları tespit edelim.

$$Q(\theta) = \theta \quad , \quad B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\theta^2}{2}}$$

$$R(x) = x \quad , \quad h(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

bileşenlerinin seçilmesiyle;

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-\theta^2}{2}}.e^{\frac{-x^2}{2}}.e^{\theta.x}$$

bulunur.Üstel fonksiyonların özellikleri kullanılarak basitleştirilirse,

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-\theta^2}{2}+\frac{-x^2}{2}+\theta.x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-1}{2}(\theta^2-2\theta.x+x^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-1}{2}(\theta-x)^2}$$

bulunur [14].O halde;

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-1}{2}(\theta-x)^2}$$

ifadesine **Normal** (θ;1) **Dağılımı** denir.Genel üstel formu;

$$f(x;\theta) = \exp\left[\frac{-1}{2}(\theta-x)^2 - \ln\sqrt{2\pi}\right]$$

şeklindedir.

---

[14] $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ olduğundan; $\theta^2 - 2\theta x + x^2 = (\theta - x)^2$ olur.

1.5.9.Gamma Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

genel üstel formunda fonksiyonları tespit edelim.

$$Q(\theta) = -\theta$$

$$B(\theta) = \frac{\theta^{n}}{(n-1)!}$$

$$R(x) = x$$

$$h(x) = x^{n-1}$$

olarak seçilmesiyle;

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^{n}}{(n-1)!}.x^{n-1}.e^{-\theta x}$$

ifadesi bulunur.Bu ifadede$\theta=\lambda$ alınmasıyle;

$$f(x;\lambda)= \frac{\lambda^{n}}{(n-1)!}.x^{n-1}.e^{-\lambda x}$$

olurki bu ifadeye **Gamma Dağılımı** denir.

Üstel olarak genel ifadesi ise;

$$f(x;\lambda)=\exp\left[-\lambda x+(n-1).\ln x+\ln\lambda - \ln(n-1)!\right]$$

şeklindedir.

1.5.10.Rayleigh Dağılımı

$$f(x,\theta) = B(\theta).h(x).\exp[Q(\theta).R(x)]$$

genel üstel formunda fonksiyonları belirleyelim.

$$B(\theta)=\frac{1}{\theta^2}$$

$$Q(\theta)=\frac{-1}{2\theta^2}$$

$$R(x) = x^2$$

$$h(x) = x$$

bileşenleri belirlenerek yerlerine yazılırsa;

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta^2}.x.e^{-1/2\theta^2}$$

elde edilir. $\theta=\lambda$ alınmasıyle;

$$f(x;\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}.x.e^{-1/2\lambda^2}$$

olurki bu ifadeye **Rayleigh Dağılımı** denir.

Genel üstel olarak Rayleigh Dağılımının şekli;

$$f(x;\lambda)= \exp\left[\frac{-x^2}{\lambda^2} + \ln x - 2\ln\lambda\right]$$

formundadır.

1.6.Birikimli Olasılık Fonksiyonunun Bulunması

x bir rassal değişken (sürekli veya süreksiz) olsun, x'in F birikimli fonksiyonu;

$F:R \longrightarrow R$ şeklinde olup şöyle tanımlanır,

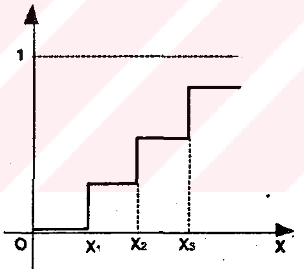
$F(x) = P(X \leq x)$

1.6.1. X Süreksiz Değişkeninin Birikimli Olasılık Fonksiyonu

Eğer X süreksiz bir değişken ve X'in olasılık fonksiyonu f ise "F merdiven fonksiyonu" dur ve şöyle tanımlanır.

$$F(x) = \sum_{X_i \leq x} f(x_i)$$

x süreksiz rassal değişken olması halinde **F(x)** 'in grafiği;



Şekil-1

1.6.2. X Sürekli Değişkeninin Birikimli Olasılık Fonksiyonu

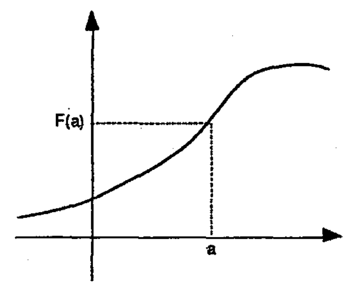
Eğer X sürekli bir değişken ise ve X'in yoğunluk fonksiyonu f ise;

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

birikimli fonksiyonun değer cümlesi **[0,1]** aralığıdır.Bu fonksiyonun **x=a** için değeri

F(a) = P(X≤a) olasılığını verir.

x sürekli rassal değişkeni ise bunun olasılığı aşağdaki taralı A alanına eşittir.



Şekil-2

$$A = F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x).dx$$

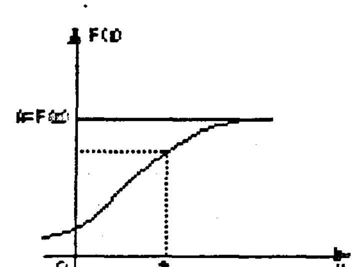
1.6.3. Birikimli Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri

1.F(x) birikimli olasılık fonksionu monoton artan bir fonksiyondur.

Yani; $(a \leq b) \longrightarrow F(a) \leq F(b)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

F(x) Birikimli Fonksiyonunun Grafiği, X'in sürekli olması halinde F(x)=1 doğrusuna asimtoddur.



Şekil-3

A=F(a) değeri birikimli eğrinin **x=a** apsisli noktasının ordinatıdır.

[15] ERSOY N. ve ERBAŞ S., Olasılık ve İstatistiğe Giriş, ANKARA, 1992, s.157-158

1.7.Momentler

Herhangi bir dağılımın momenti tesadüfü değişkenin çeşitli kuvvetlerinin beklenen değeridir. **a** bir reel sayı ve **r** pozitif tamsayı olmak üzere; $E[(x-a)^r]$ ifadesine **x rassal değişkeninin a etrafındaki r inci dereceden momenti** denir.

x'in sürekli(kesikli) ve süreksiz(kesiksiz) olmasına göre iki farklı şekilde ifade edilir.

x rassal değişkeni kesikli ise a etrafındaki r inci dereceden momenti :

$$E(x-a)^r = \sum_i^n (x_i-a)^r.P(x_i) \quad ; \quad i=1,2,3,...$$

x rassal değişkeni kesiksiz ise a etrafındaki r inci dereceden momenti

$$E(x-a)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i-a)^r.f(x).dx \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

Bu Momentlerin mevcut olabilmesi için, formüllerdeki toplam ve integrallerin yakınsak olması gerekmektedir.

1.7.1.Ortalama Etrafındaki(Civarındaki) Momentleri

Eğer $a=\mu$ alınrsa **x**'in ortalama (μ) etrafındaki momentleri elde edilmiş olur. **x**'in **r** ini dereceden ortalama etrafındaki momentleri; $\mu_r = m_i$; $i=1,2,....$ ile gösterilmektedir.O halde Ortalama Etrafındaki Momentleri; $E(x-\mu)^r = \mu_r$ şeklinde formülüze edilir.

Buna göre, **x**'in ortalama etrafınaki **1 nci** dereceden momenti;

$$E(x-\mu)^1 = \mu_1 = 0$$

olduğu görülmektedir.

x'in ortalama etrafınaki **2 nci** dereceden momenti;

$$E(x-\mu)^2=\mu_2=Var(x)$$

x'in ortalama etrafınaki **3 üncü** dereceden momenti;

$$E(x-\mu)^3=\mu_3$$

olduğu ve diğer momentlerinde benzer şeklinde bulunabileceği açıkca görülmektedir.

1.7.2.Sıfır Etrafındaki(Civarındaki) Momentleri

Eğer $a=0$ olarak alınır ise x'in sıfır etrafindaki Momentleri bulunur.İfade edecek olursak ; $E(x-0)^r=m_r$ şeklindedir.Genel olarak ifadesi; $E[x^r]=m_r$ dir.

$r=1$ için x'in sıfır etrafındaki birinci momentinin $m_1=\mu$ olduğu açıkca görülmektedir.

x'in sıfır etrafındaki momentleri ile, ortalama civarındaki momentleri arasında bir bağıntı kurulabilir.x'in Ortalama Etrafındaki Momentleri; $E(x-\mu)^r=\mu_r$

x'in Sıfır Etrafındaki Momentleri; $E[x^r]=m_r$ olmak üzere,

$$\mu_r=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i.\binom{r}{i}\mu^i.m_{r-i}$$

eşitliği mevcuttur[16].

Bu eşitlikten faydalanılarak momentler arasındaki bağıntıları bululunabilir.Sıfır etrafındaki momentlerin hasaplanması ortalama etrafındaki momentlerin hesaplanmasından işlem olarak daha kolaydır.Bu nedenle bu iki moment arasındaki bağıntılar bulunaruk birinin bulunmasıyla diğerinin hesaplama yapmadan bulunabileceği çok açıktır.Yukarıda verilen momentler arasındaki bağıntıyı kullanarak x'in ilk dört mentleri arasındaki ilişkiyi bulalım.

[16]ERSOY Nuri ve ERBAŞ Semra,Olasılık ve İstatistiğe Giriş,ANKARA,1992,s.167

1.7.3.Momentler Arasındaki Bağıntılar

Momentler arasındaki bağıntının genel formunda;

$$E[y^r]=E[(x-\mu)^r]=m_r=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i.\binom{r}{i}.\mu^i.m_{r-i}$$

a) r=1 için $$\mu_1=E[(x-\mu)^1]=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i.\binom{1}{i}.\mu^i.m_{1-i}$$

$$=(-1)^0.\binom{1}{0}.\mu^0.m_{1-0}+(-1)^1.\binom{1}{1}.\mu^1.m_{1-1}$$

$$\mu_1=m_1-\mu.m_0$$

olarak bulunur. $m_1=\mu$ ve $m_0=1$ olduğundan yerlerine yazılırsalar;

$$\mu_1=\mu-\mu$$

O halde birinci moment; $\mu_1=E[(x-\mu)]=0$ şeklindedir.Momentler arasındaki bağıntı ise, $\mu_1=m_1-\mu$ bulunur.

b) r=2 için $$\mu_2=E[(x-\mu)^2]=\sum_{i=0}^{2}(-1)^i.\binom{2}{i}.\mu^i.m_{2-i}$$

$$=(-1)^0.\binom{2}{0}.\mu^0.m_{2-0}+(-1)^1.\binom{2}{1}.\mu^1.m_{2-1}+(-1)^2.\binom{2}{2}.\mu^2.m_{2-2}$$

$$=m_2+-2.\mu.m_1+\mu^2.m_0$$

$\mu_1=\mu$ ve $m_0=1$ olduğundan;

$$=m_2+-2.\mu.\mu+\mu^2$$

$$=m_2-\mu^2$$

$m_1=\mu_1=\mu$ olduğundan; momentler arasında $\mu_2=m_2-m_1^2$ bağıntısı bulunur.

c) r=3 için

$$\mu_3=E\left[(x-\mu)^3\right]=\sum_{i=0}^{3}(-1)^i.\binom{3}{i}.\mu^i.m_{3-i}$$

$$=(-1)^0.\binom{3}{0}.\mu^0.m_{3-0}+(-1)^1.\binom{3}{1}.\mu^1.m_{3-1}+(-1)^2.\binom{3}{2}.\mu^2.m_{3-2}+(-1)^3.\binom{3}{3}.\mu^3.m_{3-3}$$

$$=m_3-3.\mu.m_2+3.\mu^2m_1-\mu^3.m_0$$

buradan momentler arasında $\mu_3=m_3-3.\mu.m_2+3.\mu^2m_1-\mu^3$ bağıntısı vardır.

Genel olarak; $\mu_3=m_3-3.m_1.m_2+3.m_1^2m_1-m_1^3$

şeklindedir.

d) r=4 için

$$\mu_4=E\left[(x-\mu)^4\right]=\sum_{i=0}^{4}(-1)^i.\binom{4}{i}.\mu^i.m_{4-i}$$

$$=(-1)^0.\binom{4}{0}.\mu^0.m_{4-0}+(-1)^1.\binom{4}{1}.\mu^1.m_{4-1}+(-1)^2.\binom{4}{2}.\mu^2.m_{4-2}$$

$$+(-1)^3.\binom{4}{3}.\mu^3.m_{4-3}+(-1)^4.\binom{4}{4}.\mu^4.m_{4-4}$$

$$=m_4-4.\mu.m_3+6.\mu^2m_2-4.\mu^3.m_1+\mu^4.m_0$$

$$=m_4-4.\mu.m_3+6.\mu^2m_2-4.\mu^3.\mu+\mu^4$$

buradan momentler arasında; $\mu_4=m_4-4.\mu.m_3+6.\mu^2m_2-3.\mu^4$

Momentler arasında ; $\mu_4=m_4-4.m_1.m_3+6.m_1^2m_2-3.m_1^4$

bağıntısı bulunur.

1.7.4.Moment Çıkaran Fonksiyonun Bulunması

Bir rassal değişkenin sıfır etrafındaki momentlerinin bulunmasında;Moment Çıkaran Fonksiyondan yararlanılır.**X** rassal bir değişken ve **t** bir parametre olmak üzere eğer fonksiyonu varsa bu fonksiyona x'in **Moment Çıkaran Fonksiyonu** denir.

Moment Çıkaran Fonksiyon:

$$M_x(t)=\begin{cases} \sum\limits_{x\varepsilon A} e^{tx}.p(x) & ,x \text{ süreksiz} \\ \int_A e^{tx}.f(x)dx & ,x \text{ sürekli} \end{cases} \qquad (1.7.4)$$

şeklinde ifade edilir.

1.8.Beklenen Değer ve Varyansın Bulunması

1.8.1.X Rassal Değişkeni Süreksiz lik Durumunda Varyansın Bulunması

A.Beklenen Değerin Bulunması

Varyansın hesaplanablmesi için Beklenen Değerin bulunması gerekmektedir.Beklenen değer **E(x)** ile ifade edilir ve iki şekilde Moment Çıkaran Fonksiyon yardımıyle veya Beklenen değerin tanıma kullanılarak bulunabilir.Bu açıklamadan sonra Beklenen Değerin nasıl bulunacağını formülüze edelim.

1. Moment Çıkaran Fonksiyon Yardımıyla Beklenen Değerin Bulunması

Moment Çıkaran Fonksiyonun birinci türevi alınıp **t=0** yazılırsa;

$$\left.\frac{dM_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = m_1 = E(x) = \mu$$

ile ifade edilir.Diferansiyel olarak gösterimi yardımıyle,

$$\frac{dM_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}.\left(\sum e^{tx}.p(x)\right)$$

$$= \sum \left(\frac{d}{dt} e^{tx}.p(x)\right)$$

$$= \sum p(x).\left.\frac{d}{dt}.e^{tx}\right|_{t=0}$$

$$= \sum x.p(x).e^{tx}$$

$$M'_x(t=0) = \sum x.p(x)$$

olarak tespit edilir.O halde Moment Çıkaran Fonksiyon yardımıyle bulunan,

$$\mathbf{E(x)=M'_x(t=0)=\sum x.p(x)}$$

ifadesine **Beklenen Değer** veya **Ortalama** denir.

2. Beklenen Değerin Tanımından Beklenen Değerin Bulunması

Beklenen Değerin tanımı; $E(x)=\sum x.f(x)$ olduğundan, $f(x)=p(x)$ olarak alınır ise;

$$E(x)=\sum x.p(x)$$

toplamının alınmasıyla bulunabilir.

B. Varyansın Bulunması

Varyans; $Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

şeklinde bulunur.Burada $E(x^2)$ sıfır etrafındaki ikinci momenti ifade etmektedir.Burada $E(x^2)$ nin bulunma sorunu vardır.İki şekilde bulunabilir.

1. Moment Çıkaran Fonksiyon Yardımıyla $E(x^2)$ nin Bulunması

$$E(x^2)=\mu_x''(t=0)$$

ile Moment Çıkaran Fonksiyonun ikinci türevi alınır ve $t=0$ için bulunabilir.

Diferansiyel gösterimi;

$$\left.\frac{d^2M_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=E(x^2)$$

şeklindedir.

$$\frac{d^2M_x(t)}{dt^2}=M_x''(t)=\sum x^2.p(x).e^{tx}\Big|_{t=0}$$

$$E(x^2)=\sum x^2.p(x)$$

2.Beklenen Değerin Tanımından $E(x^2)$ nin Bulunması

$E(x^2)$ tanımdan hareketle $E(x^2)=\sum x^2.f(x)$

olduğundan $f(x)=p(x)$ seçilmesiyle, $E(x^2)=\sum x^2.p(x)$ bulunur.O halda Varyans,

$$Var(x)=\sum x^2.p(x)-\left(\sum x.p(x)\right)^2$$

1.8.2. X Rassal Değişkeninin Süreklilik Durumunda Varyansın Bulunuşu

Varyans; $Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$ ile bulunur.Burada $E(x^2)$ sıfır etrafındaki ikinci momenti ifade etmektedir.Burada $E(x^2)$ nin bulunma sorunu vardır.İki şekilde bulunabilir.

a) Moment Çıkaran Fonksiyon Yardımıyla $E(x^2)$ nin Bulunması

$$E(x)=M_x'(t=0)=m_1$$

ile sıfır etrafındaki birinci moment,

$$E(x^2)=M_x''(t=0)=m_2$$

ile sıfır etrafındaki ikinci moment bulunur.

b) Beklenen Değerin Tanımından $E(x^2)$ nin Bulunması

$$E(x)=\int_A x.f(x).dx$$

ile sıfır etrafındaki birinci moment bulunur.

$$E(x^2)=\int_A x^2.f(x).dx$$

ile sıfır etrafındaki ikinci moment bulunur.Bu ifadeler varyansın bulunuşunda yerleri-ne yazılırsa;

$$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2 \qquad \text{olduğundan,}$$

$$\mathbf{Var(x)}=\int_A x^2.f(x).dx-\left[\int_A x.f(x).dx\right]^2$$

$$\mathbf{Var(x)}=M''(t=0)-(M'(t=0))^2$$

formülüzasyonu ile ifade edilir[17].

---

[17]ERSOY N. ve Erbaş S.,s.150

1.9.Ustel Aileden Türetilebilen Tek Parametreli Dağılımların İncelenmesi

1.9.1.Bernoulli Dağılımı

Bir rassal deney yapıldığında sadece iki sonuç elde ediliyorsa (iyi-kötü,başarılı -başarısız,......) bu tür deneylere **Bernoulli Dağılımı** denir. Bernoilli deneylerinde iki sonuç olduğundan; ilgilenilen sonuç elde edildiğinde bu sonuç olumlu ise **x-1** ile,olumsuz ise **x-0** ile gösterilir.Bu durumda x rassal değişkenine Bernoilli değişkeni denir.Bir deneyin başarılı olma olasılığı **p** ise x rassal değişkeninin **Bernoulli Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;**

$$f(x;p)=\begin{cases} p^x.(1-p)^{1-x} & ,x=0,1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases} \qquad (1.9.1)$$

şeklindedir.

(1.9.1)'e bakıldığında; $f(x;\theta)-\theta^x.(1-\theta)^{1-x}$

formunda olduğu görülmektedir.θ parametresi **p** olarak alınırsa;

$$f(x;p)-p^x.(1-p)^{1-x}$$

bulunduğu anlaşılmaktadır..Bu formun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için tanımlı olduğu yerlerdeki olasılıkları toplamının 1 olması gerekir.Bunun için,

$x=0$ için $f(0;p)-p^0.(1-p)^{1-0}$ den $f(0;p)-1-p$

$x=1$ için $f(1;p)-p^1.(1-p)^{1-1}$ den $f(1;p)-p$

$$\sum_{x=0}^{1} p^x.(1-p)^{1-x} = 1-p+p = 1$$

olasılıklar toplamının 1'e eşit olduğu bulunur.

a) Bernoulli Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiynu

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx}.p^x.(1-p)^{1-x}$$

$$= e^0.p^0.(1-p)^1 + e^t.p^1.(1-p)^0$$

$$= 1-p+e^t.p$$

$$M_x(t) = q+e^t.p$$

Bernoulli Dağılımının Momont Çıkaran Fonksiyonu (1.9.4) ile elde edilir.

b) Bernoulli Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

$$M_x(t) = q+e^t.p$$

Moment Çıkaran Fonksiyonunun birinci türevi t'ye göre alınır ise;

$$M_x'(t) = e^t.p$$

$$E(x) = M_x'(t=0) = e^0.p$$

$$E(x) = p$$

Bernoulli Dağılımının **Beklenen Değeridir**.Varyansı bulmak için Moment Çıkaran Fonksiyonun ikinci türevi alınır ve t=0 yerine yazılır ise;

$$E(x^2)=M_x''(t)=p.e^t$$

$$\mathbf{E(x^2)=p}$$

olarak bulunur.Varyans; $Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

ile bulunduğundan ifadeler yerlerine yazılmasıyle;

$$Var(x)=p-p^2$$

$$Var(x)=p(1-p)$$

ifadesi **Bernoilli Dağılımının Varyans**ıdır.**1-p=q** olduğundan Varyansın genel hali,

$$\mathbf{Var(x)=p.q}$$

formu ile ifade edilir.

c) Bernoulli Dağılımının Birikimli Olasılık Fonksiyonu

$$F(x)=\sum_{x=0}^{x} p^x.q^{1-x}$$

ifadesi **Bernoulli Dağılımının Birikimli Olasılık Fonksiyonu**'dur.

1.9.2.Binom Dağılımı

Birbirinden bağımsız çekilişlerden meydana gelen bir deneyde, her çekilişte iki ihtimal sözkonusu olsun.Bu durumlar başarılı ve başarısız diye isimlendirilsin.Başarılı olasılığı **p** başarısızlık olasılığıda **q** olsun.Dolayısıyle **$p+q=1$** ve **$q=1-p$** olur.**n** defa tekrar sonunda **x** kez başarılı sonuç **(n-x)** kez başarısız sonuç elde edilmesi olasılığı[18];

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} \qquad \text{ve} \qquad x=0,1,2,3,4,....$$

x'in bütün değirleri için açılımı;

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x}=\binom{n}{0}.p^0.(1-p)^n+\binom{n}{1}.p^1.(1-p)^{n-1}+........................+\binom{n}{n}.p^n.(1-p)^0$$

$$=(p+q)^n$$

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x}=1$$

olarak bulunur.O halde tanımlı olduğu aralıktaki olasılıklar toplamı 1 olduğundan bu dağılım bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

---

18 $\binom{n}{x}=C(n,r)$ Konbinasyon hesabıdır. $\binom{n}{x}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 'e eşittir.

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.........+\binom{n}{n}=2^n$ n elamanlı kümenin alt küme sayısıdır.

$(a+b)^n=\binom{n}{0}.a^n+\binom{n}{1}.a^{n-1}.b+\binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2+.........+\binom{n}{n}b^n$ ifadesine BİNOM AÇILIMI denir.

Bu duruma göre **n** deneyde başarılı sonuç elde etme olasılığı q^n dir.Dolayısıyla enaz birkez başarılı sonuç elde edilme olasılığı $1-q^n$ olacaktır.x rassal değişkeninin **Binom Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;**

$$f(x;p)=\begin{cases} \binom{n}{x}p^x.(1-p)^{1-x} & ,x=0,1,2.......n \\ 0 & ,d.d. \end{cases} \qquad (1.11.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Binom dağılımı B(x;n,p),b(x;n,p) veya B(n,p),b(x;n,p) ifadelerinden biri ile gösterilir.Burada **n** ve **p** değerleri aynı zamanda bu dağılımın parametreleridir.$p=q=1/2$ olduğunda Binom dağılımı simetriktir.

(1.11.2) incelenirse;

$$f(x,\theta)=\binom{n}{x}.\theta^x(1-\theta)^{n-x} \qquad ve \qquad x=0,1,2,3,..........,n$$

şeklindedir. θ parametresi **p** olarak alındığında (p: bir olayın ortaya çıkma olasılığı) **n** 'in değişen değerlerine bağlı olarak;

$$f(x;n,p)=\begin{cases} \binom{n}{x}p^x.(1-p)^{n-x} & ,x=0,1,2.......n \quad ve \quad 0\le p\le 1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

formu bulunur.

Bulunan bu ifadede **x**'in alabileceği değerler için sonuçlar ise;

x=0 için $f(0,p)=\binom{n}{0}.p^0.(1-p)^n=(1-p)^n$

x=1 için $f(1,p)=\binom{n}{1}.p.(1-p)^n=n.p.(1-p)^n$

....

x=n için $f(n,p)=\binom{n}{n}.p^n.(1-p)^n=p^n$

şeklinde olur.

a) Binom Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}.f(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}.\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty} \binom{n}{x}.(e^t.p)^x.(1-p)^{n-x}$$

$$E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{\infty} \binom{n}{x}.(e^t.p)^x.(1-p)^n.(1-p)^{-x}$$

$$E(e^{tx})=(p.e^t+q)^n$$

ifadesine Binom Dağılımının **Moment Çıkaran Fonksiyonu**'dur.

b) Binom Dağılımının Beklenen Değeri ve Varyansı

Moment çıkaran fonksiyonun birinci türevi ile;

$$M'_X(t)=n.(p.e^t+q)^{n-1}.p.e^t$$

$$=np.(p.e^t+q)^{n-1}.e^t$$

$$E(x)=M'_X(t=0)=n.(p.e^0+q)^{n-1}.p.e^0$$

$$=n.(p.e^0+q)^{n-1}.p$$

$$\mathbf{E(x)=n.p}$$

ifadesi **Binom Dağılımının Beklenen Değeridir.**

İkinci türev ile;

$$M''_x(t)=n.p(n-1).(p.e^t+q)^{n-2}.p.e^t.e^t+n.p.(p.e^t+q)^{n-1}.p.e^t$$

$$E(x^2)=M''_x(t=0)=n.p(n-1).p+n.p$$

$$=n^2.p^2-n.p^2+n.p$$

$$=n^2.p^2+n.p(1-p)$$

$$\mathbf{E(x^2)=n^2.p^2+n.p.q}$$

bulunur.O halde varyans;

$$Var(x)=E(x^2)-(E(x))^2$$

ifadesinde yerlerine yazılırlarsa;

$$=n^2.p^2+n.p.q-(n.p)^2$$

$$\mathbf{Var(x)=n.p.q}$$

ifadesine Binom Dağılımının **Varyansı**'dır.

c) Binom Dağılımının Birikinli Olasılık Fonksiyonu

$$F(x)=P_r(X<x)=\begin{cases} \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-1} & ,0\leq x\leq n \\ 1 & ,x>1 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$$

$$F_x(k;n,p)=\sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$$

$$=1-\sum_{x=k+1}^{n} \binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$$

$$F_x(k;n,p)=1-F(n-k-1;n,q)$$

olarak bulunur.

1.9.3. Geometrik Dağılım

Arka arkaya **n** kez tekrarlanan bir bernoulli deneyinde, ilk başarılı sonucun elde edilmesi için yapılan deney sayısı **x** olsun.Örneğin Yazı-Tura deneyinde ilk tura gelinceye kadar yapılan atış sayısı **x** dir.Başarı için **x** tane deney yaptığımızda ilgilenilediğimiz bir sonuç vardır.**(x-1)** sonuç başarısız deney sayısını gösterecektir.

O halde Geometrik Dağılımın Fonksiyonu;

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \theta.(1-\theta)^{x} & ,x=,1,2......n \quad \text{ve} \quad 0\leq p\leq 1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklindedir.

Asıl dağılımın fonksiyonu;

$$f(x;\theta)=\theta.(1-\theta)^{x-1} \quad \text{ve} \quad x=1,2,3,........$$

formundadır.θ parametresi **p** alınırsa;

Geometrik Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ;

$$f(x;p)=\begin{cases} p.(1-p)x-1 & ,x=1,2,3,........ \quad \text{ve} \quad 0<p<1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases} \qquad (1.9.3)$$

(1.9.3)'ün olasılık yoğunluk fonksiyonu olması, **x** değerleri için sonuçları;

$x=1$	için	$f(1;p)=p.(1-p)^{1-1}=p$
$x=2$	için	$f(2;p)=p.(1-p)^{2-1}=p.q$
.....	.....	....
$x=n$	için	$f(n;p)=p.(1-p)^{n-1}=p.q^{n-1}$

dır.Bulunan bu değerlerin toplamı

$$p+p.q+......p.q^{n-1}=p(1+q+.....+q^{n-1})$$

$$=p.\frac{1-q^{\infty}}{1-q}$$

$$\sum_{x=1}^{n} p.(1-p)^{x-1}=1$$

eşitliği elde edilir.

a) Geometrik Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=1} e^{tx}.p(x)$$

$$=\sum_{x=0} e^{tx}.p.(1-p)^{x-1}$$

$$=p.\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}.q^{x-1}$$

$$=\frac{p}{q}.\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}.q^{x}$$

$$=\frac{p}{q}.\sum_{x=0}^{\infty} (e^{t}.q)^{x}$$

$$=\frac{p}{q}.\left[e^{t}.q+(e^{t}.q)^{2}+(e^{t}.q)^{3}+.......\right]$$

$$=p.e^{t}.\frac{1}{1-e^{t}.q}$$

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\frac{p.e^{t}}{1-e^{t}.q}$$

ifadesi Geometrik Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonu'dur.

b) Geometrik Dağılımın Beklenen Değeri ve Varyansı

Geometrik Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonunun birinci türevi alınıp, t=0 yazılırsa beklenen değeri bulunur.

$$E(x)=M'_X(t)=\frac{p.e^t.(1-q)-p.e^t(-q.e^t)}{(1-q.e^t)^2}$$

$$=\sum_{x=0} e^{tx}.p.(1-p)^{x-1}$$

$$M'_X(t=0)=\frac{p.(1-q)+p.q}{(1-q)^2}$$

$$=\frac{p^2+p.q}{p^2}$$

$$=\frac{p+q}{p}$$

olduğundan Geometrik Dağılımın Beklenen Değeri,

$$E(x)=\frac{1}{p}$$

dir.

Geometrik Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonunun ikinci türevi alınıp, t=0 yazılırsa;

$$E(x^2)=M''(t=0)=\frac{2q+p}{p^2}$$

bulunur.

Varyans; $\quad Var(x)=E(x^2)-(E(x))^2 \quad$ formundan,

$$=\frac{2q+p}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$=\frac{q+q+p-1}{p^2}$$

Geometrik Dağılımın **Varyansı;**

$$\mathbf{Var(x)}=\frac{q}{p^2}$$

olarak bulunur.

c) Geometrik Dağılımın Birikimli Olasılık Fonksiyonu

$$F(x)=P_r(X\leq x)=\begin{cases}\sum\limits_{x\leq[x]} p.(1-p)^{x-1} & ,x\geq 1\\ 0 & ,x<1\end{cases}$$

şeklinde tespit edilmiş olur.

1.9.4. Negatif Binom (PASKAL) Dağılımı

Geometrik Dağılımda,bağımsız Bernoulli deneylerinde ilk başarının elde edilmesi için gerekli deney sayısı belirlenirdi.Eğer ilk başarı değilde **x** deneyde **k** tane başarı elde edilmesi sözkonusu ise Geometrik dağılımın genelleştirilmiş hali olan **Negatif Binom (PASKAL) Dağılımı** elde edilir.

Bağımsız Bernoulli deneyleri ardışık olarak tekrarlandığında **k≥1** tane başarılı sonuç elde edilmesi için gereken deney sayısı x'e **Negatif Binom Değişkeni** denir.

x'in değer kümesi (k,k+1,k+2,.........) şeklindedir.

Negatif Binom Dağılımının Fonksiyonu;

$$P(x-1)=\binom{x-1}{k-1}.p^{k-1}.(1-p)^{(x-1)-(k-1)}$$

$$P(x-1)=\binom{x-1}{k-1}.p^{k-1}.(1-p)^{(x-k)}$$

şeklinde ifade edilir.

(k-1) başarı veren deneylerinsayısı **(x-1)** olacak ve **x**'inci deneyde **k**'ıncı başarı elde edilecektir. Böylece bir sonuç $\binom{x-1}{k-1}$ sayısı kadar değişik şekilde çıkabileceğinden aranan olasılık;

$$b(x;k,\theta)=\binom{x-1}{k-1}.\theta^{k-1}.(1-\theta)^{(x-k)}$$

formundadır.

θ parametresi **p** alınırsa,

$$b(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} . p^{k-1} . (1-p)^{(x-k)} \qquad ,x=k,k+1,k+2,.....$$

$$b(x+k;k,p) = \binom{x+k-1}{x} . p^{k} . (1-p)^{x} \qquad ,x=0,1,2,.....$$

şeklinde başka bir formdada ifade edilebilir.

x'inci deneyde **k**'ıncı başarıyı elde etme olasılığı, deneyler bağımsız olduğundan iki olasılığın çarpımına eşittir.Bunu ifade etmek için örnekleyelim.

$$b(k;k,p) = \binom{k-1}{k-1} . p^{k} . (1-p)^{(k-k)} = \mathbf{p^{k}}$$

$$b(k+1;k,p) = \binom{k}{k-1} . p^{k} . (1-p)^{(k+1-k)} = \mathbf{k . p^{k} . q}$$

....

$$b(k+1+n;k,p) = \binom{n}{k-1} . p^{k} . (1-p)^{(k+1+n-k)} = \binom{n}{k-1} . \mathbf{p^{k} . q}$$

....

olarak bulunur.Bu açıklamalardan hareketle Negatif Binom Dağılımının Fonksiyonu ifade edilebilir.

Negatif Binom Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;

$$f(x;p,r)=\begin{cases} \binom{x-1}{r-1}p^r.(1-p)^{x-r} & ,x=r,r+1,r+2,........ \quad \text{ve} \quad 0<p<1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

formunda ifade edilir.Bu dağılım eğer olasılık yoğunluk fonksiyonu ise tanımlı olduğu aralıktaki olasılıkları toplamı 1 olmalıdır.Kısaca;

$$\sum_{x=r}^{\infty} f(x;p,r) = 1$$

olması gerekmektedir.Bunun için fonksiyonun açılımına bakılmalıdır.

$$\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}p^r.(1-p)^{x-r} = p^r.\sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}.(1-p)^{x-r}$$

bu ifadede y=x-r olarak seçelim.Toplamın yeni ifadesi;

$$= p^r.\sum_{x=r}^{\infty}(-1)^y.\binom{-r}{y}.(1-p)^y$$

olur.Buradaki açılım kullanılırsa,

$$= p^r.[1-(1-p)]^{-r}$$

$$= p^r.p^{-r} = 1$$

bulunur.O halde olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

a) Paskal Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_x(t)=E(e^{tx}) = \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx}.f(x)$$

$$= \sum_{x=r}^{\infty} e^{tx}.\frac{(x-1)!}{(x-r)!.(r-1)!}.p^r.(1-p)^{x-r}$$

$$= p^r.q^{-r} \sum_{x=r}^{\infty} (e^t.q)^x.\frac{(x-1)!}{(x-r)!.(r-1)!}$$

$$= p^r.q^{-r}.\left[(e^tq)^r + (e^tq)^{r+1}.\frac{r}{1!} + (e^tq)^{r+2}.\frac{r(r+1)}{2!} + \ldots\right]$$

$$= p^r.q^{-r}.(e^tq)^r.\left[1 + (e^tq).r + (e^tq)^2.\frac{r(r+1)}{2!} + \ldots\right]$$

bu ifadede parantez içi binom açılımı ile,

$$(1 - e^tq)^{-r} = 1 + (e^tq).r + (e^tq)^2.\frac{r(r+1)}{2!} + \ldots$$

olduğundan yerine yazılmasıyla,

$$= p^r . q^{-r} . (e^t q)^r . (1 - e^t q)^{-r}$$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \frac{p^r}{(1 - e^t . q)^r}$$

formunda **Negatif Binom Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu** bulunur.

b) Paskal Dağılımının Beklenen Değeri ve Varyansı

Beklenen Değeri tanımı yardımıyle bulalım.

$$E(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x . f(x)$$

$$E(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x . \binom{x-1}{r-1} . p^r . (1-p)^{x-r}$$

$$= \sum_{x=r}^{\infty} x . \frac{(x-1)!}{(x-r)! . (r-1)!} . p^r . (1-p)^{x-r}$$

$$= p^r . q^{-r} \sum_{x=r}^{\infty} x . \frac{(x-1)!}{(x-r)! . (r-1)!} . q^x$$

$$=p^r.q^{-r}.\left[r.q^r + \frac{r(r+1)}{1!}.q^{r+1} + \frac{r.(r+1)(r+2)}{2!}.q^{r+2}.....\right]$$

$$=p^r.q^{-r}.r.q^r.\left[1 + (r+1).q + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}.q^2 + ...\right]$$

ve buradaki parantez içindeki ifade,

$$(1 - q)^{-r-1} = 1 + (r+1).q + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}.q^2 + ...$$

olduğundan dolayı,

$$=p^r.r.(1-q)^{-r-1}$$

$$=p^r.r.p^{-r}.p^{-1}$$

$$E(x) = \frac{r}{p}$$

olarak Beklenen Değer bulunur.

$$E(x^2) = \sum_{x=r}^{\infty} x^2.f(x)$$

bulalım.Bu ifadedeki $\mathbf{x^2}$ yi parçalayarak çözelim.

$$=\sum_{x=r}^{\infty} x(x-1).f(x) + \sum_{x=r}^{\infty} x.f(x)$$

$$=\sum_{x=r}^{\infty} x(x-1).\frac{(x-1)!}{(x-r)!.(r-1)!}.p^r.q^{x-r} + E(x)$$

E(x) bulunurken izlenen aynı yol ile,

$$E(x^2) = \frac{r(r+1) - 2rp}{p^2} + \frac{r}{p}$$

olarak bulunur.

$$= \frac{r^2 + r - 2rp + rp}{p^2}$$

$$= \frac{r^2 + r - rp}{p^2}$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \frac{r^2 + r - rp}{p^2} - \frac{r^2}{p^2}$$

$$= \frac{r(1 - p)}{p^2}$$

$$Var(x) = \frac{rq}{p^2}$$

şeklinde Varyans bulunur.

1.9.5. Poisson Dağılımı

Poisson Dağılımı **n**'in büyük , **p**'nin küçük değerleri için Binom Dağılımına başarılı bir yaklaşım teşkil ettiği gibi başlı başınada çok önemli kullanımları olan dağılımdır.Bu dağılım belli bir alan içinde rassal olarak veya zaman içinde rassal olarak gözlenen olayların özel durumları için geliştirilmiştir.Örneğin; çok işleyen bir hava alanında iniş pistlerine uçak inişleri, bir telefon santraline telefon edilmesi, bir servise arabaların gelişleri gibi örnekler verilebilir.

Poisson Dağılımı bir çok ender rastlanan olayların dağılımlarının en uygun matematik kalıbıdır.Örneğin; bir ülkadeki depremlerin dağılımı, çok az rastlanan bir hastalıktan ölenlerin dağılımı.Kısaca; Poisson Dağılımı çok küçük gerçekleşme olasılığına sahip olayların tekrarlı deneyleri için uygun bir olasılık bölünmesidir.Kusurlu oranı çok düşük olan mamül partilerinin kontrol edilmesinde ve ölüm olaylarının incelenmesinde kullanılmaktadır.

Zaman içerisinde birbirinden bağımsız olarak gerçekleşen olaylar ele alındığında eğer belli bir zaman aralığında gerçekleşen olay sayısı **"sadece ve sadece"** ele alınan aralığın uzunluğuna bağlı fakat başlangıç ve bitiş noktalarından bağımsız ise incelenen olay sayıları **Poisson Dağılımı** gösterir.

Poisson Rassal Değişkeni olan x şu şartları sağlamalıdır.

1.Farklı zaman aralıklarında veya farklı alanlarda ortaya çıkan olaylar bağımsızdır.Bu olayların meydana gelmeleri arasında ilişki yoktur.

2.Çok küçük bir zaman aralığında veya çok küçük bir alanda ilgilenilen olay bir defa çıkabilmekte, birden fazla ortaya çıkması ise mümkün olmamaktadır.

3.Çok küçük bir zaman aralığında veya çok küçük bir alanda ilgilenilen olayın bir defa ortaya çıkma olasılığı **(p)** değişmemekte ve **$p < 0.05$** eşitsizliğine uymaktadır.

4.Deney sayısı sonsuza yaklaşmaktadır.

5.Belirli bir zaman aralığında veya belirli bir yerde ilgilenilen olayın ortalama ortaya çıkma sayısı **(l)** sabittir.

Şimdi Poisson Dağılımını Binom Dağılımından faydalanarak bulmaya çalışalım.**p** küçük, **n** büyük ve **n.p=l** pozitif bir sabit olsun.Başarı sayısını **x** tesadüfü değişkeni temsil etsin.

Poisson Dağılımı;

Binom Dağılımında **x=0** olarak alınır ise;

$$P(x=0)=\binom{n}{0}.p^0.q^n$$

$$=p^0.q^n$$

$$=q^n$$

$$=(1-p)^n$$

$$=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

olarak bulunur[19].

19 $n.p=\lambda$ eşitliğinden $p=\frac{\lambda}{n}$ bulunur.

$p+q=1$ ifadesinden q çekilirse $q=1-q$ bulunur.

Sonsuz için limit değeri alınısa;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\frac{\lambda}{n}.n} \qquad (I)$$

$$=e^{-\lambda}$$

Binom Dağılımında **x=1** olarak alınır ise;

$$P(x=1)=\binom{n}{1}.p.q^{n-1}$$

$$=n.p.q^{n-1}$$

$$=\frac{n.p}{q}.P(x=0)$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda-p}.P(x=0)$$

$n\to\infty$ ve $p\to 0$ için limit değeri;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda-p}.P(x=0)=\lambda.e^{-\lambda} \qquad (II)$$

şeklinde bulunur.

Binom Dağılımında **$x=2$** olarak alınır ise;

$$P(x=2)=\binom{n}{2}.p^2.q^{n-2}$$

$$=\frac{n.(n-1)}{2}.p^2.q^{n-2}$$

$$=\frac{(n-1)}{2}.\frac{p}{q}.n.q^{n-1}$$

$$=\frac{(n-1)}{2}.\frac{p}{q}.P(x=1)$$

$$=\frac{\lambda(1-\frac{1}{n})}{2.(1-p)}.P(x=1)$$

$n \to \infty$ ve $p \to 0$ olarak alınır ise;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1-\frac{1}{n})}{2.(1-p)}.P(x=1)=\frac{\lambda}{2}.\lambda=\frac{\lambda^2}{2}.e^{-\lambda} \qquad \text{(III)}$$

işleme devam edilir ise $P(x=k)$ için;

$$P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}$$

olacağı I,II,III ten dolayı açıktır.

O halde **Poisson Dağılımı;**

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}.\frac{\theta^x}{x!}$$

$\theta = \lambda$ olarak seçilmesiyle dağılmın formu;

$$f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}.e^{-\lambda} \qquad ,x=0,1,2,...... \qquad ,f(x;\lambda)>0$$

şeklindedir.Genel itibariyle,

Poisson Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^x}{x!} & ,x=0,1,2,...... \\ 0 & ,d.d. \end{cases} \qquad (1.9.5)$$

olarak tespit edilir.Bu ifadeye Poisson Dağılımının genel formu denir.

Binom Dağılımından genel bir sonuç bulmaya çalışalım.

$$b(x;n,\theta)=\binom{n}{x}.\theta^x.(1-\theta)^{n-x} \qquad ,x=1,2,3,......n$$

ifadesinde $\theta=p$ olarak seçildiğinde;

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x}$$

şeklinde bulunur. $n.p=\lambda$ eşitliğinde p çekilirse $p=\frac{\lambda}{n}$ elde edilir.

p değeri fonksiyonda yerine yazılır ise;

$$b(x;n,p)=\binom{n}{x}.\frac{\lambda}{n}.(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)..........(n-x+1)}{x!}.(\frac{\lambda}{n})^{x}.(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)..........(n-x+1)}{x!}.\frac{\lambda^{x}}{n^{x}}.(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

elde edilir.Bu ifade biraz daha açılır ise;

$$b(x;n,p)=\frac{n(n-1)(n-2)..........(n-x+1)}{n.n.n.n......n}.\frac{\lambda^{x}}{x!}.(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right).\left(\frac{n-2}{n}\right).\left(\frac{n-3}{n}\right)..........\left(\frac{n-x+1}{n}\right).\frac{\lambda^{x}}{x!}.(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right).\left(1-\frac{3}{n}\right)..........\left(1-\frac{x-1}{n}\right).\frac{\lambda^{x}}{x!}.\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}.\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$n\rightarrow\infty$ giderken limit değeri için;

$$\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right).\left(1-\frac{3}{n}\right)..........\left(1-\frac{x-1}{n}\right)=1$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}=1$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\lambda}$$

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^{x}}{x!} & ,x=0,1,2,....... \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

elde edilen bu ifadeye **Poisson Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonudur**.Poisson Dağılımı Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu olduğuna göre tanımlı olduğu aralıktaki olasılıkları toplamının 1'e eşit olması gerekmektedir.İfade edilirse,

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{x}}{x!}=1$$

olmalıdır.Açılımını yaparak bulmaya çalışalım.

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}.\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}.\left[\frac{\lambda^{0}}{0!}+\frac{\lambda^{1}}{1!}+\frac{\lambda^{2}}{2!}+......\right]$$

bu ifadede parantez içi,

$$1+\frac{\lambda^{1}}{1!}+\frac{\lambda^{2}}{2!}+......=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}=e^{\lambda}$$

olduğundan dolayı;

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}.e^{\lambda}=1$$

bulunduğundan bu ifade Olasılık Yoğunluk Fonksiyonudur.

a) Poisson Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e^t \cdot \lambda}$$

$$M_x(t) = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}$$

ifadesi **Poisson Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu**'dur.

b) Poisson Dağılımının Beklenen Değeri ve Varyansı

Poisson Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonunun **birinci türevi** alınır ise;

$$E(x) = M'_x(t) = \lambda \cdot e^t \cdot e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}$$

bulunur. **$t=0$** için,

$$M'_x(t=0) = \lambda$$

dir.O halde,

$$E(x) = \lambda$$

ifadesi **Poisson Dağılımının Beklenen Değeri**dir.

Poisson Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonunun **ikinci türevi** alınır ise;

$$E(x^2)=M''_x(t)=\lambda.e^t.e^{\lambda.(e^t-1)}+\lambda.e^t.\lambda.e^t.e^{\lambda.(e^t-1)}$$

bulunur.**t=0** alınır ise;

$$M''_x(t=0)=\lambda+\lambda^2$$

$$E(x^2)=\lambda+\lambda^2$$

olduğundan,Varyansı bulmak için;

$$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

$$=\lambda+\lambda^2-\lambda^2$$

$$Var(x)=\lambda$$

olarak bulunur.

c) Poisson Dağılımının Birikimli Olasılık Fonksiyonu

$$F(x)=P_r(X\leq x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{x_i\leq[x]}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x_i}}{x_i!} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

ifadesi Poisson Dağılımının Birikimli Fonksiyonudur[20].

---

[20] Tsokoy C.P.,a.g.e.,s.112

1.9.6. Üstel Dağılım

$\lambda>0$ parametre olmak üzere **x** sürekli rassal değişkeninin fonksiyonu;

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} \lambda.e^{-\lambda x} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,d.d. \end{cases} \qquad (1.9.6)$$

şeklinde ise böyle **x** rassal değişkenine üstel değişken ve **f(x)** fonksiyonuna **Üstel Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu** adı verilir.

(1.9.6) Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise tanımlı olduğu yerlerdeki olasılıkları toplamı 1'e eşit olmalıdır. Yani;

$$\int_0^{\infty} \lambda.e^{-\lambda x} = 1$$

olmalıdır. Değişken değiştirme metodu ile;

$$\int_0^{\infty} \lambda.e^{-\lambda x} = \lambda.\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda.\left(-\frac{1}{\lambda}.e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\left(e^{-\infty} - e^{0}\right)$$

$$= -\left(0 - 1\right)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda.e^{-\lambda x} = 1$$

bulunur.O halde bu form olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

a) Ustel Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} \lambda.e^{-\lambda x}.e^{tx}.dx$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda.e^{x(t-\lambda)}.dx$$

$$= \lambda.\frac{1}{t-\lambda}.e^{x(t-\lambda)} \Big|_0^{\infty} \qquad ,t<\lambda$$

olarak bulunurki **$t< \lambda$** olduğundan dolayı,

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda} \qquad , \ t<\lambda$$

ifadesine eşittir.Bu ifade Ustel Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonu'dur.

b) Üstel Dağılımın Beklenen Değeri ve Varyansı

$$E(x)=\int_0^\infty \lambda.x.e^{-\lambda x}dx$$

integralinde çözüm için Kısmi İntegral yöntemi uygulanırsa[21];

$$x=u \qquad ve \qquad \lambda.e^{-\lambda x}.dx=dv$$

$$dx=du \qquad ve \qquad -e^{-\lambda x}=v$$ olacak biçimde seçilirse;

$$E(x)=-x.e^{-\lambda x} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}.dx$$

$$=-x.e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}.e^{-\lambda x}$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

---

21 $\int f(x).g'(x).dx$ integralinde $u=f(x)$ ve $g'(x)dx=dv$ olarak seçilir ise;

$\int u.dv=u.v-\int v.du$ şeklindeki kısmi integral formunda yerlerine yazılırsa,

$\int f(x).g'(x).dx=f(x).g(x)-\int f'(x).g(x).dx$

elde edilen bu ifadeye kısmi integralin genel formu denir.

Üstel Dağılımın Beklenen Değeri;

$$E(x)=\frac{1}{\lambda}$$

olarak bulunur.Şimdi $E(x^2)$ yi bulalım.

$$E(x^2)=\int_0^\infty \lambda.x^2.e^{-\lambda x}dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulanırsa[22];

$$x^2=u \qquad \text{ve} \qquad \lambda.e^{-\lambda x}.dx=dv$$

$$2xdx=du \qquad \text{ve} \qquad -\lambda.e^{-\lambda x}=v$$ olarak seçilirse,

$$\int u.dv=u.v-\int v.du$$

$$=-x^2.e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+2\int_0^\infty x.e^{-\lambda x}.dx$$

$$=0-\frac{2}{\lambda}.x.e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\frac{2}{\lambda}.\int_0^\infty e^{-\lambda x}.dx$$

$$=0-0-\frac{2}{\lambda^2}.e^{-\lambda x}$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}$$

22 $f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a)$ ifadesine belirli integralin özelliğinden dolayı eşittir.

$$E(x^2)=\frac{2}{\lambda^2}$$

Varyas ise $\quad Var(x)=E(x^2)-(E(x))^2$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$Var(x)=\frac{1}{\lambda^2}$$

c) Üstel Dağılımın Birikimli Olasılık Fonksiyonu

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_0^x \lambda.e^{-\lambda t}.dt$$

$$=\lambda.\int_0^x e^{-\lambda t}.dt$$

$$=\lambda.\left(\frac{-1}{\lambda}\right).e^{-\lambda t}$$

$$=1-e^{-\lambda x}$$

olarak bulunduğundan genel olarak;

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & ,x>0 \\ 1 & ,n\to\infty \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

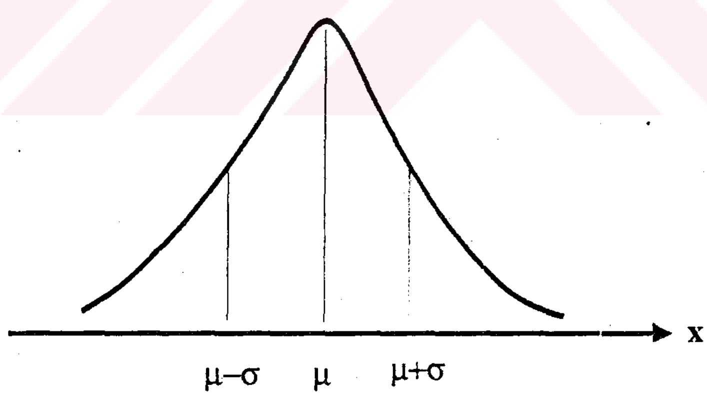
1.9.7. Tek Değişkenli Normal Dağılım

Bir çan şeklinde simetrik dağılımın sıklık fonksiyonu;

$$f(x)=n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad ,-\infty<x<\infty$$

şeklinde ifade edilir.μ ve σ^2 dağılımın parametreleridir.**m** merkezi eğilimi , μ de bu merkezi eğilim etrafındaki yayılmayı göstermektedir.Herhangi bir tek değişkenli normal dağılım μ, σ^2 değerleri ile iki değişkenli haldedir.İki değişkenin varlığı tek değişken olarak iki fonksiyon yerine tek halde incelenecektir.

Normal Dağılımın Genel Görünüşü;



Şekil-4

şeklindedir.Bu fonksiyonun maksimum değerini **x-**μ de alır ve eğri ye göre simetriktir.O halde **mod-**μ ve **medyan-**μ dir.

a) Normal Dağılımın Sıklık Fonksiyonunun Grafiğinin Özellikleri

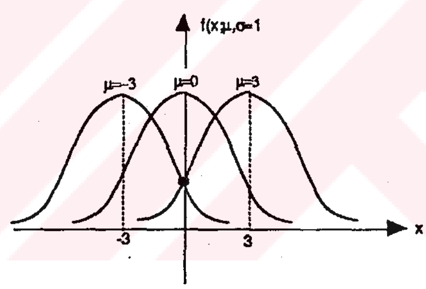
1.Devamlı bir değişkenin sıklık fonksiyonu olduğu için Normal eğri altında kalan alan 1'e eşittir.

2.Dağılım μ etrafında simetriktir.Bunun sonuçu olarak Mod,Medyan ve Ortalama birbirine eşittir.

3.$\mu+\sigma$ ve $\mu-\sigma$ hizasında eğri büküm noktalarına sahiptir.

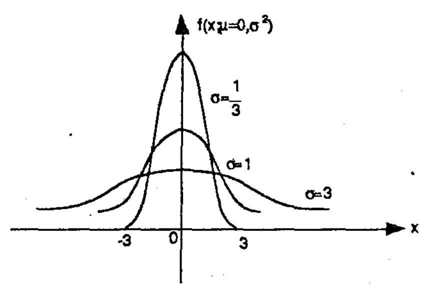
4. $+\infty$ ve $-\infty$ da eğri x eksenine teğettir.

σ sabit tutulup μ çeşitli değerler (-3,0,3) alırsa bu eğrilerin hareketi;



Şekil-5

μ sabit tutulup σ çeşitli değerler (-1/3,1,3) alırsa bu eğrilerin hareketi;



Şekil-6

yayvan veya dik şekilde olur.

23 TSOKOY C.,a.g.e,s.153-154

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad ,-\infty<x<\infty$$

$$,-\infty<\mu<\infty \text{ ve } \sigma>0$$

ifadesi Normal Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonudur.O halde $-\infty<x<\infty$ aralığındaki integralinin değeri 1 olmalıdır.Yani,

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]=1$$

§olmalıdır.Bu ispatı yapmak için; $\frac{x-\mu}{\sigma}=z$ diyelim. $dx=\sigma.dz$ oluduğundan

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left(-\frac{1}{2}.z^2\right).dz$$

olur.A^2 yi yazalım.

$$A^2=\frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}.z^2\right).dz\;.\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}.u^2\right).du$$

$$A^2=\frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}.(z^2+u^2)\right).dz\;.du$$

yazılabilir.Kutupsal koordinatlara geçilirse;

$z-\delta\cos\theta$, $u-\delta\sin\theta$, $\delta z.\delta u=\delta.d\delta.d\theta$ ve $z^2-u^2=\delta^2$ yerlerine konursa;

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}.\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{2}.\delta^2\right).\delta.d\delta\ .d\theta$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}.\int_0^{2\pi} .d\theta \int_0^{\infty} \delta.\exp\left(\frac{-1}{2}.\delta^2\right).d\delta$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}.2\pi.\int_0^{\infty} \delta.\exp\left(\frac{-1}{2}.\delta^2\right).d\delta$$

$$= - e^{\frac{-1}{2}.\delta^2} \Big|_0^{\infty}$$

$$A^2 = 1$$

olarak bulunduğundan dolayı;

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = 1$$

eşitliği elde edilir[24].

[24] Ersoy N. ve Erbaş S.,a.g.e.,s.249

Genel olarak **Normal Dağılım**;

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{\frac{-1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad ,-\infty<x<\infty$$

şeklindedir. $\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ alınır ise;

$$\mathbf{n(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-1}{2}.x^2}} \qquad ,-\infty<x<\infty$$

bulunan bu dağılıma **Standart Normal Dağılım** denir.

b) Normal Dağılımın Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.\exp\left\{\frac{-1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.dx$$

$$=\frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\mu)}.\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.dx$$

$$=\frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left[(x-\mu)^2-2\sigma^2 t(x-\mu)\right]}{2\sigma^2}\right\}.dx$$

$$=e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-1}{2}.\left(\frac{x-\mu-\sigma^2 t}{\sigma}\right)^2\right\}.dx$$

$y=\frac{x-\mu-\sigma^2 t}{\sigma}$ ve $\sigma dy=dx$ dersek;

$$M_x(t)=e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2.y^2}.dx\right]$$

$$M_x(t)=e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

ifadesi Normal Dağılımın, $\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ alınır ise; Standart Normal Dağılımın,

$$M_x(t) = e^{t^2/2}$$

Moment Çıkaran Fonksiyonudur.

c) Normal Dağılımın Beklenen Değeri ve Varyansı

Beklenen değer;

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x).dx$$

ile bulunduğundan **f(x)** fonksiyonunu yerine yazılırsa;

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x.\exp\left\{\frac{-1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.dx$$

olarak bulunur.

Burada ; $\frac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\sigma t+\mu$ ve $\sigma dt=dx$ denilirse [25],

[25] Burada **$x=\sigma t+\mu$** ifadesine Henry doğrusu denir.

$$E(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu).e^{-1/2.t^2}.dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma t.e^{-1/2.t^2}.dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-1/2.t^2}.dt$$

$$=0+\mu$$

$$=\mu$$

Beklenen Değer; $E(x)=\mu$ olarak bulunmuş olur.

Varyans; $Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$ şeklinde ifade edildiğinden;

$E(x^2)$ yi bulunması gerekmektedir.

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2.f(x).dx$$

ile bulunduğundan integral işlemini yapılır ise;

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2.\exp\left\{\frac{-1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.dx$$

integraline kısmi integrasyon metodu uygulaırsa;

olur.O halde **Varyans;** $E(x^2) = \sigma^2 + \mu^2$

$$Var(x)=E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$=\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$

$$Var(x)=\sigma^2$$

d) Normal Dağılımın Birikimli Olasılık Fonksiyonu

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma}\right\}.dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma}\right\}.dt$$

ifadesine Birikimli Normal Dağılım Fonksiyonu denir.Bu ifadede,

$\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ alınarak Birikimli Standart Normal Dağılıma dönüştürülür

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}.dt$$

olarak bulunur.

1.9.8.Gamma Dağılımı

n>0 ve **λ>0** parametreler olmak üzere, **x≥0** sürekli rassal değişkeninin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{n}}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

Gamma Fonksiyonu;

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}.dx \qquad ,x>0 \text{ ve } n>0 \qquad \text{şeklindedir.}$$

n>1 için $\Gamma(n)=(n-1).\ \Gamma(n-1)$

n≥2 için $\Gamma(n)=(n-1).(n-2).\ \Gamma(n-2)$

$$=(n-1).(n-2).(n-3).........2.1\ \Gamma(1)$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$=-e^{-x}\Big|_0^\infty$$

$$=-e^{-\infty}-(-e^{0})$$

$\Gamma(1)=1$ olarak bulunur.

$\Gamma(n)=(n-1)!$ olarak tespit edilir.

O halde **Gamma Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;**

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^{n}}{(n-1)!}.x^{n-1}.e^{-\lambda x} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.Bu fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki olasılıkları toplamının 1'e eşit olması gerekir.Yani,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{n}}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-\lambda x}.dx = 1$$

olmalıdır.

$$= \frac{\lambda^{n}}{\Gamma(n)}.\int_{0}^{\infty} x^{n-1}.e^{-\lambda x}.dx$$

Bunun için $x = \dfrac{y}{\lambda}$ dönüşümünü uygulayalım.

$x^{n-1} = \dfrac{y^{n-1}}{\lambda^{n-1}}$ ve $dx = \dfrac{1}{\lambda}.dy$ yerlerine konursa;

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)}.y^{n-1}.e^{-y}.dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}.\int_{0}^{\infty} y^{n-1}.e^{-y}.dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}.\Gamma(n) = 1$$

a) Gamma Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!}.x^{n-1}.e^{-\lambda x}.e^{tx}.dx$$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}.\int_0^\infty x^{n-1}.e^{x(t-\lambda)}.dx$$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}.\frac{(n-1)!}{(\lambda-t)^n}$$

$$M_x(t)=\frac{\lambda^n}{(\lambda-t)^n}$$

olarak bulunur.

b) Gamma Dağılımının Beklenen Değeri ve Varyansı

Gamma Dağılımının Moment Çıkaran fonksiyonunun birinci türevinde **t=0** alınırsa Beklenen Beğeri bulunur.Yani;

$$E(x)=M'_x(t=0)=\frac{0-\lambda^n.n(\lambda-t)^{n-1}.(-1)}{(\lambda-t)^{2n}}$$

$$=\frac{n.\lambda^n.(\lambda-t)^{n-1}}{(\lambda-t)^{2n}}$$

$$M'_x(t)=\frac{n.\lambda^n}{(\lambda-t)^{2(n+)}}$$

$$M'_x(t=0)=\frac{n.\lambda^n.\lambda^{n-1}}{\lambda^{2n}}$$

$$E(x)=\frac{n}{\lambda}$$

bu ifade Gamma Dağılımının Beklenen Değeridir.

Birinci türevi bulunan Moment Çıkaran Fonksiyonun , ikinci türevi alınırsa;

$$M''_x(t)=\frac{0-n.1^n.(n+1).(1-t)^n.(-1)}{(1-t)^{2n+2}}$$

$$E(x^2)=M''_x(t=0)=\frac{n.(n+1).\lambda^n.\lambda^n}{\lambda^{2n+2}}$$

$$=\frac{n.(n+1).\lambda^{2n}}{\lambda^{2n}.\lambda^2}$$

elde edilen bu ifadede **t-0** olarak seçilmesiyle $E(x^2)$ bulunur.

$$E(x^2)=\frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

şeklinde ikinci momenti bulunur.Varyansını bulmak için, ikinci momentten birinci momentin karesi çıkartılması gerekmektedir.

Kısaca,

$$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

ifadesi ile hesaplandığından bulunan ifadeler yerlerine yazılmasıyle;

$$Var(x)=\frac{n(n+1)}{\lambda^2}-\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{n^2+n}{\lambda^2}-\frac{n^2}{\lambda^2}$$

$$=\frac{n^2+n-n^2}{\lambda^2}$$

$$Var(x)=\frac{n}{\lambda^2}$$

olarak tesbit edilir.

c) Gamma Dağılımının Birikimli Olasılık Fonksiyonu

$$F(x)=Pr(X\leq x)=\begin{cases}\int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!}.t^{n-1}.e^{-\lambda t}.dt & ,x>0\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

1.9.9. Rayleigh Dağılımı

Genel olarak Rayleigh Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2}.\exp\left[\dfrac{-x^2}{2\theta^2}\right] & ,x\geq 0 \text{ ve } \theta>0 \\ 0 & ,d.d \end{cases}$$

olarak ifade edilir.O halde tanımlı olduğu bu aralıktaki olasılıkları toplamı 1'e eşittir.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\theta^2}.\exp\left[\frac{-x^2}{2\theta^2}\right] = 1$$

olmalıdır.Bu integralde değişken değiştirme metodu ile,

$u = \dfrac{-x^2}{2\theta^2}$ denilirse $du = \dfrac{-2x}{2\theta^2}\,dx$ den $\theta^2.du = -x.dx$ olur.

$$= \int \frac{-1}{\theta^2}.\theta^2.e^u.du$$

$$= \int -e^u.du$$

$$= -e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -(e^{-\infty} - e^0) = 1$$

eşitliği elde edilir.

a) Rayleigh Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\int_0^{\infty} e^{tx}.f(x).dx$$

$$=\int_0^{\infty} e^{tx}.\frac{x}{\theta^2}.\exp\left[\frac{-x^2}{2\theta^2}\right].dx$$

$$=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\infty} e^{tx}.x.e^{tx-x^2/2\theta^2}.dx$$

$$M_x(t)=e^{\theta^2.t^2/2}.\left(1+\frac{t.\theta.\sqrt{2\pi}}{2}\right)$$

Rayleigh Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu'dur.

b) Rayleigh Dağılımının Beklenen Değeri ve Varyansı

Rayleigh Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonunun,

$$M_x(t)=e^{\theta^2.t^2/2}.\left(1+\frac{t.\theta.\sqrt{2\pi}}{2}\right)$$

birinci türevi alınırsa;

$$E(x)=M'_x(t)=\frac{\theta^2}{2}.2t.e^{\theta^2.t^2/2}.\left(1+\frac{t.\theta.\sqrt{2\pi}}{2}\right)+e^{\theta^2.t^2/2}.\theta.\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

bulunur.Bu ifadede **t=0** için;

$$E(x)=M'_x(t=0)=0\ +e^0.\theta.\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$\mathbf{E(x)=\frac{\theta\sqrt{2\pi}}{2}}$$

ifadesi **Rayleigh Dağılımının Beklenen Değeri**'dir.

Rayleigh Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonun ikinci türevi alınırsa sıfır etrafındaki ikinci moment $\mathbf{E(x^2)}$ bulunur.

Birinci türevi;

$$M'_x(t)=\frac{\theta^2}{2}.2t.e^{\theta^2.t^2/2}.\left(1+\frac{t.\theta.\sqrt{2\pi}}{2}\right)+e^{\theta^2.t^2/2}.\theta.\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

şeklinde olan fonksiyonun ikinci türevini alınır ise;

$$E(x^2)=M''_x(t)=\theta^2.e^{\theta^2.t^2/2}+\theta^2.t.\frac{\theta^2}{2}.2t.e^{\theta^2.t^2/2}+e^{\theta^2.t^2/2}.\theta^3.2t.\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$+\ \theta^3.\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.t^2.\frac{\theta^2}{2}.2t.e^{\theta^2.t^2/2}+\frac{\theta^2}{2}.\theta.\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.2t.e^{\theta^2.t^2/2}$$

bulunan bu ikinci türevde **t=0** alınırise ortalama etrafındaki ikinci moment bulunur.

Varyansın bulunması için sıfır etrafındaki ikinci momentten sıfır etrafındaki birinci momentin karesi çıkartılırsa;

$$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

$$E(x^2)=M''_x(t=0)=\theta^2$$

ifadeleri yerlerine yazılır ise;

$$Var(x)=\theta^2-\left(\frac{\theta.\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2$$

$$=\theta^2-\frac{\theta^2.2\pi}{4}$$

$$=\theta^2-\frac{\theta^2.\pi}{2}$$

$$Var(x)=\theta^2.\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$$

olarak tespit edilir.

1.10.ÜSTEL AİLEDEKİ DAĞILIMLARIN KARAKTERİSTİK FONKSİYONLARI

1.10.1.Karakteristik Fonksiyon Ve Momenler

Üstel aileden türetilebilen fonksiyonlar incelendiğinde;

1.Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

2.Moment Çıkaran fonksiyonları

3.Beklenen Değer ve Varyansları

4.Birikimli Olasılık Fonksiyonları

bulunmuştur.Moment çıkaran fonksiyon yardımıyle sıfır ve ortalama etrafındaki momentler kolaylıkla bulunabileceği gösterilmiştir.

a bir reel sayı, **r** pozitif tamsayı olmak üzere, $E=[(x-a)^r]$ ifadesine **x** rassal değişkeninin **a** etrafındaki(civarındaki) **r** inci momenti denir. x'in kesikli ve sürekli durumlarına göre iki farklı şekilde ifade edilir.

a) X Rassal Değişkeninin a Etrafındaki r inci Momenti

$$E[(x-a)^r]=\begin{cases} \sum_{i}^{n} (x_i-a)^r.P(x_i) & ,i=1,2,3,\ldots\ldots \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x_i-a)^r.f(x).dx & ,-\infty<x<\infty \end{cases}$$

b) X Rassal Değişkeninin Ortalama Etrafındaki r inci Momenti

$$E[(x-\mu)^r]=\begin{cases} \sum_{i}^{n} (x_i-\mu)^r.P(x_i) & ,i=1,2,3,\ldots\ldots \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x_i-\mu)^r.f(x).dx & ,-\infty<x<\infty \end{cases}$$

c) X Rassal Değişkeninin Sıfır Etrafındaki r inci Momenti

$$E\left[(x)^r\right]=\begin{cases} \sum_{i}^{n} (x_i)^r.P(x_i) & ,i=1,2,3,\ldots\ldots \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x_i)^r.f(x).dx & ,-\infty<x<\infty \end{cases}$$

Fakat her dağılımın moment çıkaran fonksiyonu bulunamaz.Bulunamadığı için incelenen tesadüfü değişkenin dağılımının şeklide belirlenemez.Dağılımın şeklini ortaya koymak için **Karakteristik Fonksiyon** veya **Ayırtkan Fonksiyon** diye yeni bir fonksiyon geliştirilmiştir.

Her dağılımın mutlaka karakteristik fonksiyonu vardır.Karakteristik fonksiyon sayesinde olasılık yada olasılık yoğunluk fonksiyonu arasında önemli bir bağıntı mevcut olup, bunlardan biri bilindiğinde diğerlerini bulmak çok kolay olmaktadır.Bununla birlikte İstatistikte çok kullanılan ve önemli olan Büyük Sayılar Kanunu ile ilgili ispatlarde Karakteristik Fonksiyon aracılığı ile yapılmaktadır.

1.10.2.Karakteristik Fonksiyonun Bulunması

x tesadfü değişkeninin Karakteristik Fonksiyonu ;

$-\infty<t<\infty$ ve $i^2=-1$ olmak üzere;

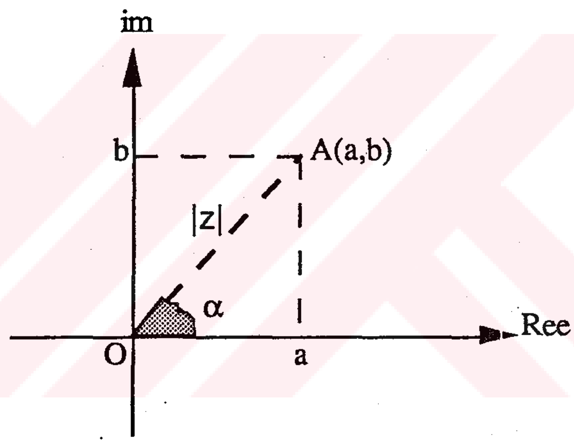
$$\phi_x(t)=E(e^{tx})$$

şeklinde tanımlanır.Burada kullanılan **i** karmaşık sayıları ifade etmektedir.Şimdi karmaşık sayıları tanımlayalım. $\mathbb{C}=\{z=x+i.y \mid x,y\in R \text{ ve } i^2=-1\}$ ifadesi karmaşık sayılar kümesinin genel gösterim şeklidir.

Karmaşık sayılara aynı zamanda kompleks veya imajinel sayıda denir.Komplex sayılar kümesinin elamanları i'lerden oluşur.Reel sayılar bir doğru üzerinde olup-birbirleriyle büyük-küçük, negatif-pozitif gibi kıyaslamaları yapılabilirken **z=x+i.y** şeklindeki Karmaşık(Komplex) Sayılarda bunların yapılması imkansızdır.Çünkü Karmaşık Sayılar bir doğrunun değil, bir düzlemin elemanıdır, bir noktadırlar.

Karmaşık Düzlem;

z=a+i.b ve a>0,b>0 reel sayıları için **x** ekseni reel eksen, **y** ekseni imajinel(sanal) eksen olarak seçilmek üzere koordinat ekseninde gösterilirse;



z=a+b.i sayısının görüntüsü

$\mathbb{C}=\{z=x+i.y \mid x,y\in R \text{ ve } i^2=-1\}$ olarak tanımlanan z=x+i.y sayısında

$\sin\alpha=\frac{y}{|z|} \Rightarrow y=|z|.\sin\alpha$ ve

$\cos\alpha=\frac{x}{|z|} \Rightarrow x=|z|.\cos\alpha$

olarak yazılabilir. |z| z sayısının orjine olan uzaklığını gösterir.Aynı zamanda z'nın uzunluğu veya modülü adlarıylede anılmaktadır.

z=x+y.i de x ve y yerlerine yazılırsa; $z=|z|.\cos\alpha+|z|.\sin\alpha$

$z=|z|.(\cos\alpha+\sin\alpha)$ olarak ifade edilir.

$|z|$ sayısı pisagor bağıntısı ile kenar uzunlukları x ve y olan bir dik üçgende;

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

şeklinde bulunur. $|z|=r$ olarak alınıp yerine yazılırsa elde edilen;

$z=r.(\cos\alpha+\sin\alpha)$ ifadesine z sayısının **Tirigonometrik (Kutupsal) Biçimi** denir. Bu açıklamalar altında $z=x+y.i$ sayısının **Beklenen Değeri $E(z)=E(x+y.i)$** dir. x tesadüfü değişkeninin komplex bir fonksiyonu;

$$\phi(x)=e^{itx} \quad \text{ve} \quad t\in R, i^2=-1$$

Euler formülü ile; $e^{itx}=\cos(tx)+i.\sin(tx)$ elde edilir.

Burada $|\cos(tx)|$ ve $|\sin(tx)|$ in tüm t değerleri ve x tesadüfü değişkeni için sınırlı olup ortalamaları daima mevcuttur. Bu açıklamalar altında;

$$\phi(x)=E(e^{itx})=E[\cos(tx)+i.\sin(tx)]$$

$$=E[\cos(tx)]+E[i.\sin(tx)]$$

şeklinde bulunur[26].

---

[26] Şayet $E(x^k)$ varsa (mevcutsa) $\phi_x(t)$ aşağıdaki gibi $t=0$ komşuluğunda genişletilebilir;

$$\phi_x(t)=1+\frac{i.E(x)}{1!}.t+\frac{i^2.E(x^2)}{2!}.t^2+\dots\dots\dots\dots+\frac{i^k.E(x^k)}{k!}.t^k+0.(t^k)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{0.(t^k)}{t^k}=0$$ olarak bulunur. Eğer h(x), k defa diferansiyeli alınabilirse Taylor teoreminden ,Reimander;

$$h(x)=h(0)+\frac{h^{(1)}(0)}{1!}.x+\frac{h^{(2)}(0)}{2!}.x^2+\dots\dots\dots\dots+\frac{h^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.x^{k-1}+\frac{h^k(\xi)}{k!}.x^k$$

$0<\xi<x$ veye $x<0$ ise $x<\xi<0$ olur. Bizim incledigimiz formda, $E(x^k)$ mevcut olduğundan diferansiyeller integral işareti altına alınabilir (aynı katsayıları kullanarak). Hata terimi her gerçek t için $\phi_x^{(k)}(t)$ sürekliliğini takip eder.

a) X Süreksiz Tesadüfü Değişkeninin Karakteristik Fonksiyonu

$$\phi_x(t)=\sum_j e^{itx_j}.f(x_j)$$

b) X Sürekli Tesadüfü Değişkeninin Karakteristik Fonksiyonu

$$\phi_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_j}.f(x).dx$$

şeklinde ifade edilir.Buna göre e^{itx} in beklenen değeri (ortalaması) her zaman vardır.Bu sebepten dolayı her tesadüfü değişkenin bir karakteristik fonksiyonunun daima varolduğuna varılmış olur.O halde $\phi(x)=E(e^{itx})$ fonksiyonuna x tesadüfü değişkeninin **Karakteristik Fonksiyonu** denir.

1.10.3.Karakteristik Fonksiyonun Özellikleri

Karakteristik fonksiyon ve her $t\in R$ için;

1. $\phi_x(t)=1$ dir.x in Kesikli ve Kesiksiz durumuna göre ispatlayalım.

x Kesikli Tesadüfü Değişkeninin Karakteristik Fonksiyonu için;

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})$$

$$=\sum_j e^{itx_j}.f(x_j$$

$$=\sum_j e^{i.0.x_j}.f(x_j)$$

$$=\sum_j 1.f(x_j)$$

$\phi_x(t)=1$ olduğu görülmektedir.

x Kesiksiz Tesadüfü Değişkeninin Karakteristik Fonksiyonu için;

$$\phi_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_j}.f(x).dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} 1.f(x).dx$$

$\phi_x(t)=1$ olarak bulunur.

2. $|\phi_x(t)| \leq 1$ dir. $\phi_x(t)=E(e^{itx})$ olduğundan;

$$E(e^{itx})=|\cos(tx)+i.\sin(tx)|$$

$$=\sqrt{\cos^2(tx)+i.\sin^2(tx)}$$

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})=1$$

şeklinde bulunur[27].

x kesikli bir tesadüfü değişken ise;

$$\phi_x(t)=\sum_j e^{itx_j}.f(x_j)$$

$$=|\sum_j e^{itx_j}.f(x_j)|$$

---

27 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ olduğundan $\sin^2 tx+\cos^2 tx=1$ dir.

$$\leq |\sum_j e^{itx_j}|.|f(x_j)|$$

$$\leq \sum_j 1.|f(x_j)|$$

$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = 1$$

şeklinde bulunur.

x kesiksiz bir tesadüfü değişken ise;

$$|\phi_x(t)| = \left| \int_R e^{itx}.f(x).dx \right|$$

$$\leq \int_R |e^{itx}|.f(x).dx$$

$$\leq \int_R 1.f(x).dx$$

$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = 1$ olarak bulunur.

O halde hem kesikli hemde kesiksiz değişkenler için $\phi_x(t)$ yi belirleyen toplam ve integral yakınsaktır. $\phi_x(t)$ belli iken f(x) in bulunabiliceği, f(x)belli iken $\phi_x(t)$ nin bulunabileceği açıklıkla görülmektedir.

Kesikli ve Kesiksiz değişkenlerde Karakteristik Fonksiyon tüm gerçel(reel) eksen üzerinde süreklidir.

1.10.4.Karakteristik Fonksiyon Yardımıyla Momentlerin Bulunuşu

Bazı Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlarının Momant Çıkaran Fonksiyonu bulunamıyor idi.Bu fonksiyonların Momentlerini Karakteristik Fonksiyon yardımıyle bulmak için diferansiyel hesabına dayanan yeni bir formül geliştirilmiştir.Hatırlanacağı gibi, Karakteristik Fonksiyon;

$$\phi_x(t) = E(e^{itx})$$

ile $i^2 = -1$ olmak üzere İmajinel sayılar kullanılarak bulunmaktadır.

x Kesikli Bir Tesadüfü Değişken olması halinde Karakteristik Fonksiyon;

$$\phi_x(t)=\sum_j e^{itx_j}.f(x_j)$$

x Kesiksiz Bir Tesadüfü Değişken olması halinde Karakteristik Fonksiyon;

$$\phi_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx_j}.f(x).dx$$

formu ile tanımlanmıştır.

x tesadüfü değişkeninin Karakteristik Fonksiyonunun Determinantlar yardımıyla Momentleri;

$$E(x^n) = \left. \frac{d^n\phi_x(t)}{i^n dt^n} \right|_{t=0} = \mu_n$$

ile **n. türevinde n. Momenti** bulunur.

Taylor serisi yardımıyle Karakteristik Fonksiyon;

$$\phi_x(t)=E(e^{itx}) = E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(itx)^j}{j!}\right]$$

şeklinde yazılabilir.Bu form kullanılarak türev alınmasıyle Momentler,

$$\left.\frac{d\phi_x(t)}{idt}\right|_{t=0} = E\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{ix(itx)^{j-1}}{i(j-1)!}\right]_{t=0} = E\left[x+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{ix(itx)^{j-1}}{i(j-1)!}\right]_{t=0}$$

$$= E[x] = \mu_1$$

$$\left.\frac{d^2\phi_x(t)}{i^2dt^2}\right|_{t=0} = E\left[\sum_{j=2}^{\infty}\frac{i^2x^2(itx)^{j-2}}{i^2(j-2)!}\right]_{t=0} = E\left[x^2+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{i^2x^2(itx)^{j-2}}{i^2(j-2)!}\right]_{t=0}$$

$$= E\left[x^2\right] = \mu_2$$

....

....

....

$$\left.\frac{d^n\phi_x(t)}{i^ndt^n}\right|_{t=0} = E\left[\sum_{j=n}^{\infty}\frac{i^nx^n(itx)^{j-n}}{i^2(j-n)!}\right]_{t=0} = E\left[x^n+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{i^nx^n(itx)^{j-n}}{i^n(j-n)!}\right]_{t=0}$$

$$= E\left[x^n\right] = \mu_n$$

şeklinde 1.,2.,.... n. momentler bulunur.Kesikli ve Kesiksiz Dağılımlar için birer tane örnek verelim.

Örnek :1. Geometrik Dağılımın Karakteristik Fonksiyonu yardmıyla birinci ve ikinci Momentinin bulunması.

$$\phi_x(t)=E(e^{itx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx} f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{itx}.p.q^{x-1}$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (e^{it}.q)^x = \frac{p.e^{it}}{1-q.e^{it}}$$

Geometrik Dağılımın Karakteristik Fonksiyonu'dur.Beklenen Değeri ve Varyans için,

$$E(x)=\left.\frac{d\phi_x(t)}{idt}\right|_{t=0} = \left.\frac{p.e^{it}}{\left(1-q.e^{it}\right)^2}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(x^2)=\left.\frac{d^2\phi_x(t)}{i^2dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{p.e^{it}(1+q.e^{it})}{\left(1-q.e^{it}\right)^3}\right|_{t=0}$$

$$= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{(1-q)^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\mathbf{Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2}$$

$$= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$Var(x) = \frac{q}{p^2}$$

Geometrik Dağılımın Varyansı bulunur.

Örnek :2. Üstel Dağılımın Karakteristik Fonksiyonu yardımıyla birinci ve ikinci Momenti.Üstel Dağılımın Karakteristik Fonksiyonu;

$$\phi_x(t)=E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x).dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lambda.e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda - it}.e^{-x(\lambda - it)} \Big|_0^{\infty}$$

$$\phi_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

bulunur. Birinci ve ikinci türevi ile Momentleri bulalım.

$$E(x) = \frac{d\phi_x(t)}{idt}\bigg|_{t=0} = \frac{d\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)}{idt}$$

$$= \frac{\lambda . i}{i.(\lambda - it)^2}\bigg|_{t=0}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

beklenen değeridir.

$$E(x^2) = \frac{d^2\phi_x(t)}{i^2dt^2}\bigg|_{t=0} = \frac{d^2\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)}{i^2dt^2}\bigg|_{t=0}$$

ifadesinin sonucunu bulmak için birinci türevin tekrar türevi alınır ise yani;

$$E(x^2) = \frac{d^2\phi_x(t)}{i^2dt^2}\bigg|_{t=0} = \frac{d\left(\frac{\lambda}{(\lambda - it)^2}\right)}{idt}\bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{-\lambda.2.(\lambda - it).(-i)}{i.(\lambda - it)^4}$$

$$= \frac{2.\lambda}{(\lambda - it)^3}\bigg|_{t=0}$$

$E(x^2) = \frac{2}{\lambda}$ olarak bulunur.

1.11.Üstel Aileye Ait Bazı Fonksiyonların Karakteristik Fonksiyonları

1.11.1.Binom Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

x tesadüfü değişkeni Binom dağılıma uygunsa;

$$f(x)=\begin{cases} \binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x} & ,x=0,1,2,.....\\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Binom Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu;

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}.e^{itx}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}.(p.e^{it})^x.q^{n-x}$$

$$=\binom{n}{0}.(p.e^{it})^0.q^{n-0}+\binom{n}{1}.(p.e^{it})^1.q^{n-1}+......$$

$$=1.q^n+n.(p.e^{it}).q^{n-1}+......$$

$$=q^n\left(1+n.(p.e^{it}).q^{-1}+......\right)$$

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})=(p.e^{it}+q)^n$$

formundadır bulunur.

1.11.2.Poisson Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Poisson dağılımı daha önce tanımlanmış ve

$$P(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} & ,x=0,1,2,\ldots\ldots \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklindeydi. Biz bu dağılımın karakteristik fonksiyonunu bulmaya çalışalım.

Bunun için $E(e^{itx})$ tespit edilirse;

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}.e^{itx}$$

$$=e^{-\lambda}.\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda.e^{it})^{x}}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}.\left(\frac{(\lambda.e^{it})^{0}}{0!}+\frac{(\lambda.e^{it})^{1}}{1!}+\frac{(\lambda.e^{it})^{2}}{2!}+\ldots\right)$$

$$=e^{-\lambda}.\left(1+\lambda.e^{it}+\frac{\lambda^{2}.e^{2it}}{2}+\ldots\right)$$

$$=e^{-\lambda}.e^{\lambda.e^{it}}$$

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

ifadesi Poisson Dağılımının Karakteristik Fonksiyonudur[28].

28 $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{k^{x}}{x!}=e^{k}$ şeklinde tanımlı olduğundan; $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda.e^{it})^{k}}{k!}=e^{\lambda.e^{it}}$ olarak bulunur.

1.11.3.Normal Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Normal Dağılımın Fonksiyonu;

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad ,-\infty<x<\infty$$

şeklindedir.Normal Dağılımın **Karakteristik Fonksiyonu;**

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.e^{itx}.dx$$

integraline; integral alma metodlarından Kısmi İntegrasyon uygulanırsa

$$\phi_x(t)=e^{\mu it-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

şeklinde bulunur.Eğer ortalaması $(\mu=0)$ ve varyansı $(\sigma^2=1)$ olarak alınırsa **Standart Normal Dağılım** elde edilir.

Standart Normal Dağılımın Karakteristik fonksiyonu;

$$\phi_x(t)=e^{\frac{1}{2}i.t^2}$$

şeklinde bulunur.

1.11.4.Üstel Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Hatırlanacağı gibi Üstel Fonksiyon;

$$f(x)=\begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x} & ,0\leq x<\infty \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu dağılımın **Karakteristik Fonksiyonu;**

$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_0^{\infty} \lambda . e^{-\lambda x} . e^{itx} . dx$$

$$= \lambda . \int_0^{\infty} e^{x(it-\lambda)} . dx$$

değişken değiştirme metodu ile; $e^{x(it-\lambda)}=u$ dersek iki tarafında türevi alınır ise

$$(it-\lambda).e^{x(it-\lambda)}dx=du \quad \text{buradan} \quad dx=\frac{du}{(it-\lambda).e^{u}}$$

$$=\lambda . \int \frac{e^{u}du}{(it-\lambda).e^{u}}$$

$$=\frac{\lambda}{(it-\lambda)} . \int du$$

$$\phi_x(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

olarak bulunur.

1.11.5.Gamma Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Gamma Dağılımı tanımlandığı şekliyle;

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-\lambda x} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$$

formunda idi.Bu dağılımın karakteristik fonksiyonunu bulalım.

Gamma Dağılımının **Karakteristik Fonksiyonu;**

$$\phi_x(t)=E(e^{itx})=\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-\lambda x}.e^{itx}.dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{\lambda}{\Gamma(n)}.(\lambda.x)^{n-1}.e^{x.(it-1)}.dx$$

$$\phi_x(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-n}$$

şeklinde bulunur.

1.11.6.Geometrik Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Geometrik Dağılım fonksiyonu;

$$f(x)=\begin{cases} p.(1-p)^x & ,x=1,2,3,... \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Karakteristik Fonksiyonu;

$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=1}^{\infty} p.(1-p)^x.e^{itx}$$

$$= p.\sum_{x=1}^{\infty} (q.e^{it})^x$$

formunda yazılabilir[29].Toplam sembolü açılırsa;

$$= p.\left(q.e^{it} + (q.e^{it})^2 + (q.e^{it})^3 + ...\right)$$

$$= p.q.e^{it}.\left(1+q.e^{it} + (q.e^{it})^2 + (q.e^{it})^3 + ...\right)$$

$$\phi_x(t) = \frac{p.e^{it}}{1-q.e^{it}}$$

şeklinde bulunan ifade **Geometrik Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu**'dur.

---

29 $1+r+r^2+r^3+.....+r^{\infty} = \frac{1}{1-r}$ $\quad ,|r|<1$

1.11.7.Bernoulli Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Bernolli fonksiyonu;

$$f(x)=\begin{cases} p^x.(1-p)^{1-x} & ,x=0,1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu dağılımın **Karakteristik Fonksiyonu;**

$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=0}^{1} p^x.(1-p)^{1-x}.e^{itx}$$

$$=p^0.(1-p)^{1-0}.e^{it0} + p^1.(1-p)^{1-1}.e^{it1}$$

$$=1-p + p.e^{it}$$

$$\phi_x(t) = q + p.e^{it}$$

olarak tespit edilir.

1.11.8.Negatif Binom(PASKAL) Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu;

$$f(x)=\begin{cases}\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r} & ;x=r,r+1,r+2,\dots \text{ ve } 0\le p\le 1\\ 0 & ;\text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu dağılımın **Karakteristik Fonksiyonu;**

$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^{x-r}.e^{itx}$$

$$=\binom{r-1}{r-1}.p^r.q^{r-r}.e^{itr}+\binom{r+1-1}{r-1}.p^r.q^{r+1-r}.e^{it(r+1)}+\dots\dots\dots$$

$$=1.p^r.e^{itr}+r.p^r.q.e^{itr}.e^{it}+\dots\dots\dots$$

$$\phi_x(t)=\frac{p^r}{(1-e^{it})^r}$$

bulunur.Bu ifade **Negatif Binom(PASKAL) Dağılımının Karakteristik Fonksiyo-nu**'dur.

1.11.9.Rayleigh Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Rayleigh fonksiyonu;

$$
f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2}\,.\,\exp\left[\dfrac{-x^2}{2\theta^2}\right] & ;\ x\geq 0,\ \theta>0 \\ 0 & ;\text{d.d.} \end{cases}
$$

şeklinde tanımlanıyor.

Bu dağılımın **Karakteristik Fonksiyonu;**

$$
\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_0^{\infty} \frac{x}{\theta^2}\,.\,\exp\left[\frac{-x^2}{2\theta^2}\right].e^{itx}.dx
$$

şeklindemi integrale; interal alma yöntemlerinden kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$
\phi_x(t) = e^{\frac{it^2\theta^2}{2}}.(1 + \frac{i.t.\sqrt{2\pi}}{2})
$$

şeklinde **Rayleigh Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu** bulunur.

BÖLÜM II

FONKSİYONLARIN DÜZENLİLİK DURUMU

Çeşitli matematiksel işlemlerde ve özellikle Olasılık Teorisinde Olasılık Dağılımları sıkça kullanılmaktadır.Olasılık dağılımları ile ilgili bazı yargılara varmak için limit,türev,integral v.s. gibi işlemler yapılmaya elverişli olmaları gerekmektedir.Uygulamada Olasılık Dağılımlarının örneklem farklılıklarından ve örneklem büyüklüklerinden etkilenmemeleri istenir.Bu sayede güvenilir olarak kullanım imkanına kavuşulur.Aksi halde dağılımlar kullanışsız olmaktadır.

O halde bir dağılımın güvenilir olarak kullanılabilmesi için Düzenlilik Durumuna sahip olması gerek ve yeter şarttır.Düzenlilik Durumuna sahip olmayan fonksiyonların tespit edilmesi çok önemli bir problemdir.Çünkü bir fonksiyonun kullanışlı olması halinde tarafsız,tam ve yeterli bir istatistiktir yapılabilir.

Aksi halde kullanılan dağılımlara güvenilemeyecek ve genellemeler yapılamayacaktır.Sadece özel durumlar için kullanılabilme özellliğine sahip olacaktır.

Bu açıklamalardan sonra Düzenlilik Durumunun sağlanma şartları hakkında bilgi verip, Üstel Aileden türetilebilen Dağılımların Süreklilik ve Süreksizlik Durum'larına göre Düzenliliği araştırılacaktır.

2.1.Üstel Ailedeki Dağılımların Düzenlilik Durumlarının Araştırılması

$\{f(x;\theta)\ ;\theta\in\Omega\}$ olasılık fonksiyonlarının ailesini düşünelim.

$\Omega=\{\theta;\ y<\theta<\delta\}$ aralığı, y ve δ bilinen sabitler olmak üzere; x in süreklilik ve süreksizlik durumuna göre fonksiyonları tanımlayalım.

a) X Rassal Değişkeni Sürekli ise Düzenlilik Durumu

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\exp\{P(\theta).k(x)+S(x)+q(\theta)\} & ,a<x<b\\ 0 & ,d.d.\end{cases}$$

tanımlansın.Bu olasılık fonksiyonuna sahip bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna; sürekli ve üstel aileye ait olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

Buna ek olarak;

1. $y<\theta<\delta$ iken ne **a** nede **b** , θ ya bağlı değilse, yani fonksiyonun anımlı olduğu aralığın uç sınırları parametre olan θ ya bağlı değildir.

2. $P(\theta)$ belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyon ise

3. $a<x<b$ iken $K'\neq0$ ve $S(x)$ x in sürekli bir fonksiyonu ise

bu şartlara uyan fonksiyonlara **Üstel Ailenin Düzenli Durumu** denir.

b) X Rassal Değişkeni Süreksiz İse Düzenlilik Durumu

x rassal değişkeni sereksiz olması halinde tanımlanabilecek olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\exp\{P(\theta).k(x)+S(x)+q(\theta)\} & ,x=a_1,a_2,a_3,\ldots\\ 0 & ,d.d.\end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa düzenli duruma sahip kesikli olasılık fonksiyonları elde edilmiş olur.

Genel formu verilen fonksiyon;

1. $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,....\}$ kümesi θ ya bağlı değilse yani fonksiyonun anımlı olduğu aralığın uç sınırları parametre olan θ ya bağlı değildir.

2. $y<\theta<\delta$ aralığında $P(\theta)$, θ nın belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyon

3.$K(x)$; $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,....\}$ kümesi üzerinde x'in belirsiz olmayan bir fonksiyonu ise;

bu şartları sağlayan f(x) fonksiyonu düzenli duruna sahip kesikli olasılık fonksiyonudur denir.

Örneğin; $\{ f(x;\theta) \; ; \; 0<\theta<\infty \}$ ailelerinin her üyesi; $f(x;\theta)$ ve $n(0;\theta)$ iken sürekli düzenli duruma sahip bir fonksiyonu temsil eder.Çünkü;

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}.\exp\left[\frac{-x^2}{2\theta}\right]$$

$$=\exp\left[\frac{-x^2}{2\theta}-\ln\sqrt{2\pi\theta}\right] \qquad \text{ve} \qquad -\infty<x<\infty \qquad \text{dir.}$$

$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\}$ üstel ailedeki sürekli düzenli duruma sahip bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun dağılımından elde edilen rassal örnekleri temsil etsin.

$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\}$ **'in Bileşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu;**

$$
f(x;\theta) = \begin{cases} \exp\left\{ P(\theta).\sum_{i=1}^{n} K(x_i) + \sum_{i=1}^{n} S(x_i) + n.q(\theta) \right\} & , \begin{matrix} a<x_i<b \\ i=1,2,3,\ldots \\ y<\theta<\delta \end{matrix} \\ 0 & ,d.d. \end{cases}
$$

pozitif olasılık yoğunluk noktalarında, bu Bileşik Olasılık Fonksiyonu iki tane negatif olmayan fonksiyonun çarpımı olarak yazılabilir. Bu sözedilen durum ifade edilir ise aşağıdaki form bulunur.

$$
\exp\left\{ P(\theta).\sum_{i=1}^{n} K(x_i) + n.q(\theta) \right\}.\left\{ \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \right\}
$$

faktörizasyon teoremiyle bağlantılı olarak;

$$
y_1 = \sum_{i=1}^{n} K(x_i)
$$

θ paramtresi için yeterli bir istatistiktir.Kesikli durumlar için ;

$$
y_1 = \sum_{i=1}^{n} K(x_i)
$$

yeterli bir istatistik olduğunu ispatlamaya çalışalım.

$x \in \{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,....\}$ ve $i=1,2,3,....,n$ iken;

$\{x_1,x_2,x_3,......,x_n\}$ lerin **Bileşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunu** pozitif olarak ele alırız.Daha sonra faktörizasyon teoremini kullanırız.Hem sürekli hemde kesikli durumda y_1 'in olasılık yoğunlk fonksiyonunun pozitif olasılık yoğunluk noktalarında ;

$$g_1(y_1;\theta) = R(y_1).\exp\{P(\theta).y_1 + n.q(\theta)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu aşamada $\{g_1(y_1;\theta);\ y<\theta<\delta\}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ailesini göstermek amacıyle analizlerde bir teorem olarak kullanılmaktadır.Bu teorem; Moment üreten fonksiyonlarının (eğer var ise) dağılımını tam olarak belirlediğini ispat ederken kullanılan teoremin aynısıdır.

c) Yeterli İstatistik Şartları[30]

$\varphi<\theta<\delta$ iken $f(x;\theta)$ 'in üstel ailenin düzenli duruma sahip bir olasılık yoğunluk fonksiyonunu temsil ettiğini kabul edelim. Öyleyse

$\{x_1,x_2,x_3,......,x_n\}$ (n sabit bir pozitif tamsayı) $f(x;\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir dağılımdan gelen rassal örnekler;

$$y_1=\sum_{i=1}^{n} K(x_i)$$

30 HOGG R.and CRAING A., Indroduction to Mathematical Statistical,NEW YORK,1970,s.232

değeri θ için yeterli bir istatistik ve y_1 'in $\{g_1(y_1;\theta);\ y<\theta<\delta\}$ ailesine ait olasılık yoğunluk fonksiyonundandır.Yani y_1 değeri θ için yeterince tam bir istatistiktir.

Bu teoremin yararlı kullanımları vardır.(2.1.1) deki gibi düzenli duruma sahip bir durumda ;

$$y_1=\sum_{i=1}^{n} K(x_i)$$

nin yeterli bir istatistik olduğunu incelimeyle gösterebiliriz.Eğer y_1 'in sürekli bir fonksiyonunu,örneğin $\varphi(y_1)$ gibi nasıl yapılacağını gösterebilirsek;öyleki

$$E\left[\varphi(y_1)\right]=0$$

olsun. $\varphi(y_1)$ istatistiği θ için en iyi istatistik olur.

Örnek: $0<\theta<\infty$ için ;θ parametresine sahip bir Poisson dağılımı olsun.Poisson Dağılımının Olasılık Yoğnluk Fonksiyonu;

$$P(x;\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^{x}}{x!} & ,x=0,1,2,\ldots.. \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

üstel ifadesi, $P(x;\theta)=\exp\{-\theta + x.\ln\theta - \ln x!\}$ gibidir.

Teoreme göre $y_1=\sum_{i=1}^{n} K(x_i)$ için yeterli ve tam bir statistiktir.

$E(y_1)=n.\theta$ ve $\varphi(y_1)=\dfrac{y_1}{n}=\bar{x}$ ayrıca $\bar{x}$ 'de θ için en iyi istatistik olduğundan, $\varphi(y_1)$ θ için en ideal istatistiktir.

2.2.Sürekli Dağılımların Düzenlilik Durumları

2.2.1.Normal Dağılımın Düzenlilik Durumu

Normal dağılımın genel formu;

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad ,-\infty<x<\infty$$

şeklindedir.Burada $\mu=\theta$ alınırsa Normal Dağılımın formu;

$$f(x;\theta,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.\ \exp\left\{\frac{-(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

bulunur.Bu ifade genel olarak üstel şekilde yazılırsa;

$$f(x;\theta,\sigma)=\ \exp\left\{\frac{\theta}{\sigma^2}.x-\frac{x^2}{2\sigma^2}-\ln\sqrt{2\pi\sigma^2}-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right\}$$

şeklinde bulunur.Bu ifade Olasılık Yoğunluk Fonksiyonuna sahip normal dağılımdan alınan rassal değişkenleri temsil etsin.Burada σ^2 herhangi bir sabit pozitif sayıdır.

Buradaki fonksiyonları düzenlilik formuna göre tespit edelim.

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\exp\{P(\theta).k(x)+S(x)+q(\theta)\} & ,a<x<b\\ 0 & ,d.d.\end{cases}$$

Bu fonksiyonda;

$K(x)=x$ ve $P(\theta)=\frac{\theta}{\sigma^2}$ olarak,

$$S(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln\sqrt{2\pi\sigma^2}$$

$q(\theta) = \frac{-\theta^2}{2\sigma^2}$ şeklinde olduğu anlaşılmaktadır.

Düzenlilik şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

1. $y<\theta<\delta$ iken ne **a** nede **b** , θ ya bağlı değildir.

Gerçektende θ parametresi için; $-\infty$ ve ∞ sınır değerleri θ ya bağlı değildir.

2.$P(\theta)$ belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyondur.

$$P(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$$

$P(\theta)$ ifadesi doğrusal bir fonksiyon olup tanımsız olduğu hiçbir nokta yoktur.Bütün reel sayılar için süreklidir.

3.$a<x<b$ iken $K'\neq 0$ ve $S(x)$ x' in sürekli bir fonksiyonudur.

$K(x)=x$ şeklinde olup birinci türevi; $K'(x)=1$ bulunur. Dolayısıyle $K'(x) \neq 0$ olduğundan sağlanır.

$$S(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln\sqrt{2\pi\sigma^2}$$

şeklinde olup birinci ifadenin paydasının kökü olmadığından ve köklü ifadenin içi daima pozitif olduğundan her reel sayı için $S(x)$ daima süreklidir.Normal Dağılım Fonksiyonu bu üç şartıda sağladığında **Üstel Ailenin Düzenlilik Durumuna** sahip bir fonksiyonudur.

Sadece **Normal Dağılımın Yeterli Bir İstatistik** olup olmadığını araştıralım.

Yeterli bir istatistik için;

$$y_1=\sum_{i=1}^{n} K(x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= x_1+x_2+x_3+........+x_n$$

buradan $y_1=n.\bar{x}$ değeri; her σ^2 için varyansının sabit değeri için normal dağılımın θ ortalaması için tam ve yeterli bir istatistiktir.

$$E(y_1)=n.\theta \qquad \text{ve} \qquad p(y_1)=\frac{y_1}{n}=\bar{x}$$

değeri θ için tarafsız bir istatistik olan y_1 'in tek sürekli fonksiyonu olduğundan ve yeterli istatistik y_1 'in bir fonksiyonu olduğundan minimum varyansa sahiptir.

Kısaca $\bar{x}$ θ için tek ve en ideal istatistiktir.Bundan hareketle , y_1 $\bar{x}$ 'ın tek değerli fonksiyonu olduğundan, $\bar{x}$ 'ın kendisine θ için tam ve yeterli bir istatistiktir.

2.2.2.Üstel Dağılımın Düzenlilik Durumu

Üstel dağılımın genel ifadesi,

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} \lambda.e^{-\lambda x} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanıyordu.Genel üstel formu ise;

$$f(x;\lambda) = \exp\{\ln\lambda - \lambda x\}$$

olarak tespit edilir.

Bu ifadede $\lambda=\theta$ olarak alınır ise;

$$f(x;\theta) = \exp\{\ln\theta - \theta x\}$$

şeklinde olur.

Buradaki fonksiyonları düzenlilik formuna göre tespit edelim.Düzenlilik Durumunun genel ifadesi olan;

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \exp\{P(\theta).k(x) + S(x) + q(\theta)\} & ,a<x<b \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

formunda fonksiyonları tespit edelim.

$$K(x)=x \quad , \quad P(\theta) = -\theta \quad \text{ve} \quad q(\theta) = \ln\theta$$

dir.

Düzenlilik durumunu sağlayıp sağlamadığını kontrel edelim.

1. $y<\theta<\delta$ iken ne **a** nede **b** , θ ya bağlı değildir yani bağımsızdır.

Fonksiyon incelendiğinde θ parametresi için; $\mathbf{x} \geq 0$ değerleri θ ya bağlı değildir.

2.**P**(θ) belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyondur.

P$(\theta) = -\theta$ şeklinde olup; **P**(θ) ifadesi doğrusal bir fonksiyon olup tanımsız olduğu hiçbir nokta yoktur.Bütün reel sayılar için süreklidir.

3.**a<x<b** iken **K'≠0** ve **S(x)** x'in sürekli bir fonksiyonu olacak şekilde tanımlanmıştır.

K(x)=x şeklinde olup birinci türevi; **K'(x)=1** bulunur. Dolayısıyle **K'(x) ≠ 0** olduğundan bu şart sağlanır.

S(x) fonksiyonu olmadığından dolayı incelemeye gerek yoktur.

Üstel Dağılım Fonksiyonu bu üç şartıda sağladığında **Üstel Ailenin Düzenlilik Durumuna** sahip bir fonksiyonudur.

2.2.3.Gamma Dağılımı Düzenlilik Durumu

Gamma dağılımının üstel formu genel olarak;

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^{n}}{(n-1)!}.x^{n-1}.e^{-\lambda x} & ,x\geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.Bu değılımın genel üstel formu;

$$f(x;\lambda)=\exp\{n.\ln\lambda + (n-1)\ln x - \lambda x - \ln(n-1)!\}$$

şeklinde olup $\lambda=\theta$ olarak alınırsa;

$$f(x;\theta)=\exp\{n.\ln\theta + (n-1)\ln x - \theta x - \ln(n-1)!\}$$

bulunur.Buradaki fonksiyonları düzenlilik formuna göre tespit edelim.

Düzenlilik durumunun genel ifadesi olan;

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \exp\{P(\theta).k(x) + S(x) + q(\theta)\} & ,a<x<b \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

formunda fonksiyonları tespit edelim.

$K(x)=x$ ve $S(x) = (n-1)\ln x$,

$q(\theta) = n.\ln\theta - \ln(n-1)!$ ve $P(\theta) = -\theta$

şeklindedir.

Düzenlilik durumunu sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

1. $\gamma<\theta<\delta$ iken ne **a** nede **b** , θ ya bağlı değildir.

Gerçektende θ parametresi için; $X \geq 0$ değerleri θ ya bağlı değildir.

2.**P(θ)** belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyondur.

$$P(\theta) = -\theta$$

şeklinde olup; **P(θ)** ifadesi doğrusal bir fonksiyon olup tanımsız olduğu hiç bir nokta yoktur.Bütün reel sayılar için süreklidir.

3.**a<x<b** iken **K'≠0** ve **S(x)** x'in sürekli bir fonksiyonudur.

K(x)=x şeklinde olup birinci türevi; **K'(x)=1** bulunur. Dolayısıyle **K'(x) ≠ 0** olduğundan sağlanır.

$$S(x) = (n-1)\ln x$$

olarak tespit edilmiş ve **lnx** fonksiyonu $x > 0$ için sürekli ve **artan** bir fonksiyondur.Fonksiyonun tanım aralığından dolayı belirsizlik durumu söz konusu değildir.

Dolayısıyle **Gamma Dağılımı** bu üç şartıda sağladığından **Üstel Ailenin Düzenlilik Durumuna** sahip bir fonksiyonudur.

2.2.4.Rayleigh Dağılımının Düzenlilik Durumu

Rayleigh dağılımının üstel formu genel olarak;

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}.\exp\left[\dfrac{-x^2}{2\theta^2}\right] & ,x\geq 0 \text{ ve } \theta>0\\ 0 & ,d.d\end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.Bu dağılımın genel üstel formu;

$$f(x;\theta)=\exp\left\{\frac{-x^2}{2\theta^2}+\ln x-2\ln\theta\right\}$$

şeklindedir.

Buradaki fonksiyonları düzenlilik formuna göre tespit edelim.

Düzenlilik durumunun genel ifadesi olan;

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\exp\{P(\theta).k(x)+S(x)+q(\theta)\} & ,a<x<b\\ 0 & ,d.d.\end{cases}$$

formunda fonksiyonları tespit edelim.

$$K(x)=x^2 \quad \text{ve} \quad S(x)=\ln x \quad ,$$

$$P(\theta)=\frac{-1}{2\theta^2} \quad \text{ve} \quad q(\theta)=-2\ln\theta$$

şeklindedir.

Düzenlilik şartlarını sağlayıp sağlamadığını kontrel edelim.

1. $y<\theta<\delta$ iken ne **a** nede **b** , θ ya bağlı değildir.

Gerçektende θ parametresi için; $x \geq 0$ değerleri θ ya bağlı değildir.

2.**P(θ)** belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyondur.

$$P(\theta) = \frac{-1}{2\theta^2}$$

şeklinde olup; **P(θ)** ifadesi doğrusal bir fonksiyon olup tanımsız olduğu hiçbir nokta yoktur.Bütün reel sayılar için $(\theta \neq 0)$ süreklidir.

3.$a<x<b$ iken $K' \neq 0$ ve $S(x)$ x'in sürekli bir fonksiyon olacak şekilde tanımlanmıştır.

$K(x)=x^2$ şeklinde olup birinci türevi; $K'(x)=2x$ bulunur. Dolayısıyle Rayleigh dağılımının tanımından $x \geq 0$ olarak tanımlandığından dolayı $K'(x) \neq 0$ olduğundan bu şart sağlanır.$S(x)$ fonksiyonu;

$$S(x) = \ln x$$

şeklinde olup, $x \geq 0$ için **artan** bir foksiyondur.Belirsizlik durumu söz konusu değildir.

Gamma Dağılım Fonksiyonu bu üç şartıda sağladığından **Üstel Ailenin Düzenlilik Durumuna** sahip bir fonksiyonudur.

Buraya kadar **x** rassal değişkeninin sürekli olması halinde Üstel Aileden türetilebilecek dağılımların düzenliliğini incelenmiştir.x rassal değişkeninin süreklsiz olması halinde Üstel Aileden türetilebilecek dağılımların düzenliliğini inceleyelim.

2.3. Süreksiz Dağılımların Düzenlilik Durumlarının Araştırılması

2.3.1.Bernoulli Dağılımının Düzenlilik Durumu

Genel ifadesi;

$$f(x;p)=\begin{cases} p^x.(1-p)^{1-x} & ,x=0,1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklindedir.Bernoulli Dağılımının Üstel olarak ifadesi ise;

$$f(x;p) = \exp\{x.\ln p + (1-x).\ln(1-p)\}$$

$$f(x;p) = \exp\{x.\ln p + \ln(1-p) - x.\ln(1-p)\}$$

$$f(x;p) = \exp\{x.[\ln p - \ln(1-p)] + \ln(1-p)\}$$

şeklindedir.Düzenlilik durumunun genel ifadesi;

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \exp\{P(\theta).k(x) + S(x) + q(\theta)\} & ,x=a_1,a_2,a_3,\ldots \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklinde olup, fonksiyonları tespit edelim.

Bernoulli Dağılımında $\lambda=\theta$ olarak seçtiğimizde;

$$f(x;\theta) = \exp\{x.[\ln\theta - \ln(1-\theta)] + \ln(1-\theta)\}$$

şekilde elde edilir.

Bu ifadede düzenlilik şartlarını tespit için fonksiyonları bulalım.

$$K(x) = x \quad , \quad P(\theta) = \ln p - \ln(1-p) \quad \text{ve} \quad q(\theta) = \ln(1-\theta)$$

Düzenlilik Durumunun sağlanması için;

1. $\{x; \quad x=a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ kümesi θ ya bağlı değildir.

2. $y<\theta<\delta$ aralığında $P(\theta)$, θ nın belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyonudur. Çünkü;

$$P(\theta) = \ln p - \ln(1-p)$$

şeklinde olup " **p** olasılığının değeri **0 <p<1** olması durumunda belirsizlik olmayacaktır.Dolayısıyle süreklidir.

3.K(x) ; $\{x; \quad x=a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ kümesi üzerinde **x**'in belirsiz olmayan bir fonksiyonudur.Çünkü $K(x) = x$ haliyle birinci açı ortay doğrusunu oluşturmaktadır.

O halde bu üçşartları sağlayan **Bernoilli Dağılımı Düzenli Duruma Sahip Kesikli Olasılık Fonksiyonu**'dur.

2.3.2.Binom Dağılımının Düzenlilik Durumu

Genel ifadesi;

$$f(x;p)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}.(1-p)^{n-x} & ,x=0,1,2......n\\ 0 & ,d.d.\end{cases}$$

şeklindedir.Binom Dağılımının Üstel olarak ifadesi ise;

$$f(x;p)=\exp\left\{\ln\binom{n}{x}+ x\ln p + (n-x)\ln(n-p)\right\}$$

$$f(x;p)=\exp\left\{\ln\binom{n}{x}+ x\ln p + n.\ln(1-p) -x.\ln(n-p)\right\}$$

$$f(x;p)=\exp\left\{\ln\binom{n}{x}+ x.[\ln p -\ln(1-p)] + n.\ln(n-p)\right\}$$

$$f(x;p)=\exp\left\{\ln\binom{n}{x}+ x.\ln\frac{p}{1-p} + n.\ln(n-p)\right\}$$

$$f(x;p)=\exp\left\{\ln\binom{n}{x}+ x.\ln\frac{p}{1-p} + n.\ln(n-p)\right\}$$

şeklinde bulunur.Bernouilli Dağılımında **$p=\theta$** olarak seçtiğimizde;

Düzenlilik Durumunun genel ifadesi;

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\exp\{P(\theta).k(x) + S(x) + q(\theta)\} & ,x=a_1,a_2,a_3,...\\ 0 & ,d.d.\end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

$$f(x;\theta)=\exp\left\{\ln\binom{n}{x}+x.\ln\frac{\theta}{1-\theta}+n.\ln(n-\theta)\right\}$$

Bu ifadede düzenlilik şartlarını tespit için fonksiyonları bulalım.

$K(x)=x$, $P(\theta)=\ln\frac{\theta}{1-\theta}$ ve

$S(x)=\ln\binom{n}{x}$, $q(\theta)=n.\ln(1-\theta)$ bulunur.

Düzenlilik şartlarının sağlanma durumlarını incelenirse;

1. $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,....\}$ kümesi θ ya bağlı değildir.

2. $y<\theta<\delta$ aralığında $P(\theta)$, θ nın belirsiz olmayan süreksiz bir fonksiyonudur. Çünkü;

$$P(\theta)=\ln\frac{\theta}{1-\theta}$$

şeklindedir. $\theta\neq1$ ve $\theta\neq0$ olduğunda 'ln' fonksiyonu tanımlıdır.Dolayısı ile $P(\theta)$ fonksiyonu süreklidir.

3. $K(x)$; $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,....\}$ kümesi üzerinde x'in belirsiz olmayan bir fonksiyonudur.Çünkü $K(x)=x$ haliyle birinci açı ortay doğrusunu oluşturmaktadır.Polinom fonksiyonlar her yerde belirlidir.

O halde bu şartları sağlayan **Binom Dağılımı** düzenli duruma sahip kesikli olasılık fonksiyonudur.

2.3.3.Geometrik Dağılımının Düzenlilik Durumu

$$f(x;p)=\begin{cases} p.(1-p)^{x} & ,x=,1,2.......n \quad \text{ve} \quad 0\leq p\leq 1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

genel ifadesi olan Geometrik Dağılımının Üstel olarak yazılırsa,

$$f(x;p) = \exp\{\ln(1-p)^{x} + \ln p\}$$

$$f(x;p) = \exp\{x.\ln(1-p) + \ln p\}$$

şeklindedir. $p=\theta$ olarak alınır ise;

$$f(x;p) = \exp\{x.\ln(1-\theta) + \ln\theta\}$$

şeklinde bulunur.

Düzenlilik Durumunun genel ifadesi;

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \exp\{P(\theta).k(x) + S(x) + q(\theta)\} & ,x=a_1,a_2,a_3,\ldots \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklinde olup, fonksiyonları tespit edelim.

$$K(x) = x \quad , \quad P(\theta) = \ln(1-\theta)$$

$P(\theta) = \ln(1-\theta)$ ve $K(x) = x$ olur.

Düzenlilik Durumunun sağlanıp sağlamadığını kontrol edelim.

1. $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,....\}$ kümesi θ ya bağlı değildir.

2. $y<\theta<\delta$ aralığında P(θ) , θ nın belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyonudur.

Çünkü,

$$P(\theta) = \ln(1-\theta)$$

şeklindeki fonksiyonunun $\theta<1$ değerleri için P(θ) fonksiyonu **ln** fonksiyonunun özelliğinden dolayı tanımlıdır.Dolayısı ile P(θ) fonksiyonu süreklidir.

3.K(x) ; $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,....\}$ kümesi üzerinde **x**'in belirsiz olmayan bir fonksiyonudur.Çünkü $K(x) = x$ haliyle birinci açı ortay doğrusunu oluşturmaktadır.Polinom tipli bir fonksiyondur.

O halde bu şartları sağlayan **Geometrik Dağılım** düzenli duruma sahip kesikli olasılık fonksiyonudur.

2.3.4.Negatif Binom Dağılımının Düzenlilik Durumu

Genel ifadesi;

$$f(x;p,r)=\begin{cases} \binom{x-1}{r-1}p^r.(1-p)^{x-r} & ,x=,r,r+1,r+2,\ldots\ldots \quad \text{ve} \quad 0\leq p\leq 1 \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklindedir.Bernoulli Dağılımının Üstel olarak ifadesi ise;

$$f(x;p) = \exp\left\{\ln\binom{x-1}{r-1} + r.\ln p + (x-r).\ln(1-p)\right\}$$

$$f(x;p) = \exp\left\{\ln\binom{x-1}{r-1} + r.\ln p + x.\ln(1-p) - r.\ln(1-p)\right\}$$

olarak bulunur.

$p=\theta$ olarak alınır ise;

$$f(x;\theta) = \exp\left\{\ln\binom{x-1}{r-1} + r.\ln\theta + x.\ln(1-\theta) - r.\ln(1-\theta)\right\}$$

ifadesi elde edilir.

Düzenlilik Durumunun genel ifadesi;

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \exp\{P(\theta).k(x) + S(x) + q(\theta)\} & ,x=a_1,a_2,a_3,\ldots \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

formunda olup fonksiyonları tespit edersek;

$$P(\theta) = \ln(1-\theta) \qquad \text{ve} \qquad q(\theta) = r.\ln\left[\frac{\ln\theta}{\ln(1-\theta)}\right]$$

$$K(x) = x \qquad \text{ve} \qquad S(x) = \ln\binom{x-1}{r-1}$$

bulunur.

Düzenlilik Durumunu sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

1. $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ kümesi θ ya bağlı değildir.

2. $y<\theta<\delta$ aralığında $P(\theta)$, θ nın belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyonudur. Çünkü;

$$P(\theta) = \ln(1-\theta)$$

şeklindedir.Bu fonksiyonda $\theta < 1$ değerleri için $P(\theta)$ fonksiyonu '**ln**' fonksiyonunun özelliğinden dolayı tanımlıdır.Dolayısı ile $P(\theta)$ fonksiyonu süreklidir.

3.K(x) ; $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ kümesi üzerinde **x**'in belirsiz olmayan bir fonksiyonudur. $K(x) = x$ haliyle birinci açı ortay doğrusunu oluşturmaktadır.Polinom fonksiyon olduğundan süreksizlik dolayısıyla belirsizlik durumu söz konusu değildir.

Negatif Binom Dağılım bu üç şartıda sağladığından düzenli duruna sahip kesikli olasılık fonksiyonudur.

2.3.5.Poisson Dağılımının Düzenlilik Durumu

Genel ifadesi;

$$P(x;\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^{x}}{x!} & ,x=0,1,2,....... \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

şeklindedir.Poisson Dağılımının Üstel olarak ifadesi ise;

$$P(x;\lambda)=\exp\{-\lambda + \ln\lambda^{x} - \ln x!\}$$

$$P(x;\lambda)=\exp\{-\lambda + x.\ln\lambda - \ln x!\}$$

şeklindedir. $p=\theta$ olarak alınır ise;

$$P(x;\theta)=\exp\{-\theta + x.\ln\theta - \ln x!\}$$

şeklinde bulunur.

Düzenlilik Durumunun genel ifadesi;

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \exp\{P(\theta).k(x) + S(x) + q(\theta)\} & ,x=a_1,a_2,a_3,... \\ 0 & ,d.d. \end{cases}$$

formunda olup fonksiyonları tespit edilmelidir.

Fonksiyonlar,

$$K(x) = x \quad \text{ve} \quad S(x) = -\ \ln x!$$

$$P(\theta) = \ln\theta \quad \text{ve} \quad q(\theta) = -\theta$$

olarak tespit edilir.

Düzenlilik Durumunun sağlanması için;

1. $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ kümesi θ ya bağlı değildir.

2. $y<\theta<\delta$ aralığında $P(\theta)$, θ nın belirsiz olmayan sürekli bir fonksiyonudur. Çünkü;

$$P(\theta) = \ln\theta$$

şeklinde olup belirlidir. $\theta \geq 0$ değerleri için $P(\theta)$ fonksiyonu 'ln' fonksiyonunun özelliğinden dolayı tanımlıdır.Dolayısı ile $P(\theta)$ fonksiyonu süreklidir.

3.K(x) ; $\{x; \quad x=a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ kümesi üzerinde x'in belirsiz olmayan bir fonksiyonudur. $K(x) = x$ haliyle polinom fonksiyon olduğundan dolayı süreksiz olduğu noktalar yoktur.

Poisson Dağılım bu üç şartıda sağladığından düzenli duruna sahip kesikli olasılık fonksiyonudur.

Tablo-3

ÜSTEL AİLEDEKİ SÜREKSİZ DAĞILIMLARIN ÖZELLİKLER TABLOSU

Dağılım	Parametreler	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	Moment Çıkaran Fonk. $E(e^{tx})$	Beklenen Değeri $\mu=E(x)$	Varyansı $\sigma^2=E(x^2)$	Karakteristik Fonk. $\phi(x)=E(e^{tx})$
1.Bernoulli	$0 \le p \le 1$	$f(x)=p^x.q^{1-x}$,x=0,1 =0 diğer dur.	$(p.e^t+q)$	p	$p.q$	$q+p.e^{i.t}$
2.Binom	$0 \le p \le 1$	$f(x)=\binom{n}{x}.p^x.q^{n-x}$,x=0,1,...,n =0 diğer dur.	$(p.e^t+q)^n$	$n.p$	$n.p.q$	$(q+p.e^{i.t})^n$
3.Poisson	$\lambda > 0$	$f(x)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$,x=0,1,... =0 diğer dur.	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{i.t}-1)}$
4.Geometrik	$0 \le p \le 1$	$f(x)=p.q^{x-1}$ x=1,2,.. =0 diğer dur.	$\frac{p.e^t}{1-q.e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p.e^{i.t}}{1-q.e^{i.t}}$
5.Negatif Binom	$0 \le p \le 1$	$f(x)=\binom{x-1}{r-1}.p^r.q^x$,x=r,r+1,... =0 diğer dur.	$\left(\frac{p}{1-q.e^t}\right)^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r.q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-q.e^{i.t}}\right)^r$

Tablo-4

ÜSTEL AİLEDEKİ SÜREKLİ DAĞILIMLARIN ÖZELLİKLER TABLOSU

Dağılım	Parametreler	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu	Moment Çıkaran Fonk. $E(e^{tx})$	Beklenen Değeri $\mu=E(x)$	Varyansı $\sigma^2=E(x^2)$	Karakteristik Fonk. $\phi(x)-E(e^{tx})$
1.Üstel	$\lambda>0$	$f(x)=\lambda.e^{-\lambda x}$ $x>0$ $=0$ diğer dur.	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{i.t}{\lambda}\right)^{-1}$
2.Gamma	$n>0$	$f(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-\lambda x}$ $,x>0$ $=0$ diğer dur.	$\frac{\lambda^n}{(\lambda-t)^n}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{i.t}{\lambda}\right)^{-n}$
3.Rayleigh	$\theta>0$	$f(x)=\left\{\frac{x}{\theta^2}.\exp\left[-\frac{x^2}{2\theta^2}\right]\right\}$ $,x\geq 0$ $=0$ diğer dur.	$e^{\theta^2.t^2/2}.\left(1+\frac{t.\theta.\sqrt{2\pi}}{2}\right)$	$\frac{\theta.\sqrt{2\pi}}{2}$	$\theta^2(1-\frac{\pi}{2})$	$e^{\theta^2.i.t^2/2}.\left(1+\frac{it.\theta.\sqrt{2\pi}}{2}\right)$
4.Normal	$\sigma^2>0$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $,-\infty<x<\infty$	$e^{t\mu-\sigma^2t^2/2}$	μ	σ^2	$e^{it\mu-i\sigma^2t^2/2}$

BÖLÜM III

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Ekonomik olaylar incelendiğinde çeşitli gözlemler sonucunda veriler elde edilir.Bu verilerden(**rassal değişkenlenden**) faydalanılarak çeşitli yargılara varılır.Bu rassal değişkenlerin hiçbir zaman gerçek bir dağılımının olmadığı görülmüştür.Daha doğrusu x rassal değişeninin dağılımı kesinlikle belli olmayıp bazı modellere benzerliğinden yararlanılmaktadır.Çeşitli matematiksel modellerlerle rassal değişkenler arasında benzerlik kurulur.Bu Modeller matematiğin bir konusu olan olasılık teorisinden elde edilmektedir.

Bir x rassal (tesadüfü) değişkenin örneğe seçilme ihtimali üzerinde önemle durulur.Her birimin örneğe seçilme ihtimali aynı olmalıdır.Ekonomik olaylar incelendiğinde her olayın sonucu aynı kalıpta meydana gelmemektedir.

Olasılık teorisinde kullanılan birçok dağılım geliştirilmiştir.Bazıları ise Üstel,Gamma,Poisson,...... dağılımlarıdır.Bu dağılımlar incelendiğinde bir parametreli , iki parametreli ve daha fazla parametre içerdiği gözlenmektedir.Ayrıca parametre benzerliğinden başka, sanki aynı formun özel halleri oldukları görülmektedir.Dağılımlar titizlikle incelendiğinde bazılarının üstel(**exp**) şekilde yazılabildiği görülmektedir.

Dağılımlar için üstel şekilde bir form bulunmuştur.

Bu form; $\mathbf{f(x,\theta) = B(\theta).h(x).exp[Q(\theta).R(x)]}$

şeklindedir.

Bu fonksiyonun genel üstel ifadesi üstel fonksiyonların özellikleri kullanılarak ifadesi,

$$\mathbf{f(x,\theta) = exp[\ln B(\theta) + \ln h(x) + Q(\theta).R(x)]}$$

şeklindedir.

Bu üstel formda uygun fonksiyonların seçimiyle olasılık dağılımları türetilmiştir.Türetilen bu fonksiyonlara genel olarak **Üstel Aileye Mensup Dağılımlar** adı verilmiştir.Bu dağılımlar içerdikleri parametreler itibariyle tek veya çok parametreli dağılımlar adını alır.Bu çalışmada ise Tek Parametri Dağılımlar incelenmiştir.

İncelemelerde Üstel Aileden farklı Dağılım Ailelerinin varlığıylada karşılaşılmıştır.Bu ailelere örnek olarak ise **Cauchy Dağılım Ailesini** gösterebiliriz.

Üstel Aileden türetilebilen, Tek Parametri Dağılımlara **Üstel Aileye Ait Tek Parametreli Dağılımlar** adı verilmiştir.Bu dağılımlar araştırmada geniş bir şekilde incelenmiştir.Dağılımların ortaya çıkma sebepleri, parametreleri, değişkenleri, kullanım alanları ve bazılarının grafikleri gösterilerik üzerlernde durulmuş ve gerekli açıklamalar yapılmıştır.

Bir Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu olması için tanımlı olduğu aralıktaki olasılıkları toplamının 1'e eşit olması şartı incelenmiştir.Ayrıca Momentler ve Moment Çıkaran Fonksiyonlar hakkında bilgi verilmiş ve Momentler arasında mevcut olan bağıntılar üzerinde durulmuştur.Moment Çıkaran Fonksiyon yardımıyle bu dağılımların beklenen değerleri,varyansları, v.s. bulunmuştur.

Genel olarak dağılımlar incelendiğinde hepsinin Moment Çıkaran Fonksiyonunun bulunamadığı kanısına varılmıştır.Bu sebeple dağılımların **Karakteristik Fonksiyonları** bulunarak bu fonksiyonlar yardımıyle Momentleri'nin bulunabileceği gösterilmiştir.

Üstel Aileye ait dağılımların;

1.Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları	:	$[f(x)]$
2.Moment Çıkaran Fonksiyonları	:	$[E(e^{tx})]$
3.Beklenen Değerleri	:	$[E(x)]$
4.Varyansları	:	$Var(x)=[E(x^2)] - [E(x)]^2$
5.Birikimli Dağılım Fonkbiyonları	:	$[F(x)]$
6.Karakteristik Fonksiyonları	:	$[E(e^{itx})]$
7.Düzenlilik Durumları		

incelenerek tablolar halinde sunulmuştur.

Bu Tezin esas konusu olan **Fonksiyonların Düzenlilik Durumu** incelenmiştir.Yapılan incelemelerde; Üstel Aileden türetilebilen ve Olasılık Teorisinde sıkça kullanılan Dağılımların Düzenlilik Durumunu sağladığı görülmüştür. Yani söz konusu olan dağılımlar ile ilgili limit,türev,integral v.s. gibi işlemler yapılmaya elverişli oldukları görülmüştür. Uygulamada örneklem farklılıklarından ve örneklem büyüklüklerinden dağılım etkilenerek tutarsız sonuçlarla karşılaşılmayacağı kanaatine varılmıştır.

O halde sonuç olarak; bir dağılımın güvenilir olarak kullanılabilmesi için Düzenlilik Durumuna sahip olması gerekir. Üstel Dağılım Ailesindeki fonksiyonlar bu Düzenlilik şartlarına haizdir.

KAYNAKLAR

- ANDERSON,T.W.An Indroduction to Multivariate Statistical Analysis, NEW YORK,1958
- CRAMER,H.,Mathematical Mathods of Statistics,PRİNCETON,1946
- COX,D.R, and HİNKLEY,D.V., Theoretical Statistics,LONDON 1974
- ERSOY,N.,Olasılık ve İstatistiği Giriş,ANKARA,1992
- FELLER,T.S.,Introduction to Probability Theory and Applications, NEW YORK,1968
- FERGUSON,T.S.,Mathematical Statistics,NEW YORK,1967
- FERGUSON,T.S.,Mathematical Statistics,NEW YORK,1967
- FISHER, R.A.,Statistical Methods and Scientific Inference,NEW YORK,1973
- FREUND,J. E.,Makhematical Statistics,NEW JERSEY,1980
- GUTMAN,I.,Introductory Engineering Statistics,NEW YORK,1971
-HOGG R.and CRAİNG A., Indroduction to Mathematical Statistical, NEW YORK,1970,s.232
- KARAGÖZ, M.,İstatistik Yöntemleri,MALATYA,1995
- KOUTSOYİANNİS,A.,Theory of Econometrics,ONTARİO, (Çeviren ŞENESEN Ümit),ANKARA,1989
-KÖKSAL B.,İstatistik,İSTANBUL,1980
- KÖKSAL,B.,A.,Boğaziçi Üniversitesi Dergisi,İSTANBUL,1968
- LİNDGREN, B. W.,Statistıcal Theory,NEW YORK,1976
- MENDENHALL,W.,Indroduction to Lineer Models and The Desing and Analysis of Experiments,,Duxbury Press,NEW YORK,1968

- SCHEFFE,H.,The Analysis of Variance,NEW YORK,1959
- SERPER,Ö.,Uygulamalı İstatistik-2,İSTANBUL,1986
- SARAÇOĞLU ,B. ve ÇEVİK,F.,Matematiksel İstatistik,
  ANKARA,1995
- TAYLOR,L.r D.,Probability And Mathematical Statistics,NEW YORK,1974
- TSOKOY, C. P.,Prabability Distributions,CALİFORNİA,1972
-ÜNVER Ö.,Uygulamalı İstatistik Yöntemler,ANKARA,1992
- WİLKS,S.S., Mathemetical Statistical Inference,NEW YORK,1973
- YAMANE,T.,Statistics,An Introductory Analysis.TOKYO,1969