ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

LİNEER OLMAYAN SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN SINIRSIZ KATSAYISIYLA OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Nigar YILDIRIM AKSOY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2009

Her Hakkı Saklıdır

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ danışmanlığında, Nigar YILDIRIM AKSOY tarafından hazırlanan bu çalışma 01/06/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	*İmza*:.....................................
Üye : Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ	*İmza*:.....................................
Üye : Prof. Dr. Ahmet KAÇAR	*İmza*:.....................................
Üye : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM	*imza*:.....................................
Üye : Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*:.....................................
Üye : Doç. Dr. Murat SUBAŞI	*İmza*:.....................................
Üye : Yrd. Doç. Dr. Ercan ÇELİK	*İmza*:.....................................

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

....

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER OLMAYAN SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN SINIRSIZ KATSAYISIYLA OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN SONLU FARK YAKLAŞIMI

Nigar YILDIRIM AKSOY

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Ortak Danışman: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

Bu tezde, lineer olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. İlk bölümde optimal kontrol teorisi hakkında genel bir giriş yapıldıktan sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan teoremler, lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak lineer olmayan kısımda bir reel katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Daha sonra, lineer olmayan kısımda bazı özel şartlar altında bir kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Her iki problem içinde olası kontroller kümesi, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu problemler için, başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış, optimal kontrol problemlerinin iyi konulmuş olması için gerekli olan sorular incelenmiş, fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiş ve optimal kontrol problemlerinin çözümü için bir gerek şart elde edilmiştir. Daha sonra, bu bölümde ele alınan optimal kontrol problemlerine sırasıyla sonlu farklar yöntemi uygulanmış ve sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde elde edilen bulgular verilmiş olup, beşinci bölümde bu tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2009, 150 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, Optimal kontrol, Ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı, Sonlu farklar metodu, Kontrol.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH UNBOUNDED COEFFICIENT AND THEIR FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION

Nigar YILDIRIM AKSOY

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Co-Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

In this thesis, the optimal control problems for nonlinear Schrödinger equation are considered. In the first chapter, after giving a general introduction about the optimal control theory, in the second chapter, theorems, lemmas and some mathematical concepts used in this thesis are presented. In the third chapter, firstly, a optimal control problem for Schrödinger equation that exists a real coefficient in the nonlinear part is considered. Secondly, a different optimal control problem for Schrödinger equation that exists a complex coefficient under some special condition in the nonlinear part is considered. For these two problems, set of probable controls is space of measurable squarel integrable functions. For these problems, the existence and uniqueness of the solutions of initial boundary value problems are proved, the questions which are necessary for checking whether optimal control problems are well posed are investigated, it is showed that functional is differentiable and a necessary condition for the solution of optimal control problems is obtained. Then, respectively, the finite difference method is applied to these optimal control problems considered in this chapter and the convergence of the finite difference approximation according to the functional is proved. In the fourth chapter, obtained findings are given and it is emphasized that this thesis different from the former studying in the fifth chapter.

2009, 150 Pages

Keywords: Schrödinger equation, Optimal control, The space of measurable squarel integrable functions, The finite differences method, Control.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV ve Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ danışman hocalarıma en içten şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olan değerli eşim Eray AKSOY'a da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nigar YILDIRIM AKSOY
Mayıs 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET...i
ABSTRACT...ii
TEŞEKKÜR..iii
SİMGELER DİZİNİ...vi
1. GİRİŞ...1
2. KURAMSAL TEMELLER...5
3. MATERYAL ve YÖNTEM..17
3. 1. Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemi..17
3.1.1. Optimal kontrol probleminin konulması...17
3.1.2. Başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği.............18
3.1.3. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği......................38
3.1.4. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi..45
3.1.5. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart...............................52
3.2. Lineer Olmayan Kısımda Kompleks Katsayı Olan Schrödinger Denklemi için Optimal kontrol Problemi...55
3.2.1. Optimal kontrol probleminin konulması...55
3.2.2. Başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği.............57
3.2.3. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği......................83
3.2.4. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi..89
3.2.5. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart...............................95
3.3. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü..99

3.3.1. Optimal kontrol probleminin diskritleştirilmesi 99

3.3.2. Fark şemasının kararlılığı 102

3.3.3. Fark şemasının hatası için kestirim 108

3.3.4. Fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı 122

3.4. Lineer Olmayan Kısımda Kompleks Katsayı Bulunan Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü 129

3.4.1. Optimal kontrol probleminin diskritleştirilmesi 130

3.4.2. Fark şemasının kararlılığı 132

3.4.3. Fark şemasının hatası için kestirim 134

3.4.4. Fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı 143

4. ARAŞTIRMA BULGULARI 145

5. SONUÇ 147

KAYNAKLAR 148

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{\circ}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$\ell > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
$\Omega = (0,l) \times (0,T)$	Verilen bölge
$\Omega_t = (0,l) \times (0,t)$	Verilen bölge
$\tilde{\Omega}_t = (0,l) \times (t,T)$	Verilen bölge
$\delta_{\bar{t}}\phi_{jk} = (\phi_{jk} - \phi_{jk-1}) / \tau$	t ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} = (\phi_{jk} - \phi_{j-1k}) / h$	x e göre sol fark
$\delta_{x}\phi_{jk} = (\phi_{j+1k} - \phi_{jk}) / h$	x e göre sağ fark
$\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk} = (\phi_{j+1k} - 2\phi_{jk} + \phi_{j-1k}) / h^2$	x e göre ikinci mertebeden fark

1. GİRİŞ

Optimal kontrol teorisi günlük yaşamda hemen her alanda karşımıza çıktığından aslında çok eski bir tarihe dayanır. Var olan alternatifler arasından "en iyi, en mükemmel" olanı seçmek her zaman olağandır. Matematikte de bu "en iyi, en mükemmel" olanı tercih etmek veya bulmak "optimal" olarak ifade edilir.

İnsanlar yüzyıllar boyunca karşılaştıkları problemlere "en iyi çözümü getirmek" gibi bir ihtiyaçla karşılaşmışlardır. Karşılaşılan problemler asırlar boyunca kendine özgü yöntemlerle çözülmüş ve tüm problemlerin çözümüne yol gösterecek yaklaşımlar oluşmamıştır. Ancak daha sonraları "birçok doğa yasasının varyasyon prensipleriyle ifade edilebilir" olmasının anlaşılmasıyla matematiğin çok önemli bir dalı olan "varyasyon hesabı" oluşmuştur.

Fakat son 50-60 yılda teknolojinin hızla gelişmesi sonucu, özellikle de uzay teknolojisinde karşılaşılan bir takım problemler klasik varyasyon hesabı yöntemleri ile çözülemediğinden yeni metodların geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu süreçte, Dinamik programlama ve Pontryagin' in maksimum prensibinin formülüzasyonu ile 1950 lerde modern anlamda optimal kontrol teorisinin temelleri atılmış oldu. Optimal kontrol teorisinin gelişmesinde dünyaca ünlü matematikçilerden L. S. Pontryagin, J. L. Lions, A. G. Butkovskiy, A. İ. Yegorov, Yu. V. Egorov, K. A. Lurye, V. I. Plotnikov, G. T. Ahmedov, A. D. İskenderov, F. P. Vasilyev, T. Zolezzi, C. Sokolowski, M. G. Bidout, M. Goebel ve diğer bilim adamlarının önemli rolleri olmuştur.

Schrödinger denklemiyle ifade edilen kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol teorisi de modern optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıktığından böyle problemlerin incelenmesi hem teorik hem de pratik bir öneme sahiptir.

1926 de ünlü fizikçi Erwin Schrödinger tarafından kurulan Schrödinger denklemi bir dinamik sistemin durumunun değişimi hakkında bilgi verdiğinden, Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemlerinin incelenmesi ile kuantum mekaniğinde potansiyelin bulunması arasında çok yakın bir ilişki vardır (Landau and Lifşis 1963; Butkovskiy and Samoilenko 1984). Dış kuvvetlerin etkisi ile hareketi sınırlanan bir parçacık için sistemin potansiyelini fizikçiler ilk olarak sezgisel bilgilerle belirlemişlerdir.

Kuantum mekanik potansiyelin bulunması problemini çözmek için varyasyonel metodlar A. V. Cavadov ve A. D. İskenderov' un 1965 yılında yayınladıkları çalışmalarda kullanılmış ve sonuçta öğrenilen problemler lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri için optimal kontrol problemlerine indirgenmiştir. Bu problemlerde kontrol olarak Schrödinger denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyeli kullanılmıştır. Kontrolün denklemin katsayısında olması durumunda kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemleri ilk kez ciddi bir biçimde A. D. İskenderov ve G. Ya. Yagubov tarafından çalışılmıştır.

Optimal kontrol problemleri incelenirken bir takım soruların cevapları aranır. Bunlar,

1. Optimal kontrol probleminin iyi konulup konulmadığıdır. Bu araştırılırken, optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı, amaç fonksiyonelinin alttan sınırlı olup olmadığı ve herhangi minimalleştirici dizinin minimum noktalar kümesine yakınsayıp yakınsamadığı incelenir.
2. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeter şartlar nelerdir?
3. Optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için hangi hesaplama metodlarının kullanılacağıdır.

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemlerine ait olan bu sorular A. G. Butkovskiy, Yu. İ. Samoilenko, A. D. İskenderov, F. P. Vasilyev, M. A. Vorontsov, V. I. Shmalgauzen, G. Ya. Yagubov, M. M. Potapov, A. V. Razgulin, Dın Nıo Hao, N. Silla, B. Yıldız, M. A. Musayeva, N. M. Mahmudov, M. Subaşı, H. Yetişkin ve diğer bilim adamlarının çalışmalarında cevaplandırılmıştır. Ayrıca Schrödinger denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyelin karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda, optimal kontrol problemlerine ait olan bu sorular ilk olarak İskenderov (2001), Cances *et al.* (2000) ve Baundoin *et al.* (2005) çalışmalarında ve Yetişkin (2005) in doktora tezinde incelenmiştir. Söylemek gerekir ki, Cances *et al.* (2000) ve Baundoin *et al.* (2005) çalışmalarında durumu Schrödinger denklemi için Cauchy problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. Ancak bu sorular, lineer olmayan Schrödinger denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyelin, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda yeterli incelenmemiş olup, konulma açısından daha önce incelenen problemlerden farklı olduğundan bu çalışma hem teorik hem de pratik bir öneme sahiptir.

Bu tez çalışması, lineer olmayan Schrödinger denklemiyle ifade edilen sistemler için ele alınan optimal kontrol problemlerini incelemeye ve yukarıda bahsettiğimiz soruları cevaplamaya yönelik olarak hazırlanmıştır.

Tezin ilerleyen bölümlerinde ilk olarak, 2. bölümünde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan L_p uzayları ve Sobolev uzaylarının yanı sıra bir sonraki bölümde kullanacağımız teoremler ve lemmalar ile bazı kavramların tanımları verilmiştir.

3.1. bölümde lineer olmayan Schrödinger denkleminin sınırsız katsayısıyla bir optimal kontrol problemi göz önüne alınmıştır. Bu problem için ilk olarak, optimal kontrol problemi konulmuş ve daha sonra lineer olmayan Schrödinger denklemiyle ifade edilen başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği, optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği araştırılmış ve optimal kontrol probleminin çözümü için bir gerek şart elde edilmeye çalışılmıştır.

3.2. bölümde lineer olmayan kısımda kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu problem için öncelikle, optimal kontrol problemi konulmuş ve lineer olmayan Schrödinger denklemiyle ifade edilen başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Daha sonra optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği araştırılmış ve optimal kontrol probleminin çözümü için bir gerek şart elde edilmeye çalışılmıştır.

3.3. bölümde 3.1. bölümde göz önüne aldığımız optimal kontrol probleminin bir özel haline nümerik çözüm metodlarından sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Bu amaçla öncelikle optimal kontrol problemi diskritleştirilmiş, daha sonra fark şemasının kararlılığı ve fark şemasının hatası ile fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı araştırılmıştır.

3.4. bölümde 3.2. bölümde ele alınan optimal kontrol probleminin bir özel haline sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Bu amaçla önce optimal kontrol problemi diskritleştirilmiş ve daha sonra fark şemasının kararlılığı, fark şemasının hatası ile fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı incelenmiştir.

4. bölümde, yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bulgular verilmiş olup, tezi sonlandıran 5. bölümde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya koyulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız teoremler, lemmalar ile bazı uzayların ve kavramların tanımlarını vereceğiz:

Tanım 2.1: $L_2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\overline{v}(x)dx$$
$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.2: $L_\infty(0,l)$ Banach uzayı olup, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = vrai\sup_{x\in(0,l)}|u(x)| = ess\sup\{|u(x)| : x\in(0,l)\}$$
$$= \inf\left\{c \geq 0 : \overset{o}{\forall}\, x\in(0,l) \text{ için } |u(x)| \leq c\right\}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.3: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)dxdt,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.4: $L_\infty(\Omega)$ Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai\sup_{(x,t)\in\Omega}|\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.5: $C^k\left([0,T],B\right)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlanmış k. mertebeden sürekli türevlere sahip ve değerleri B-Banach uzayına ait fonksiyonların uzayıdır. Burada norm

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)} = \sum_{m=0}^{k}\max_{0\le t\le T}\left\|\frac{d^m u(t)}{dt^m}\right\| < +\infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.6: $L_2\left([0,T],B\right)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left(\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2 dt\right)^{1/2} < +\infty.$$

Tanım 2.7: u fonksiyonu D bölgesinde tanımlı bir fonksiyon ve D de u nun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesi K olsun. Bu K kümesinin kapanışı olan $\bar{K}$ kümesine u nun supportu denir. Eğer $\bar{K}$ kümesi kompakt ise u ya D üzerinde kompakt supporta sahiptir denir.

Tanım 2.8: D, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. D üzerinde her mertebeden sürekli diferansiyellenebilir, kompakt supporta sahip $\phi : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu test fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu fonksiyonlarının uzayı $C_0^\infty(D)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9: D, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Eğer D nın her kompakt K alt kümesinde

$$\int_K |f|dx < \infty$$

ise f ye D üzerinde lokal integrallenebilirdir denir ve $f \in L_1^{loc}(D)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10: A, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, $u, v \in L_1^{loc}(A)$ ve α bir multiindeks olsun. Her $\phi \in C_0^\infty(A)$ test fonksiyonları için

$$\int_A uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_A v\phi dx$$

şartını sağlayan $v = D^\alpha u$ fonksiyonuna u nun α. mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevi denir. Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ ve $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ şeklindedir.

Tanım 2.11: $W_2^1(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\overline{\phi}(x) + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}(x)}{\partial x} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0,l)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0,l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.12: $W_2^2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\overline{\phi}(x) + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\frac{\partial \overline{\phi}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{\phi}(x)}{\partial x^2} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^2(0,l)}},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l).$$

Tanım 2.13: $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.14: $\{x_n\}$, H hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için $\lim_{n\to\infty} (x_n, y)_H = (x, y)_H$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyordur denir.

Tanım 2.15: $\{x_n\}$, $(X, \|\ \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına normda ya da kuvvetli yakınsar denir.

Tanım 2.16: $\{f_n\}$, bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her bir $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n\}$ dizisi X üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsar denir. Yani, verilen $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(x,\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Tanım 2.17: $\{f_n\}$, bir X uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer hemen hemen bütün $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n(x)\}$ dizisi bir $f(x)$

fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsar denir. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ eşitliğini sağlamayan noktaların kümesinin ölçümü sıfırdır.

Tanım 2.18: Sürekli fonksiyonların uzayı üzerinde

$$\| f \| = \sup_{x\in X} | f(x) |$$

olarak tanımlanan norm düzgün ya da sup normu olarak adlandırılır. $\{ f_n \}$, bir X metrik uzayı üzerinde sınırlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$ oluyorsa $\{ f_n \}$ dizisi $f \in X$ fonksiyonuna düzgün yakınsar denir. Burada norm sup normudur.

Tanım 2.19: V , X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in V$ oluyorsa, V kümesine X de konveks (dışbükey) küme denir.

Tanım 2.20: f konveks bir X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

oluyorsa f ye konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.21: $\left(X, \| \ \|\right)$ bir normlu uzay olsun. $0 < \varepsilon \le 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için, eğer $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x - y\| \ge \varepsilon$ iken $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| \le 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\left(X, \| \ \|\right)$ uzayına düzgün konveks uzay denir. $1 < p < \infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks uzaydır.

Tanım 2.22: $\left(X, \| \ \|\right)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E de bir limit noktası varsa E kümesine X de kompakt küme denir.

Tanım 2.23: E, $(X,\| \|)$ Banach uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer E içindeki her $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine $(X,\| \|)$ de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.24: X normlu uzayında bir E kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E deyse E kümesine X de kapalı küme denir.

Tanım 2.25: X, Banach uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir x elemanına zayıf yakınsadığında $x \in E$ ise E kümesine X de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 2.26: X, bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X in her bir x elemanı, E nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise E ye X de yoğundur denir.

Tanım 2.27: X bir vektör uzayı olmak üzere, $l : X \to \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) lineer operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X in duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.28: X ve Y normlu uzaylar ve $f : X \to Y$ bir operatör olsun. X de sınırlı olan her E alt kümesi için $f(E)$, Y de ön-kompakt ise f ye kompakt operatör denir. Yani, bütün sınırlı $E \subset X$ için $\overline{f(E)}$, Y de kopmaktır.

Tanım 2.29: X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer,

i) X, Y nin bir alt vektör uzayı ve

ii) Her $x \in X$ için $Ix = x$ olarak tanımlanan $I : X \to Y$ özdeşlik operatörü sürekliyse,

X uzayı Y uzayına (sürekli) gömülür denir. Yani, $X \subset Y$ ve her $x \in X$ için $\|Ix\|_Y \le M\|x\|_X$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer I operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir.

Tanım 2.30: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k) \ge J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 2.31: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k) \ge J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı süreklidir denir.

Tanım 2.32: F, bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1,\ t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t_1) - f(t_2)| \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa F ye I üzerinde aynı dereceden sürekli (eşsürekli) dir denir.

Tanım 2.33: F, bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $f \in F$ için $|f(t)| \le M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa F ye I üzerinde sınırlıdır denir.

Teorem 2.1 (Arzela-Ascoli): Sınırlı bir I aralığı üzerinde F, $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer F, sonsuz, sınırlı ve aynı dereceden süreki ise F, I üzerinde düzgün yakınsak olan bir dizi içerir (Hsieh and Sibuya 1999).

Tanım 2.34: B herhangi bir Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma)=\{v : v\in B,\ \|v-u\|<\gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B\to 0}\frac{o(h,u)}{\|h\|_B}=0$$

olacak şekilde $\Delta J(u)=J(u+h)-J(u)=\left(J'(u),h\right)_B+o(h,u)$ şartını sağlayan $J'(u)\in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.35: $D\subset\mathbb{R}^n$ bir bölge olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde $|z|<\sigma$ şartını sağlayan tüm z ler için $1\le p<\infty$ iken $\|f(x+z)-f(x)\|_{L_p(D)}<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\sigma>0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna L_p normu anlamında süreklidir denir.

Teorem 2.2: $1\le p<\infty$ iken $L_p(D)$ den olan her fonksiyon L_p normu anlamında süreklidir (Mikhailov 1983).

Teorem 2.3: $D\subset\mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge olsun. Herhangi $u(x)\in \overset{0}{W}{}^1_m(D)$ fonksiyonu ve $m\ge 1,\ r\ge 1$ sayıları için $\alpha=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\frac{1}{r}\right)^{-1}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_q(D)}\le\beta\|u_x\|^{\alpha}_{L_m(D)}\|u\|^{1-\alpha}_{L_r(D)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca,

1. $m\ge n=1$ için $q\in[r,\infty]$ ve $\beta=\left(1+\frac{(m-1)r}{m}\right)^{\alpha}$ dır.

2. $n>1$ ve $m<n$ için $\beta=\left(\frac{(n-1)m}{n-m}\right)^{\alpha}$ ve eğer, $r\le\frac{nm}{n-m}$ ise $q\in\left[r,\frac{nm}{n-m}\right]$ ve $r\ge\frac{nm}{n-m}$ ise $q\in\left[\frac{nm}{n-m},r\right]$ dir.

3. $m>n>1$ için $q\in[r,\infty)$ ve $\beta=\max\left\{\frac{q(n-1)}{n},1+(m-1)mr\right\}^{\alpha}$ dır (Ladyzenskaja *et al.* 1968).

Teorem 2.4 (Weierstrass Teoremi): U , B Banach uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J(u)$ ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu takdirde $J_*=\inf\limits_{U} J(u)>-\infty,\ U_*=\{u\in U: J(u)=J_*\}\neq\varnothing$ zayıf kompakttır ve U dan alınan herhangi minimalleştirici dizi, minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar (Vasilyev 1981).

Teorem 2.5: Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha>0,\ \beta\ge1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall w\in G$ için

$$J_\alpha(v)=I(v)+\alpha\|v-w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta>1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır (Goebel 1979).

Teorem 2.6: U, B-Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_*=\left\{u\in U:\ J(u)=J_*=\inf\limits_{U} J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_*\in U_*$ ve $\forall u\in U$ için $\left(J'(u_*),u-u_*\right)_B\ge0$ şartı sağlanır (Vasilyev 1981).

Teorem 2.7 (Fubini): $Q_n, \mathbb{R}^n$ nin sınırlı bir bölgesi ve $Q_m, \mathbb{R}^m$ in sınırlı bir bölgesi olmak üzere $Q_n \times Q_m$ bölgesinde $f(x,y)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Farz edelim ki $f(x,y)$ fonksiyonu $Q_{n+m} = Q_n \times Q_m$ bölgesinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(x,y)$ fonksiyonu hemen hemen $x \in Q_n$ için $y \in Q_m$ ye göre, hemen hemen $y \in Q_m$ için $x \in Q_n$ ye göre integrallenebilirdir. Ayrıca

$$\int_{Q_m} f(x,y)dy \text{ ve } \int_{Q_n} f(x,y)dx$$

fonksiyonları sırasıyla x ve y ye göre integrallenebilir olup

$$\int_{Q_{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{Q_n} dx \int_{Q_m} f(x,y)dy = \int_{Q_m} dy \int_{Q_n} f(x,y)dx$$

eşitliği geçerlidir (Mikhailov 1983).

Teorem 2.8: $D \subset \mathbb{R}^n$, C^1 sınıfının sınırlı bir bölgesi olsun.

1. Eğer $p \geq 1,\ 1 \leq q < \infty,\ 0 \leq r < m,\ m - r - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$ ise $W_p^m(D)$ uzayı $W_q^r(D)$ uzayına (sürekli) gömülür. Eğer $m - r - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$ ise bu gömülme kompakt olur.

2. Eğer $p(m-r) > n$ ise $W_p^m(D)$ uzayı $C^r(\bar{D})$ uzayına kompakt gömülür (Sobolev 1988).

Lemma 2.1: $D \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge olsun. Eğer $\{u_k(x)\}$ fonksiyonlar dizisi $L_q(D)$ $(q \geq 1)$ uzayında bir $u(x)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyor ise bu takdirde $\{u_k(x)\}$ dizisinden $u(x)$ fonksiyonuna D de hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Ayrıca $\{u_k(x)\}$ dizisinin D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsaması, D üzerinde hemen hemen düzgün yakınsamayı gerektirir (Ladyzenskaja *et al.* 1967).

Lemma 2.2: $\{u_k(x)\}$ bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere, eğer $q>1$ ve $k=1,2,...$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \le c$ ise bu durumda $\{u_k(x)\}$ den $L_q(D)$ de zayıf yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Eğer $k=1,2,...$ için $\{u_k(x)\}$, D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \le c$ ise bu durumda $\{u_k\}$ dizisi $q^* < q$ için $L_{q^*}(D)$ de u ya kuvvetli yakınsar; $L_q(D)$ de ise u ya zayıf yakınsar (Ladyzenskaja *et al.* 1968).

Lemma 2.3: $f(x,t,u)$ fonksiyonu $\{(x,t)\in\Omega,\ u\in(-\infty,\infty)\}$ kümesinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ve hemen hemen $(x,t)\in\Omega$ için u ya göre sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $L_1(\Omega)$ dan olan $\{u_k(x,t)\}$ dizisi, $L_1(\Omega)$ dan olan $u(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|f(.,.,u_k(.,.))\|_{L_q(\Omega)} \le c$ ise bu durumda $q^* < q$ için $f(x,t,u_k(x,t))$ fonksiyonlar dizisi $L_{q^*}(\Omega)$ normunda $f(x,t,u(x,t))$ fonksiyonuna yakınsar; $L_q(\Omega)$ da ise zayıf yakınsar. Eğer $\{u_k(x,t)\}$ dizisi $L_1(\Omega)$ da u fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|u_k\|_{L_q(\Omega)} \le c$ ise bu takdirde $\{u_k(x,t)\}$ dizisi u ya $q^* < q$ için $L_{q^*}(\Omega)$ da kuvvetli yakınsar (Ladyzenskaja *et al.* 1967).

Lemma 2.4 (T. H. Gronwall): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K\exp\left(L(t-t_0)\right)$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir (Hsieh and Sibuya 1999).

Lemma 2.5 (Gronwall Lemmasının ayrık aynısı): Eğer $a \geq 0,\ b \geq 0$ olmak üzere $\varphi_j,\ j = \overline{0, N}$ sayıları

$$0 \leq \varphi_0 \leq a,\ 0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b\sum_{m=0}^{j} \varphi_m,\ \ j = \overline{0, N-1}$$

şartlarını sağlıyor ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j,\ \ j = \overline{0, N}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \leq \varphi_{j-1} \leq a + b\sum_{m=j}^{N-1} \varphi_m,\ \ j = \overline{0, N-1},\ \ 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a,$$

şartları sağlanıyor ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^{N-j-1},\ \ j = \overline{0, N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir (Vasilyev 1981).

Lemma 2.6 (Cauchy-Bunjakovskii Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_\Omega u\bar{v}\,dx\,d\tau \right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzenskaja *et al.* 1968).

Lemma 2.7 (ε-Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzenskaja *et al.* 1968).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemi

Bu bölümde lineer olmayan Schrödinger denkleminin sınırsız katsayısıyla optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Burada olası kontroller kümesi ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır.

3.1.1. Optimal kontrol probleminin konulması

$l>0,\ T>0$ verilen sayılar ve $x\in(0,l),\ t\in(0,T),\ \Omega_t=(0,l)\times(0,t),\ \Omega=\Omega_T$ olmak üzere lineer olmayan Schrödinger denklemi için aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi ile ifade edilen sistemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi-v(x)\psi+a_1|\psi|^2\psi=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega \tag{3.1}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l) \tag{3.2}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\quad t\in(0,T). \tag{3.3}$$

Burada $\psi=\psi(x,t)$ dalga fonksiyonu, $i^2=-1,\ a_0>0,\ -\infty<a_1<\infty$- verilen sayılar, $a(x)$-ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olup

$$0\le a(x)\le\mu_0,\quad \overset{o}{\forall}x\in(0,l),\quad \mu_0=sabit>0 \tag{3.4}$$

şartını sağlar; $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ verilen fonksiyonlar olup

$$\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\quad f\in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{3.5}$$

şartını sağlar. $v=v(x)$ ise kontrol fonksiyonu olup $b_0>0$ bir sabit olmak üzere

$$V\equiv\left\{v=v(x):v\in L_2(0,l),\quad \|v\|_{L_2(0,l)}\le b_0\right\}$$

kümesinden seçilir.

Şimdi aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v)=\int_0^l \left|\psi(x,T)-y(x)\right|^2 dx+\alpha\left\|v-w\right\|_{L_2(0,l)}^2 \qquad (3.6)$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde (3.1)-(3.3) şartları altında minimumunun bulunması gerekir. Burada $\alpha\geq 0$-verilen sayı ve $w,y\in L_2(0,l)$-verilen fonksiyonlardır. Bu optimal kontrol problemini kısaca (3.1)-(3.3), (3.6) problemi olarak adlandıracağız.

Her bir $v\in V$ için (3.1)-(3.3) şartları altında $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi gerçekte lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan $\forall t\in[0,T]$ ve $\overset{o}{\forall}\, x\in(0,l)$ için (3.1)-(3.3) şartlarını sağlayan genelleşmiş çözüm anlaşılır. Burada $\overset{o}{\forall}$ işareti "hemen hemen her yerde" anlamına gelir.

3.1.2. Başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri için sınır değer problemleri daha önce Yakupov (1970), Lions and Magenes (1972), Butkovskiy and Samoilenko (1984), İskenderov and Yagubov (1989), Yagubov (1994), Yagubov and Musayeva (1997), İskenderov (2001), Yetişkin (2005) vs. çalışmalarında incelenmiştir. Ancak, bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar bizim ileri sürdüğümüz optimal kontrol problemini incelemek için yeterli değildir. Çünkü söz konusu olan çalışmalarda diferansiyel denklemin katsayıları çoğu zaman sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar olarak alınmıştır. Bizim göz önüne aldığımız problemde ise denklemin katsayısı olan $v(x)$ kontrol fonksiyonu $L_2(0,l)$ uzayına aittir ki, bu da önceki çalışmalardaki fonksiyonlar sınıfından daha geniş bir sınıftır. Bu nedenle (3.1)-(3.3),(3.6) problemini incelediğimiz için öncelikle (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer problemini incelememiz gerekir.

Şimdi $\forall v \in V$ için (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer problemini göz önüne alalım. Bu problemin çözümü için aşağıdaki hüküm geçerlidir:

Teorem 3.1.2.1: Farz edelim ki $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları (3.4)-(3.5) şartlarını sağlasın. Bu takdirde her bir $v \in V$ için (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü vardır, tekdir ve bu çözüm için $\forall t \in [0,T]$ olduğunda

$$\|\psi(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq$$
$$c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^6_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^{18}_{L_2(0,l)} + \|f\|^{18}_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.7}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_0 > 0$, t-den bağımsız belirli bir sayıdır.

İspat: Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanacağız. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemi olarak

$$Lu_k(x) = -a_0\frac{d^2u_k(x)}{dx^2} + a(x)u_k(x) = \lambda_k u_k(x), \quad x \in (0,l)$$
$$u_k(0) = u_k(l) = 0, \quad k = 1,2,...$$

özdeğer probleminin λ_k özdeğerlerine karşılık gelen $u_k = u_k(x),\ k = 1,2,...$ özfonksiyonlarını alalım. Burada

$$L = -a_0\frac{d^2}{dx^2} + a(x)$$

şeklindedir. Ladyzenskaja and Ural'ceva (1973) çalışmasından bildiğimiz gibi bu özdeğer probleminde özdeğer olan $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,2,...$ lar reeldir ve negatif değildir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar da reeldir ve $L_2(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzaylarında ortogonaldır. $u_k = u_k(x)$ fonksiyonlarının $L_2(0,l)$ uzayında ortonormal olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\left(u_k, u_m\right)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x)u_m(x)dx = \delta_k^m \tag{3.8}$$

olsun. Burada δ_k^m,

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}, \quad k, m = 1, 2, ...$$

şeklinde olup Kronecker sabitidir. Ayrıca $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzaylarında ortogonallık aşağıdaki gibidir:

$$[u_k, u_m] = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[a_0 \frac{du_k(x)}{dx} \frac{du_m(x)}{dx} + a(x)u_k(x)u_m(x) \right] dx = \lambda_k \delta_k^m, \; k = 1, 2, ...$$

$$\begin{aligned} \{u_k, u_m\} &= (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(0,l)} \\ &= \int_0^l \left(-a_0 \frac{d^2u_k(x)}{dx^2} + a(x)u_k(x) \right)\left(-a_0 \frac{d^2u_m(x)}{dx^2} + a(x)u_m(x) \right) dx \\ &= \lambda_k^2 \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Farz edelim ki $u_k = u_k(x)$ fonksiyonları için

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \leq d_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.9}$$

şartı sağlansın. Bu eşitsizlikte $d_k, \; k = 1, 2, ...$ lar herhangi pozitif sayılardır.

Galerkin yöntemine göre (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün yaklaşımları

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x) \tag{3.10}$$

şeklinde aranır. Burada $C_k^N(t)$ katsayıları $C_k^N(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} = \left(\psi^N, u_k\right)$ formülü ile tanımlanıp aşağıdaki sistemin çözümüdür:

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k \right) = \left(a_0 \frac{\partial \psi^N}{\partial x}, \frac{du_k}{dx} \right) + \left(a\psi^N, u_k \right) + \left(v\psi^N, u_k \right) - \\ - \left(a_1 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k \right) + f_k(t), \quad k = \overline{1, N} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$C_k^N(0) = \left(\psi^N(.,0), u_k\right)_{L_2(0,l)} = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k, \quad k = \overline{1, N}. \tag{3.12}$$

Burada $f_k(t) = \left(f(.,t), u_k \right)_{L_2(0,l)}$, $k = \overline{1,N}$ şeklindedir.

Görüldüğü gibi (3.11)-(3.12) şartlarından $C_k^N(t)$ lerin bulunması problemi sabit katsayılı lineer olmayan I. mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy problemidir ve sistemin sağ tarafı karesel integrallenebilir bir fonksiyondur. Pontryagin (1976) çalışmasından bildiğimiz gibi bu problem $[0,T]$ aralığında en az bir lokal çözüme sahiptir. Bu Cauchy probleminin tüm $[0,T]$ aralığında global çözümünün varlığı için (3.11)-(3.12) probleminin tüm mümkün çözümlerinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 3.1.2.2: (3.11)-(3.12) Cauchy probleminin çözümü için

$$\sum_{k=1}^{N} \left| C_k^N(t) \right|^2 + \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{dC_k^N(t)}{dt} \right|^2 \le \left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le$$
$$c_0 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^6_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^{18}_{L_2(0,l)} + \|f\|^{18}_{L_2(\Omega)} \right), \ \forall t \in [0,T] \tag{3.13}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_0 > 0$ sayısı t-den bağımsızdır.

İspat: (3.11) sisteminde yer alan k. denklem $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpılarak elde edilen eşitlikler k üzerinden 1 den N ye toplanır ve $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \overline{\psi}^N - a_0 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 - a(x) \left| \psi^N \right|^2 - v(x) \left| \psi^N \right|^2 + a_1 \left| \psi^N \right|^4 \right) dx d\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} f \overline{\psi}^N dx d\tau, \quad \forall t \in [0,T]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\| \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} + 2 \int_{\Omega_t} |f| \left| \psi^N \right| dx d\tau, \ \forall t \in [0,T] \tag{3.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(0)\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|C_k^N(0)\right|^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}. \qquad (3.15)$$

Bu eşitsizlik, Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği ve Gronwall lemması kullanılırsa (3.14) eşitsizliğinden

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_1\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right), \quad \forall t \in [0,T] \qquad (3.16)$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_1 > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial x}$ türevini değerlendirelim. Bunun için (3.11) sisteminin k. denklemi $\dfrac{d\bar{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarpılarak elde edilen eşitlikler k üzerinden 1 den N ye toplanır ve $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t} - a_0\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial^2\bar{\psi}^N}{\partial t\partial x} - a(x)\psi^N\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t} - v(x)\psi^N\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + a_1\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau = \int_{\Omega_t} f(x,\tau)\frac{\partial\bar{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t}dxd\tau, \ \forall t \in [0,T]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ile onun kompleks eşleniği taraf tarafa toplanırsa

$$\int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(v(x)\left|\psi^N\right|^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_1\left|\psi^N\right|^4\right)\right]dxd\tau =$$

$$= -2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(f\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau, \ \forall t \in [0,T]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten de aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_0^l a_0\left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx = a_0\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\right|^2 dx - \int_0^l a(x)\left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx +$$

$$+\int_0^l a(x)\left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx - \int_0^l v(x)\left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx + \int_0^l v(x)\left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx +$$

$$+\frac{1}{2}a_1\int_0^l\left|\psi^N(x,t)\right|^4 dx - \frac{1}{2}a_1\int_0^l\left|\psi^N(x,0)\right|^4 dx - 2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(f\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu terime kısmi integrasyon formülünü uygularsak Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinin yardımıyla

$$
\begin{aligned}
a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} &\le a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{|a_1|}{2}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^4_{L_4(0,l)} + \frac{|a_1|}{2}\left\|\psi^N(.,0)\right\|^4_{L_4(0,l)} \\
&+\|v\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_4(0,l)} + \|v\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_4(0,l)} + (1+\mu_0)\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \\
&\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \|f(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \|f(.,0)\|^2_{L_2(0,l)} + \int_0^t\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

eşitsizliği elde edilir. Ladyzenskaja *et al.* (1968) çalışmasında bulunan ilgili eşitsizlikten (Bkz. Kuramsal temeller, Teorem 2.3) kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri kolaylıkla yazabiliriz:

$$
\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)} \le \beta_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^{1/2}_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^{1/2}_{L_2(0,l)},\quad \forall t\in[0,T], \tag{3.18}
$$

$$
\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_4(0,l)} \le \beta_1\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^{1/4}_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^{3/4}_{L_2(0,l)},\quad \forall t\in[0,T]. \tag{3.19}
$$

Burada $\beta_0,\beta_1>0$ bilinen sabitlerdir. Bu eşitsizlikler ile (3.15) ve

$$
\|f(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_2\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right),\quad \forall t\in[0,T], \tag{3.20}
$$

$$
\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_3\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} \tag{3.21}
$$

eşitsizlikleri kullanılarak (3.17) den

$$
\begin{aligned}
a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} &\le a_0c_3\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + (1+\mu_0)\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + c_1\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right) + \\
&+2c_2\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{|a_1|}{2}\beta_1^4\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^3_{L_2(0,l)} + \\
&+\frac{|a_1|}{2}\beta_1^4\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,0)\right\|^3_{L_2(0,l)} + \beta_0^2\sqrt{l}\,\|v\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} + \\
&+\beta_0^2\sqrt{l}\,\|v\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \int_0^t\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte ε-Cauchy eşitsizliğini uygulayıp $\varepsilon = \dfrac{a_0}{\left(\dfrac{|a_1|}{2}\beta_1^4 + b_0\beta_0^2\sqrt{l}\right)}$ olarak seçersek (3.15), (3.21) eşitsizliklerini ve (3.16) kestirimini kullanarak aşağıdaki kestirimi kolaylıkla elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_4\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^6 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^6\right), \ \forall t\in[0,T]. \quad (3.22)$$

Burada $c_4 > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t}$ türevini değerlendirelim. Bu amaçla (3.11) sistemindeki k. denklemin her iki tarafını t ye göre diferansiyelleyip elde edilen k. denklemi $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarparak k üzerinden 1 den N ye kadar toplayıp $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallersek

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - a_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\right) - a(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - v(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right]dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left[a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right]dxd\tau = \int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa

$$i\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\right|^2 dxd\tau +$$

$$\int_{\Omega_t}\left[a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2\psi^N(x,\tau)\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t} - a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2\overline{\psi}^N(x,\tau)\right)\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\right]dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial\overline{f}(x,\tau)}{\partial t}\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t} - a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t} = 2a_1 i\,\mathrm{Im}\left((\psi^N)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2\right)$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau = -2a_1 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left((\psi^N)^2 \left(\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t}\right)^2 \right) dxd\tau + 2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t}\right) dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} &\le \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \\ &+ \left(2|a_1|\|\psi^N\|^2_{L_\infty(\Omega)} + 1\right)\int_0^t \left\|\frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.18) eşitsizliği ile (3.16) ve (3.22) kestirimlerini kullanırsak

$$\|\psi^N(.,t)\|^2_{L_\infty(\Omega)} \le c_5\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{L_2(0,l)} + \|f\|^6_{L_2(\Omega)}\right) = c_6 \tag{3.24}$$

kestirimi elde edilir. Bu kestirim (3.23) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + c_7\int_0^t \left\|\frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \quad ,\forall t \in [0,T] \tag{3.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_7 = 2|a_1|c_6 + 1 > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Şimdi bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan birinci terimi değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla (3.11) sisteminde k . denklemde $t=0$ alarak k . denklemi $\frac{d\bar{C}_k^N(0)}{dt}$ ile çarparak k üzerinden 1 den N ye kadar toplarsak

$$\begin{aligned} &\int_0^l \left[i\frac{\partial \psi^N(x,0)}{\partial t}\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi^N(x,0)}{\partial x^2}\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t} - a(x)\psi^N(x,0)\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t}\right] dx + \\ &+\int_0^l \left[-v(x)\psi^N(x,0)\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t} + a_1|\psi^N(x,0)|^2\psi^N(x,0)\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t}\right] dx = \\ &= \int_0^l f(x,0)\frac{\partial \bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le a_0 \left\|\frac{\partial^2 \psi^N(.,0)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)} \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} + \| f(.,0)\|_{L_2(0,l)} \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} +$$
$$+\mu_0 \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_\infty(0,l)} \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} + |a_1| \left\|\psi^N(.,0)\right\|^3_{L_6(0,l)} \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} +$$
$$+\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_\infty(0,l)} \|v\|_{L_2(0,l)} \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}.$$

Buradan da kolaylıkla

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5a_0^2 \left\|\frac{\partial^2 \psi^N(.,0)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)} + 5b_0^2 \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_\infty(0,l)} +$$
$$+5\mu_0^2 \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_\infty(0,l)} + 5|a_1|^2 \left\|\psi^N(.,0)\right\|^6_{L_6(0,l)} + 5\| f(.,0)\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{3.26}$$

eşitsizliği elde edilir. Ladyzenskaja *et al.* (1968) çalışmasında bulunan ilgili eşitsizliği (Bkz. Kuramsal temeller, Teorem 2.3) kullanarak

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)} \le \beta_2 \left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^{1/3}_{L_2(0,l)} \left\|\psi^N(.,t)\right\|^{2/3}_{L_2(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.27}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $\beta_2 = 2^{1/3}$ dür. $t=0$ için bu eşitsizlik ile (3.18) ve (3.20) eşitsizlikleri ve (3.15) kestirimi kullanılırsa

$$\left\|\frac{\partial^2 \psi^N(.,0)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_8 \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \tag{3.28}$$

kestiriminin yardımıyla (3.26) dan

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_9 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \| f\|^6_{L_2(\Omega)} \right) \tag{3.29}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_9 > 0$ sayısı N den bağımsızdır. Bu kestirimi (3.25) in sağ tarafında dikkate alarak Gronwall lemmasını uygularsak sonuçta aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{10} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \| f\|^6_{L_2(\Omega)} \right), \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.30}$$

Burada $c_{10} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Lemmanın ispatını sona erdirmek için şimdi de $\dfrac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}$ türevini değerlendirelim. Bu amaçla (3.11) sistemini aşağıdaki biçimde yazalım:

$$i\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k\right) + \left(a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}, u_k\right) - \left(a\psi^N, u_k\right) - \left(v\psi^N, u_k\right) + \left(a_1 \left|\psi^N\right|^2 \psi^N, u_k\right) =$$
$$= f_k(t), \quad k = \overline{1,N}.$$

Bu sistemdeki k. denklemi $\lambda_k \bar{C}_k^N(t)$ ile çarparak k üzerinden 1 den N ye kadar toplarsak

$$i\int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} \sum_{k=1}^N \bar{C}_k^N(t) u_k(x) \lambda_k dx + a_0 \int_0^l \frac{\partial^2 \psi^N(x,t)}{\partial x^2} \sum_{k=1}^N \bar{C}_k^N(t) u_k(x) \lambda_k dx -$$
$$-\int_0^l a(x)\psi^N(x,t) \sum_{k=1}^N \bar{C}_k^N(t) u_k(x) \lambda_k dx - \int_0^l v(x)\psi^N(x,t) \sum_{k=1}^N \bar{C}_k^N(t) u_k(x) \lambda_k dx +$$
$$+\int_0^l a_1 \left|\psi^N(x,t)\right|^2 \psi^N(x,t) \sum_{k=1}^N \bar{C}_k^N(t) u_k(x) \lambda_k dx = \int_0^l f(x,t) \sum_{k=1}^N \bar{C}_k^N(t) u_k(x) \lambda_k dx$$

yazılır. Buradan

$$i\int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} L\bar{\psi}^N(x,t)dx + \int_0^l \left(a_0 \frac{\partial^2 \psi^N(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi^N(x,t)\right) L\bar{\psi}^N(x,t)dx -$$
$$-\int_0^l v(x)\psi^N(x,t) L\bar{\psi}^N(x,t)dx + a_1 \int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^2 \psi^N(x,t) L\bar{\psi}^N(x,t)dx = \int_0^l f(x,t) L\bar{\psi}^N(x,t)dx$$

olup

$$\int_0^l \left|L\psi^N(x,t)\right|^2 dx = i\int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} L\bar{\psi}^N(x,t)dx - \int_0^l v(x)\psi^N(x,t) L\bar{\psi}^N(x,t)dx -$$
$$+a_1 \int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^2 \psi^N(x,t) L\bar{\psi}^N(x,t)dx - \int_0^l f(x,t) L\bar{\psi}^N(x,t)dx$$

eşitliğini elde ederiz. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le 4\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 + 4\|v\|_{L_2(0,l)}^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)}^2 +$$
$$+4|a_1|^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^6 + 4\|f(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.18), (3.20) ve (3.27) eşitsizlikleri ile (3.16), (3.22) ve (3.30) kestirimleri kullanılırsa aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu görülür:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{11}\Big(\|\varphi\|_{\overset{0}{W_2^2}(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W_2^1}(0,l)}^6 + \tag{3.31}$$
$$+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^6 + \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^{18} + \|f\|_{L_2(\Omega)}^{18}\Big), \ \forall t\in[0,T].$$

Burada $c_{11}>0$ sayısı N ve t den bağımsızdır. Burada L operatörü için olan formül ve (3.16) kestirimi kullanılırsa kolaylıkla

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{12}\Big(\|\varphi\|_{\overset{0}{W_2^2}(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W_2^1}(0,l)}^6 + \tag{3.32}$$
$$+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^6 + \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^{18} + \|f\|_{L_2(\Omega)}^{18}\Big), \ \ \forall t\in[0,T].$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{12}>0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

$C_k^N(t)$ için olan formülü ve (3.32) kestirimini kullanarak

$$\sum_{k=1}^N\left|C_k^N(t)\right|^2 + \sum_{k=1}^N\left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 \le \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{\overset{0}{W_2^2}(0,l)}^2 + \left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2$$

eşitsizliğinin yardımıyla kolaylıkla lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma 3.1.2.2 ispatlandı.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. $\ell_{N,k}(t)=\left(\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}$, $k,N=1,2,...$ fonksiyonlar ailesini göz önüne alalım. (3.13) kestiriminden $\ell_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesinin ve onların türevi olan $\dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Yani

$$\max_{0\le t\le T}\left|\ell_{N,k}(t)\right| \le c_{13}, \qquad \max_{0\le t\le T}\left|\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right| \le c_{13}$$

kestirimi geçerlidir. Her bir tespit edilmiş k ve keyfi $N \geq k$ için $\ell_{N,k}(t),\ k,N=1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğunu göstermek mümkündür. Gerçekten (3.11) sistemindeki k. denklem $(t,t+\Delta t)$ aralığında integrallenirse

$$i\left(\ell_{N,k}(t+\Delta t)-\ell_{N,k}(t)\right)=\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a_0\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial x}\frac{du_k}{dx}dxd\tau+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a(x)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dxd\tau+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l v(x)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dxd\tau-\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a_1\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2\psi^N(x,\tau)u_k(x)dxd\tau+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l f(x,\tau)u_k(x)dxd\tau$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\ell_{N,k}(t+\Delta t)-\ell_{N,k}(t)\right|\leq a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\|v\|_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_\infty(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau+|a_1|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_6(0,l)}^3\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\|f(.,\tau)\|_{L_2(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau+\mu_0\sqrt{l}\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_\infty(0,l)}\|u_k\|_{L_2(0,l)}d\tau.$$

Bu eşitsizlikte (3.13) kestirimi ve (3.9) eşitsizliği kullanılırsa Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinin yardımıyla

$$\left|\ell_{N,k}(t+\Delta t)-\ell_{N,k}(t)\right|\leq c_{14}d_k(\Delta t)^{1/2},\ \ k,N=1,2,... \tag{3.33}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{14}>0$ sayısı N, k ve Δt den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt},\ k,N=1,2,...$ ifadesini değerlendirelim. Bu amaçla (3.11) sistemindeki k. denklemi kısmi integrasyon formülünün yardımıyla aşağıdaki şekilde yazalım:

$$i\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right)=-\left(a_0\psi^N,\frac{d^2u_k}{dx^2}\right)+\left(a\psi^N,u_k\right)+\left(v\psi^N,u_k\right)-$$
$$-\left(a_1\left|\psi^N\right|^2\psi^N,u_k\right)+f_k(t),\quad k=\overline{1,N}.$$

Bu eşitliğin her iki tarafını t ye göre diferansiyelleyip elde edilen eşitliği $(t,t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu durumda

$$i\left(\frac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right)=-\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a_0\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\frac{d^2u_k}{dx^2}dxd\tau+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a(x)\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}u_k(x)dxd\tau+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l v(x)\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}u_k(x)dxd\tau-$$
$$-a_1\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left[\left(\psi^N(x,\tau)\right)^2\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t}+2\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\right]u_k(x)dxd\tau+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial t}u_k(x)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\frac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right|\le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{d^2u_k}{dx^2}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau+$$
$$+\mu_0\sqrt{l}\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_k\right\|_{L_\infty(0,l)}d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left\|v\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_k\right\|_{L_\infty(0,l)}d\tau+$$
$$+3\left|a_1\right|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}d\tau$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada (3.18) biçiminde olan eşitsizliği $\psi^N(x,t)$ ve $u_k(x)$ fonksiyonları için yazarak (3.13) kestirimini ve (3.9) eşitsizliklerini kullanırsak kolaylıkla

$$\left|\frac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right|\le c_{15}d_k(\Delta t)^{1/2},\quad k,N=1,2,... \tag{3.34}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Burada $c_{15}>0$ sayısı N, k ve Δt den bağımsızdır.

Böylece (3.33) ve (3.34) eşitsizliklerinden $\ell_{N,k}(t),\ \dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt},\ k,N=1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin tespit edilmiş k için $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğu ispatlandı. Bu takdirde düzgün sınırlı ve aynı dereceden sürekli $\left\{\ell_{N,k}(t)\right\},\ \left\{\dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right\}$ dizilerinden tespit edilmiş k için Ascoli-Arzela teoreminden (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.1), sırasıyla $\ell_k(t)$ ve $\dfrac{d\ell_k(t)}{dt}$ fonksiyonlarına $[0,T]$ aralığında düzgün yakınsayan $\left\{\ell_{N_m,k}(t)\right\},\ \left\{\dfrac{d\ell_{N_m,k}(t)}{dt}\right\},\ m=1,2,...$ alt dizilerini seçebiliriz.

Şimdi

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\ell_k(t)u_k(x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu takdirde

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d\ell_k(t)}{dt}u_k(x)$$

biçiminde yazılabilir. Kolaylıkla gösterebiliriz ki, $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ ve $\left\{\dfrac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}\right\}$ alt dizileri $t\in[0,T]$ ye göre düzgün olarak $L_2(0,l)$ de sırasıyla $\psi(x,t)$ ve $\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsar. Gerçekten $\forall g\in L_2(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),g\right)_{L_2(0,l)}&=\sum_{k=1}^{s}\left(g,u_k\right)_{L_2(0,l)}\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}+\\&\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),\sum_{k=s+1}^{\infty}\left(g,u_k\right)_{L_2(0,l)}u_k\right)_{L_2(0,l)}\end{aligned}\tag{3.35}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada

$$\begin{aligned}\left|\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),\sum_{k=s+1}^{\infty}\left(g,u_k\right)_{L_2(0,l)}u_k\right)_{L_2(0,l)}\right|&\le c_{16}\left(\sum_{k=s+1}^{\infty}\left|\left(g,u_k\right)_{L_2(0,l)}\right|^2\right)^{1/2}\\&\equiv c_{16}R(s)\end{aligned}$$

dır. $c_{16} > 0$ sayısı N_m den bağımsızdır. s numarasını, $c_{16}R(s)$ miktarı önceden verilen herhangi $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dan küçük olacak şekilde yeteri kadar büyük seçebiliriz. Eğer N_m numarasını yeteri kadar büyük seçersek yukarıda gösterdiğimize göre (3.35) in sağ tarafındaki birinci terim $[0,T]$ aralığında olan tüm t ler için $\frac{\varepsilon}{2}$ den küçük olacaktır. Bu takdirde $\left|\left(\psi^{N_m} - \psi, g\right)_{L_2(0,l)}\right|$ miktarı $[0,T]$ aralığındaki tüm t ler için $\varepsilon > 0$ dan küçük olacaktır. Dolayısıyla $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisi $t \in [0,T]$ ye göre düzgün olarak $L_2(0,l)$ de $\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsar.

Şimdi $\left\{\ell_{N_m,k}(t)\right\}$, $\left\{\frac{d\ell_{N_m,k}(t)}{dt}\right\}$, $m = 1,2,...$ dizilerini göz önüne alalım. Bu dizilerin sırasıyla $\ell_k(t)$ ve $\frac{d\ell_k(t)}{dt}$ fonksiyonlarına yakınsama özelliklerini ve $N = N_m$ için (3.13) kestirimini kullanarak yukarıda olduğu gibi $\forall \varepsilon > 0$, $\forall g \in L_2(0,l)$, $\forall t \in [0,T]$ ve yeteri kadar büyük m sayısı için

$$\left|\left(\frac{\partial^2\psi^{N_m}(.,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi(.,t)}{\partial x^2}, g\right)_{L_2(0,l)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{\partial\psi^{N_m}(.,t)}{\partial x} - \frac{\partial\psi(.,t)}{\partial x}, g\right)_{L_2(0,l)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{\partial\psi^{N_m}(.,t)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}, g\right)_{L_2(0,l)}\right| < \varepsilon$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Buradan da $\left\{\frac{\partial^2\psi^{N_m}(x,t)}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial x}\right\}$ ve $\left\{\frac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}\right\}$ alt dizilerinin sırasıyla $\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ fonksiyonlarına t ye göre düzgün olarak $L_2(0,l)$ de zayıf yakınsadığı anlaşılır.

$\left\{\ell_{N_m,k}(t)\right\}$ ve $\left\{\dfrac{d\ell_{N_m,k}(t)}{dt}\right\}$ dizilerinin elemanlarının t ye göre sürekli olduğunu göz önünde bulundurarak $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinin $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olduğunu görebiliriz. $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisi için yukarıda elde ettiğimiz zayıf yakınsama özelliklerini göz önünde bulundurursak bu dizinin limit fonksiyonu olan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun $C^0\left([0,T],W_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olduğu elde edilir. Ayrıca $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinin yakınsama özelliklerini kullanıp (3.13) kestiriminde $N=N_m$ ve $m\to\infty$ için alt limite geçersek teoremin hükmünde yer alan (3.7) kestiriminin geçerli olduğu kolaylıkla elde edilir.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin her bir $t\in[0,T]$ için hemen hemen çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla $N=N_m$ için (3.11) sistemindeki k. denklem herhangi sürekli $\overline{\eta}_k(t)$ fonksiyonu ile çarpılır ve elde edilen denklemler k üzerinden 1 den $N'\le N_m$ ye kadar toplanır. Kısmi integrasyon formülünün de yardımıyla aşağıdaki integral özdeşliği elde edilir:

$$\begin{aligned}&\int_0^l\left(i\frac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi^{N_m}(x,t)}{\partial x^2}-a(x)\psi^{N_m}(x,t)-v(x)\psi^{N_m}(x,t)\right)\overline{\eta}^{N'}(x,t)dx+\\&+\int_0^l\left(a_1\left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2\psi^{N_m}(x,t)-f(x,t)\right)\overline{\eta}^{N'}(x,t)dx=0,\quad\forall t\in[0,T].\end{aligned}\tag{3.36}$$

Burada $\overline{\eta}^{N'}(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\overline{\eta}_k(t)u_k(x),\ \ N'\le N_m$ dir.

$\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisi $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $W_2^2(0,l)$ uzayında $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığından ve $W_2^2(0,l)$ uzayı $L_2(0,l)$ uzayına kompakt gömüldüğünden t ye göre düzgün olarak $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\to 0\tag{3.37}$$

limit bağıntısını elde ederiz. Bu limit bağıntısına göre de $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinden $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $\left(0,l\right)$ aralığında $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu alt diziyi yine $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned}\left|\psi^{N_m}\right|^2\psi^{N_m}-\left|\psi\right|^2\psi &= \left|\psi^{N_m}\right|^2\left(\psi^{N_m}-\psi\right)+\psi\left(\left|\psi^{N_m}\right|^2-\left|\psi\right|^2\right)\\ &= \left|\psi^{N_m}\right|^2\left(\psi^{N_m}-\psi\right)+\psi\left[\psi^{N_m}\left(\bar{\psi}^{N_m}-\bar{\psi}\right)+\bar{\psi}\left(\psi^{N_m}-\psi\right)\right]\\ &= \left(\left|\psi^{N_m}\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\left(\psi^{N_m}-\psi\right)+\psi\psi^{N_m}\left(\bar{\psi}^{N_m}-\bar{\psi}\right)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\left|\left|\psi^{N_m}\right|^2\psi^{N_m}-\left|\psi\right|^2\psi\right| &\le \left(\left|\psi^{N_m}\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\left|\psi^{N_m}-\psi\right|+\left|\psi\right|\left|\psi^{N_m}\right|\left|\psi^{N_m}-\psi\right|\\ &\le \left(\left|\psi^{N_m}\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\left|\psi^{N_m}-\psi\right|+\frac{1}{2}\left(\left|\psi\right|^2+\left|\psi^{N_m}\right|^2\right)\left|\psi^{N_m}-\psi\right|\\ &= \frac{3}{2}\left(\left|\psi^{N_m}\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\left|\psi^{N_m}-\psi\right|\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}\int_0^l\left|\left|\psi^{N_m}\right|^2\psi^{N_m}-\left|\psi\right|^2\psi\right|^2dx &\le \frac{9}{2}\int_0^l\left(\left|\psi^{N_m}\right|^4+\left|\psi\right|^4\right)\left|\psi^{N_m}-\psi\right|^2dx\\ &\le \frac{9}{2}\left(\left\|\psi^{N_m}\right\|^4_{L_\infty(0,l)}+\left\|\psi\right\|^4_{L_\infty(0,l)}\right)\int_0^l\left|\psi^{N_m}-\psi\right|^2dx\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.37) limit bağıntısı kullanılır ve $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinin $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olduğu göz önüne alınırsa $\left\{\left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinin $L_2(0,l)$ uzayının normunda $\left|\psi(x,t)\right|^2\psi(x,t)$ fonksiyonuna yakınsadığı elde edilir. Böylece, $m\to\infty$ ve $\forall t\in[0,T]$ için

$$\int_0^l\left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2\psi^{N_m}(x,t)\bar{\eta}^{N'}(x,t)dx\to\int_0^l\left|\psi(x,t)\right|^2\psi(x,t)\bar{\eta}^{N'}(x,t)dx \qquad (3.38)$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu kolaylıkla elde ederiz.

v üzerine konulan şartı kullanarak

$$\left\| v\psi^{N_m}(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \le b_0 \left\| \psi^{N_m}(.,t) \right\|_{L_\infty(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T]$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada (3.18) eşitsizliğini ve (3.13) kestirimini kullanırsak

$$\left\| v\psi^{N_m}(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \le c_{18}, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimini elde ederiz. $\left\{ \psi^{N_m}(x,t) \right\}$ dizisi $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $(0,l)$ de $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsadığından ve $\left\{ v\psi^{N_m}(x,t) \right\}$ dizisi herhangi $t \in [0,T]$ için $L_2(0,l)$ de düzgün sınırlı olduğundan, Ladyzenskaja *et al.* (1968) çalışmasında bulunan ilgili lemmayı (Bkz. Kuramsal temeller, Lemma 2.3) göz önüne alırsak $m \to \infty$ için

$$\int_0^l v(x)\psi^{N_m}(x,t)\bar{\eta}^{N'}(x,t)dx \to \int_0^l v(x)\psi(x,t)\bar{\eta}^{N'}(x,t)dx \tag{3.39}$$

limit bağıntısının $\forall t \in [0,T]$ için geçerli olduğu elde edilir. Böylece (3.38) ve (3.39) limit bağıntıları ile $\left\{ \psi^{N_m}(x,t) \right\}$ alt dizisinin yukarıda gösterdiğimiz zayıf yakınsama özelliklerini kullanarak (3.36) integral özdeşliğinde $m \to \infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_0^l \left(i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi(x,t) - v(x)\psi(x,t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x,t)dx +$$
$$+ \int_0^l \left(a_1 \left| \psi(x,t) \right|^2 \psi(x,t) - f(x,t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x,t)dx = 0, \quad \forall t \in [0,T],$$
$$\forall \bar{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t)u_k(x).$$

$\bar{\eta}^{N'}(x,t)$ biçiminde olan fonksiyonlar $\forall t \in [0,T]$ için $L_2(0,l)$ uzayında her yerde yoğun olduğundan $N' \to \infty$ için bu integral özdeşliğinde limite geçilirse

$$\begin{aligned} &\int_0^l \left(i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi(x,t) - v(x)\psi(x,t) \right) \bar{\eta}(x,t)dx + \\ &+ \int_0^l \left(a_1 \left| \psi(x,t) \right|^2 \psi(x,t) - f(x,t) \right) \bar{\eta}(x,t)dx = 0, \ \forall t \in [0,T], \forall \eta(.,t) \in L_2(0,l) \end{aligned} \tag{3.40}$$

integral özdeşliği elde edilir. Bu özdeşlikten de $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1) denklemini herhangi $t \in [0,T]$ ve hemen hemen $x \in (0,l)$ için sağladığını elde ederiz.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.2) başlangıç şartını sağladığını gösterelim. $t=0$ için (3.37) limit bağıntısı,

$$\psi^{N_m}(x,0) = \sum_{k=1}^{N_m} C_k^{N_m}(0)u_k(x) = \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k u_k(x) = \varphi^{N_m}(x), \; x \in (0,l)$$

başlangıç şartı,

$$\int_0^l |\psi(x,0)-\varphi(x)|^2 dx \le 2\int_0^l |\psi(x,0)-\psi^{N_m}(x,0)|^2 dx + 2\int_0^l |\psi^{N_m}(x,0)-\varphi(x)|^2 dx$$

eşitsizliği kullanılır ve limite geçilirse

$$\int_0^l |\psi(x,0)-\varphi(x)|^2 dx = 0$$

olur. Böylece $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.2) başlangıç şartını sağladığı elde edilir.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun sınır şartlarını sağladığını gösterelim. $C^0\left([0,T],W_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayı $L_2\left([0,T],W_2^1(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden ve $W_2^1(0,l)$ uzayı da $C[0,l]$ uzayına kompakt gömüldüğünden $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinin $L_2\left([0,T],C[0,l]\right)$ uzayında $\psi(x,t)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsadığı elde edilir. Yani, $\forall x \in [0,l]$ ve $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(x,.)-\psi(x,.)\right\|_{L_2[0,T]}^2 \to 0$$

limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir. Bu limit bağıntısını kullanarak $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(0,.)-\psi(0,.)\right\|_{L_2[0,T]}^2 \to 0, \quad \left\|\psi^{N_m}(l,.)-\psi(l,.)\right\|_{L_2[0,T]}^2 \to 0$$

limit bağıntılarını elde ederiz. Bu limit bağıntıları,

$$\psi^{N_m}(0,t) = \psi^{N_m}(l,t) = 0, \quad \forall t \in [0,T]$$

sınır şartları ve

$$\int_0^T |\psi(s,t)|^2 \, dt \le 2\int_0^T \left|\psi(s,t)-\psi^{N_m}(s,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T \left|\psi^{N_m}(s,t)\right|^2 dt, \quad s=0,l$$

eşitsizlikleri kullanılarak

$$\int_0^T |\psi(s,t)|^2 dt = 0, \quad s=0,l$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun hemen hemen $t\in[0,T]$ için (3.3) sınır şartlarını sağladığı görülür. Böylece $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin $v\in V$ elemanına karşılık gelen çözümü olduğunu ispatlamış olduk. Ayrıca ψ nin $B_0 \equiv C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayının elemanı olduğu elde edilir. $N=N_m$ üzerinden (3.13) kestiriminde alt limite geçersek ve $W_2^2(0,l)$ ve $L_2(0,l)$ uzaylarında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak teoremde yer alan kestirimin doğruluğunu görürüz.

Şimdi (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $\psi(x,t)$ ve $\phi(x,t)$ fonksiyonları (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin iki çözümü olsun. Bu iki çözümün farkını $\omega(x,t)=\psi(x,t)-\phi(x,t)$ ile gösterelim. Bu takdirde $\omega=\omega(x,t)$ fonksiyonunun

$$i\frac{\partial\omega}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - a(x)\omega - v(x)\omega = F(x,t), \quad (x,t)\in\Omega \tag{3.41}$$

$$\omega(x,0)=0, \quad x\in(0,l) \tag{3.42}$$

$$\omega(0,t)=\omega(l,t)=0, \quad t\in(0,T) \tag{3.43}$$

başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olduğu kolaylıkla elde edilir. Burada

$$F(x,t) = a_1|\phi(x,t)|^2\phi(x,t) - a_1|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)$$

dir. (3.41) denkleminin her iki tarafı $\bar{\omega}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpılır, Ω_t bölgesi üzerinden integrallenir ve elde edilen eşitliğin kompleks eşleniği kullanılırsa

$$\|\omega(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 \le 2\int_{\Omega_t} |F(x,\tau)||\omega(x,\tau)|\,dxd\tau, \quad \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.7) kestiriminden ve $F(x,t)$ fonksiyonunun ifadesinden yararlanırsak

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{19}\int_0^t \|\omega(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\, d\tau$$

olup Gronwall lemması kullanılırsa

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} = 0, \quad \forall t \in [0,T]$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\psi(x,t) = \phi(x,t), \quad \forall t \in [0,T], \quad \overset{o}{\forall} x \in (0,l)$$

eşitliği yazılır. Yani çözüm tekdir. Teorem 3.1.2.1 ispatlandı.

3.1.3. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Şimdi (3.1)-(3.3),(3.6) optimal kontrol probleminin iyi konulmasını inceleyelim. Bu amaçla önce $\alpha > 0$ için (3.1)-(3.3),(3.6) probleminin tek çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1.3.1: Teorem 3.1.2.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $y \in L_2(0,l)$, $w \in L_2(0,l)$ verilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde $L_2(0,l)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\alpha > 0$ için (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir.

İspat: Önce

$$J_0(v) = \|\psi(.,T) - y\|^2_{L_2(0,l)}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. $\Delta v \in L_2(0,l)$ fonksiyonu $v + \Delta v \in V$ olacak şekilde herhangi $v \in V$ elemanına verilen bir artış olsun. $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin $v \in V$ ye karşılık gelen çözümü olsun. Bu takdirde (3.1)-(3.3) probleminin çözümü $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ artışını elde eder. Burada $\psi(x,t;v+\Delta v)$ ise

(3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin $v+\Delta v\in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. (3.1)-(3.3) şartlarından $\Delta\psi=\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki sınır-değer probleminin çözümü olduğunu elde ederiz:

$$i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi-(v+\Delta v)\Delta\psi+a_1\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)\Delta\psi+ \\ +a_1\psi_\Delta\psi\Delta\bar{\psi}=\Delta v\psi(x,t;v),\quad (x,t)\in\Omega \tag{3.44}$$

$$\Delta\psi(x,0)=0,\quad x\in(0,l) \tag{3.45}$$

$$\Delta\psi(0,t)=\Delta\psi(l,t)=0,\quad t\in[0,T]. \tag{3.46}$$

Burada (3.44) denkleminin her iki tarafı $\Delta\bar{\psi}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpılır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafının Ω_t üzerinden integrali alınır ve onun kompleks eşleniği kullanılırsa sonuçta

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le 2|a_1|\int_{\Omega_t}|\psi_\Delta||\psi||\Delta\psi|^2\,dxd\tau+2\int_{\Omega_t}|\Delta v\psi||\Delta\psi|\,dxd\tau,\quad \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.7) kestirimi ve $\forall t\in[0,T],\ \forall\psi(.,t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ için (3.18) eşitsizliği kullanılırsa

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{20}\left(\int_0^t\|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\,d\tau+\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Gronwall lemmasını uygularsak,

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{21}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)},\quad \forall t\in[0,T] \tag{3.47}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{21}>0$ sayısı Δv ve t den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin $\forall v\in V$ elemanı üzerindeki artışını hesaplayalım. (3.6) formülünü kullanırsak $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışı için

$$\Delta J_0(v)=J_0(v+\Delta v)-J_0(v) \\ =2\int_0^l\mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx+\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} \tag{3.48}$$

formülünü elde ederiz. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği ile (3.7) ve (3.47) kestirimleri kullanılır ve $y\in L_2(0,l)$ olduğunu göz önüne alınırsa

$$\left|\Delta J_0(v)\right| \le c_{22}\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right)$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{22} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten ve $v \in V$ nin V kümesinin herhangi bir elemanı olmasından dolayı $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu görülür.

Ayrıca V kümesi $L_2(0,l)$ uzayında kapalı, sınırlı ve konveks bir kümedir ve $L_2(0,l)$ uzayı da düzgün konveks uzaydır. İspata göre $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde süreklidir ve $\forall v \in V$ için $J_0(v) \ge 0$ dır. Yani alttan sınırlıdır. Bu takdirde Goebel (1979) çalışmasındaki fonksiyonelin minimumunun varlığına ait olan teoreme (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.5) göre $L_2(0,l)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\alpha > 0$ için (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir. Teorem 3.1.3.1 ispatlandı.

Şimdi $\alpha \ge 0$ için (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1.3.2: Farz edelim ki Teorem 3.1.2.1 nin şartları sağlanmış olsun ve $\alpha \ge 0$ verilen sayı olsun. Bu takdirde (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat: $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için herhangi $\{v^m\} \subset V$ minimalleştirici dizisini göz önüne alalım; Yani

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha*}$$

dır. $v^m \in V$ için (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü $\psi_m = \psi_m(x,t) \equiv \psi(x,t;v^m)$ olarak gösterelim. $v^m \in V,\ m = 1,2,...$ olduğu için Teorem 3.1.2.1 in hükmüne göre her bir $m = 1,2,...$ için (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin tek çözümü var ve bu çözüm için

$$\left\|\psi_m(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi_m(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{23}, \quad \forall t \in [0,T], \quad m=1,2,... \tag{3.49}$$

kestirimi geçerlidir. Burada c_{23} sayısı ile (3.7) kestiriminin sağ tarafı işaret edilmiştir ve m den bağımsızdır.

Tanıma göre V kümesi $L_2(0,l)$ Hilbert uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir kümesi olduğundan bu küme $L_2(0,l)$ de zayıf kompakt ve zayıf kapalı bir kümedir. Bu nedenle $\{v^m\}$ dizisinden $v \in V$ elemanına zayıf yakınsayan bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde $\forall q \in L_2(0,l)$ ve $m \to \infty$ için

$$\int_0^l v^m(x)q(x)dx \to \int_0^l v(x)q(x)dx \tag{3.50}$$

limit bağıntısını yazabiliriz. (3.49) kestiriminden $\{\psi^m\}$ dizisinin $C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayının normunda düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Bu nedenle $\{\psi^m\}$ dizisinden belirli bir $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonuna her bir $t \in [0,T]$ için $L_2(0,l)$ de zayıf yakınsayan alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine $\{\psi^m\}$ ile gösterelim. Buna göre her bir $t \in [0,T]$ ve $m \to \infty$ için $\{\psi_m\}$, $\left\{\frac{\partial \psi_m}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial \psi_m}{\partial t}\right\}$ dizilerinin $L_2(0,l)$ uzayında sırasıyla ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsadıkları hükmüne varabiliriz.

Şimdi $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun $\forall t \in [0,T]$ ve $\overset{0}{\forall} x \in (0,l)$ için (3.1) denklemini sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim. $\psi_m(x,t)$ fonksiyonu her bir $m=1,2,...$ için (3.1)-(3.3) sınır-değer probleminin çözümü olduğundan $\forall t \in [0,T]$ ve $\forall g \in L_2(0,l)$ için

$$\int_0^l \left[i\frac{\partial \psi_m(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_m(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi_m(x,t) - v^m(x)\psi_m(x,t) + \right.$$
$$\left. + a_1 \left|\psi_m(x,t)\right|^2 \psi_m(x,t) - f(x,t) \right] \overline{g}(x)dx = 0 \tag{3.51}$$

integral özdeşliğini sağlar.

$B_0 \equiv C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayı gömülme teoremlerine göre $C^0\left([0,T], L_\infty(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $\forall t \in [0,T]$ ve $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi_m(.,t) - \psi(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)} \to 0 \tag{3.52}$$

dır. Önce bu yakınsamanın ve $\left\{v^m\right\}$ dizisinin yakınsama özelliğini dikkate alarak $\forall t \in [0,T]$ ve $m \to \infty$ için

$$\int_0^l v^m(x)\psi_m(x,t)\overline{g}(x)dx \to \int_0^l v(x)\psi(x,t)\overline{g}(x)dx \tag{3.53}$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim.

$$\int_0^l v^m(x)\psi_m(x,t)\overline{g}(x)dx = \int_0^l v^m(x)\left(\psi_m(x,t) - \psi(x,t)\right)\overline{g}(x)dx +$$
$$+ \int_0^l \left(v^m(x) - v(x)\right)\psi(x,t)\overline{g}(x)dx + \int_0^l v(x)\psi(x,t)\overline{g}(x)dx \tag{3.54}$$

eşitliğinin geçerli olduğu açıktır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirirsek

$$\left|\int_0^l v^m(x)\left(\psi_m(x,t) - \psi(x,t)\right)\overline{g}(x)dx\right| \le \left\|v^m\right\|_{L_2(0,l)} \left\|g\right\|_{L_2(0,l)} \left\|\psi_m(.,t) - \psi(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)}, \forall t \in [0,T]$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $m \to \infty$ için eşitsizliğin her iki tarafında limite geçerek (3.52) limit bağıntısını kullanırsak (3.54) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimin limitinin sıfıra eşit olduğunu elde ederiz. Ayrıca $\forall t \in [0,T]$ için $\psi(x,t)$ fonksiyonu $L_\infty(0,l)$ uzayının elemanı olduğundan $\psi(.,t)\overline{g} \in L_2(0,l)$ olur. Dolayısıyla (3.50) limit bağıntısı kullanılırsa (3.54) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimin de limitinin sıfır olduğu elde edilir. Bunları göz önünde bulundurarak (3.54) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek (3.53) limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir.

Şimdi $\forall t \in [0,T]$ ve $\forall g \in L_2(0,l)$ için

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^l a_1 \left|\psi_m(x,t)\right|^2 \psi_m(x,t)\bar{g}(x)dx = \int_0^l a_1 \left|\psi(x,t)\right|^2 \psi(x,t)\bar{g}(x)dx \qquad (3.55)$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim. (3.52) limit bağıntısından her bir $t \in [0,T]$ için $\psi_m(x,t)$ dizisi $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $(0,l)$ de hemen hemen her yerde yakınsar. Diğer yandan (3.49) kestiriminin yardımıyla

$$\left\| \left|\psi_m(.,t)\right|^2 \psi_m(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \le c_{24}, \quad \forall t \in [0,T], \quad m = 1,2,...$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada $c_{24} > 0$ sayısı N ve t den bağımsız bir sabittir. Burada Ladyzenskaja *et al.* (1967) çalışmasından bilinen lemmanın (Bkz. Kuramsal Temeller, Lemma 2.3) hükmü kullanılırsa her bir $t \in [0,T]$ için

$$\left|\psi_m(x,t)\right|^2 \psi_m(x,t) \to \left|\psi(x,t)\right|^2 \psi(x,t), \ \ L_2(0,l) \text{ de zayıf}$$

limit bağıntısı elde edilir. Buradan da (3.55) limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir. Böylece (3.53) ve (3.55) limit bağıntıları ile her bir $t \in [0,T]$ için $\{\psi_m(x,t)\}$, $\left\{\frac{\partial \psi_m(x,t)}{\partial t}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 \psi_m(x,t)}{\partial x^2}\right\}$ dizilerinin sırasıyla $L_2(0,l)$ uzayında $\psi(x,t)$, $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsamaları kullanılarak (3.51) integral özdeşliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçilirse her bir $t \in [0,T]$ ve $\forall g \in L_2(0,l)$ için

$$\int_0^l \left(i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi(x,t) - v(x)\psi(x,t) \right)\bar{g}(x)dx +$$
$$+ \int_0^l \left(a_1 \left|\psi(x,t)\right|^2 \psi(x,t) - f(x,t) \right)\bar{g}(x)dx = 0$$

integral özdeşliği elde edilir. Buradan da $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun $\forall t \in [0,T]$ ve hemen hemen $x \in (0,l)$ için (3.1) denklemini sağladığını kolaylıkla görebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun başlangıç ve sınır şartlarını sağladığını gösterelim. $m \to \infty$ için

$$\psi_m(x,0) \to \psi(x,0), \quad L_2(0,l) \text{ de kuvvetli}$$

limit bağıntısını,

$$\psi_m(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l)$$

başlangıç şartını ve

$$\int_0^l |\psi(x,0) - \varphi(x)|^2 dx \le 2\int_0^l |\psi(x,0) - \psi_m(x,0)|^2 dx + 2\int_0^l |\psi_m(x,0) - \varphi(x)|^2 dx$$

eşitsizliğini kullanırsak $\psi(x,t)$ fonksiyonunun $\overset{o}{\forall}\, x \in (0,l)$ için başlangıç şartını sağladığını kolaylıkla elde ederiz.

B_0 uzayının $C^0\left([0,l], L_2(0,T)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünü, $\overset{o}{\forall}\, t \in (0,T)$ için $\psi_m(0,t) = \psi_m(l,t) = 0$ olduğunu ve

$$\int_0^T |\psi(p,t)|^2\, dt \le 2\int_0^T |\psi(p,t) - \psi_m(p,t)|^2 dt + 2\int_0^T |\psi_m(p,t)|^2\, dt, \quad p = 0, l$$

eşitsizliklerini dikkate alırsak aynı şekilde $\psi(x,t)$ fonksiyonunun $\overset{o}{\forall}\, t \in (0,T)$ için sınır şartlarını sağladığını elde ederiz. Böylece $\{v^m\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen ve (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olan fonksiyonun $\{\psi_m(x,t)\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun olduğu elde edilir. Yani, $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ dir. (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü tek olduğundan $\psi \in B_0$ dır. $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.7) kestirimini sağladığı (3.49) dan kolaylıkla elde edilir.

$L_2(0,l)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli ve $\alpha \geq 0$ olduğunu göz önüne alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin v elemanında alttan zayıf yarı sürekli olduğu elde edilir. Buna göre yukarıdaki $\{v^m\}$ ve $\{\psi_m(x,t)\}$ dizilerinin zayıf yakınsama özelliklerini kullanarak

$$J_{\alpha*} \leq J_\alpha(v) \leq \varliminf_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha*}$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da $v \in V$ elemanının (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol probleminin çözümü olduğu elde edilir. Teorem 3.1.3.2 ispatlandı.

3.1.4. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi

Bu bölümde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla eşlenik problem olarak adlandırılan aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\eta}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - a(x)\eta - v(x)\eta + a_1\left(2|\psi|^2\eta + \psi^2\overline{\eta}\right) = 0 \tag{3.56}$$

$$\eta(x,T) = -2i\left(\psi(x,T) - y(x)\right), \quad x \in (0,l) \tag{3.57}$$

$$\eta(0,t) = \eta(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.58}$$

Burada $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. Bu sınır değer probleminin çözümü olarak $C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan $\phi(x,0) = 0$ şartını sağlayan ve $\forall \phi \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left\{\eta\left(-i\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial x^2} - a(x)\overline{\phi} - v(x)\overline{\phi} + 2a_1|\psi|^2\overline{\phi}\right) + a_1\overline{\eta}\psi^2\overline{\phi}\right\}dxdt = \\ = -2\int_0^l \left(\psi(x,T) - y(x)\right)\overline{\phi}(x,T)dx\end{aligned} \tag{3.59}$$

integral özdeşliğini sağlayan $\eta = \eta(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.1.4.1: Farz edelim ki Teorem 3.1.2.1 in şartları sağlansın ve $y \in L_2(0,l)$ verilen fonksiyon olsun. Bu takdirde (3.56)-(3.58) eşlenik probleminin $C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan tek çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|\eta(.,t)\|_{L_2(0,l)} \le c_{25} \|\psi(.,T) - y\|_{L_2(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.60}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{25} > 0$ sayısı t den bağımsız bir sabittir.

Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.2.1 in ispatında olduğu gibi Galerkin yöntemi ile kolaylıkla ispatlanabilir.

Aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım:

$$H\left(x, \psi(x,\cdot), v(x), \overline{\eta}(x,\cdot)\right) = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right) dt \times v(x) - \alpha\left(v(x) - w(x)\right)^2.$$

Bu fonksiyona (3.1)-(3.3), (3.6) problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir.

Şimdi $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını hesaplayalım. (3.48) formülünü ve $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin ifadesini dikkate alırsak onun $\forall v \in V$ elemanı üzerindeki artışını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) \\
&= 2\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi(x,T) - y(x)\right) \Delta\overline{\psi}(x,T) dx + 2\alpha \int_0^l \left(v(x) - w(x)\right) \Delta v(x) dx + \\
&+ \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}.
\end{aligned}$$

Burada $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ fonksiyonu (3.44)-(3.46) başlangıç-sınır değer probleminin çözümüdür.

Şimdi fonksiyonelin artışındaki birinci terimi dönüştürmeye çalışalım. Bu amaçla aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 3.1.4.2:

$$2\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx = -\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt + \tilde{R}(\Delta v)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\tilde{R}(\Delta v)$ kalanı

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\Delta v) &= -\int_\Omega \Delta v(x)\,\mathrm{Re}\left(\Delta\psi\overline{\eta}\right)dxdt + \int_\Omega a_1\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)\mathrm{Re}\left(\Delta\psi\overline{\eta}\right)dxdt - \\ &-\int_\Omega 2a_1|\psi|^2\,\mathrm{Re}\left(\Delta\psi\overline{\eta}\right)dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega a_1\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\overline{\eta}dxdt - \\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega a_1(\psi)^2\Delta\overline{\psi}\overline{\eta}dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega a_1\overline{\psi}_\Delta\overline{\psi}\Delta\psi\eta dxdt - \frac{1}{2}\int_\Omega a_1(\overline{\psi})^2\Delta\psi\eta dxdt\end{aligned} \tag{3.61}$$

formülü ile tanımlanır.

İspat: (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü B_0 uzayının elemanı olduğundan $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ fonksiyonu $\forall\phi_1 \in L_2(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi - (v(x)+\Delta v(x))\Delta\psi + \\ &+a_1\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)\Delta\psi + a_1\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\Big]\overline{\phi}_1(x,t)dxdt = \int_\Omega \Delta v\psi(x,t)\overline{\phi}_1(x,t)dxdt\end{aligned} \tag{3.62}$$

integral özdeşliğini ve

$$\Delta\psi(x,0)=0,\ \ x\in(0,l);\ \ \Delta\psi(0,t)=\Delta\psi(l,t)=0,\ \ \forall t\in[0,T] \tag{3.63}$$

şartlarını sağlar. Bu integral özdeşliğinde $\phi_1=\phi_1(x,t)$ in yerine eşlenik problemin çözümü olan $\eta=\eta(x,t)$ fonksiyonunu alırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi - (v(x)+\Delta v(x))\Delta\psi + \\ &+a_1\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)\Delta\psi + a_1\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\Big]\overline{\eta}(x,t)dxdt = \int_\Omega \Delta v\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt.\end{aligned} \tag{3.64}$$

$\Delta\psi \in B_0$ olduğundan ve (3.63) şartlarını sağladığından eşlenik problemin çözümü olan (3.59) integral özdeşliğinde $\phi=\phi(x,t)$ fonksiyonunun yerine $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda elde edilen eşitliğin kompleks eşleniğini yazarsak

$$\int_{\Omega}\bar{\eta}\left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi-v(x)\Delta\psi+2a_1|\psi|^2\Delta\psi\right)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}a_1\eta\bar{\psi}^2\Delta\psi dxdt=-2\int_0^l\left(\bar{\psi}(x,T)-\bar{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği (3.64) eşitliğinden çıkarırsak

$$2\int_0^l\left(\bar{\psi}(x,T)-\bar{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx=-\int_{\Omega}\Delta v(x)\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)dxdt-$$

$$-\int_{\Omega}\Delta v(x)\Delta\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)dxdt+\int_{\Omega}a_1\left(|\psi_{\Delta}|^2+|\psi|^2\right)\Delta\psi\bar{\eta}dxdt+\int_{\Omega}a_1\psi_{\Delta}\psi\Delta\bar{\psi}\bar{\eta}dxdt-$$

$$-2\int_{\Omega}a_1|\psi|^2\Delta\psi\bar{\eta}dxdt-\int_{\Omega}a_1(\bar{\psi})^2\Delta\psi\eta dxdt$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplarsak lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz.

Şimdi Lemma 3.1.4.2 nin hükmünde yer alan formülü kullanarak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\Delta J_{\alpha}(v)=\int_0^l\left[-\int_0^T\operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\right)dt+2\alpha\left(v(x)-w(x)\right)\right]\Delta v(x)dx+R(\Delta v).$$

Burada $R(\Delta v)=\tilde{R}(\Delta v)+\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}$ dır. $\tilde{R}(\Delta v)$ ise (3.61) formülü ile tanımlanır.

Şimdi $R(\Delta v)$ ve $\tilde{R}(\Delta v)$ için olan formülleri kullanalım. Bu durumda kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|R(\Delta v)|\le\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}+\int_{\Omega}|\Delta\psi||\eta||\Delta v|dxdt+$$

$$|a_1|\int_{\Omega}|\Delta\psi|^3|\eta|dxdt+3|a_1|\int_{\Omega}|\Delta\psi|^2|\psi||\eta|dxdt.$$

Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak

$$|R(\Delta v)| \le \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} + \|\Delta\psi\|_{L_\infty(\Omega)}\sqrt{T}\,\|\eta\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} + \\ + |a_1|\|\Delta\psi\|^3_{L_\infty(\Omega)}\sqrt{lT}\,\|\eta\|_{L_2(\Omega)} + 3|a_1|\|\Delta\psi\|^2_{L_\infty(\Omega)}\|\psi\|_{L_2(\Omega)}\|\eta\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.65}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi $\|\Delta\psi(.,t)\|_{L_\infty(\Omega)}$ normunu değerlendirelim. Bu amaçla (3.44) denklemini $\dfrac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t}$ ile çarparak elde edilen eşitliği Ω_t bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu durumda

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t} - a(x)\Delta\psi\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t} - (v+\Delta v)\Delta\psi\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + a_1\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)\Delta\psi\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t} + a_1\psi_\Delta\psi\Delta\bar{\psi}\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t}\right]dxd\tau = \int_{\Omega_t}\Delta v\psi\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t}dxd\tau,\quad (x,t)\in\Omega$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci terimde $\Delta\psi(x,t)$ için olan sınır şartlarını kullanarak kısmi integrasyon formülünü uygulayalım. Benzer şekilde sağ tarafta da kısmi integrasyon formülünü uygulayarak elde edilen eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} = -\int_0^l a(x)|\Delta\psi(x,t)|^2dx - \int_0^l\left(v(x)+\Delta v(x)\right)|\Delta\psi(x,t)|^2dx +$$
$$+a_1\int_0^l\left(|\psi_\Delta(x,t)|^2 + |\psi(x,t)|^2\right)|\Delta\psi(x,t)|^2dx - 2\int_0^l\Delta v(x)\,\mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)dx +$$
$$+2\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi(x,\tau)}{\partial t}\Delta\bar{\psi}(x,\tau)\right)dxd\tau + a_1\int_0^l\mathrm{Re}\left(\psi_\Delta(x,t)\psi(x,t)\left(\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)^2\right)dx -$$
$$-2a_1\int_{\Omega_t}|\Delta\psi(x,\tau)|^2\left[\mathrm{Re}\left(\bar{\psi}_\Delta(x,\tau)\frac{\partial\psi_\Delta(x,\tau)}{\partial t}\right) + \mathrm{Re}\left(\bar{\psi}(x,\tau)\frac{\partial\psi(x,\tau)}{\partial t}\right)\right]dxd\tau -$$
$$-a_1\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(\left(\Delta\bar{\psi}(x,\tau)\right)^2\frac{\partial\psi_\Delta(x,\tau)}{\partial t}\psi(x,\tau)\right)dxd\tau -$$
$$-a_1\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(\left(\Delta\bar{\psi}(x,\tau)\right)^2\frac{\partial\psi(x,\tau)}{\partial t}\psi_\Delta(x,\tau)\right)dxd\tau,\quad \forall t\in[0,T].$$

$\psi(x,t)$ ve $\psi_\Delta(x,t)$ fonksiyonları (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin sırasıyla $v\in V$ ve $v+\Delta v\in V$ elemanlarına karşılık gelen çözümleri olduğundan ve bu çözümler için (3.7) kestirimi geçerli olduğundan sonuncu eşitlikten kolaylıkla

$$a_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{26}\left[\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)} + \|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\psi(.,t)\|_{L_2(0,l)} + \right.$$
$$\left. + \|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|_{L_\infty(0,l)}\,d\tau + \int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_\infty(0,l)}\,d\tau\right],\quad \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{26}>0$ sayısı Δv ve t den bağımsızdır. (3.47) kestirimini kullanarak sonuncu eşitsizlikten

$$a_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{27}\left(\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right) +$$
$$+c_{28}\left(\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)} + \int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_\infty(0,l)}\,d\tau\right),\quad \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{27}>0$ ve $c_{28}>0$ sayıları Δv ve t den bağımsız sabitlerdir. (3.18) eşitsizliğinde $\psi^N(x,t)=\Delta\psi(x,t)$ alınır, elde edilen eşitsizlik sonuncu eşitsizlikte kullanılır ve sonuncu eşitsitsizlikte $\varepsilon-$Cauchy eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{27}\left(\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right) +$$
$$+c_{28}\left(\beta_0^2\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \beta_0^2\frac{1}{2\varepsilon}\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\right) +$$
$$+c_{28}\frac{\beta_0^2}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + c_{28}\frac{\beta_0^2}{2}\int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\,d\tau.$$

Burada $\varepsilon=\dfrac{a_0}{\beta_0^2 c_{28}}$ olarak seçip (3.47) kestirimini uygularsak sonuçta

$$\left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{29}\left(\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right) + c_{30}\int_0^t \left\|\frac{\partial\Delta\psi(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{29}>0$ ve $c_{30}>0$ sayıları Δv ve t den bağımsızdır. Son eşitsizlikte Gronwall lemması uygulanırsa

$$\left\| \frac{\partial \Delta \psi(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{31} \|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimi elde edilir. Buradan ve (3.47) kestiriminden

$$\|\Delta \psi(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta \psi(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{32} \|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimi elde edilir. $c_{32} > 0$ sayısı Δv ve t den bağımsız bir sabittir. Bu kestirimi ve $\psi^N(x,t) = \Delta \psi(x,t)$ için (3.18) eşitsizliğini kullanırsak

$$\|\Delta \psi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)}^2 \le c_{33} \|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimi elde edilir. Buradan da direkt olarak

$$\|\Delta \psi(.,t)\|_{L_\infty(\Omega)}^2 \le c_{33} \|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.66}$$

kestirimi elde edilir. $c_{33} > 0$ sayısı Δv ve t den bağımsız bir sabittir. Böylece (3.7), (3.47), (3.60) ve (3.66) kestirimlerinin yardımıyla (3.65) eşitsizliğinden

$$|R(\Delta v)| \le c_{34} \|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2$$

kestirimi elde edilir. $c_{34} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu takdirde sonuncu kestirime dayanarak

$$R(\Delta v) = o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)$$

bağıntısını yazabiliriz. Bu bağıntıyı kullanarak fonksiyonelin artışını

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^l \left[-\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\right) dt + 2\alpha\left(v(x) - w(x)\right) \right] \Delta v(x) dx + o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)$$

biçiminde yazabiliriz. Fonksiyonelin Frechet anlamında diferansiyellenebilirliğinin tanımını kullanarak sonuncu eşitlikten $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğu ve onun gradyenti için

$$J'_\alpha(v) = -\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\right) dt + 2\alpha\left(v(x) - w(x)\right) \tag{3.67}$$

formülünün geçerli olduğu elde edilir. Burada $\psi = \psi(x,t)$, (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer probleminin; $\eta = \eta(x,t)$ ise eşlenik problemin çözümleridir. Böylece aşağıdaki teorem ispat edilmiş oldu:

Teorem 3.1.4.3: Teorem 3.1.4.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için (3.67) formülü geçerlidir.

3.1.5. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart

Şimdi (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde edelim. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 3.1.5.1: Teorem 3.1.2.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $y \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ verilen fonksiyon olsun. Bu takdirde eşlenik problemin çözümü B_0 uzayının bir elemanıdır ve çözüm için $\forall t \in [0,T]$ olduğunda,

$$\|\eta(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \eta(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le$$

$$c_{35}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^6_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|^{18}_{L_2(0,l)} + \|f\|^{18}_{L_2(\Omega)} + \|y\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}\right), \qquad (3.68)$$

kestirimi geçerlidir.

Bu teoremin ispatı Galerkin yöntemi kullanılarak Teorem 3.1.2.1 in ispatında olduğu gibi kolaylıkla yapılabilir.

Teorem 3.1.5.2: Farz edelim ki Teorem 3.1.5.1 in şartları sağlansın ve $v^* \in V$, (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol probleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\int_0^l \left[\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi^*(x,t)\overline{\eta}^*(x,t)\right)dt - 2\alpha\left(v^*(x) - w(x)\right)\right]\left(v(x) - v^*(x)\right)dx \le 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\psi^* = \psi^*(x,t)$ ve $\eta^* = \eta^*(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (3.1)-(3.3), (3.6) ve (3.56)-(3.58) problemlerinin $v^* \in V$ elemanına karşılık gelen çözümleridir.

İspat: Diferansiyellenebilirlik teoreminin şartları sağlandığından $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için (3.67) formülü geçerlidir. Önce gradyentin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Yani $\forall v \in V$ için $\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to 0$ olduğunda

$$\|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,l)} \to 0 \tag{3.69}$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.67) formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned} J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) &= -\int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi(x,t;v+\Delta v)\overline{\eta}(x,t;v+\Delta v)\right)dt + \\ &+ \int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi(x,t;v)\overline{\eta}(x,t;v)\right)dt + 2\alpha\Delta v(x) \\ &= -\int_0^T \left[\operatorname{Re}\left(\psi\Delta\overline{\eta}\right) + \operatorname{Re}\left(\Delta\psi\overline{\eta}\right) + \operatorname{Re}\left(\Delta\psi\Delta\overline{\eta}\right)\right]dt + 2\alpha\Delta v(x) \end{aligned} \tag{3.70}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\Delta\psi(x,t)$, (3.44)-(3.46) sınır değer probleminin çözümü ve $\Delta\eta = \Delta\eta(x,t) \equiv \eta(x,t;v+\Delta v) - \eta(x,t;v)$ ise aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial\Delta\eta}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\eta}{\partial x^2} - a(x)\Delta\eta - \left(v(x)+\Delta v(x)\right)\Delta\eta + a_1\left(2|\psi_\Delta|^2\eta_\Delta + \psi_\Delta{}^2\overline{\eta}_\Delta\right) - \\ & -a_1\left(2|\psi|^2\eta + \psi^2\overline{\eta}\right) = \Delta v\eta(x,t) \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\Delta\eta(x,T) = -2i\Delta\psi(x,T),\ \ x \in (0,l) \tag{3.72}$$

$$\Delta\eta(0,t) = \Delta\eta(l,t) = 0,\ \ t \in [0,T]. \tag{3.73}$$

Burada $\eta = \eta(x,t)$ ve $\eta_\Delta(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla eşlenik problemin $v \in V$ ve $v+\Delta v \in V$ elemanlarına karşılık gelen çözümleridir.

Şimdi $\Delta\eta(x,t)$ fonksiyonu için bir kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (3.71) denkleminin her iki tarafını $\Delta\bar{\eta}(x,t)$ ile çarparak $\tilde{\Omega}_t = (0,l)\times(t,T)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu takdirde

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(i\frac{\partial\Delta\eta}{\partial t}\Delta\bar{\eta} - a_0\left|\frac{\partial\Delta\eta}{\partial x}\right|^2 - a(x)|\Delta\eta|^2 - \left(v(x)+\Delta v(x)\right)|\Delta\eta|^2\right)dxd\tau =$$

$$= -\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(2a_1|\psi_\Delta|^2\eta_\Delta - 2a_1|\psi|^2\eta\right)\Delta\bar{\eta}\,dxd\tau - \int_{\tilde{\Omega}_t}\left(a_1\psi_\Delta^2\bar{\eta}_\Delta - a_1\psi^2\bar{\eta}\right)\Delta\bar{\eta}\,dxd\tau + \int_{\tilde{\Omega}_t}\Delta v\eta\Delta\bar{\eta}\,dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak,

$$\|\Delta\eta(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le 4\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} + 2\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta v||\Delta\eta||\eta|\,dxd\tau + 6|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2|\Delta\eta|^2\,dxd\tau +$$

$$+6|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(|\psi_\Delta|+|\psi|\right)|\Delta\eta||\Delta\psi||\eta|\,dxd\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanarak (3.7) ve (3.47) kestirimleri ile $\psi,\ \Delta\psi$ fonksiyonları için (3.18) eşitsizliğinin aynısı kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|\Delta\eta(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{36}\left(\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} + \|\eta\|^2_{L_\infty(\Omega)}\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta\eta(x,\tau)|^2\,dxd\tau\right), \quad \forall t\in[0,T].$$

Burada $c_{36}>0$ sayısı Δv ve t den bağımsızdır. Burada η için olan (3.68) kestirimini ve $\eta(x,t)$ için (3.18) eşitsizliğinin aynısını kullanırsak sonuncu eşitsizlikten

$$\|\Delta\eta(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{36}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} + c_{37}\int_t^T\|\Delta\eta(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\,d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Gronwall lemması uygulanırsa

$$\|\Delta\eta(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{38}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \quad \forall t\in[0,T] \qquad (3.74)$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{38}>0$ sayısı Δv ve t den bağımsızdır.

Şimdi (3.70) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazalım:

$$\left\|J_\alpha'(v+\Delta v) - J_\alpha'(v)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 8\alpha^2\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+6T\int_0^T\left(\|\psi\|^2_{L_\infty(0,l)}\|\Delta\eta\|^2_{L_2(0,l)} + \|\Delta\psi\|^2_{L_\infty(0,l)}\|\eta\|^2_{L_2(0,l)} + \|\Delta\psi\|^2_{L_\infty(0,l)}\|\Delta\eta\|^2_{L_2(0,l)}\right)dt.$$

Burada (3.7), (3.47), (3.68), (3.74) kestirimlerini kullanarak

$$\left\| J_\alpha{}'(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) \right\|_{L_2(0,l)} \le c_{39} \left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} \right) \qquad (3.75)$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{39} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu kestirimden (3.69) limit bağıntısının geçerli olduğunu, yani fonksiyonelin V kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğunu ispatlamış olduk.

V kümesi tanıma göre konveks bir küme, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli de bu küme üzerinde Frechet anlamında sürekli diferansiyellenebilir olduğundan Vasilyev (1981) çalışmasından bilinen teoremin (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.6) şartları sağlanır. Yani, eğer $v^* \in V$ elemanında $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli minimum değerine sahipse bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\left(J'_\alpha(v^*), v - v^* \right)_{L_2(0,l)} \ge 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte fonksiyonelin gradyenti için olan formülü dikkate alarak elde edilen eşitsizliği (-1) ile çarparsak gereken hükmün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Teorem 3.1.5.2 ispatlandı.

3.2. Lineer Olmayan Kısımda Kompleks Katsayı Olan Schrödinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi

Bu bölümde lineer olmayan kısımda kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Burada olası kontroller kümesi ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır.

3.2.1. Optimal kontrol probleminin konulması

$l > 0,\ T > 0$ verilen sayılar ve $x \in (0,l),\ t \in (0,T),\ \Omega_t = (0,l) \times (0,t),\ \Omega = \Omega_T$ olmak üzere lineer olmayan Schrödinger denklemi için aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi ile ifade edilen sistemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi-v(x)\psi+a_1|\psi|^2\psi=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega \tag{3.76}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(0,l) \tag{3.77}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\quad t\in(0,T). \tag{3.78}$$

Burada $\psi=\psi(x,t)$ dalga fonksiyonu, $i^2=-1,\ a_0>0$ - verilen sayılar, $a_1\in\mathbb{C}$ kompleks sayı olup

$$\operatorname{Im}a_1>0,\quad \operatorname{Re}a_1<0,\quad \operatorname{Im}a_1\geq 2|\operatorname{Re}a_1| \tag{3.79}$$

şartını sağlar; $a(x)$-ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olup

$$0\leq a(x)\leq\mu_0,\quad \overset{o}{\forall}x\in(0,l),\quad \mu_0=sabit>0 \tag{3.80}$$

şartını sağlar; $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ ise verilen fonksiyonlar olup

$$\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\quad f\in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{3.81}$$

şartını sağlar. $v=v(x)$ ise kontrol fonksiyonu olup $b_0>0$ bir sabit olmak üzere

$$V\equiv\left\{v=v(x):v\in L_2(0,l),\ \|v\|_{L_2(0,l)}\leq b_0\right\}$$

kümesinden seçilir.

Şimdi aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v)=\|\psi(\cdot,T)-y\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|v-w\|^2_{L_2(0,l)} \tag{3.82}$$

fonksiyonelinin minimumunu V kümesi üzerinde (3.76)-(3.78) şartları altında bulmak gerekir. Burada $\alpha\geq 0$-verilen sayı ve $w,y\in L_2(0,l)$-verilen fonksiyonlardır. Bu optimal kontrol problemini kısaca (3.76)-(3.78), (3.82) problemi olarak adlandıracağız.

Her bir $v\in V$ için (3.76)-(3.78) şartları altında $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi gerçekte lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak $B_0\equiv C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan $\forall t\in[0,T]$ ve $\overset{o}{\forall}x\in(0,l)$

için (3.76)-(3.78) şartlarını sağlayan hemen hemen çözüm anlaşılır. Burada $\overset{o}{\forall}$ işareti "hemen hemen her yerde" anlamına gelir.

3.2.2. Başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Lineer olmayan Schrödinger denklemleri için sınır değer problemleri daha önce İskenderov and Yagubov (1989), Yagubov (1994) vs. çalışmalarında incelenmiştir. Ancak, bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar bizim ileri sürdüğümüz optimal kontrol problemini incelemek için yeterli değildir. Çünkü söz konusu olan çalışmalarda diferansiyel denklemin katsayıları çoğu zaman sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar olarak alınmıştır. Ancak bizim göz önüne aldığımız problemde ise denklemin katsayısı olan $v(x)$ kontrol fonksiyonu sınırlı değildir ve daha geniş bir sınıftan seçilmiştir. Diğer yandan lineer olmayan kısımda yer alan a_1 katsayısı ise kompleks sayıdır. Önceki çalışmalarda ise bu katsayı sadece sanal sayıdır. Bu nedenle (3.76)-(3.78), (3.82) problemini incelediğimiz için öncelikle (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer problemini incelememiz gerekir.

Şimdi $\forall v \in V$ için (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer problemini göz önüne alalım. Bu problemin çözümü için aşağıdaki hüküm geçerlidir:

Teorem 3.2.2.1: Farz edelim ki $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları (3.80)-(3.81) şartlarını ve $a_1 \neq 0$ kompleks sayı olup (3.79) şartını sağlasın. Bu takdirde her bir $v \in V$ için (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü vardır, tekdir ve bu çözüm için $\forall t \in [0,T]$ olduğunda

$$\|\psi(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{40}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right) \qquad (3.83)$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{40} > 0$ sayısı t den bağımsızdır.

İspat: Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanacağız. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemi olarak

$$Lu_k(x) = -a_0 \frac{d^2u_k(x)}{dx^2} + a(x)u_k(x) = \lambda_k u_k(x), \quad x \in (0,l)$$

$$u_k(0) = u_k(l) = 0, \quad k = 1,2,...$$

özdeğer probleminin λ_k özdeğerlerine karşılık gelen $u_k = u_k(x), \ k = 1,2,...$ özfonksiyonlarını alalım. Burada

$$L = -a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a(x)$$

şeklindedir. Ladyzenskaja and Ural'ceva (1973) çalışmasından bildiğimiz gibi bu özdeğer probleminde özdeğer olan $\lambda = \lambda_k, \ k = 1,2,...$ lar reeldir ve negatif değildir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar da reeldir ve $L_2(0,l), \ \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), \ \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzaylarında ortogonaldır. $u_k = u_k(x)$ fonksiyonlarının $L_2(0,l)$ uzayında ortonormal olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\left(u_k, u_m\right)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x)u_m(x)dx = \delta_k^m$$

olsun. Burada δ_k^m,

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}, \quad k,m = 1,2,...$$

şeklinde olup Kronecker sabitidir. Ayrıca $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzaylarında ortogonallık aşağıdaki gibidir:

$$\left[u_k, u_m\right] = \left(u_k, u_m\right)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[a_0 \frac{du_k(x)}{dx}\frac{du_m(x)}{dx} + a(x)u_k(x)u_m(x) \right] dx = \lambda_k \delta_k^m, \ k = 1,2,...$$

$$\begin{aligned} \left\{u_k, u_m\right\} &= \left(u_k, u_m\right)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} = \left(Lu_k, Lu_m\right)_{L_2(0,l)} \\ &= \int_0^l \left(-a_0 \frac{d^2u_k(x)}{dx^2} + a(x)u_k(x) \right)\left(-a_0 \frac{d^2u_m(x)}{dx^2} + a(x)u_m(x) \right) dx \\ &= \lambda_k^2 \delta_k^m, \quad k,m = 1,2,.... \end{aligned}$$

$u_k = u_k(x)$ fonksiyonlarının

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \le d_k, \;\; k = 1, 2, ... \tag{3.84}$$

şartını sağladığını kabul edelim. Bu eşitsizlikte $d_k, \; k = 1, 2, ...$ lar herhangi pozitif sayılardır.

Galerkin yöntemine göre (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün yaklaşımları

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x)$$

şeklinde aranır. Burada $C_k^N(t)$ katsayıları $C_k^N(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} = \left(\psi^N, u_k\right)$ formülü ile tanımlanıp aşağıdaki sistemin çözümüdür:

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}, u_k\right)_{L_2(0,l)} &= \left(a_0 \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, \frac{du_k}{dx}\right)_{L_2(0,l)} + \left(a\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} + \\ &+ \left(v\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} - \left(a_1 \left|\psi^N(.,t)\right|^2 \psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)} + f_k(t), \;\; k = \overline{1, N} \end{aligned} \tag{3.85}$$

$$C_k^N(0) = \left(\psi^N(.,0), u_k\right)_{L_2(0,l)} = \left(\varphi, u_k\right)_{L_2(0,l)} = \varphi_k, \;\; k = \overline{1, N}. \tag{3.86}$$

Burada $f_k(t) = \left(f(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)}, \;\; k = \overline{1, N}$ şeklindedir.

Görüldüğü gibi (3.85)-(3.86) şartlarından $C_k^N(t)$ lerin bulunması problemi sabit katsayılı lineer olmayan I. mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy problemidir ve sistemin sağ tarafı karesel integrallenebilir bir fonksiyondur. Pontryagin (1976) çalışmasından bildiğimiz gibi bu problem $[0,T]$ aralığında en az bir lokal çözüme sahiptir. Bu Cauchy probleminin tüm $[0,T]$ aralığında global çözümünün varlığı için (3.85)-(3.86) probleminin tüm mümkün çözümlerinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 3.2.2.2: (3.85)-(3.86) Cauchy probleminin çözümü için

$$\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(t)\right|^2+\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2\le\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le$$
$$\le c_{40}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{3.87}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{40}>0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

İspat: (3.76) sisteminde yer alan k. denklemi $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplar ve $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallersek

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N-a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2-a(x)\left|\psi^N\right|^2-v(x)\left|\psi^N\right|^2+a_1\left|\psi^N\right|^4\right)dxd\tau=$$
$$=\int_{\Omega_t}f\overline{\psi}^N dxd\tau,\quad\forall t\in[0,T]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini taraf tarafa çıkarırsak

$$\int_{\Omega_t}i\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N+\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxd\tau+2i\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4dxd\tau=2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Buradanda $\forall\ t\in[0,T]$ için

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^4dxd\tau\le\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\int_{\Omega_t}|f|\left|\psi^N\right|dxd\tau \tag{3.88}$$

eşitsizliği elde edilir. Aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}=\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(0)\right|^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|C_k^N(0)\right|^2=\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{3.89}$$

Bu eşitsizliği ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanırsak (3.88) eşitsizliğinden

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\,\mathrm{Im}\,a_1\left\|\psi^N\right\|^4_{L_4(\Omega_t)}\le\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}+\|f\|^2_{L_2(\Omega)}+\int_0^t\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau,\ \forall\ t\in[0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada Gronwall lemmasını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\,\mathrm{Im}\,a_1\int_0^t\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^4_{L_4(0,l)}d\tau\le c_{41}\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}+\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right),\forall t\in[0,T]. \tag{3.90}$$

Burada $c_{41}>0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t}$ türevini değerlendirelim. Bu amaçla (3.85) sistemindeki k. denklemin her iki tarafını t ye göre diferansiyelleyelim ve elde edilen k. denklemi $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarparak k üzerinden 1 den N ye kadar toplayıp $(0,t)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu durumda

$$\int_{\Omega_t}\Bigg(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x\partial t}-a(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-v(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+$$
$$+a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\Bigg)dxd\tau=\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau,\ \ \forall t\in[0,T]$$

olup

$$\int_{\Omega_t}\Bigg(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-a_0\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)\right|^2-a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2-v(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+$$
$$+a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\Bigg)dxd\tau=\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau,\ \ \forall t\in[0,T]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini taraf tarafa çıkarırsak

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t}i\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial t^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)dxd\tau+\\&+\int_{\Omega_t}i\,\mathrm{Im}\,a_1\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right]dxd\tau=\\&=-\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\,a_1\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right]dxd\tau+\\&+2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau,\ \ \forall t\in[0,T]\end{aligned}\tag{3.91}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}=2\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+(\psi^N)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)^2.$$

eşitliğini kullanarak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}=2\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\right)\right)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^2\bar{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}=\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right)^2-\left(\bar{\psi}^N\right)^2\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)^2$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu iki eşitliği (3.91) eşitliğinde kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau+\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2\right)^2dxd\tau\le$$
$$\le 2\left|\mathrm{Re}\,a_1\right|\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Burada (3.79) şartını dikkate alarak bu eşitsizliğin sol tarafındaki üçüncü terimin negatif olmadığını göz önünde bulundurursak

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left(2\,\mathrm{Im}\,a_1-2\left|\mathrm{Re}\,a_1\right|\right)\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau\le$$
$$\le 2\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|dxd\tau+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}$$

olup bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terime Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\tilde{a}\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau\le$$
$$\le\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau,\ \forall t\in[0,T] \tag{3.92}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\tilde{a}=2\left(\mathrm{Im}\,a_1-\left|\mathrm{Re}\,a_1\right|\right)\ge 2\left|\mathrm{Re}\,a_1\right|>0$ dır.

Şimdi (3.92) eşitsizliğinin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirelim. Bu amaçla (3.85) sistemini aşağıdaki biçimde yazalım:

$$i\left(\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)}=-\left(a_0\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2},u_k\right)_{L_2(0,l)}+\left(a\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}+$$
$$+\left(v\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}-\left(a_1\left|\psi^N(.,t)\right|^2\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}+f_k(t),\ k=\overline{1,N}. \tag{3.93}$$

Bu sistemde $t=0$ alalım ve elde edilen sistemin k. denklemini $\dfrac{d\bar{C}_k^N(0)}{dt}$ ile çarparak k üzerinden 1 den N ye kadar toplayalım. Bu takdirde

$$\int_0^l i\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right|^2 dx=\int_0^l\left[-a_0\frac{\partial^2\psi^N(x,0)}{\partial x^2}+a(x)\psi^N(x,0)+v(x)\psi^N(x,0)+\right.$$
$$\left.+a_1\left|\psi^N(x,0)\right|^2\psi^N(x,0)+f(x,0)\right]\frac{\partial\bar{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx$$

eşitliği elde edilir. Buradan da (3.80) ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa kolaylıkla

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le 5a_0^2\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,0)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)}+5\mu_0^2\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$
$$+5\int_0^l\left(|v(x)|\left|\psi^N(x,0)\right|\right)^2dx+5|a_1|^2\int_0^l\left|\psi^N(.,0)\right|^6dx+5\int_0^l|f(x,0)|^2dx$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $v(x)$ fonksiyonu üzerine konulan şartı ve

$$\psi^N(x,0)=\sum_{k=1}^N C_k^N(0)u_k(x)=\sum_{k=1}^N\left(\varphi,u_k\right)_{L_2(0,l)}u_k(x)$$

formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le 5a_0^2\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,0)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)}+5\mu_0^2\left\|\varphi\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$
$$+5\|v\|^2_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}+5|a_1|^2\,l\left\|\psi^N(.,0)\right\|^6_{L_\infty(0,l)}+5\|f(.,0)\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Burada (3.20) ve (3.28) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le 5a_0^2c_8\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+5\mu_0^2\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}+5\|v\|^2_{L_2(0,l)}\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}$$
$$+5|a_1|^2\,l\left\|\psi^N(.,0)\right\|^6_{L_\infty(0,l)}+5c_2\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\tag{3.94}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.18) eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}\le\frac{\beta_0^2}{2}\left(\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}\right)$$

ve

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_\infty(0,l)}^6 \le \frac{\beta_0^6}{2}\left(\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^6 + \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)}^6\right) \le \beta_0^6 \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6 \tag{3.95}$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu eşitsizlikler ile

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2 \le c_{42}\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2$$

eşitsizliği (3.94) de kullanılırsa kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{43}\left(\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right). \tag{3.96}$$

Burada $c_{43} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır. (3.96) kestirimini (3.92) eşitsizliğinde dikkate alırsak

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \tilde{a}\int_{\Omega_t}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau \le \\ &\le c_{44}\left(\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right) + \int_0^t \left\|\frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau,\ \forall t \in [0,T]\end{aligned} \tag{3.97}$$

olup burada Gronwall lemması kullanılırsa

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{45}\left(\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right),\ \forall t \in [0,T] \tag{3.98}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{45} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial x}$ türevini değerlendirelim. Bu amaçla (3.85) sisteminin k. denklemini $\dfrac{d\overline{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarparak elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye toplayalım ve $(0,t)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu durumda

$$\int_{\Omega_t}\left[i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2-a_0\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\right)-a(x)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}-v(x)\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+a_1\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right]dxd\tau=\int_{\Omega_t}f(x,\tau)\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,\tau)}{\partial t}dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile taraf tarafa toplarsak

$$a_0\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau=-\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(a_1\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\overline{a}_1\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(f\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki sonuncu terime kısmi integrasyon formülünü uygular ve

$$a_1\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}+\overline{a}_1\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\frac{\partial\psi^N}{\partial t}=\frac{\mathrm{Re}\,a_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^4\right)-2\,\mathrm{Im}\,a_1\,\mathrm{Im}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)$$

olduğunu dikkate alırsak

$$a_0\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau-\frac{\mathrm{Re}\,a_1}{2}\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N\right|^4\right)dxd\tau=$$

$$=-\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau-2\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}\right)dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\overline{\psi}^N\right)dxd\tau-2\int_0^l\mathrm{Re}\left(f(x,t)\overline{\psi}^N(x,t)\right)dx+2\int_0^l\mathrm{Re}\left(f(x,0)\overline{\psi}^N(x,0)\right)dx$$

eşitliği bulunur. $\mathrm{Re}\,a_1<0$ olduğunu göz önüne alırsak sonuncu eşitlikten aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{\left|\mathrm{Re}\,a_1\right|}{2}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^4_{L_4(0,l)}\le a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\mu_0\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+\frac{\left|\mathrm{Re}\,a_1\right|}{2}\left\|\psi^N(.,0)\right\|^4_{L_4(0,l)}+\int_0^l\left|v(x)\right|\left|\psi^N(x,t)\right|^2dx+\int_0^l\left|v(x)\right|\left|\psi^N(x,0)\right|^2dx+\int_0^l\left|f(x,0)\right|^2dx+$$

$$+\int_0^l\left|f(x,t)\right|^2dx+\int_0^l\left|\psi^N(x,0)\right|^2dx+\int_0^l\left|\psi^N(x,t)\right|^2dx+\left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+2\operatorname{Im} a_1 \int\limits_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left|\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right| dx d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitsizlikte Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği ile (3.20), (3.21) eşitsizlikleri ve (3.90) kestirimini kullanırsak

$$a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{\left|\operatorname{Re} a_1\right|}{2} \left\|\psi^N(.,t)\right\|^4_{L_4(0,l)} \le c_{46} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right) +$$
$$+\frac{\left|\operatorname{Re} a_1\right|}{2} \left\|\psi^N(.,0)\right\|^4_{L_4(0,l)} + \|v\|_{L_2(0,l)} \left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_4(0,l)} + \|v\|_{L_2(0,l)} \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_4(0,l)} + \quad (3.99)$$
$$+2\operatorname{Im} a_1 \int\limits_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left|\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right| dx d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{46} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır. Ayrıca

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^4_{L_4(0,l)} = \int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^4 dx = \int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^3 \left|\psi^N(x,0)\right| dx \le$$
$$\le \left(\int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^6 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l \left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx \right)^{1/2} = \left\|\psi^N(.,0)\right\|^3_{L_6(0,l)} \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} \le$$
$$\le \frac{1}{2} \left\|\psi^N(.,0)\right\|^6_{L_6(0,l)} + \frac{1}{2} \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \frac{1}{2} l \left\|\psi^N(.,0)\right\|^6_{L_\infty(0,l)} + \frac{1}{2} \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}$$

olduğunu göz önüne alır ve bu eşitsizlikte (3.95) i kullanırsak

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^4_{L_4(0,l)} \le c_{47} \left(\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} + \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} \right) \quad (3.100)$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{47} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Şimdi (3.99) eşitsizliğinin sağ tarafındaki sonuncu terimi değerlendirelim. Bunun için (3.90) kestirimini ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanırsak

$$\int\limits_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left|\psi^N \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\right| dx d\tau \le \frac{1}{2} \int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^4_{L_4(0,l)} d\tau + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dx d\tau \le$$
$$\le c_{48} \left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \right) + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t} \left|\psi^N\right|^2 \left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dx d\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{48} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır. Bu eşitsizliği ve (3.100) kestirimi ile $v(x)$ fonksiyonu üzerine konulan şartı (3.99) da kullanırsak

$$a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{|\mathrm{Re}\, a_1|}{2} \left\| \psi^N(.,t) \right\|^4_{L_4(0,l)} \le c_{49} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} \right) + \\ + b_0 \left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{L_4(0,l)} + b_0 \left\| \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_4(0,l)} + \mathrm{Im}\, a_1 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.101}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.98) kestirimini (3.97) de uygularsak

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \tilde{a} \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \le \\ \le c_{50} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} \right), \ \forall t \in [0,T] \tag{3.102}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{50} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır. Buradan

$$\mathrm{Im}\, a_1 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx d\tau \le \frac{\mathrm{Im}\, a_1 c_{50}}{\tilde{a}} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} \right), \ \forall t \in [0,T]$$

olup bu (3.101) de kullanılırsa

$$a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{|\mathrm{Re}\, a_1|}{2} \left\| \psi^N(.,t) \right\|^4_{L_4(0,l)} \le \\ \le c_{51} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,l)} \right) + \\ + \sqrt{l} b_0 \left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{L_\infty(0,l)} + \sqrt{l} b_0 \left\| \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_\infty(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.103}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.18) eşitsizliği kullanılarak

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|^2_{L_\infty(0,l)} \le \beta_0^2 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)} \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.104}$$

elde edilen bu eşitsizliği (3.103) de kullanırsak

$$a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{|\mathrm{Re}\, a_1|}{2} \left\| \psi^N(.,t) \right\|^4_{L_4(0,l)} \le$$

$$\le c_{51}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right)+$$
$$+\sqrt{l}b_0\beta_0^2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)}+$$
$$+\sqrt{l}b_0\beta_0^2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\|\psi^N(.,0)\|_{L_2(0,l)},\quad \forall t\in[0,T].$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu terimi (3.90) kestirimi ve (3.21) eşitsizliğinin yardımıyla değerlendirirsek

$$\sqrt{l}b_0\beta_0^2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\|\psi^N(.,0)\|_{L_2(0,l)}\le$$
$$\le\frac{\sqrt{l}b_0\beta_0^2}{2}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{\sqrt{l}b_0\beta_0^2}{2}\|\psi^N(.,0)\|^2_{L_2(0,l)}\le$$
$$\le\frac{\sqrt{l}b_0\beta_0^2}{2}c_3\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}+\frac{\sqrt{l}b_0\beta_0^2}{2}c_{41}\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}+\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

olup bunu bir önceki eşitsizlikte kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{|\operatorname{Re}a_1|}{2}\|\psi^N(.,t)\|^4_{L_4(0,l)}\le$$
$$\le c_{52}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right)+$$
$$+\sqrt{l}b_0\beta_0^2\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)},\quad \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu terime ε -Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{|\operatorname{Re}a_1|}{2}\|\psi^N(.,t)\|^4_{L_4(0,l)}\le$$
$$\le c_{52}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right)+$$
$$+\sqrt{l}b_0\beta_0^2\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{\sqrt{l}b_0\beta_0^2}{2\varepsilon}\|\psi^N(.,t)\|^2_{L_2(0,l)},\ \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\varepsilon = \dfrac{a_0}{\sqrt{l b_0 \beta_0^2}}$ olarak alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\frac{a_0}{2}\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{|\mathrm{Re}\, a_1|}{2}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^4_{L_4(0,l)} \le$$
$$\le c_{53}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right) + \frac{l b_0^2 \beta_0^4}{2a_0}\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T].$$

Burada $c_{53} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır. Bu eşitsizlikte (3.90) kestirimini uygularsak

$$a_0\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)} + |\mathrm{Re}\, a_1|\left\|\psi^N(.,t)\right\|^4_{L_4(0,l)} \le$$
$$\le c_{54}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.105}$$

kestirimini elde ederiz.

Lemmanın ispatını sona erdirmek için şimdi de $\dfrac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}$ türevini değerlendirmek yeterlidir. Bu amaçla (3.93) sistemindeki k. denklemi $\lambda_k \overline{C}_k^N$ ile çarparak elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1 den N ye kadar toplarsak

$$\int_0^l \left[i\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} L\overline{\psi}^N(x,t) - \left|L\psi^N(x,t)\right|^2 - v(x)\psi^N(x,t)L\overline{\psi}^N(x,t) + \right.$$
$$\left. a_1\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \psi^N(x,t)L\overline{\psi}^N(x,t)\right]dx = \int_0^l f(x,t)L\overline{\psi}^N(x,t)dx, \ \forall t \in [0,T]$$

eşitliğini elde ederiz. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^l \left|L\psi^N\right|^2 dx \le \int_0^l \left|L\overline{\psi}^N\right| \left| i\frac{\partial \psi^N}{\partial t} - v(x)\psi^N + a_1\left|\psi^N\right|^2 \psi^N - f(x,t)\right| dx \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int_0^l \left|L\psi^N\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \left| i\frac{\partial \psi^N}{\partial t} - v(x)\psi^N + a_1\left|\psi^N\right|^2 \psi^N - f(x,t)\right|^2 dx, \ \forall t \in [0,T]$$

olup aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le 4 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} + 4\int_0^l |v(x)|^2 \left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx +$$

$$+4|a_1|^2 \left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)} + 4\| f(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T].$$

$v \in L_2(0,l)$ olduğundan sonuncu eşitsizlikten

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le 4 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} + 4\|v\|^2_{L_2(0,l)} \left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_\infty(0,l)} +$$

$$+4|a_1|^2 \left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)} + 4\| f(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T].$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte (3.90), (3.102) ve (3.105) kestirimlerini ve (3.20), (3.104) eşitsizliklerini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} &\left\| L\psi^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le \\ &c_{55}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \| f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} \right) + 4|a_1|^2 \left\|\psi^N(.,t)\right\|^6_{L_6(0,l)}, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Şimdi bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu terimi değerlendirelim. Bu amaçla (3.85) sistemindeki k. denklemi herhangi $\overline{\eta}_k(t)$ sürekli fonksiyonu ile çarparak k üzerinden 1 den N ye toplayalım. Bu durumda

$$\int_0^l a_1 \left|\psi^N(x,t)\right|^2 \psi^N(x,t)\overline{\eta}^N(x,t)dx - a_0 \int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \overline{\eta}^N(x,t)}{\partial x} dx =$$

$$= \int_0^l a(x)\psi^N(x,t)\overline{\eta}^N(x,t)dx + \int_0^l v(x)\psi^N(x,t)\overline{\eta}^N(x,t)dx - i\int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t}\overline{\eta}^N(x,t)dx +$$

$$+\int_0^l f(x,t)\overline{\eta}^N(x,t)dx, \quad \forall\ \eta^N(x,t) = \sum_{k=1}^N \overline{\eta}_k(t)u_k(x)$$

integral özdeşliğini elde ederiz. Bu özdeşlikte $\overline{\eta}^N(x,t)$ fonksiyonunun yerine $\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \overline{\psi}^N(x,t)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$a_1\int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^6 dx - a_0\int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \bar{\psi}^N(x,t)\right)dx =$$

$$= \int_0^l a(x)\left|\psi^N(x,t)\right|^4 dx + \int_0^l v(x)\left|\psi^N(x,t)\right|^4 dx -$$

$$-i\int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t}\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \bar{\psi}^N(x,t)dx + \int_0^l f(x,t)\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \bar{\psi}^N(x,t)dx.$$

Bu eşitlik ile onun kompleks eşleniğini taraf tarafa toplarsak

$$2\operatorname{Re} a_1\int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^6 dx - a_0\int_0^l \left[\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \bar{\psi}^N(x,t)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \bar{\psi}^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \psi^N(x,t)\right)\right]dx = 2\int_0^l a(x)\left|\psi^N(x,t)\right|^4 dx +$$

$$+2\int_0^l v(x)\left|\psi^N(x,t)\right|^4 dx + 2\int_0^l \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t}\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \bar{\psi}^N(x,t)\right)dx +$$

$$+2\int_0^l \operatorname{Re}\left(f(x,t)\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \bar{\psi}^N(x,t)\right)dx$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \bar{\psi}^N(x,t)\right) + \frac{\partial \bar{\psi}^N(x,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \psi^N(x,t)\right) =$$

$$= 2\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \left|\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x}\right|^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left|\psi^N(x,t)\right|^2\right)^2 \geq 0$$

ve $\operatorname{Re} a_1 < 0$ olduğunu göz önünde bulundurursak sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$2\left|\operatorname{Re} a_1\right|\int_0^l \left|\psi^N(x,t)\right|^6 dx + a_0\int_0^l \left(2\left|\psi^N(x,t)\right|^2 \left|\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x}\right|^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left|\psi^N(x,t)\right|^2\right)^2\right)dx \leq$$

$$\leq 2\int_0^l |f(x,t)|\left|\psi^N(x,t)\right|^3 dx + 2\int_0^l \left|\frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t}\right|\left|\psi^N(x,t)\right|^3 dx +$$

$$+2\int_0^l |a(x)|\left|\psi^N(x,t)\right|\left|\psi^N(x,t)\right|^3 dx + 2\int_0^l |v(x)|\left|\psi^N(x,t)\right|\left|\psi^N(x,t)\right|^3 dx,\ \ \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafına ε-Cauchy eşitsizliğini uygulayıp sol tarafta bulunan ikinci terimin negatif olmadığını göz önünde bulundurursak

$$2\left|\operatorname{Re} a_1\right|\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^6 \le \varepsilon\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^6 + \frac{4}{\varepsilon}\left[\left\| f(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \right.$$

$$\left. + \mu_0^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \int_0^l |v(x)|^2\left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx\right],\ \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\varepsilon = \left|\operatorname{Re} a_1\right|$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^6 \le \frac{4}{\left|\operatorname{Re} a_1\right|^2}\left[\left\| f(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \mu_0^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \right.$$

$$\left. + b_0^2\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)}^2\right],\ \forall t\in[0,T].$$

Burada (3.20), (3.104) eşitsizlikleri ve (3.90), (3.102) ile (3.105) kestirimleri kullanılırsa

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^6 \le c_{56}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \| f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right)$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{56} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır. Bu kestirimi (3.106) eşitsizliğinde dikkate alırsak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{57}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \| f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right) \tag{3.107}$$

Burada $c_{57} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

$$L\psi^N(x,t) = -a_0\frac{\partial^2\psi^N(x,t)}{\partial x^2} + a(x)\psi^N(x,t)$$

formülünü kullanarak (3.107) den

$$\left\|-a_0\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2} + a(x)\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{c_{57}}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \| f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right)^{1/2}$$

olup buradan

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N(.,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{58}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \| f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^6\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{3.108}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{58} > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Böylece (3.90), (3.102), (3.105) ve (3.108) kestirimlerini kullanırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\tilde{a}\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\right|^2\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2dxd\tau\le$$
$$\le c_{59}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right),\ \forall t\in[0,T] \tag{3.109}$$

Burada $c_{59}>0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

$$\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(t)\right|^2+\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2\le\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göz önünde bulundurursak ve (3.109) kestirimini dikkate alırsak lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Lemma 3.2.2.2 ispatlanmış oldu.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. Bu amaçla

$$\ell_{N,k}(t)=\left(\psi^N(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)},\quad k,N=1,2,...$$

fonksiyonlar ailesini göz önüne alalım. (3.87) kestiriminden $\ell_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesinin ve onların türevi olan $\dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Belirlenmiş her bir k ve herhangi $N\ge k$ için $\ell_{N,k}(t),\ k,N=1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.85) sistemindeki k. denklem $(t,t+\Delta t)$ aralığında integrallenip $\ell_{N,k}(t)$ için olan formül dikkate alınırsa

$$\left|\ell_{N,k}(t+\Delta t)-\ell_{N,k}(t)\right| \le \int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l a_0 \frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial x}\frac{du_k}{dx}dx\right|d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l a(x)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dx\right|d\tau + \int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l v(x)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dx\right|d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l a_1\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2\psi^N(x,\tau)u_k(x)dx\right|d\tau + \int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l f(x,\tau)u_k(x)dx\right|d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitlikte Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\left|\ell_{N,k}(t+\Delta t)-\ell_{N,k}(t)\right| \le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau +$$

$$+\mu_0\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}d\tau+\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}\int_t^{t+\Delta t}\left\|f(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}d\tau + \tag{3.110}$$

$$+\left|a_1\right|\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^3_{L_6(0,l)}d\tau+\left\|v\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_k\right\|_{L_4(0,l)}\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_4(0,l)}d\tau.$$

(3.19) eşitsizliğini $\psi^N(.,t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $u_k \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ fonksiyonları için kullanırsak

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_4(0,l)} \le \beta_1\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)},\ \forall t\in[0,T] \tag{3.111}$$

ve

$$\left\|u_k\right\|_{L_4(0,l)} \le \beta_1\left\|u_k\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} \tag{3.112}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (3.20) ile (3.111), (3.112) eşitsizlikleri ve (3.109) kestirimi ile (3.84) varsayımını (3.110) da kullanırsak kolaylıkla

$$\left|\ell_{N,k}(t+\Delta t)-\ell_{N,k}(t)\right| \le c_{60}d_k(\Delta t)^{1/2},\quad \forall t\in[0,T],\ k,N=1,2,... \tag{3.113}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{60}>0$ sayısı N,k ve t den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}$, $k,N=1,2,...$ fonksiyonlarının aynı dereceden sürekli olduklarını gösterelim. Bu amaçla (3.85) sistemindeki k. denklemin her iki tarafını t ye göre diferansiyelleyip elde edilen eşitliği $(t, t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu durumda

$$\left|\frac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right| \le \int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l a_0 \frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\frac{d^2u_k(x)}{dx^2}dx\right|d\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l a(x)\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}u_k(x)dx\right|d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l v(x)\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}u_k(x)dx\right|d\tau+$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l a_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2\psi^N(x,\tau)\right)u_k(x)dx\right|d\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left|\int_0^l \frac{\partial f(x,\tau)}{\partial t}u_k(x)dx\right|d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\frac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right| \le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|\frac{d^2u_k}{dx^2}\right\|_{L_2(0,l)}+$$

$$+\mu_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}+\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|vu_k\right\|_{L_2(0,l)}+ \tag{3.114}$$

$$+3|a_1|\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\right|\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2\left|u_k(x)\right|dxd\tau+\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t}\right|\left|\psi^N(x,t)\right|^2\left|u_k(x)\right|dx \le \left(\int_0^l\left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t}\right|^2\left|\psi^N(x,t)\right|^2dx\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int_0^l\left|\psi^N(x,t)\right|^4dx\right)^{1/4}\left(\int_0^l\left|u_k(x)\right|^4dx\right)^{1/4}$$

ve

$$\left(\int_0^l\left|v(x)u_k(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\le\left\|v\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_k\right\|_{L_\infty(0,l)}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (3.111), (3.112) ile

$$\left\|u_k\right\|_{L_\infty(0,l)}\le c_{61}\left\|u_k\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}$$

eşitsizliklerini ve (3.84) varsayımını dikkate alırsak bu eşitsizliklerden

$$\int_0^l \left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t}\right| \left|\psi^N(x,t)\right|^2 |u_k(x)|\,dx \le c_{62}\left(\int_0^l \left|\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t}\right|^2 \left|\psi^N(x,t)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}$$

ve

$$\left(\int_0^l |v(x)u_k(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le c_{63}b_0 d_k$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Burada $c_{61}>0,\ c_{62}>0,\ c_{63}>0$ sayısı N,k ve t den bağımsızdır. Bu eşitsizlikler ile (3.84) varsayımını kullanırsak (3.114) eşitsizliğinden

$$\left|\frac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right| \le a_0\left\|\frac{d^2u_k}{dx^2}\right\|_{L_2(0,l)} \int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+\mu_0 d_k \int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau + c_{64}b_0 d_k \int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+c_{65}d_k\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_0^l \left|\frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}\right|^2 \left|\psi^N(x,\tau)\right|^2 dx\right)^{1/2}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} d\tau + d_k\int_t^{t+\Delta t}\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.109) kestirimini, (3.84) varsayımını ve

$$\left\|\frac{d^2u_k}{dx^2}\right\|_{L_2(0,l)} \le \|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}$$

eşitsizliğini dikkate alırsak

$$\left|\frac{d\ell_{N,k}(t+\Delta t)}{dt}-\frac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right| \le c_{66}d_k(\Delta t)^{1/2},\ \forall t\in[0,T],\ \ k,N=1,2,... \tag{3.115}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{66}>0$ sayısı N,k ve Δt den bağımsızdır.

Böylece (3.113) ve (3.115) eşitsizliklerinden $\ell_{N,k}(t)$ ve $\dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt},\ k,N=1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin belirlenmiş k ve herhangi $N\ge k$ için $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğunu ve ayrıca bu $\ell_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesinin ve onların t ye göre türevlerinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu göstermiş olduk. Yani

$$\max_{0\le t\le T}\left|l_{N,k}(t)\right| \le c_{67},\ \ \max_{0\le t\le T}\left|\frac{dl_{N,k}(t)}{dt}\right| \le c_{68},\ \ N,k=1,2,...$$

dır. Bu takdirde düzgün sınırlı ve aynı dereceden sürekli $\left\{\ell_{N,k}(t)\right\}$, $\left\{\dfrac{d\ell_{N,k}(t)}{dt}\right\}$ fonksiyonlar ailesinden her bir $k=1,2,...$ için $[0,T]$ aralığında sırasıyla $\ell_k(t)$ ve $\dfrac{d\ell_k(t)}{dt}$ fonksiyonlarına düzgün yakınsayan $\left\{\ell_{N_m,k}(t)\right\}$, $\left\{\dfrac{d\ell_{N_m,k}(t)}{dt}\right\}$, $m=1,2,...$ alt dizilerini seçebiliriz. $l_k(t)$ dizisi aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlar:

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\ell_k(t)u_k(x).$$

Bu fonksiyonun t ye göre türevi ise

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d\ell_k(t)}{dt}u_k(x)$$

şeklindedir. İskenderov (2001) çalışmalarında olduğu gibi $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}\right\}$ ve $\left\{\dfrac{\partial^2\psi^{N_m}(x,t)}{\partial x^2}\right\}$ alt dizilerinin t değişkenine göre $[0,T]$ parçasında düzgün olarak $L_2(0,l)$ de sırasıyla $\psi(x,t)$, $\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ ve $\dfrac{\partial^2\psi^N(x,t)}{\partial x^2}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsadıkları ispatlanabilir. Yani $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinin limit fonksiyonu olan $\psi(x,t)$ fonksiyonu $C^0\left([0,T],W_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayının bir elemanı olur. Ayrıca $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinin yakınsama özelliklerini kullanıp (3.87) kestiriminde $N=N_m$ ve $m\to\infty$ için alt limite geçersek teoremin hükmünde yer alan (3.83) kestiriminin geçerli olduğu kolaylıkla elde edilir.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin her bir $t\in[0,T]$ için hemen hemen çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla $N=N_m$ için (3.93) sistemindeki k. denklem herhangi sürekli $\overline{\eta}_k(t)$ fonksiyonu ile çarpılır ve elde edilen denklemler k üzerinden 1 den $N' \le N_m$ ye kadar toplanırsa kısmi integrasyon formülünün de yardımıyla aşağıdaki integral özdeşliği elde edilir:

$$\begin{aligned}\int_0^l \Bigg[& i\frac{\partial \psi^{N_m}(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^{N_m}(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi^{N_m}(x,t) - v(x)\psi^{N_m}(x,t) + \\ & + a_1 \left|\psi^{N_m}(x,t)\right|^2 \psi^{N_m}(x,t) - f(x,t)\Bigg]\bar{\eta}^{N'}(x,t)dx = 0, \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned} \tag{3.116}$$

Burada $\bar{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x), \; N' \le N_m$ dir.

$\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ alt dizisi $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $W_2^2(0,l)$ uzayında $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığından ve $W_2^2(0,l)$ uzayı $L_2(0,l)$ uzayına kompakt gömüldüğünden t ye göre düzgün olarak $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t) - \psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \tag{3.117}$$

limit bağıntısını elde ederiz. Bu limit bağıntısına göre de $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ alt dizisinden $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $(0,l)$ aralığında $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu alt diziyi yine $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ ile gösterelim.

$\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ dizisi $C^0\left([0,T], \overset{0}{W_2^2}(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olduğundan (3.109) kestiriminin yardımıyla $N = N_m$ için düzgün sınırlılığı ifade eden

$$\left\|\psi^{N_m}(.,t)\right\|_{L_6(0,l)} \le c_{69}, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimini elde ederiz. Diğer taraftan

$$\left\|\left|\psi^{N_m}(.,t)\right|^2 \psi^{N_m}(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le \left\|\psi^{N_m}(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}^3$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu açıktır. Böylece bu eşitsizlik ve bu kestirimin yardımıyla Ladyzenskaja *et al.* (1967) çalışmasından bilinen lemmaya (Bkz. Kuramsal Temeller, Lemma 2.3) göre $\left\{ \left| \psi^{N_m}(x,t) \right|^2 \psi^{N_m}(x,t) \right\}$ dizisi $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ de $|\psi(x,t)|^2 \psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsar. Yani $m \to \infty$ ve $\forall t \in [0,T]$ için

$$\int_0^l \left| \psi^{N_m}(x,t) \right|^2 \psi^{N_m}(x,t) \overline{\eta}^{N'}(x,t) dx \to \int_0^l |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) \overline{\eta}^{N'}(x,t) dx \tag{3.118}$$

limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir.

v üzerine konulan şartı kullanarak

$$\left\| v\psi^{N_m}(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \le b_0 \left\| \psi^{N_m}(.,t) \right\|_{L_\infty(0,l)}, \quad \forall t \in [0,T]$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada (3.18) eşitsizliğini ve (3.109) kestirimini kullanırsak

$$\left\| v\psi^{N_m}(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \le c_{70}, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimini elde ederiz. $\left\{ \psi^{N_m}(x,t) \right\}$ dizisi $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ de $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsadığından ve $\left\{ v\psi^{N_m}(x,t) \right\}$ dizisi herhangi $t \in [0,T]$ için $L_2(0,l)$ de düzgün sınırlı olduğundan (3.118) limit bağıntısının elde edilmesine benzer olarak $m \to \infty$ için

$$\int_0^l v(x) \psi^{N_m}(x,t) \overline{\eta}^{N'}(x,t) dx \to \int_0^l v(x) \psi(x,t) \overline{\eta}^{N'}(x,t) dx \tag{3.119}$$

limit bağıntısının $\forall t \in [0,T]$ için geçerli olduğu elde edilir. Böylece (3.118) ve (3.119) limit bağıntıları ile $\left\{ \psi^{N_m}(x,t) \right\}$ alt dizisinin yukarıda gösterdiğimiz zayıf yakınsama özelliklerini kullanarak (3.116) integral özdeşliğinde $m \to \infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_0^l \left[i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi(x,t) - v(x)\psi(x,t) + a_1 |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) - f(x,t) \right] \times$$

$$\times \overline{\eta}^{N'}(x,t) dx = 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall \overline{\eta}^{N'}(x,t) = \sum_{k=1}^{N'} \overline{\eta}_k(t) u_k(x).$$

$\overline{\eta}^{N'}(x,t)$ biçiminde olan fonksiyonlar $\forall t \in [0,T]$ için $L_2(0,l)$ uzayında her yerde yoğun olduğundan $N' \to \infty$ için bu integral özdeşliğinde limite geçilirse

$$\int_0^l \left[i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi(x,t) - v(x)\psi(x,t) + a_1 |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) - f(x,t) \right] \times$$

$$\times \overline{\eta}(x,t)dx = 0, \ \forall t \in [0,T], \forall \eta(.,t) \in L_2(0,l)$$

integral özdeşliği elde edilir. Bu özdeşlikten de $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.76) denklemini herhangi $t \in [0,T]$ ve hemen hemen $x \in (0,l)$ için sağladığını elde ederiz.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.77) başlangıç şartını sağladığını gösterelim. $t = 0$ için (3.117) limit bağıntısı,

$$\psi^{N_m}(x,0) = \varphi^{N_m}(x), \ x \in (0,l)$$

başlangıç şartı,

$$\int_0^l |\psi(x,0) - \varphi(x)|^2 dx \le 2\int_0^l |\psi(x,0) - \psi^{N_m}(x,0)|^2 dx + 2\int_0^l |\psi^{N_m}(x,0) - \varphi(x)|^2 dx$$

eşitsizliği kullanılır ve limite geçilirse

$$\int_0^l |\psi(x,0) - \varphi(x)|^2 dx = 0$$

olur. Böylece $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.77) başlangıç şartını sağladığı elde edilir.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun sınır şartlarını sağladığını gösterelim. $C^0\left([0,T], W_2^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayı $L_2\left([0,T], W_2^1(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden ve $W_2^1(0,l)$ uzayı da $C[0,l]$ uzayına kompakt gömüldüğünden $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinin $L_2\left([0,T], C[0,l]\right)$ uzayında $\psi(x,t)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsadığı elde edilir. Yani $m \to \infty$ için

$$\max_{x \in [0,l]} \left\| \psi^{N_m}(x,.) - \psi(x,.) \right\|_{L_2[0,T]}^2 \to 0$$

limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir. Bu limit bağıntısını kullanarak $m \to \infty$ için

$$\left\| \psi^{N_m}(0,.) - \psi(0,.) \right\|_{L_2[0,T]}^2 \to 0, \ \left\| \psi^{N_m}(l,.) - \psi(l,.) \right\|_{L_2[0,T]}^2 \to 0$$

limit bağıntılarını yazabiliriz. Bu limit bağıntıları,

$$\psi^{N_m}(0,t) = \psi^{N_m}(l,t) = 0, \ \forall t \in [0,T]$$

sınır şartları ve

$$\int_0^T |\psi(s,t)|^2\,dt \le 2\int_0^T \left|\psi(s,t)-\psi^{N_m}(s,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T \left|\psi^{N_m}(s,t)\right|^2 dt,\quad s=0,l$$

eşitsizlikleri kullanılarak

$$\int_0^T |\psi(s,t)|^2 dt = 0,\quad s=0,l$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun hemen hemen $t\in[0,T]$ için (3.78) sınır şartlarını sağladığı görülür. Böylece $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin $v\in V$ elemanına karşılık gelen çözümü olduğunu ispatlamış olduk. Ayrıca ψ nin $B_0 \equiv C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayının elemanı olduğu elde edilir. $N=N_m$ üzerinden (3.87) eşitsizliğinde alt limite geçersek ve $W_2^2(0,l)$ ve $L_2(0,l)$ uzaylarında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak teoremde yer alan kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz.

Şimdi (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün tek olduğunu gösterelim. $\psi(x,t)$ ve $\phi(x,t)$ fonksiyonları (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin herhangi iki çözümü olsun. Bu iki çözümün farkını $\omega(x,t)=\psi(x,t)-\phi(x,t)$ ile gösterelim. Bu takdirde $\omega=\omega(x,t)$ fonksiyonunun

$$i\frac{\partial\omega}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-a(x)\omega-v(x)\omega+a_1\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)\omega+a_1\psi\phi\bar{\omega}=0,\quad (x,t)\in\Omega \qquad (3.120)$$

$$\omega(x,0)=0,\quad x\in(0,l) \qquad (3.121)$$

$$\omega(0,t)=\omega(l,t)=0,\quad t\in(0,T) \qquad (3.122)$$

başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olduğu kolaylıkla elde edilir.

Şimdi bu poblemin çözümünü değerlendirelim. Bu amaçla (3.120) denkleminin her iki tarafı $\bar{\omega}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpılır ve Ω_t bölgesi üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\omega}{\partial t}\bar{\omega} - a_0\left|\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right| - a(x)|\omega|^2 - v(x)|\omega|^2 + a_1\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)|\omega|^2 + \right.$$

$$\left. + a_1\psi\phi(\bar{\omega})^2\right]dxd\tau = 0, \quad \forall t\in[0,T]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak

$$\int_{\Omega_t} i\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\bar{\omega}+\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t}\omega\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t}\left(a_1-\bar{a}_1\right)\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau =$$

$$= -\int_{\Omega_t}\left(a_1\psi\phi(\bar{\omega})^2 - \bar{a}_1\bar{\psi}\bar{\phi}(\omega)^2\right)dxd\tau$$

eşitliği yazılır. Burada (3.121) başlangıç şartı kullanılırsa

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im}a_1\int_{\Omega_t}\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau = -2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(a_1\psi\phi(\bar{\omega})^2\right)dxd\tau$$

olup buradan da aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu kolaylıkla elde ederiz:

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + 2\operatorname{Im}a_1\int_{\Omega_t}\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau \le 2|a_1|\int_{\Omega_t}|\psi||\phi||\omega|^2 dxd\tau \le$$

$$\le |a_1|\int_{\Omega_t}\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau, \ \forall t\in[0,T].$$

Burada $|a_1| \le |\operatorname{Re}a_1| + |\operatorname{Im}a_1| = |\operatorname{Re}a_1| + \operatorname{Im}a_1$ ve $\operatorname{Im}a_1 \ge 2|\operatorname{Re}a_1|$ olduğunu göz önünde bulundurursak

$$|a_1| \le \frac{3}{2}\operatorname{Im}a_1$$

olup herhangi $t\in[0,T]$ için

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{1}{2}\operatorname{Im}a_1\int_{\Omega_t}\left(|\psi|^2+|\phi|^2\right)|\omega|^2\,dxd\tau \le 0$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da aşağıdaki eşitliği kolaylıkla yazabiliriz:

$$\|\omega(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} = 0, \quad \forall t\in[0,T].$$

Dolayısıyla

$$\psi(x,t) = \phi(x,t), \quad \forall t\in[0,T], \quad \overset{o}{\forall} x\in(0,l)$$

olup çözüm tekdir. Teorem 3.2.2.1 ispatlandı.

3.2.3. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Şimdi (3.76)-(3.78),(3.82) optimal kontrol probleminin iyi konulmasını inceleyelim. Bu amaçla önce $\alpha > 0$ için optimal kontrol probleminin tek çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3.2.3.1: Teorem 3.2.2.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $y \in L_2(0,l)$, $w \in L_2(0,l)$ verilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde $L_2(0,l)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\forall \alpha > 0$ için (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir.

İspat: Önce

$$J_0(v) = \|\psi(.,T) - y\|^2_{L_2(0,l)}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. $\Delta v \in L_2(0,l)$ fonksiyonu $v + \Delta v \in V$ olacak şekilde herhangi $v \in V$ elemanına verilen bir artış olsun. $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonu (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin $v \in V$ ye karşılık gelen çözümü olsun. Bu takdirde (3.76)-(3.78) probleminin çözümü $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ artışını elde eder. Burada $\psi_\Delta(x,t) = \psi(x,t;v+\Delta v)$ ise (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin $v + \Delta v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. (3.76)-(3.78) şartlarından $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki sınır-değer probleminin çözümü olduğunu kolaylıkla elde ederiz:

$$i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi - (v+\Delta v)\Delta\psi + a_1\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)\Delta\psi + \\ + a_1\psi_\Delta\psi\Delta\bar{\psi} = \Delta v\psi(x,t;v), \quad (x,t) \in \Omega \tag{3.123}$$

$$\Delta\psi(x,0) = 0, \quad x \in (0,l) \tag{3.124}$$

$$\Delta\psi(0,t) = \Delta\psi(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.125}$$

Şimdi bu problemin çözümünü değerlendirelim. Bu amaçla (3.123) denkleminin her iki tarafını $\Delta\bar{\psi}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpıp ve Ω_t bölgesi üzerinden integrallersek

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\Delta\bar{\psi}-a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right|^2-a(x)|\Delta\psi|^2-\big(v(x)+\Delta v(x)\big)|\Delta\psi|^2+$$
$$+a_1\Big(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\Big)|\Delta\psi|^2+a_1\psi_\Delta\psi(\Delta\bar{\psi})^2\Bigg]dxd\tau=\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\psi\Delta\bar{\psi}dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik ile onun kompleks eşleniğini taraf tarafa çıkarırsak

$$\int_{\Omega_t}i\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\Delta\bar{\psi}+\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t}\Delta\psi\right)dxd\tau=-\int_{\Omega_t}2i\,\mathrm{Im}\,a_1\Big(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\Big)|\Delta\psi|^2\,dxd\tau-$$
$$-\int_{\Omega_t}\Big(a_1\psi_\Delta\psi(\Delta\bar{\psi})^2-\bar{a}_1\bar{\psi}_\Delta\bar{\psi}(\Delta\psi)^2\Big)dxd\tau+2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\big(\Delta v\psi\Delta\bar{\psi}\big)dxd\tau$$

olup buradan

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le 3\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\Big(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\Big)|\Delta\psi|^2dxd\tau+|\mathrm{Re}\,a_1|\int_{\Omega_t}\Big(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\Big)|\Delta\psi|^2dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t}|\Delta v(x)||\psi(x,\tau)||\Delta\psi(x,\tau)|dxd\tau,\ t\in[0,T]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.83) kestirimini ve (3.18) eşitsizliğini kullanırsak

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{71}\int_0^t\|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\,d\tau+c_{72}\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_{71}>0$ ve $c_{72}>0$ sayıları Δv ve $\Delta\psi$ den bağımsızdır. Burada Gronwall lemmasını uygularsak,

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_{73}\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)},\quad \forall t\in[0,T] \tag{3.126}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{73}>0$ sayısı Δv ve t den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin $\forall v\in V$ elemanı üzerindeki artışını hesaplayalım. $J_0(v)$ fonksiyoneli için olan formülü kullanırsak $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını

$$\begin{aligned}\Delta J_0(v)&=J_0(v+\Delta v)-J_0(v)\\&=2\int_0^l\mathrm{Re}\big[\big(\psi(x,T)-y(x)\big)\Delta\bar{\psi}(x,T)\big]dx+\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}\end{aligned} \tag{3.127}$$

şeklinde buluruz. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği ile (3.83) ve (3.126) kestirimleri kullanılır ve $y \in L_2(0,l)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|\Delta J_0(v)\right| \le c_{74}\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{74} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten ve $v \in V$ nin V kümesinin herhangi bir elemanı olmasından dolayı $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu görülür.

Ayrıca V kümesi $L_2(0,l)$ uzayında kapalı, sınırlı ve konveks bir kümedir ve $L_2(0,l)$ uzayı da düzgün konveks uzaydır. İspata göre $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde süreklidir ve $\forall v \in V$ için $J_0(v) \ge 0$ dır. Yani alttan sınırlıdır. Bu takdirde Goebel (1979) çalışmasındaki fonksiyonelin minimumunun varlığına ait olan teoreme göre (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.5), $L_2(0,l)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\forall \alpha > 0$ için (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir. Teorem 3.2.3.1 ispatlandı.

Şimdi $\alpha \ge 0$ için (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3.2.3.2: Farz edelim ki Teorem 3.2.3.1 nin şartları sağlanmış olsun ve $\alpha \ge 0$ verilen sayı olsun. Bu takdirde (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat: $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha*}$$

olacak şekilde herhangi $\left\{v^m\right\} \subset V$ minimalleştirici dizisini göz önüne alalım. $v^m \in V$ için (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü $\psi_m = \psi_m(x,t) \equiv \psi(x,t;v^m)$ olarak gösterelim. $v^m \in V$, $m = 1,2,...$ olduğu için Teorem

3.2.2.1 e göre her bir $m=1,2,...$ için (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin tek çözümü var ve bu çözüm için

$$\|\psi_m(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi_m(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{75}, \quad \forall t\in[0,T], \quad m=1,2,... \tag{3.128}$$

kestirimi geçerlidir. Burada c_{75} sayısı ile (3.83) kestiriminin sağ tarafı işaret edilmiştir ve m den bağımsızdır.

Tanıma göre V kümesi $L_2(0,l)$ Hilbert uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir kümesi olduğundan bu küme $L_2(0,l)$ de zayıf kompakt ve zayıf kapalı bir kümedir. Bu nedenle $\{v^m\}$ dizisinden $v\in V$ elemanına zayıf yakınsayan bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde $\forall q\in L_2(0,l)$ ve $m\to\infty$ için

$$\int_0^l v^m(x)q(x)dx \to \int_0^l v(x)q(x)dx \tag{3.129}$$

limit bağıntısını yazabiliriz. (3.128) kestiriminden $\{\psi^m(x,t)\}$ dizisinin $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayının normunda düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Bu nedenle her bir $t\in[0,T]$ ve $m\to\infty$ için $\{\psi^m\}$ dizisinden belirli bir $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonuna $L_2(0,l)$ de zayıf yakınsayan alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine $\{\psi^m\}$ ile gösterelim. Buna göre her bir $t\in[0,T]$ ve $m\to\infty$ için $\{\psi_m\}$, $\left\{\frac{\partial\psi_m}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial\psi_m}{\partial t}\right\}$ dizilerinin $L_2(0,l)$ uzayında sırasıyla ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsadıkları hükmüne varabiliriz.

Şimdi $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonunun $\forall t\in[0,T]$ ve $\overset{0}{\forall}\, x\in(0,l)$ için (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim. $\psi_m(x,t)$ fonksiyonları her bir $m=1,2,...$ için (3.76)-(3.78) sınır-değer probleminin B_0 uzayına ait çözümü olduğundan $\forall t\in[0,T]$ ve $\forall g\in L_2(0,l)$ için

$$\int_0^l \left[i\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_m(x,t)}{\partial x^2}-a(x)\psi_m(x,t)-v^m(x)\psi_m(x,t)+ \right. \left. +a_1\left|\psi_m(x,t)\right|^2\psi_m(x,t)-f(x,t)\right]\bar{g}(x)dx=0 \tag{3.130}$$

integral özdeşliğini sağlar.

$B_0\equiv C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ uzayı gömülme teoremlerine göre $C^0\left([0,T],L_\infty(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $\forall t\in[0,T]$ ve $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi_m(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)}\to 0$$

limit bağıntısını yazabiliriz. Bu yakınsamanın ve $\{v^m\}$ dizisinin yakınsama özelliğini dikkate alırsak $\forall t\in[0,T]$ ve $m\to\infty$ için

$$\int_0^l v^m(x)\psi_m(x,t)\bar{g}(x)dx\to\int_0^l v(x)\psi(x,t)\bar{g}(x)dx \tag{3.131}$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz. Diğer yandan (3.128) kestiriminin ve (3.18) eşitsizliğinin yardımıyla

$$\left\|\left|\psi_m(.,t)\right|^2\psi_m(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}\le c_{76},\quad \forall t\in[0,T],\quad m=1,2,...$$

eşitsizliği kolaylıkla yazılabilir. Burada $c_{76}>0$ sayısı N ve t den bağımsız bir sabittir.

$$\left\|\psi_m(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)}\to 0$$

limit bağıntısına göre $\psi_m(x,t)$ dizisi $\forall t\in[0,T]$ için $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $(0,l)$ de hemen hemen yakınsar. Bu durumda Ladyzenskaja *et al.* (1967) çalışmasından bilinen lemmanın (Bkz. Kuramsal Temeller, Lemma 2.3) hükmü kullanılırsa kolaylıkla $\forall t\in[0,T]$ için

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^l a_1\left|\psi_m(x,t)\right|^2\psi_m(x,t)dx=\int_0^l a_1\left|\psi(x,t)\right|^2\psi(x,t)dx \tag{3.132}$$

limit bağıntısını elde ederiz. Böylece (3.131) ve (3.132) limit bağıntıları ile her bir $t\in[0,T]$ için $\{\psi_m(x,t)\}$, $\left\{\dfrac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial t}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2\psi_m(x,t)}{\partial x^2}\right\}$ dizilerinin sırasıyla $L_2(0,l)$ uzayında $\psi(x,t)$, $\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsamaları kullanılarak (3.130) integral özdeşliğinin her iki tarafında $m\to\infty$ için limite geçilirse aşağıdaki integral özdeşliği elde edilir:

$$\int_0^l\left[i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-a(x)\psi(x,t)-v(x)\psi(x,t)+a_1|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)-f(x,t)\right]\times$$
$$\times\bar{g}(x)dx=0,\quad \forall g\in L_2(0,l),\quad \forall t\in[0,T].$$

Buradan da $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun $\forall t\in[0,T]$ ve hemen hemen $x\in(0,l)$ için (3.76) denklemini sağladığını kolaylıkla görebiliriz.

Teorem 3.2.2.1 in ispatında olduğu gibi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.77) başlangıç ve (3.78) sınır şartlarını sağladığı kolaylıkla ispatlanabilir. Böylece $\{v^m\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen ve (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olan fonksiyonun $\{\psi_m(x,t)\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun olduğu elde edilir. Yani, $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ dir. (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü tek olduğundan $\psi\in B_0$ dır. (3.128) kestiriminde alt limite geçersek $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.83) kestirimini sağladığı kolaylıkla elde edilir.

$L_2(0,l)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli ve $\alpha\ge 0$ olduğunu göz önüne alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin v elemanında alttan zayıf yarı sürekli olduğu elde edilir. Buna göre yukarıdaki $\{v^m\}$ ve $\{\psi_m(x,t)\}$ dizilerinin zayıf yakınsama özelliklerini kullanarak

$$J_{\alpha*}\le J_\alpha(v)\le\underline{\lim}_{m\to\infty}J_\alpha(v^m)=J_{\alpha*}$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da $v \in V$ elemanının (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol probleminin çözümü olduğu elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3.2 ispatlanmış oldu.

3.2.4. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi

Bu bölümde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla eşlenik problem olarak adlandırılan aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \eta}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a(x)\eta - v(x)\eta + 2\bar{a}_1|\psi|^2\eta + a_1\psi^2\bar{\eta} = 0,\ (x,t)\in\Omega \qquad (3.133)$$

$$\eta(x,T) = -2i\left(\psi(x,T) - y(x)\right),\quad x\in(0,l) \qquad (3.134)$$

$$\eta(0,t) = \eta(l,t) = 0,\quad t\in[0,T]. \qquad (3.135)$$

Burada $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonu (3.76)-(3.78) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. Bu sınır değer probleminin çözümü olarak B_0 uzayına ait olan $\forall t \in [0,T]$ ve $\overset{0}{\forall}\, x \in (0,l)$ için (3.133)-(3.135) şartlarını sağlayan $\eta = \eta(x,t) \equiv \eta(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.2.4.1: Teorem 3.2.2.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $y \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ verilen fonksiyon olsun. Bu takdirde (3.133)-(3.135) sınır değer probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\begin{aligned}\|\eta(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \eta(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{77}\Bigg(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \\ + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|y\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}\Bigg),\ \forall t\in[0,T]\end{aligned} \qquad (3.136)$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{77} > 0$ sayısı t den bağımsız bir sabittir.

Bu teoremin ispatı Teorem 3.2.2.1 in ispatında olduğu gibi Galerkin yöntemi ile kolaylıkla ispatlanabilir.

Aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım:

$$H\left(x,\psi(x,\cdot),v(x),\overline{\eta}(x,\cdot)\right)=\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)dt\times v(x)-\alpha\left(v(x)-w(x)\right)^2.$$

Bu fonksiyona (3.76)-(3.78), (3.82) problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir.

Şimdi $\forall v\in V$ için $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını hesaplayalım. $\Delta v\in L_2(0,l)$ fonksiyonu $v+\Delta v\in V$ olacak şekilde herhangi $v\in V$ elemanına verilen artış olsun. Bu takdirde (3.82) ve (3.127) formüllerini dikkate alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v\in V$ elemanı üzerindeki artışını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v+\Delta v)-J_\alpha(v)\\ &=2\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx+ \qquad (3.137)\\ &+2\alpha\int_0^l\left(v(x)-w(x)\right)\Delta v(x)dx+\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)}.\end{aligned}$$

Burada $\Delta\psi=\Delta\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v+\Delta v)-\psi(x,t;v)$ fonksiyonu (3.123)-(3.125) başlangıç-sınır değer probleminin çözümüdür.

Şimdi (3.137) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimi dönüştürmeye çalışalım. Bu amaçla aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 3.1.4.2:

$$2\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx=-\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt+\tilde{R}(\Delta v) \qquad (3.138)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\tilde{R}(\Delta v)$ kalanı

$$\tilde{R}(\Delta v) = -\int_{\Omega} \mathrm{Re}\left(\Delta\psi\bar{\eta}\right)\Delta v(x)dxdt + \int_{\Omega} \mathrm{Re}\, a_1\left(|\psi_\Delta|^2 - |\psi|^2\right)\mathrm{Re}\left(\Delta\psi\bar{\eta}\right)dxdt -$$
$$-\int_{\Omega} \mathrm{Im}\, a_1\left(|\psi_\Delta|^2 - |\psi|^2\right)\mathrm{Im}\left(\Delta\psi\bar{\eta}\right)dxdt + \int_{\Omega} \mathrm{Re}\left(a_1|\Delta\psi|^2\,\psi\bar{\eta}\right)dxdt - \tag{3.139}$$

formülü ile tanımlanır.

İspat: (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü B_0 uzayının elemanı olduğundan (3.123)-(3.125) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olan $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ fonksiyonu $\forall\phi \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi - (v(x)+\Delta v(x))\Delta\psi + \right.$$
$$\left. + a_1\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)\Delta\psi + a_1\psi_\Delta\psi\Delta\bar{\psi}\right]\bar{\phi}(x,t)dxdt = \int_{\Omega}\Delta v(x)\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt \tag{3.140}$$

integral özdeşliğini ve

$$\Delta\psi(x,0) = 0,\ \ x\in(0,l);\ \ \Delta\psi(0,t) = \Delta\psi(l,t) = 0,\ \ \forall t\in[0,T] \tag{3.141}$$

şartlarını sağlar. Ayrıca eşlenik problemin çözümü olan $\eta = \eta(x,t)$ fonksiyonu $\forall\phi_1 = \phi_1(x,t) \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\eta}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - a(x)\eta - v(x)\eta + 2\bar{a}_1|\psi|^2\,\eta + a_1\psi^2\bar{\eta}\right)\bar{\phi}_1(x,t)dxdt = 0$$

integral özdeşliğini ve (3.134), (3.135) şartlarını sağlar. Bu integral özdeşliğinde $\phi_1 = \phi_1(x,t)$ fonksiyonunun yerine $\Delta\psi(x,t)\in B_0$ fonksiyonunu alalım. Kısmi integrasyon formülünü kullanarak (3.134)-(3.135) ve (3.141) başlangıç ve sınır şartlarının yardımıyla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left[\left(-i\frac{\partial\Delta\bar{\psi}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\bar{\psi}}{\partial x^2} - a(x)\Delta\bar{\psi} - v(x)\Delta\bar{\psi} + 2\bar{a}_1|\psi|^2\,\Delta\bar{\psi}\right)\eta + a_1\psi^2\Delta\bar{\psi}\bar{\eta}\right]dxdt =$$
$$= -\int_0^l 2\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\Delta\bar{\psi}(x,T)dx.$$

Bu durumda bu eşitliğin kompleks eşleniği

$$\int_{\Omega}\left[\left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi-v(x)\Delta\psi+2a_1|\psi|^2\Delta\psi\right)\overline{\eta}+\overline{a}_1\overline{\psi}^2\Delta\psi\eta\right]dxdt=$$
$$=-\int_0^l 2\left(\overline{\psi}(x,T)-\overline{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx \tag{3.142}$$

biçiminde olur. Ayrıca (3.140) integral özdeşliğinde $\phi=\phi(x,t)$ fonksiyonunun yerine $\eta(x,t)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi-(v(x)+\Delta v(x))\Delta\psi+\right.$$
$$\left.+a_1\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)\Delta\psi+a_1\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\right]\overline{\eta}(x,t)dxdt=\int_{\Omega}\Delta v(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten (3.142) eşitliğini taraf tarafa çıkarırsak

$$2\int_0^l\left(\overline{\psi}(x,T)-\overline{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx=-\int_{\Omega}\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\Delta v(x)dxdt-$$
$$-\int_{\Omega}\Delta\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\Delta v(x)dxdt+\int_{\Omega}a_1\left(|\psi_\Delta(x,t)|^2-|\psi(x,t)|^2\right)\Delta\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt+$$
$$\int_{\Omega}\left[a_1\psi_\Delta(x,t)\psi(x,t)\Delta\overline{\psi}(x,t)\overline{\eta}(x,t)-\overline{a}_1\left(\overline{\psi}(x,t)\right)^2\Delta\psi(x,t)\eta(x,t)\right]dxdt$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplarsak

$$2\int_0^l\operatorname{Re}\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx=-\int_{\Omega}\operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt-$$
$$-\int_{\Omega}\operatorname{Re}\left(\Delta\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt+$$
$$+\int_{\Omega}\operatorname{Re}a_1\left(|\psi_\Delta(x,t)|^2-|\psi(x,t)|^2\right)\operatorname{Re}\left(\Delta\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)dxdt-$$
$$-\int_{\Omega}\operatorname{Im}a_1\left(|\psi_\Delta(x,t)|^2-|\psi(x,t)|^2\right)\operatorname{Im}\left(\Delta\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)dxdt+$$
$$+\int_{\Omega}\operatorname{Re}\left(a_1|\Delta\psi(x,t)|^2\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)dxdt$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da Lemma 3.2.4.2 nin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Lemma 3.2.4.2 ispatlanmış oldu.

Şimdi (3.138) formülünü kullanarak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_\Omega -\mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt + 2\alpha\int_0^l \left(v(x)-w(x)\right)\Delta v(x)dx + R(\Delta v).$$

Burada $R(\Delta v) = \tilde{R}(\Delta v) + \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}$ şeklinde tanımlanır. Şimdi $R(\Delta v)$ için

$$R(\Delta v) = o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)$$

olduğunu gösterelim. $R(\Delta v)$ için olan formüle dikkat edersek üç terimin toplamı olduğu görülür. Bu terimlerin her birini değerlendirmeye çalışalım. (3.126) kestirimini $t=T$ için yazarsak

$$\|\Delta\psi(.,T)\|_{L_2(0,l)} \le c_{78}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \tag{3.143}$$

kestirimini elde ederiz. $\tilde{R}(\Delta v)$ için olan (3.139) formülünü kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{R}\right| &\le \int_\Omega |\Delta\psi||\eta||\Delta v|\,dxdt + 3|a_1|\int_\Omega \left(|\psi_\Delta| + |\psi|\right)|\Delta\psi|^2|\eta|\,dxdt \\
&\le \sqrt{T}\,\|\Delta\psi\|_{L_2(\Omega)} \max_{0\le t\le T}\|\eta\|_{L_\infty(0,l)}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} + \\
&\quad +3|a_1|\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}\left(\|\psi_\Delta\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}\right)\|\eta\|_{L_\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Burada

$$\|\eta\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{79}\|\eta\|_{C^0\left([0T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)}$$

$$\|\psi_\Delta\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{80}\|\psi_\Delta\|_{C^0\left([0T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)}$$

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{80}\|\psi\|_{C^0\left([0T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)}$$

eşitsizliklerini, ψ_Δ ve ψ için (3.83) kestirimini ve η için (3.136) kestirimini kullanırsak

$$\left|\tilde{R}\right| \le c_{81}\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $\Delta\psi$ için olan (3.126) kestirimini uygularsak

$$\left|\tilde{R}\right| \le c_{82}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{82} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Böylece bu kestirim ile (3.143) kestirimini kullanırsak $R(\Delta v)$ için olan formülden

$$|R(\Delta v)| \leq c_{83} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{83} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Buradan da

$$R(\Delta v) = o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)$$

bağıntısının geçerli olduğu görülür. Bu durumda $\Delta J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışı için olan formülü kullanarak

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_\Omega -\operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt + 2\alpha\int_0^l \left(v(x) - w(x)\right)\Delta v(x)dx + o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada Hamilton-Pontryagin fonksiyonu için olan formülü kullanarak fonksiyonelin artışını

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^l \left(\frac{-\partial H\left(x, \psi(x,t), v(x), \overline{\eta}(x,t)\right)}{\partial v}\right)\Delta v(x)dx + o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right) \qquad (3.144)$$

şeklinde yazabiliriz. $L_2(0,l)$ uzayında tanımlanan fonksiyonların Frechet anlamında diferansiyellenebilir olmasının tanımını dikkate alırsak (3.144) formülünden $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradyenti için

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v(x) - w(x)\right) \qquad (3.145)$$

formülünün geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Burada $\psi = \psi(x,t)$, (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin; $\eta = \eta(x,t)$ ise eşlenik problemin çözümleridir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu:

Teorem 3.2.4.3: Teorem 3.2.4.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $w \in L_2(0,l)$ verilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için (3.145) formülü geçerlidir.

3.2.5. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart

Şimdi Teorem 3.2.4.3 ün hükmünden faydalanarak (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şartı elde edelim. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 3.2.5.1: Teorem 3.2.4.3 ün şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $v^* \in V$, (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol probleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\int_0^l \left[\int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi^*(x,t)\overline{\eta}^*(x,t)\right)dt - 2\alpha\left(v^*(x) - w(x)\right) \right]\left(v(x) - v^*(x)\right)dx \le 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\psi^* = \psi^*(x,t)$ ve $\eta^* = \eta^*(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (3.76)-(3.78) ve (3.133)-(3.135) problemlerinin $v^* \in V$ elemanına karşılık gelen çözümleridir.

İspat: Teorem 3.2.4.3 ün hükmüne göre $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için (3.145) formülü geçerlidir. Önce bu formülü kullanarak gradyentin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Yani $\forall v \in V$ için $\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to 0$ iken

$$\|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,l)} \to 0$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.145) formülünü kullanırsak

$$J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) = -\int_0^T \left[\operatorname{Re}\left(\psi_\Delta(x,t)\Delta\overline{\eta}(x,t)\right) + \operatorname{Re}\left(\Delta\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)\right)\right]dt + 2\alpha\Delta v(x)$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\Delta\psi(x,t)$, (3.123)-(3.125) sınır değer probleminin çözümü ve $\Delta\eta = \Delta\eta(x,t) \equiv \eta(x,t;v+\Delta v) - \eta(x,t;v)$ ise aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\eta}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\eta}{\partial x^2}-a(x)\Delta\eta-\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\Delta\eta+2\bar{a}_1|\psi_\Delta|^2\Delta\eta+a_1\psi_\Delta^2\Delta\bar{\eta}=$$
$$=-2\bar{a}_1\bar{\psi}\eta\Delta\psi-2\bar{a}_1\psi_\Delta\eta\Delta\bar{\psi}-a_1\psi\bar{\eta}\Delta\psi-a_1\psi_\Delta\bar{\eta}\Delta\psi+\Delta v\eta,\ (x,t)\in\Omega \quad (3.146)$$

$$\Delta\eta(x,T)=-2i\Delta\psi(x,T),\ \ x\in(0,l) \quad (3.147)$$

$$\Delta\eta(0,t)=\Delta\eta(l,t)=0,\ \ t\in[0,T]. \quad (3.148)$$

Burada $\psi(x,t)$ ve $\psi_\Delta(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla $v\in V$ ve $v+\Delta v\in V$ için (3.76)-(3.78) başlangıç-sınır değer probleminin, $\eta=\eta(x,t)$ ve $\eta_\Delta(x,t)$ fonksiyonları ise sırasıyla $v\in V$ ve $v+\Delta v\in V$ elemanlarına karşılık gelen (3.133)-(3.135) eşlenik problemin çözümleridir.

Şimdi $\Delta\eta(x,t)$ fonksiyonu için bir kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (3.146) denkleminin her iki tarafını $\Delta\bar{\eta}(x,t)$ ile çarparak $\tilde{\Omega}_t=(0,l)\times(t,T)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu takdirde

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[i\frac{\partial\Delta\eta}{\partial t}\Delta\bar{\eta}-a_0\left|\frac{\partial\Delta\eta}{\partial x}\right|^2-a(x)|\Delta\eta|^2-\left(v(x)+\Delta v(x)\right)|\Delta\eta|^2+2\bar{a}_1|\psi_\Delta|^2|\Delta\eta|^2+\right.$$
$$\left.+a_1\psi_\Delta^2(\Delta\bar{\eta})^2\right]dxd\tau=\int_{\tilde{\Omega}_t}\Delta v(x)\eta(x,\tau)\Delta\bar{\eta}(x,\tau)dxd\tau-$$
$$-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[2\bar{a}_1\bar{\psi}\eta\Delta\psi\Delta\bar{\eta}+2\bar{a}_1\psi_\Delta\eta\Delta\bar{\psi}\Delta\bar{\eta}-a_1\psi\bar{\eta}\Delta\psi\Delta\bar{\eta}-a_1\psi_\Delta\bar{\eta}\Delta\psi\Delta\bar{\eta}\right]dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}i\frac{\partial}{\partial t}|\Delta\eta|^2\,dxd\tau-4i\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2|\Delta\eta|^2\,dxd\tau=-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[a_1\psi_\Delta^2(\Delta\bar{\eta})^2-\bar{a}_1\bar{\psi}_\Delta^2(\Delta\eta)^2\right]dxd\tau-$$
$$-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[2\bar{a}_1\bar{\psi}\eta\Delta\psi\Delta\bar{\eta}-2a_1\psi\bar{\eta}\Delta\bar{\psi}\Delta\eta\right]dxd\tau-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[2\bar{a}_1\psi_\Delta\eta\Delta\bar{\psi}\Delta\bar{\eta}-2a_1\bar{\psi}_\Delta\bar{\eta}\Delta\psi\Delta\eta\right]dxd\tau+$$
$$+\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[a_1\psi\bar{\eta}\Delta\psi\Delta\bar{\eta}-\bar{a}_1\bar{\psi}\eta\Delta\bar{\psi}\Delta\eta\right]dxd\tau+\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[a_1\psi_\Delta\bar{\eta}\Delta\psi\Delta\bar{\eta}-\bar{a}_1\bar{\psi}_\Delta\eta\Delta\bar{\psi}\Delta\eta\right]dxd\tau+$$
$$+\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[\Delta v(x)\eta\Delta\bar{\eta}-\Delta v(x)\bar{\eta}\Delta\eta\right]dxd\tau.$$

Burada (3.147) şartını kullanırsak bu eşitlikten

$$\left\|\Delta\eta(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + 4\operatorname{Im} a_1 \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} \left|\psi_\Delta\right|^2 \left|\Delta\eta\right|^2 dxd\tau \le 4\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,l)}^2 +$$
$$+2\left|a_1\right| \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} \left|\psi_\Delta\right|^2 \left|\Delta\eta\right|^2 dxd\tau + 6\left|a_1\right| \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\psi||\eta||\Delta\psi||\Delta\eta| dxd\tau +$$
$$+6\left|a_1\right| \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\psi_\Delta||\eta||\Delta\psi||\Delta\eta| dxd\tau + 2\int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta v||\eta||\Delta\eta| dxd\tau, \ \forall t \in [0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte $2|a_1| \le 2\left(|\operatorname{Im} a_1| + |\operatorname{Re} a_1|\right) \le 3\operatorname{Im} a_1$ olduğunu göz önüne alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\Delta\eta(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \operatorname{Im} a_1 \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} \left|\psi_\Delta\right|^2 \left|\Delta\eta\right|^2 dxd\tau \le 4\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,l)}^2 +$$
$$+6\left|a_1\right| \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\psi||\eta||\Delta\psi||\Delta\eta| dxd\tau + 6\left|a_1\right| \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\psi_\Delta||\eta||\Delta\psi||\Delta\eta| dxd\tau +$$
$$+2\int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta v||\eta||\Delta\eta| dxd\tau, \ \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafına ε-Cauchy eşitsizliğini uygularsak

$$\left\|\Delta\eta(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \operatorname{Im} a_1 \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} \left|\psi_\Delta\right|^2 \left|\Delta\eta\right|^2 dxd\tau \le 4\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,l)}^2 +$$
$$+6\left|a_1\right| \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} \left|\psi_\Delta\right|^2 \left|\Delta\eta\right|^2 dxd\tau + 6\left|a_1\right| \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\eta|^2 |\Delta\psi|^2 dxd\tau +$$
$$+2\int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta v||\eta||\Delta\eta| dxd\tau + 6\left|a_1\right| \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\psi||\eta||\Delta\psi||\Delta\eta| dxd\tau, \ \forall t \in [0,T]$$

olup $\varepsilon = \dfrac{\operatorname{Im} a_1}{6|a_1|}$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left\|\Delta\eta(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \frac{\operatorname{Im} a_1}{2} \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} \left|\psi_\Delta\right|^2 \left|\Delta\eta\right|^2 dxd\tau \le 4\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,l)}^2 +$$
$$+\left(3|a_1| + \frac{18|a_1|^2}{\operatorname{Im} a_1}\right) \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\eta|^2 |\Delta\psi|^2 dxd\tau + 3|a_1| \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\psi|^2 |\Delta\eta|^2 dxd\tau +$$
$$+\int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta\eta|^2 dxd\tau + \int\limits_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta v|^2 |\eta|^2 dxd\tau, \ \forall t \in [0,T].$$

Burada

$$\|\eta\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{79} \|\eta\|_{C^0\left([0T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)},$$

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{80} \|\psi\|_{C^0\left([0T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)}$$

eşitsizlikleri ile (3.83), (3.126) ve (3.136) kestirimlerini kullanırsak

$$\|\Delta\eta(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 + \frac{\operatorname{Im} a_1}{2}\int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\eta|^2\, dxd\tau \le c_{84}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2 + c_{85}\int_{\Omega_t} |\Delta\eta(x,\tau)|^2\, dxd\tau, \forall t \in [0,T].$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte Gronwall lemması uygulanırsa

$$\|\Delta\eta(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 + \frac{\operatorname{Im} a_1}{2}\int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\eta|^2\, dxd\tau \le c_{86}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \forall t \in [0,T]$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{86} > 0$ sayısı Δv ve t den bağımsızdır.

$J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)$ farkı için olan formülü kullanarak

$$|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)| \le \int_0^T |\psi_\Delta(x,t)||\Delta\eta(x,t)|\,dt + \int_0^T |\Delta\psi(x,t)||\eta(x,t)|\,dt + 2\alpha|\Delta v(x)|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlikten de kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,l)} \le \left\|\int_0^T |\psi_\Delta||\Delta\eta|\,dt\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|\int_0^T |\eta||\Delta\psi|\,dt\right\|_{L_2(0,l)} + 2\alpha\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimleri değerlendirirsek

$$\left\|\int_0^T |\psi_\Delta(.,t)||\Delta\eta(.,t)|\,dt\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{87}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}$$

ve

$$\left\|\int_0^T |\eta(.,t)||\Delta\psi(.,t)|\,dt\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{88}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}$$

kestirimlerini elde ederiz. Böylece bu kestirimler en son elde edilen eşitsizlikte kullanılırsa

$$\|J_\alpha{}'(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,l)} \le c_{89}\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{89} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu kestirimden de

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to 0 \text{ iken } \|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,l)} \to 0$$

olduğunu, yani $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğunu ispatlamış olduk.

V kümesi tanıma göre $L_2(0,l)$ uzayında konveks bir küme ve $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli de bu küme üzerinde Frechet anlamında sürekli diferansiyellenebilir olduğundan Vasilyev (1981) çalışmasından bilinen teoremin (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.6) şartları sağlanır. Yani, eğer $v^* \in V$, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneline minimum değer veren eleman ise bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\left(J'_\alpha(v^*), v - v^*\right)_{L_2(0,l)} \geq 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikte (3.145) formülünü $v = v^*$ için kullanırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Teorem 3.2.5.1 ispatlanmış oldu.

3.3. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde, 3.1. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin özel bir hali için sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Bu amaçla önce sonlu farklı aynısı yazılan optimal kontrol probleminin fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi ispatlanmıştır. Daha sonra bu kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası için bir kestirim elde edilmiş olup sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlanmıştır.

Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinin sonlu farklar metoduyla çözümü daha önce Potapov (1987), Yagubov (1990), Silla (1991), Yagubov and Musayeva (1995), Yıldız and Yagubov (1997), Mahmudov (1997), Yagubov (2001), Yetişkin (2005) çalışmalarında incelenmiştir. Ancak bu çalışmalarda ele alınan optimal kontrol problemi konulma açısından bizim incelediğimiz problemden farklıdır.

3.3.1. Optimal kontrol probleminin diskritleştirilmesi

$$J(v) = \int_0^l |\psi(x,T) - y(x)|^2 \, dx \tag{3.149}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = v(x) : v \in L_2(0,l), \ \ \|v\|_{L_2(0,l)} \le b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v(x)\psi + a_1 |\psi|^2 \psi = f(x,t), \ \ (x,t) \in \Omega \tag{3.150}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \ \ x \in (0,l) \tag{3.151}$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \ \ t \in (0,T) \tag{3.152}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $\psi = \psi(x,t)$ dalga fonksiyonu, $\Omega = (0,l) \times (0,T)$, $i^2 = -1, \ l > 0, \ T > 0, \ b_0 > 0, \ a_0 > 0 \ \ a_1 < 0$-verilen sayılar; $y \in W_2^1(0,l)$ verilen fonksiyon; $a(x)$-ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olup (3.4) şartını sağlar. $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları ise verilen fonksiyonlar olup (3.5) şartını sağlarlar.

Gözüktüğü gibi (3.149)-(3.152) optimal kontrol problemi (3.1)-(3.3), (3.6) optimal kontrol probleminin $\alpha = 0$ haline karşılık gelen özel bir halidir. Teorem 3.1.3.2 den (3.149)-(3.152) optimal kontrol probleminin kabul edilen şartlar altında en az bir çözümü vardır. Yani

$$V_* \equiv \left\{ v^* \in V : \ J(v^*) = J_* = \inf_{v \in V} J(v) \right\} \ne \varnothing$$

dır.

Şimdi (3.149)-(3.152) optimal kontrol problemini diskritleştirelim. Yani bu problemin sonlu farklı aynısını yazalım. Bu amaçla önce $\overline{\Omega} = [0,l] \times [0,T]$ bölgesini aşağıdaki ağlar dizisine dönüştürelim:

$$\left\{(x_j,t_k)_n\right\},\ n=1,2,...,\ x_j=jh_n-\frac{h_n}{2},\ j=\overline{1,M_n-1},\ x_1-\frac{h_n}{2}=0,\ x_{M_n-1}+\frac{h_n}{2}=l,$$

$$t_k=k\tau_n,\ k=\overline{0,N_n},\ h_n=\frac{l}{M_n-1},\ \tau_n=\frac{T}{N_n},$$

$$M\equiv M_n,\ \mathrm{N}\equiv N_n,\ \mathrm{h}\equiv h_n,\ \tau\equiv\tau_n,\ n\geq 1.$$

(3.150) denkleminin içerdiği türevlere karşılık gelen sonlu farkları ise

$$\delta_{\bar t}\phi_{jk}=\frac{\phi_{jk}-\phi_{jk-1}}{\tau},\ \ \delta_{\bar x}\phi_{jk}=\frac{\phi_{jk}-\phi_{j-1k}}{h},$$

$$\delta_x\phi_{jk}=\frac{\phi_{j+1k}-\phi_{jk}}{h},\quad \delta_{x\bar x}\phi_{jk}=\frac{\phi_{j+1k}-2\phi_{jk}+\phi_{j-1k}}{h^2}$$

biçiminde gösterelim. Bu durumda (3.149)-(3.152) optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısını her bir $n\geq 1$ doğal sayısı için

$$I_n\left([v]_n\right)=h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jN}-y_j\right|^2 \tag{3.153}$$

fonksiyonunun

$$V_n\equiv\left\{[v]_n:\ [v]_n=(v_1,v_2,...,v_{M-1}),\ \left(h\sum_{j=1}^{M-1}v_j^2\right)^{1/2}\leq b_0\right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\delta_{\bar t}\phi_{jk}+a_0\delta_{x\bar x}\phi_{jk}-a^j\phi_{jk}-v_j\phi_{jk}+a_1\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk}=f_{jk},\ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}, \tag{3.154}$$

$$\phi_{j0}=\varphi_j,\ j=\overline{0,M} \tag{3.155}$$

$$\phi_{0k}=\phi_{Mk}=0,\ \ k=\overline{1,N} \tag{3.156}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemi olarak ifade edebiliriz. Burada a^j, y_j, φ_j ve f_{jk} ağ fonksiyonları olup aşağıdaki şekilde tanımlanırlar:

$$a^j=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a(x)dx,\ \ j=\overline{1,M-1}, \tag{3.157}$$

$$y_j=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}y(x)dx,\ \ j=\overline{1,M-1}, \tag{3.158}$$

$$\varphi_j=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\varphi(x)dx,\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ \varphi_0=\varphi_M=0, \tag{3.159}$$

$$f_{jk}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x,t)dxdt,\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}. \tag{3.160}$$

3.3.2. Fark şemasının kararlılığı

Her bir $[v]_n\in V_n$ için (3.154)-(3.156) şartlarından ϕ_{jk} ağ fonksiyonun bulunması problemi (3.150)-(3.152) sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasıdır. Önce bu fark şemasının çözümünün kararlı olup olmadığını inceleyelim:

Teorem 3.3.2.1. Her bir $[v]_n\in V_n$ için (3.154)-(3.156) fark şemasının çözümü aşağıdaki kestirimi sağlar:

$$\begin{gathered}
h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2+\frac{|a_1|}{a_0}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4\le \\
\le c_{90}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2+\right. \\
\left.+\tau h\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_t f_{jk}\right|^2\right),\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}.
\end{gathered} \tag{3.161}$$

Burada $c_{90}>0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır.

İspat: Her bir $t=t_k$ için (3.154)-(3.156) şeması

$$\begin{gathered}
h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk}-a_0h\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\delta_{\bar{x}}\overline{\eta}_{jk}-h\sum_{j=1}^{M-1}a^j\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk}- \\
-h\sum_{j=1}^{M-1}v_j\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk}+a_1h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk}=h\sum_{j=1}^{M-1}f_{jk}\overline{\eta}_{jk},\ \ k=\overline{1,N}
\end{gathered} \tag{3.162}$$

toplam özdeşliğine denktir. Burada $\overline{\eta}_{jk}$ fonksiyonu $\{(x_j,t_k)_n\}$ ağlar dizisinde tanımlı, $k=\overline{1,N}$ için $\eta_{0k}=\eta_{Mk}=0$ şartlarını sağlayan herhangi η_{jk} ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliğinde $\overline{\eta}_{jk}$ fonksiyonunun yerine $\tau\overline{\phi}_{jk}$ ağ fonksiyonunu alalım ve elde edilen eşitliklerden onların kompleks eşleniğini taraf tarafa çıkaralım. Bu durumda

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\bar{\phi}_{jk}+\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}\phi_{jk}\right)=2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}\left(f_{jk}\bar{\phi}_{jk}\right),\quad k=\overline{1,N} \tag{3.163}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte

$$\tau\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\bar{\phi}_{jk}+\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}\phi_{jk}\right)=\left|\phi_{jk}\right|^2-\left|\phi_{jk-1}\right|^2+\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2 \tag{3.164}$$

olduğunu dikkate alırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2-\left|\phi_{jk-1}\right|^2\right)+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2=2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}\left(f_{jk}\bar{\phi}_{jk}\right),\quad k=\overline{1,N}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını k üzerinden 1 den $m\le N$ ye kadar toplayarak her iki tarafın mutlak değeri alınır ve (3.155) kullanılırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2\le 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte sağ tarafta yer alan ilk toplamın *m.* terimini ayıralım ve ayırdığımız bu terime ε-Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2&\le\frac{\tau h}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+\varepsilon\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2+\\&+2\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2.\end{aligned}$$

Burada $\varepsilon=2\tau$ olarak alınırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+2h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2\le 4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2+4\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+2h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2&\le(4T+2)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2+\\&+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2,\quad\forall m\in\{1,2,...,N\}\end{aligned} \tag{3.165}$$

olup bu eşitsizliğin sol tarafındaki ikinci terimin negatif olmadığı dikkate alınırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le (4T+2)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2 + 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + 2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2, \quad \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte Gronwall lemmasının diskrit aynısını (Vasilyev-1981) kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le c_{91}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right), \quad \forall m\in\{1,2,...,N\} \tag{3.166}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{91}>0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır. (3.166) kestirimini (3.165) eşitsizliğinde kullanırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + 2h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2 \le c_{92}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right), \quad \forall m\in\{1,2,...,N\}. \tag{3.167}$$

Burada $c_{92}>0$ sayısı τ ve h dan bağımsız bir sabittir.

Şimdi $\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bunun için (3.162) toplam özdeşliğinde $\bar{\eta}_{jk}$ fonksiyonunun yerine $\tau\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}$ ağ fonksiyonunu alalım ve elde edilen eşitliği onun kompleks eşleniği ile taraf tarafa toplayalım. Bu durumda

$$a_0 h\sum_{j=1}^{M}\tau\left[\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jk}\right)+\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jk}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\right)\right] + h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(a^j\phi_{jk}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}+a^j\bar{\phi}_{jk}\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\right)=$$
$$=-h\sum_{j=1}^{M-1}\tau v_j\left(\phi_{jk}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}+\bar{\phi}_{jk}\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\right)+a_1 h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left[\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}+\left|\phi_{jk}\right|^2\bar{\phi}_{jk}\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\right]-$$
$$-2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Re}\left(f_{jk}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}\right), \quad k=\overline{1,N}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada (3.164),

$$\tau\left[\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jk}\right)+\delta_{\bar{x}}\bar{\phi}_{jk}\delta_{\bar{t}}\left(\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\right)\right]=\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\right|^2-\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2+\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2 \tag{3.168}$$

ile

$$\tau\left[\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk}\delta_{\bar{t}}\bar{\phi}_{jk}+\left|\phi_{jk}\right|^2\bar{\phi}_{jk}\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\right]=\frac{1}{2}\left|\phi_{jk}\right|^4-\frac{1}{2}\left|\phi_{jk-1}\right|^4+ \\ +\frac{1}{2}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2-\left|\phi_{jk-1}\right|^2\right)^2+\left|\phi_{jk}\right|^2\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2 \tag{3.169}$$

eşitlikleri kullanılır ve elde edilen eşitlikler k üzerinden 1 den $m \le N$ ye kadar toplanırsa

$$a_0 h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M} \left[\left|\delta_{\bar{x}} \phi_{jk}\right|^2 - \left|\delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1}\right|^2 + \left|\delta_{\bar{x}} \phi_{jk} - \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1}\right|^2 \right] +$$

$$+h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} a^j \left[\left|\phi_{jk}\right|^2 - \left|\phi_{jk-1}\right|^2 + \left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 \right] = -h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} v_j \left[\left|\phi_{jk}\right|^2 - \left|\phi_{jk-1}\right|^2 + \left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 \right] +$$

$$+a_1 h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} \left[\frac{1}{2}\left|\phi_{jk}\right|^4 - \frac{1}{2}\left|\phi_{jk-1}\right|^4 + \frac{1}{2}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 - \left|\phi_{jk-1}\right|^2 \right)^2 + \left|\phi_{jk}\right|^2 \left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 \right] -$$

$$-2h\tau \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} \mathrm{Re}\left(f_{jk} \delta_{\bar{t}} \bar{\phi}_{jk} \right), \quad m \in \{1, 2, ..., N\}$$

olup bu eşitliğin sağ tarafındaki sonuncu terime kısmi toplam formülü uygulanırsa

$$a_0 h \sum_{j=1}^{M} \left|\delta_{\bar{x}} \phi_{jm}\right|^2 + a_0 h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\delta_{\bar{x}} \phi_{jk} - \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1}\right|^2 + h \sum_{j=1}^{M} a^j \left|\phi_{jm}\right|^2 + h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} a^j \left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 +$$

$$\frac{1}{2}\left|a_1\right| h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\phi_{jm}\right|^4 = a_0 h \sum_{j=1}^{M} \left|\delta_{\bar{x}} \phi_{j0}\right|^2 + h \sum_{j=1}^{M} a^j \left|\phi_{j0}\right|^2 + \frac{1}{2} a_1 h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\phi_{j0}\right|^4 - h \sum_{j=1}^{M-1} v_j \left|\phi_{jm}\right|^2 + h \sum_{j=1}^{M-1} v_j \left|\phi_{j0}\right|^2$$

$$-h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} v_j \left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 + 2\tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} \mathrm{Re}\left(\delta_t f_{jk} \bar{\phi}_{jk} \right) - 2h \sum_{j=1}^{M-1} \mathrm{Re}\left(f_{jm} \bar{\phi}_{jm} \right) + 2h \sum_{j=1}^{M-1} \mathrm{Re}\left(f_{j1} \bar{\phi}_{j0} \right)$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.155) ve (3.4) kullanılırsa

$$a_0 h \sum_{j=1}^{M} \left|\delta_{\bar{x}} \phi_{jm}\right|^2 + a_0 h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\delta_{\bar{x}} \phi_{jk} - \delta_{\bar{x}} \phi_{jk-1}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|a_1\right| h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\phi_{jm}\right|^4 \le \mu_0 h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\varphi_j\right|^2 +$$

$$+a_0 h \sum_{j=1}^{M} \left|\delta_{\bar{x}} \varphi_j\right|^2 + \frac{1}{2}\left|a_1\right| h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\varphi_j\right|^4 + h \sum_{j=1}^{M-1} \left|v_j\right| \left|\phi_{jm}\right|^2 + h \sum_{j=1}^{M-1} \left|v_j\right| \left|\varphi_j\right|^2 + \tag{3.170}$$

$$+h \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{M-1} \left|v_j\right| \left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 + 2\tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\delta_t f_{jk}\right| \left|\phi_{jk}\right| + 2h \sum_{j=1}^{M-1} \left|f_{jm}\right| \left|\phi_{jm}\right| + 2h \sum_{j=1}^{M-1} \left|f_{j1}\right| \left|\varphi_j\right|$$

eşitsizliği bulunur.

Aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz:

$$\left|\phi_{jm}\right|^2 = h \sum_{s=1}^{j} \left(\delta_{\bar{x}} \bar{\phi}_{sm} \phi_{sm} + \delta_{\bar{x}} \phi_{sm} \bar{\phi}_{s-1m} \right), \quad m = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M-1}. \tag{3.171}$$

(3.171) e Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanır ve

$$h \sum_{s=1}^{M-1} \left|\phi_{s-1m}\right|^2 = h \sum_{s=1}^{M-2} \left|\phi_{sm}\right|^2 \le h \sum_{s=1}^{M-1} \left|\phi_{sm}\right|^2, \quad m = \overline{1, N}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\phi_{jm}\right|^2 \le 2\left(h\sum_{s=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{sm}\right|^2\right)^{1/2}\left(h\sum_{s=1}^{M-1}\left|\phi_{sm}\right|^2\right)^{1/2}, \quad \forall j\in\{1,2,...,M-1\},\ \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\max_{1\le j\le M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le 2\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2\right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2\right)^{1/2}, \quad m=\overline{1,N} \tag{3.172}$$

olup, (3.172) eşitsizliğine denk olarak

$$\max_{1\le j\le M-1}\left|\phi_{jm}-\phi_{jm-1}\right|^2 \le 2\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jm-1}\right|^2\right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}-\phi_{jm-1}\right|^2\right)^{1/2}, \quad m\in\{1,2,...,N\} \tag{3.173}$$

eşitsizliği yazılır. Ayrıca f_{jm} ağ fonksiyonu için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2 \le c_{93}\left(\tau h\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_t f_{jk}\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right), \quad \forall m=\overline{1,N} \tag{3.174}$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.170) eşitsizliğinin sağ tarafına Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
&a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}-\delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2+\frac{1}{2}\left|a_1\right|h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4 \le \mu_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\\
&+a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2+\frac{1}{2}\left|a_1\right|h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4+\sqrt{l}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_j\right|^2\right)^{1/2}\left(\max_{1\le j\le M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2\right)+\\
&+\sqrt{l}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_j\right|^2\right)^{1/2}\left(\max_{1\le j\le M-1}\left|\varphi_j\right|^2\right)+\sqrt{l}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_j\right|^2\right)^{1/2}\sum_{k=1}^{m}\left(\max_{1\le j\le M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2\right)+\\
&+\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_t f_{jk}\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{j1}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafında v_j lerin sağladığı şartı, (3.172), (3.173), (3.174) eşitsizliklerini ve

$$\max_{1\le j\le M-1}\left|\varphi_j\right|^2 \le 2\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2\right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği ile (3.166) kestirimini kullanırsak

$$a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} - \delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2 + \frac{1}{2}|a_1| h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4 \le$$
$$\le c_{94}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4 + \tau h\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_t f_{jk}\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2 \right) +$$
$$+2b_0\sqrt{l}\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 \right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \right)^{1/2} +$$
$$+2b_0\sqrt{l}\sum_{k=1}^{m}\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} - \delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2 \right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki son iki terime ε-Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$a_0 h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + a_0 h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} - \delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2 + \frac{1}{2}|a_1| h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4 \le$$
$$\le c_{94}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4 + \tau h\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_t f_{jk}\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2 \right) +$$
$$+\frac{b_0\sqrt{l}}{\varepsilon} h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + b_0\sqrt{l}\varepsilon h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 +$$
$$+\frac{b_0\sqrt{l}}{\varepsilon} h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} - \delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2 + b_0\sqrt{l}\varepsilon h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2$$

olup burada $\varepsilon = 2b_0\sqrt{l}/a_0$ olarak seçilirse

$$\frac{a_0}{2} h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + \frac{a_0}{2} h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} - \delta_{\bar{x}}\phi_{jk-1}\right|^2 + \frac{1}{2}|a_1| h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4 \le$$
$$\le c_{95}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4 + \tau h\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_t f_{jk}\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2 \right) +$$
$$+\frac{2b_0^2 l}{a_0} h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + \frac{2b_0^2 l}{a_0} h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.167) kestirimi kullanılırsa aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + \frac{|a_1|}{a_0} h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^4 \le c_{96}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j\right|^2 + \right.$$
$$\left. + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\delta_t f_{jk}\right|^2 \right), \quad \forall m \in \{1, 2, ..., N\}. \tag{3.175}$$

Burada $c_{96} > 0$ sayısı τ ve h dan bağımsız bir sabittir. Bu kestirim ile (3.166) kestirimi göz önüne alınırsa teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Böylece Teorem 3.3.2.1 ispatlandı.

3.3.3. Fark şemasının hatası için kestirim

Şimdi fark şemasının hatasını değerlendirelim. Bu amaçla önce (3.149)-(3.152) optimal kontrol probleminin her bir $v \in V$ için $\psi = \psi(x,t;v)$ çözümünün Steklov anlamında ortalamasını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$[\psi] = [\psi(x,t;v)] = \{\psi_{jk}\}$$

$$\psi_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi(x,t)\,dx\,dt, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N}$$
$$\psi_{j0} = \varphi_j, \quad j = \overline{0, M}, \quad \psi_{0k} = \psi_{Mk} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{3.176}$$

Bunun yanı sıra

$$Q_n : V \to V_n, \quad Q_n(v) = [w] = (w_1, w_2, \ldots, w_{M-1}),$$
$$w_j = \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v(x)\,dx, \quad j = \overline{1, M-1} \tag{3.177}$$

biçiminde V kümesi üzerinde Q_n operatörünü tanımlayalım. $[Z] = \{Z_{jk}\} = \{\phi_{jk} - \psi_{jk}\}$ ile fark şemasının hatasını gösterelim. Bu $\{Z_{jk}\}$ ağ fonksiyonunun aşağıdaki sistemi sağladığı açıktır:

$$i\delta_{\bar{t}} Z_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} Z_{jk} - a^j Z_{jk} - v_j Z_{jk} = F_{jk} - a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 \phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2 \psi_{jk}\right),$$
$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N} \tag{3.178}$$

$$Z_{j0} = 0, \quad j = \overline{0, M} \tag{3.179}$$

$$Z_{0k} = Z_{Mk} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{3.180}$$

Burada F_{jk},

$$F_{jk}=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi-v(x)\psi+a_1|\psi|^2\psi\right)dxdt-$$
$$-i\delta_{\bar t}\psi_{jk}-a_0\delta_{x\bar x}\psi_{jk}+a^j\psi_{jk}+v_j\psi_{jk}-a_1\left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N} \tag{3.181}$$

formülü ile tanımlanmaktadır.

Teorem 3.3.3.1: Farz edelim ki $\tau>0$ adımı $0<\tau\le\frac{1}{4}\left(|a_1|c_{105}\right)^{-1}$ şartını ve h,τ adımları $c_{97}\le\frac{\tau}{h}\le c_{98}$ uyum şartını sağlasın. Burada $c_{97}>0,\ c_{98}>0,\ c_{105}>0$ sayıları τ ve h dan bağımsızdır. Bu takdirde

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2\le c_{99}\left(\beta_{\tau h}+\left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2\right),\quad \forall m\in\{1,2,...,N\} \tag{3.182}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{99}>0$ sayısı τ ve h dan bağımsız bir sabittir ve $\beta_{\tau h}>0,$ $\tau\to0$ ve $h\to0$ için $\beta_{\tau h}\to0$ olup

$$\left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2=h\sum_{j=1}^{M-1}\left|w_j-v_j\right|^2$$

şeklindedir.

İspat: Her bir $t=t_k$ için (3.178)-(3.180) sistemi aşağıdaki integral özdeşliğine denktir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}i\delta_{\bar t}Z_{jk}\bar\eta_{jk}-a_0h\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar x}Z_{jk}\delta_{\bar x}\bar\eta_{jk}-h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a^j+v_j\right)Z_{jk}\bar\eta_{jk}=$$
$$=h\sum_{j=1}^{M-1}F_{jk}\bar\eta_{jk}-h\sum_{j=1}^{M-1}a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk}-\left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)\bar\eta_{jk},\quad k=\overline{1,N}. \tag{3.183}$$

Burada $\bar\eta_{jk}$ fonksiyonu $k=\overline{1,N}$ için $\eta_{0k}=\eta_{Mk}=0$ şartlarını sağlayan, $\left\{(x_j,t_k)_n\right\}$ ağlar dizisinde tanımlanan herhangi η_{jk} ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliğinde $\bar\eta_{jk}$ fonksiyonunun yerine $\tau\bar Z_{jk}$ ağ fonksiyonunu alırsak

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{t}} Z_{jk}\bar{Z}_{jk} - a_0 h\tau\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}} Z_{jk}\right|^2 - h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(a^j + v_j\right)\left|Z_{jk}\right|^2 =$$

$$= h\tau\sum_{j=1}^{M-1} F_{jk}\bar{Z}_{jk} - h\tau\sum_{j=1}^{M-1} a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)\bar{Z}_{jk}, \quad k = \overline{1,N}$$

olup bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$ih\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_{\bar{t}} Z_{jk}\bar{Z}_{jk} + \delta_{\bar{t}}\bar{Z}_{jk} Z_{jk}\right) = 2ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}\left(F_{jk}\bar{Z}_{jk}\right) -$$

$$-h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)\bar{Z}_{jk} - a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\bar{\phi}_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\bar{\psi}_{jk}\right)Z_{jk}\right], \quad k = \overline{1,N}.$$

Bu eşitlikte Z_{jk} ağ fonksiyonu için (3.164) formülünün aynısı,

$$a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)\bar{Z}_{jk} = a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 + \left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2 + a_1\phi_{jk}\psi_{jk}\left(\bar{Z}_{jk}\right)^2 \tag{3.184}$$

ve

$$a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\bar{\phi}_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\bar{\psi}_{jk}\right)Z_{jk} = a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 + \left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2 + a_1\bar{\phi}_{jk}\bar{\psi}_{jk}\left(Z_{jk}\right)^2 \tag{3.185}$$

formülleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|Z_{jk}\right|^2 - \left|Z_{jk-1}\right|^2 + \left|Z_{jk} - Z_{jk-1}\right|^2\right) = 2h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}\left(F_{jk}\bar{Z}_{jk}\right) -$$

$$-2h\tau\sum_{j=1}^{M-1} a_1\,\mathrm{Im}\left(\phi_{jk}\psi_{jk}\left(\bar{Z}_{jk}\right)^2\right), \quad k = \overline{1,N}.$$

Bu eşitlik k üzerinden 1 den $m \le N$ ye kadar toplanırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 + h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk} - Z_{jk-1}\right|^2 = 2h\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}\left(F_{jk}\bar{Z}_{jk}\right) - 2h\tau a_1\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{Im}\left(\phi_{jk}\psi_{jk}\left(\bar{Z}_{jk}\right)^2\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki sonuncu terime Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 + h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk} - Z_{jk-1}\right|^2 \le 2h\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right| + h\tau\left|a_1\right|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 + \left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2.$$

Bu eşitsizliğin sol tarafındaki ikinci terimin negatif olmadığını göz önüne alırsak buradan

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le 2h\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right| + h\tau\left|a_1\right|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 + \left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2$$

eşitsizliğini kolaylıkla yazabiliriz. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk toplamın *m.* terimini ayıralım ve ayırdığımız bu terime ε-Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le \frac{\tau h}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 + \tau h\varepsilon\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jm}\right|^2 +$$
$$+2h\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right| + h\tau\left|a_1\right|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2$$

olup $\varepsilon = 2\tau$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 &\le 2T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jm}\right|^2 + 2h\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right| + \\ &+h\tau\left|a_1\right|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2.\end{aligned} \tag{3.186}$$

Şimdi

$$\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2 \le c_{100},\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N} \tag{3.187}$$

olduğunu gösterelim.

(3.176) formülünden

$$\left|\psi_{jk}\right| \le \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi(x,t)\right|dxdt,\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N} \tag{3.188}$$

yazılır.

$$\left\|\psi(.,t)\right\|_{L_\infty(0,l)} \le c_{101}\left\|\psi(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)},\ \ \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliğini ve (3.7) kestirimini kullanırsak

$$\left\|\psi\right\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{102} \tag{3.189}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{102} > 0$ sayısı x ve t den bağımsız bir sabittir. Böylece (3.189) kestirimini (3.188) de kullanırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left|\psi_{jk}\right| \le c_{102},\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}. \tag{3.190}$$

Şimdi

$$\left|\phi_{jk}\right|^2 \le 2\left(h\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\right|^2\right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2\right)^{1/2},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliğini kullanarak $\left|\phi_{jk}\right|$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla bu eşitsizliğe Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygular ve (3.161) kestirimini kullanırsak

$$\left|\phi_{jk}\right|^2 \le c_{103},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N} \tag{3.191}$$

kestirimini elde ederiz. (3.190) ve (3.191) kestirimleri kullanılırsa

$$\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2 \le c_{104},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$$

kestirimi yazılır. Burada $c_{104}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsız bir sabittir.

$$\max_{\substack{1\le j\le M-1\\ 1\le k\le N}}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)=c_{105} \tag{3.192}$$

olsun. (3.192) yi (3.186) da kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le 4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jm}\right|^2+4h\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right|+$$
$$+2\left|a_1\right|c_{105}h\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}\right|^2,\quad m\in\{1,2,...,N\}.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu toplamın m. terimini ayırırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le 4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jm}\right|^2+4h\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right|+$$
$$+2\left|a_1\right|c_{105}h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+2\left|a_1\right|c_{105}h\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}\right|^2,$$

olup bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygular ve $0<\tau\le\frac{1}{4}\left(\left|a_1\right|c_{105}\right)^{-1}$ olarak seçersek aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le (8T+4)h\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2+\left(4+4\left|a_1\right|c_{105}\right)h\tau\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}\right|^2,$$
$$\forall m\in\{1,2,...,N\}.$$

Burada Gronwall lemmasının ayrık aynısını kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le c_{106}h\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2,\ k=\overline{1,N} \tag{3.193}$$

eşitsizliğini elde ederiz. . Burada $c_{106}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Şimdi (3.193) eşitsizliğinin sağ tarafını yani F_{jk} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla F_{jk} fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterelim:

$$F_{jk} = F_{jk}^1 + F_{jk}^2 + F_{jk}^3 + F_{jk}^4 + F_{jk}^5. \tag{3.194}$$

Burada

$$F_{jk}^1 = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} dxdt - i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk}, \tag{3.195}$$

$$F_{jk}^2 = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} dxdt - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk}, \tag{3.196}$$

$$F_{jk}^3 = -\frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a(x) \psi(x,t) dxdt + a^j \psi_{jk}, \tag{3.197}$$

$$F_{jk}^4 = -\frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v(x) \psi(x,t) dxdt + v_j \psi_{jk}, \tag{3.198}$$

$$F_{jk}^5 = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a_1 |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t) dxdt - a_1 |\psi_{jk}|^2 \psi_{jk}, \; j = \overline{1, M-1}, \; k = \overline{1, N} \tag{3.199}$$

şeklindedir.

Önce $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{2, N}$ için F_{jk}^1 ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla (3.195) ve (3.176) formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
F_{jk}^1 &= \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} dxdt - i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk} \\
&= \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} dxdt - \frac{i}{\tau^2 h} \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \big(\psi(x,t) - \psi(x,t-\tau) \big) dxdt \right] \\
&= \frac{i}{\tau^2 h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int_{-\tau}^{0} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial t} \right) d\theta dxdt, \; j = \overline{1, M-1}, \; k = \overline{2, N}
\end{aligned}$$

olup

$$\left|F_{jk}^{1}\right| \le \frac{1}{\tau^{2}h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right|d\theta dxdt, \tag{3.200}$$
$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{2,N}$$

eşitsizliği bulunur. $j=\overline{1,M-1}$ için yine (3.195) ve (3.176) formüllerini kullanırsak

$$F_{j1}^{1}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt-i\delta_{\bar{t}}\psi_{j1}$$
$$=\frac{i}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^{2}h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt$$

olup

$$\left|F_{j1}^{1}\right| \le \frac{2}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|dxdt,\ j=\overline{1,M-1} \tag{3.201}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi $j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N}$ için (3.176) ve (3.196) formüllerini kullanarak F_{jk}^{2} fonksiyonunu değerlendirelim.

$$F_{jk}^{2}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^{2}\psi(x,t)}{\partial x^{2}}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}$$
$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^{2}\psi(x,t)}{\partial x^{2}}dxdt-$$
$$-\frac{a_0}{\tau h^{3}}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\left(\psi(x+h,t)-\psi(x,t)\right)-\left(\psi(x,t)-\psi(x-h,t)\right)\right]dxdt$$
$$=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^{2}\psi(x,t)}{\partial x^{2}}dxdt-\frac{a_0}{\tau h^{3}}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi-h}^{\xi}\frac{\partial^{2}\psi(\eta,t)}{\partial\eta^{2}}d\eta d\xi dxdt$$
$$=\frac{a_0}{\tau h^{3}}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial^{2}\psi(x,t)}{\partial x^{2}}-\frac{\partial^{2}\psi(x+\xi+\eta,t)}{\partial x^{2}}\right)d\eta d\xi dxdt,\ j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N}$$

olup

$$\left|F_{jk}^2\right| \le \frac{a_0}{\tau h^3}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int\limits_0^h\int\limits_{-h}^0\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\xi+\eta,t)}{\partial x^2}\right|d\eta d\xi dxdt, \qquad (3.202)$$
$$j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde $k=\overline{1,N}$ için F_{1k}^2 ve F_{M-1k}^2 fonksiyonlarını değerlendirelim. Bu amaçla yine (3.176) ve (3.196) formüllerini kullanırsak

$$F_{1k}^2=\frac{a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{1k}$$
$$=\frac{a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right)dt-$$
$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\big(\psi(x+h,t)-\psi(x,t)\big)dxdt-\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\big(\psi(x,t)-\psi(x_1-h/2,t)\big)dxdt\right]$$
$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int\limits_{x}^{x+h}\int\limits_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt+\frac{a_0}{\tau h^3}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int\limits_{x_1-h/2}^{x}\int\limits_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt$$

olup

$$\left|F_{1k}^2\right|\le\frac{3a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|dxdt,\ \ k=\overline{1,N} \qquad (3.203)$$

eşitsizliği bulunur. Aynı şekilde F_{M-1k}^2 fonksiyonu içinde

$$\left|F_{M-1k}^2\right|\le\frac{3a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|dxdt,\ \ k=\overline{1,N} \qquad (3.204)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^3 fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla (3.176) ve (3.197) formüllerini kullanırsak

$$F_{jk}^3=a^j\psi_{jk}-\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a(x)\psi(x,t)dxdt$$
$$=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_{jk}\left(a^j-a(x)\right)dxdt+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a(x)\left(\psi_{jk}-\psi(x,t)\right)dxdt,$$

olup burada a^j için olan formülü dikkate alırsak

$$F_{jk}^3 = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\left(\psi_{jk} - \psi(x,t)\right)dxdt,\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da

$$\left|F_{jk}^3\right| \le \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |a(x)|\left|\psi_{jk} - \psi(x,t)\right|dxdt,\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N} \tag{3.205}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $\left|F_{jk}^3\right|$ fonksiyonunu değerlendirebilmek için $\left|\psi_{jk} - \psi(x,t)\right|$ farkını bulalım. Bu amaçla (3.176) formülü kullanılırsa

$$\psi_{jk} - \psi(x,t) = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(\xi,\theta)d\xi d\theta - \psi(x,t)$$

$$= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_t^{\theta} \frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}d\eta d\xi d\theta + \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_x^{\xi} \frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}d\gamma d\xi d\theta$$

olup

$$\left|\psi_{jk} - \psi(x,t)\right| \le \frac{1}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|d\xi d\eta + \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|d\gamma, \tag{3.206}$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.206) ve (3.4), (3.205) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\left|F_{jk}^3\right| \le \frac{\mu_0}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|dxdt + \frac{\mu_0}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|dxdt, \tag{3.207}$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi $j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^4 ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla (3.176) ve (3.198) formülleri kullanılırsa

$$F_{jk}^{4}=v_j\psi_{jk}-\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v(x)\psi(x,t)dxdt$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(v_j-v(x)\right)\psi_{jk}dxdt+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v(x)\left(\psi_{jk}-\psi(x,t)\right)dxdt$$

$$=\psi_{jk}\left(v_j-w_j\right)+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v(x)\left(\psi_{jk}-\psi(x,t)\right)dxdt$$

olup

$$\begin{aligned}\left|F_{jk}^{4}\right|\le\left|\psi_{jk}\right|\left|v_j-w_j\right|+\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|v(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\times\\ \times\left(\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_{jk}-\psi(x,t)\right|^2dx\right)^{1/2}dt,\quad j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N}\end{aligned}\tag{3.208}$$

eşitsizliği bulunur. (3.206) eşitsizliğine Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa

$$\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_{jk}-\psi(x,t)\right|^2dx\le 2\tau\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|^2d\xi d\eta+2h^2\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|^2d\gamma$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (3.208) de kullanılırsa Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\begin{aligned}\left|F_{jk}^{4}\right|\le\left|\psi_{jk}\right|\left|v_j-w_j\right|+\left(\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|v(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\times\\ \times\left[\frac{\sqrt{2\tau}}{h}\left(\int\limits_{t_k-1}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|^2d\xi d\eta\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{t_k-1}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\gamma,t)}{\partial\gamma}\right|^2d\gamma dt\right)^{1/2}\right].\end{aligned}$$

Burada

$$\left(\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|v(x)\right|^2dx\right)^{1/2}\le\|v\|_{L_2(0,l)}\le b_0,\quad\forall j\in\{1,2,...,M-1\}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|F_{jk}^{4}\right| \le \left|\psi_{jk}\right|\left|v_j - w_j\right| +$$

$$+b_0\left[\frac{\sqrt{2\tau}}{h}\left(\int\limits_{t_k-1}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{t_k-1}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right], \tag{3.209}$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^{5} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla (3.176) ve (3.199) formülleri kullanılırsa

$$F_{jk}^{5} = \frac{a_1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi(x,t)\right|^2\psi(x,t)dxdt - a_1\left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}$$
$$= \frac{a_1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\left|\psi(x,t)\right|^2\psi(x,t) - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)dxdt$$

olup burada

$$|\psi|^2\psi - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk} = -\left(\left|\psi_{jk}\right|^2 + |\psi|^2\right)\left(\psi_{jk}-\psi\right) - \psi_{jk}\psi\left(\bar\psi_{jk}-\bar\psi\right)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|F_{jk}^{5}\right| \le \frac{3}{2}\frac{|a_1|}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\left|\psi_{jk}\right|^2 + |\psi|^2\right)\left|\psi-\psi_{jk}\right|dxdt$$
$$\le \frac{3}{2}\frac{|a_1|}{\tau h}\left(\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}^2 + \max_{\substack{1\le j\le M-1\\ 1\le k\le N}}\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi-\psi_{jk}\right|dxdt$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{107}\|\psi\|_{C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)} \le c_{108}$$

olduğunu ve (3.190) kestirimini dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{5}\right| \le c_{109}\frac{|a_1|}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi-\psi_{jk}\right|dxdt.$$

Bu eşitsizlikte (3.206) ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa $j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için

$$\left|F_{jk}^{5}\right| \le c_{109}\left|a_1\right|\left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right] \quad (3.210)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{109} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Fubini teoremini (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.7) kullanarak $j = \overline{1, M-1},\ \ k = \overline{2, N}$ için (3.200) den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\tau h\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{1}\right|^2 \le \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}\left[\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right]d\theta.$$

Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı alalım. $L_2(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonların sürekliliği ile ilgili teoreme göre (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.2), $|\theta| \le \tau < \sigma$ için

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla $|\theta| \le \tau < \sigma$ şartını sağlayan τ değerleri için

$$\tau h\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{1}\right|^2 \le \omega_{\tau}^{0} \quad (3.211)$$

olduğu elde edilir. Burada $\omega_{\tau}^{0} > 0$ ve $\tau \to 0$ için $\omega_{\tau}^{0} \to 0$ dır.

(3.201) eşitsizliğinden ve (3.7) kestiriminden

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{j1}^{1}\right|^2 \le 4\int\limits_{0}^{\tau}\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 dt \le c_{110}\tau$$

olup bu eşitsizlik ile (3.211) eşitsizliği birleştirilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{1}\right|^2 \le c_{110}\tau + \omega_{\tau}^{0}. \quad (3.212)$$

(3.211) eşitsizliğinin elde edilmesine benzer olarak (3.202) den $j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N}$ için

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-2}\left|F_{jk}^{2}\right|^{2}\le\omega_h^1 \qquad (3.213)$$

eşitsizliği kolaylıkla elde edilir. Burada $\omega_h^1>0$ ve $h\to0$ için $\omega_h^1\to0$ dır.

(3.203) ve (3.204) eşitsizliklerinden

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{1k}^{2}\right|^{2}\le 9a_0^2\int_0^h\left\|\frac{\partial^2\psi(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2dx$$

ve

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{M-1k}^{2}\right|^{2}\le 9a_0^2\int_{l-h}^{l}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,.)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,T)}^2dx$$

olup bunlar taraf tarafa toplanırsa

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{1k}^{2}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{M-1k}^{2}\right|^{2}\le\omega_h^2 \qquad (3.214)$$

elde edilir. Burada $\omega_h^2>0$ ve $h\to0$ için $\omega_h^2\to0$ dır. Bu durumda (3.213) ve (3.214) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{2}\right|^{2}\le\tilde{\omega}_h^0. \qquad (3.215)$$

Burada $\tilde{\omega}_h^0=\omega_h^1+\omega_h^2$ olup $\tilde{\omega}_h^0>0$ ve $h\to0$ için $\tilde{\omega}_h^0\to0$ dır.

Şimdi $j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^3 fonksiyonu için olan (3.207) eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{3}\right|^{2}\le 2\mu_0^2\tau^2\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)+2\mu_0^2h^2\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2dxdt\right)$$
$$=2\mu_0^2\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+2\mu_0^2h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

olup (3.7) kestirimi kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{3}\right|^{2}\le c_{111}\left(\tau^{2}+h^{2}\right). \tag{3.216}$$

Burada $c_{111}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^{4} fonksiyonu için olan (3.209) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{4}\right|^{2}\le 3\left(\max_{\substack{1\le j\le M-1\\1\le k\le N}}\left|\psi_{jk}\right|^{2}\right)\left(\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_{j}-w_{j}\right|^{2}\right)+$$
$$+6b_{0}^{2}\frac{\tau^{2}}{h}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2}+6b_{0}^{2}h\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2}$$

olup burada (3.7) ile (3.190) kestirimini ve $c_{97}\le\dfrac{\tau}{h}\le c_{98}$ uyum şartını kullanırsak

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{4}\right|^{2}\le c_{112}\left(\tau+h+\left\|Q_{n}(v)-[v]_{n}\right\|^{2}\right) \tag{3.217}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{112}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Benzer şekilde $j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}$ için (3.210) eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{5}\right|^{2}\le 2c_{109}^{2}\left|a_{1}\right|^{2}\left(\tau^{2}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2}+h^{2}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_{2}(\Omega)}^{2}\right)$$

olup burada (3.7) kestirimi kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{5}\right|^{2}\le c_{113}\left(\tau^{2}+h^{2}\right). \tag{3.218}$$

Burada $c_{113}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Böylece (3.212), (3.215), (3.216), (3.217) ve (3.218) eşitsizliklerinden

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^{2}\le c_{114}\left(\tau+h+\tau^{2}+h^{2}+\omega_{\tau}^{0}+\tilde{\omega}_{h}^{0}+\left\|Q_{n}(v)-[v]_{n}\right\|^{2}\right) \tag{3.219}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{114} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır. (3.219) kestirimi (3.193) eşitsizliğinde dikkate alınır ve

$$\beta_{\tau h} = \tau + h + \tau^2 + h^2 + \omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_h^0$$

olarak tanımlanırsa teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Böylece Teorem 3.3.3.1 ispatlanmış oldu.

3.3.4. Fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı

Bu kısımda fark şemasının hatası için olan kestirimi kullanarak fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle $J(v)$ ve $I_n\left([v]_n\right)$ fonksiyonellerinin farkını göz önüne alıp bu farkı kestirelim. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.3.4.1: Teorem 3.3.3.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde $\forall v \in V$ ve $\forall [v]_n \in V_n$ için

$$\left|J(v) - I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{115}\left(\sqrt{\beta_{\tau h}} + \left\|Q_n(v) - [v]_n\right\|\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{115} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

İspat: (3.149) ve (3.153) formülleri ile Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
J(v) - I_n\left([v]_n\right) &= \int_0^l \left|\psi(x,T) - y(x)\right|^2 dx - h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jN} - y_j\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2}\left(\left|\psi(x,T) - y(x)\right| - \left|\phi_{jN} - y_j\right|\right)\times \\
&\quad \times\left(\left|\psi(x,T) - y(x)\right| + \left|\phi_{jN} - y_j\right|\right)dx \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2}\left|\psi(x,T) - y(x) - \phi_{jN} + y_j\right|^2 dx\right)^{1/2} \times
\end{aligned} \tag{3.220}$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(|\psi(x,T)|+|y(x)|+|\phi_{jN}|+|y_j|\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(|\psi(x,T)|+|y(x)|+|\phi_{jN}|+|y_j|\right)^2 dx\right)^{1/2} \le 2\|\psi(.,T)\|_{L_2(0,l)}+4\|y\|_{L_2(0,l)}+$$

$$+2\left(h\sum_{j=1}^{M-1}|\phi_{jN}|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu eşitsizlikte (3.7) ile (3.161) kestirimlerini kullanır ve $y \in W_2^1(0,l)$ olduğunu dikkate alırsak kolaylıkla

$$\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(|\psi(x,T)|+|y(x)|+|\phi_{jN}|+|y_j|\right)^2 dx\right)^{1/2} \le c_{116}$$

kestirimini yazabiliriz. Burada $c_{116} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır. Bu kestirim (3.220) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$J(v)-I_n\left([v]_n\right) \le c_{116}\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi(x,T)-y(x)-\phi_{jN}+y_j\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

olup

$$J(v)-I_n\left([v]_n\right) \le c_{117}\left[\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi(x,T)-\psi_{jN}\right|^2 dx\right)^{1/2}+\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_{jN}-\phi_{jN}\right|^2 dx\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|y_j-y(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{117} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

$$J_1=\left(\sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi(x,T)-\psi_{jN}\right|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3.221}$$

$$J_2 = \left(\sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \psi_{jN} - \phi_{jN} \right|^2 dx \right)^{1/2} \tag{3.222}$$

$$J_3 = \left(\sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| y_j - y(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \tag{3.223}$$

olmak üzere

$$J(v) - I_n\left([v]_n\right) \le c_{117}\left(J_1 + J_2 + J_3\right)$$

olsun. (3.221) eşitliğinden

$$J_1^2 = \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \psi(x,T) - \psi_{jN} \right|^2 dx$$

olup önce $\left(\psi(x,T) - \psi_{jN}\right)$ farkını bulalım. Bunun için (3.176) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \psi(x,T) - \psi_{jN} &= \psi(x,T) - \frac{1}{\tau h} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi(\xi,\theta) d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{\tau h} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(\psi(x,T) - \psi(\xi,\theta) \right) d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{\tau h} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int_{\theta}^{T} \frac{\partial \psi(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta d\xi d\theta + \frac{1}{\tau h} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int_{\xi}^{x} \frac{\partial \psi(\gamma,\theta)}{\partial \gamma} d\gamma d\xi d\theta \end{aligned}$$

olup

$$\left| \psi(x,T) - \psi_{jN} \right| \le \int_{t_{N-1}}^{t_N} \left| \frac{\partial \psi(x,\eta)}{\partial \eta} \right| d\eta + \frac{1}{\tau} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi(\gamma,\theta)}{\partial \gamma} \right| d\gamma d\theta$$

eşitsizliği bulunur. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \psi(x,T) - \psi_{jN} \right|^2 \le 2\tau \int_{t_{N-1}}^{t_N} \left| \frac{\partial \psi(x,\eta)}{\partial \eta} \right|^2 d\eta + \frac{2h}{\tau} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi(\gamma,\theta)}{\partial \gamma} \right|^2 d\gamma d\theta$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik J_1^2 ifadesinde yerine yazılırsa

$$J_1^2 \le 2\tau \sum_{j=1}^{M-1} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \right|^2 dxdt + 2\frac{h^2}{\tau} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dxdt$$

$$\le 2\tau \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2h^2}{\tau} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

olup burada (3.7) kestirimi ve $c_{97} \le \dfrac{\tau}{h} \le c_{98}$ uyum şartı kullanılırsa

$$J_1^2 \le c_{118} \left(\tau + h \right) \tag{3.224}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{118} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

(3.222) dan

$$J_2^2 = \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \psi_{jN} - \phi_{jN} \right|^2 dx = h \sum_{j=1}^{M-1} \left| Z_{jN} \right|^2$$

yazılır. Burada (3.182) kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J_2^2 \le c_{99} \left(\beta_{\tau h} + \left\| Q_n(v) - [v]_n \right\|^2 \right). \tag{3.225}$$

Şimdi (3.223) formülünü kullanarak J_3^2 yi değerlendirelim. Bu amaçla önce $y_j - y(x)$ farkını bulalım. (3.158) formülünden

$$y_j - y(x) = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} y(\xi) d\xi - y(x) = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(y(\xi) - y(x) \right) d\xi = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{x}^{\xi} \frac{dy(\eta)}{d\eta} d\eta d\xi$$

olup

$$\left| y_j - y(x) \right| \le \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{dy(\eta)}{d\eta} \right| d\eta d\xi = \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{dy(\eta)}{d\eta} \right| d\eta$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanıp elde edilen eşitsizlik (3.223) de kullanılır ve $y \in W_2^1(0,l)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$J_3^2 \le \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left(h \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{dy(\eta)}{d\eta} \right|^2 d\eta \right) dx = h^2 \sum_{j=1}^{M-1} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{dy(x)}{dx} \right|^2 dx = h^2 \left\| \frac{dy}{dx} \right\|^2_{L_2(0,l)}$$

olup

$$J_3^2 \le c_{119} h^2 \qquad (3.226)$$

eşitsizliği yazılır. Burada $c_{119} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Böylece $\beta_{\tau h}$ için olan ifadeyi dikkate alıp (3.224), (3.225) ve (3.226) eşitsizliklerini kullanırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 3.3.4.1 ispatlandı.

Şimdi fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını gösterelim. Ancak bunu göstermeden önce ispatta kullanacağımız iki yardımcı lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.3.4.2: Teorem 3.3.4.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $Q_n(v)$ operatörü (3.177) formülü ile tanımlansın. Bu durumda $\forall v \in V$ için $Q_n(v) \in V_n$ dir ve

$$\left| J(v) - I_n\left(Q_n(v)\right)\right| \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}} \qquad (3.227)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $v \in V$ herhangi bir kontrol olsun. (3.177) formülünden

$$Q_n(v) = [w] = (w_1, w_2, ..., w_{M-1}),\ w_j = \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v(x)dx,\ \ j = \overline{1, M-1}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinin yardımıyla buradan

$$\left|w_j\right| \le \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} |v(x)|dx \le \frac{\sqrt{h}}{h}\left(\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} |v(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

olup

$$\left|w_j\right|^2 \le \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} |v(x)|^2 dx,\ \ j = \overline{1, M-1}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikleri h ile çarpıp j üzerinden 1 den $M-1$ e kadar toplarsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|w_j\right|^2 \le \sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} |v(x)|^2 dx = \|v\|_{L_2(0,l)}^2$$

olur. Buradan da

$$\|Q_n(v)\| = \left(h\sum_{j=1}^{M-1} |w_j|^2 \right)^{1/2} \le b_0$$

eşitsizliği yazılır. Yani $Q_n(v) \in V_n$ dir. Dolayısıyla Teorem 3.3.4.1 de $[v]_n \in V_n$ yerine $Q_n(v)$ alırsak

$$\left| J(v) - I_n\left(Q_n(v)\right)\right| \le c_{115}\left(\sqrt{\beta_{\tau h}} + \|Q_n(v) - Q_n(v)\|\right) = c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}$$

olup lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Lemma 3.3.4.2 ispatlandı.

Lemma 3.3.4.3: Teorem 3.3.4.1 in şartları sağlansın ve P_n operatörü

$$P_n : V_n \to L_2(0,l),\ P_n\left([v]_n\right) = \tilde{v}(x) = v_j,\ x_j - h/2 \le x \le x_j + h/2,\ j = \overline{1, M-1} \tag{3.228}$$

biçiminde tanımlansın. Bu takdirde $\forall [v]_n \in V_n$ iken $P_n\left([v]_n\right) \in V$ ve

$$\left| J\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}$$

dır.

İspat: $\forall [v]_n \in V_n$ alalım. (3.228) formülünden

$$\left\|P_n\left([v]_n\right)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \|\tilde{v}\|^2_{L_2(0,l)} = \int_0^l |\tilde{v}(x)|^2\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |\tilde{v}(x)|^2\,dx = \sum_{j=1}^{M-1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |v_j|^2\,dx = h\sum_{j=1}^{M-1}|v_j|^2$$

olup

$$\left\|P_n\left([v]_n\right)\right\|_{L_2(0,l)} = \left(h\sum_{j=1}^{M-1}|v_j|^2 \right)^{1/2} \le b_0$$

eşitsizliği elde edilir. Yani $P_n\left([v]_n\right) \in V$ dir. Bu durumda Teorem 3.3.4.1 de $\forall v \in V$ nin yerine $P_n\left([v]_n\right) \in V$ alınırsa

$$\left| J\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{115}\left(\sqrt{\beta_{\tau h}} + \left\|Q_n\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - [v]_n\right\|\right) \tag{3.229}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan ikinci terimi göz önüne alalım:

$$\left\| Q_n\left(P_n\left([v]_n\right)\right)-[v]_n\right\|^2 = h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\tilde{v}(x)dx-v_j\right|^2 = h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v_j dx-v_j\right|^2 =$$

$$= h\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_j-v_j\right|^2 = 0$$

bulunur. Bunu (3.229) un sağ tarafında dikkate alırsak

$$\left|J\left(P_n\left([v]_n\right)\right)-I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 3.3.4.3 ispatlanmış oldu.

Şimdi fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını gösteren teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.3.4.4: Lemma 3.3.4.2 ve Lemma 3.3.4.3 ün şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $v^* \in V$ ve $[v]_n^* \in V_n$ sırasıyla (3.149)-(3.152) ve (3.153)-(3.156) problemlerinin çözümleri olsun. Yani

$$J_* = J(v^*) = \inf_{v\in V} J(v),$$

$$I_{n*} = I_n([v]_n^*) = \inf_{[v]_n\in V_n} I_n\left([v]_n\right)$$

olsun. Bu takdirde (3.153)-(3.156) problemler dizisi (3.149)-(3.152) optimal kontrol probleminin yaklaşımıdır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} I_{n*} = J_*$$

şartı sağlanır ve fonksiyonele göre yakınsama için

$$\left|I_{n*}-J_*\right| \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1,2,...$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: Teoremi ispatlamak için Vasilyev (1981) çalışmasındaki yöntemi kullanacağız. $v^* \in V$ (3.149)-(3.152) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. Lemma 3.3.4.2 ye göre $Q_n\left(v^*\right) \in V_n$ ve

$$\left| I_n\left(Q_n(v^*)\right) - J(v^*) \right| \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

dır. Bu eşitsizlikten

$$I_{n*} \le I_n\left(Q_n(v^*)\right) \le J(v^*) + c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}} = J_* + c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

olup

$$I_{n*} - J_* \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.230}$$

yazılır.

$[v]_n^* \in V_n$ kontrolü (3.153)-(3.156) probleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde Lemma 3.3.4.3 e göre $P_n\left([v]_n^*\right) \in V_n$ ve

$$\left| J\left(P_n\left([v]_n^*\right)\right) - I_n\left([v]_n^*\right) \right| \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$J_* \le J\left(P_n\left([v]_n^*\right)\right) \le I_n\left([v]_n^*\right) + c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}} = I_{n*} + c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

olup

$$I_{n*} - J_* \ge -c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.231}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.230) ve (3.231) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\left| I_{n*} - J_* \right| \le c_{115}\sqrt{\beta_{\tau h}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

eşitsizliği kolaylıkla elde edilir. Burada $\tau = \tau_n$, $h = h_n$ ve $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ olduğunu dikkate alarak sonuncu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limite geçersek $\lim_{n\to\infty} I_{n*} = J_*$ olduğu elde edilir. Böylece Teorem 3.3.4.4 ispatlanmış oldu.

3.4. Lineer Olmayan Kısımda Kompleks Katsayı Bulunan Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde sonlu farklar yöntemi, 3.2. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin özel bir hali için uygulanmıştır. Bu amaçla önce optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısı yazılmış ve fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilmiştir. Daha sonra fark şemasının hatası değerlendirilip fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlanmıştır.

3.4.1. Optimal kontrol probleminin diskritleştirilmesi

$$J(v) = \int_0^l |\psi(x,T) - y(x)|^2 \, dx \tag{3.232}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = v(x) : v \in L_2(0,l), \ \ \|v\|_{L_2(0,l)} \le b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v(x)\psi + a_1 |\psi|^2 \psi = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{3.233}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l) \tag{3.234}$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t \in (0,T) \tag{3.235}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $\psi = \psi(x,t)$ dalga fonksiyonu, $\Omega = (0,l) \times (0,T)$, $i^2 = -1,\ l > 0,\ T > 0,\ b_0 > 0,\ a_0 > 0$-verilen sayılar; $y \in W_2^1(0,l)$ verilen fonksiyon; $a_1 \in \mathbb{C}$ kompleks sayı olup (3.79) şartını; $a(x)$-ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olup (3.80) şartını sağlar. $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları ise verilen fonksiyonlar olup (3.81) şartını sağlarlar.

Gözüktüğü gibi (3.232)-(3.235) optimal kontrol problemi (3.76)-(3.78), (3.82) optimal kontrol probleminin $\alpha = 0$ haline karşılık gelen özel bir halidir. Teorem 3.2.3.2 den (3.232)-(3.235) optimal kontrol probleminin kabul edilen şartlar altında en az bir çözümü vardır. Yani

$$V_* \equiv \left\{ v^* \in V : \ J(v^*) = J_* = \inf_{v \in V} J(v) \right\} \ne \varnothing$$

dır.

Şimdi (3.232)-(3.235) optimal kontrol problemini diskritleştirelim. Yani bu problemin sonlu farklı aynısını yazalım. Bu amaçla önce $\bar{\Omega}=[0,l]\times[0,T]$ bölgesini aşağıdaki ağlar dizisine dönüştürelim:

$$\left\{(x_j,t_k)_n\right\},\ n=1,2,...,\ x_j=jh_n-\frac{h_n}{2},\ j=\overline{1,M_n-1},\ x_1-\frac{h_n}{2}=0,\ x_{M_n-1}+\frac{h_n}{2}=l,$$

$$t_k=k\tau_n,\ k=\overline{0,N_n},\ h_n=\frac{l}{M_n-1},\ \tau_n=\frac{T}{N_n},$$

$$M\equiv M_n,\ \mathrm{N}\equiv N_n,\ \mathrm{h}\equiv h_n,\ \tau\equiv\tau_n,\ n\geq 1.$$

(3.233) denkleminin içerdiği türevlere karşılık gelen sonlu farkları ise

$$\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}=\frac{\phi_{jk}-\phi_{jk-1}}{\tau},\quad \delta_{\bar{x}}\phi_{jk}=\frac{\phi_{jk}-\phi_{j-1k}}{h},$$

$$\delta_{x}\phi_{jk}=\frac{\phi_{j+1k}-\phi_{jk}}{h},\quad \delta_{x\bar{x}}\phi_{jk}=\frac{\phi_{j+1k}-2\phi_{jk}+\phi_{j-1k}}{h^2}$$

biçiminde gösterelim. Bu durumda (3.232)-(3.235) optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısı; her bir $n\geq 1$ doğal sayısı için

$$I_n\left([v]_n\right)=h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jN}-y_j\right|^2 \tag{3.236}$$

fonksiyonunun

$$V_n\equiv\left\{[v]_n:\ [v]_n=(v_1,v_2,...,v_{M-1}),\ \left(h\sum_{j=1}^{M-1}v_j^2\right)^{1/2}\leq b_0\right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}+a_0\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk}-a^j\phi_{jk}-v_j\phi_{jk}+a_1\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk}=f_{jk},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}, \tag{3.237}$$

$$\phi_{j0}=\varphi_j,\ j=\overline{0,M} \tag{3.238}$$

$$\phi_{0k}=\phi_{Mk}=0,\ k=\overline{1,N} \tag{3.239}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemi olarak ifade edilir. Burada a^j, y_j, φ_j ve f_{jk} ağ fonksiyonları olup sırasıyla (3.157), (3.158), (3.159) ve (3.160) formülleriyle tanımlanırlar.

3.4.2. Fark şemasının kararlılığı

Her bir $[v]_n \in V_n$ için (3.237)-(3.239) şartlarından ϕ_{jk} ağ fonksiyonun bulunması problemi (3.233)-(3.235) sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasıdır. Önce bu fark şemasının çözümünün kararlılığını gösteren teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.4.2.1. Her bir $[v]_n \in V_n$ için (3.237)-(3.239) fark şemasının çözümü aşağıdaki kestirimi sağlar:

$$\begin{gathered} h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + 4\operatorname{Im} a_1 \tau h \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^4 \le \\ \le c_{120}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left| f_{jk}\right|^2 \right), \quad \forall m \in \{1,2,...,N\}. \end{gathered} \tag{3.240}$$

Burada $c_{120} > 0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır.

İspat: Her bir $t = t_k$ için (3.237)-(3.139) şeması

$$\begin{gathered} h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar t}\phi_{jk}\bar\eta_{jk} - a_0 h \sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar x}\phi_{jk}\delta_{\bar x}\bar\eta_{jk} - h\sum_{j=1}^{M-1} a^j \phi_{jk}\bar\eta_{jk} - \\ -h\sum_{j=1}^{M-1} v_j \phi_{jk}\bar\eta_{jk} + a_1 h \sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk}\bar\eta_{jk} = h\sum_{j=1}^{M-1} f_{jk}\bar\eta_{jk}, \quad k = \overline{1,N} \end{gathered} \tag{3.241}$$

toplam özdeşliğine denktir. Burada $\bar\eta_{jk}$ fonksiyonu $\left\{(x_j, t_k)_n\right\}$ ağlar dizisinde tanımlı, $k = \overline{1,N}$ için $\eta_{0k} = \eta_{Mk} = 0$ şartlarını sağlayan herhangi η_{jk} ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliğinde $\bar\eta_{jk}$ fonksiyonunun yerine $\tau\bar\phi_{jk}$ ağ fonksiyonunu alalım ve elde edilen eşitliklerden onların kompleks eşleniğini taraf tarafa çıkaralım. Bu durumda

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_{\bar t}\phi_{jk}\bar\phi_{jk} + \delta_{\bar t}\bar\phi_{jk}\phi_{jk}\right) + 2\tau h \operatorname{Im} a_1 \sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^4 = 2\tau h \sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Im}\left(f_{jk}\bar\phi_{jk}\right), \quad k = \overline{1,N}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte önce (3.164) formülü kullanılır sonra bu eşitlikleri k üzerinden 1 den $m \le N$ ye kadar toplar ve (3.238) kullanılırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2+2\operatorname{Im}a_1\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^4\le 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|+$$
$$+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte sağ tarafta yer alan ilk toplamın $m.$ terimini ayıralım ve ayırdığımız bu terime ε-Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2+2\operatorname{Im}a_1\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^4\le \frac{\tau h}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+\varepsilon\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2+$$
$$+2\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|+h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}.$$

Burada $\varepsilon=2\tau$ olarak alınırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+2h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2+4\operatorname{Im}a_1\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^4\le$$
$$\le 4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2+4\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2,\ \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}&h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2+2h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}-\phi_{jk-1}\right|^2+4\operatorname{Im}a_1\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^4\le\\&(4T+2)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}\end{aligned}\tag{3.242}$$

olup bu eşitsizliğin sol tarafındaki son iki terimin negatif olmadığı dikkate alınırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2\le(4T+2)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2+2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2,\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte Gronwall lemmasının diskrit aynısını (Vasilyev 1981) kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2\le c_{121}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right),\quad \forall m\in\{1,2,...,N\}\tag{3.243}$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{121}>0$ sayısı τ ve h dan bağımsızdır. (3.242) eşitsizliğinde sol tarafta ikinci terimin negatif olmadığını dikkate alır ve burada (3.243) kestirimini kullanırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Teorem 3.4.2.1 ispatlandı.

3.4.3. Fark şemasının hatası için kestirim

Şimdi fark şemasının hatasını değerlendirelim. Bu amaçla önce (3.233)-(3.235) optimal kontrol probleminin her bir $v \in V$ için $\psi = \psi(x,t;v)$ çözümünü (3.176) biçiminde ve V kümesi üzerinde (3.177) formülü ile de bir Q_n operatörünü tanımlayalım. $[Z] = \{Z_{jk}\} = \{\phi_{jk} - \psi_{jk}\}$ ile fark şemasının hatasını gösterelim. Bu $\{Z_{jk}\}$ ağ fonksiyonunun aşağıdaki sistemi sağladığı açıktır:

$$i\delta_{\bar{t}} Z_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} Z_{jk} - a^j Z_{jk} - v_j Z_{jk} = F_{jk} - a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 \phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2 \psi_{jk}\right), \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N} \tag{3.244}$$

$$Z_{j0} = 0, \quad j = \overline{0, M} \tag{3.245}$$

$$Z_{0k} = Z_{Mk} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{3.246}$$

Burada F_{jk},

$$F_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v(x)\psi + a_1 |\psi|^2 \psi \right) dxdt - \\ -i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk} - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk} + a^j \psi_{jk} + v_j \psi_{jk} - a_1 \left|\psi_{jk}\right|^2 \psi_{jk}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N} \tag{3.247}$$

formülü ile tanımlanmaktadır.

Teorem 3.4.3.1: h ve τ adımlarının $c_{122} \le \dfrac{\tau}{h} \le c_{123}$ uyum şartını sağladığını kabul edelim. Burada $c_{122} > 0,\ c_{123} > 0$ sayıları τ ve h dan bağımsızdır. Bu takdirde

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left| Z_{jm} \right|^2 \le c_{124} \left(\beta_{\tau h} + \left\| Q_n(v) - [v]_n \right\|^2 \right), \quad \forall m \in \{1, 2, ..., N\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{124} > 0$ sayısı τ ve h dan bağımsız bir sabittir ve $\beta_{\tau h} > 0$, $\tau \to 0$ ve $h \to 0$ için $\beta_{\tau h} \to 0$ olup

$$\|Q_n(v)-[v]_n\|^2 = h\sum_{j=1}^{M-1}\left|w_j - v_j\right|^2$$

şeklindedir.

İspat: Her bir $t = t_k$ için (3.244)-(3.246) sistemi aşağıdaki toplam özdeşliğine denktir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{t}} Z_{jk}\bar{\eta}_{jk} - a_0 h\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar{x}} Z_{jk}\delta_{\bar{x}}\bar{\eta}_{jk} - h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a^j + v_j\right)Z_{jk}\bar{\eta}_{jk} =$$

$$= h\sum_{j=1}^{M-1} F_{jk}\bar{\eta}_{jk} - h\sum_{j=1}^{M-1} a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)\bar{\eta}_{jk},\ \ k=\overline{1,N}.$$

Burada $\bar{\eta}_{jk}$ fonksiyonu $k=\overline{1,N}$ için $\eta_{0k}=\eta_{Mk}=0$ şartlarını sağlayan, $\left\{(x_j,t_k)_n\right\}$ ağlar dizisinde tanımlı herhangi η_{jk} ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliğinde $\bar{\eta}_{jk}$ fonksiyonunun yerine $\tau\bar{Z}_{jk}$ ağ fonksiyonunu alırsak

$$h\tau\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{t}} Z_{jk}\bar{Z}_{jk} - a_0 h\tau\sum_{j=1}^{M}\left|\delta_{\bar{x}} Z_{jk}\right|^2 - h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left(a^j + v_j\right)\left|Z_{jk}\right|^2 =$$

$$= h\tau\sum_{j=1}^{M-1} F_{jk}\bar{Z}_{jk} - h\tau\sum_{j=1}^{M-1} a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)\bar{Z}_{jk},\ \ k=\overline{1,N}$$

olup bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$ih\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_{\bar{t}} Z_{jk}\bar{Z}_{jk} + \delta_{\bar{t}}\bar{Z}_{jk} Z_{jk}\right) = 2ih\tau\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Im}\left(F_{jk}\bar{Z}_{jk}\right) -$$

$$-h\tau\sum_{j=1}^{M-1}\left[a_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\phi_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\psi_{jk}\right)\bar{Z}_{jk} - \bar{a}_1\left(\left|\phi_{jk}\right|^2\bar{\phi}_{jk} - \left|\psi_{jk}\right|^2\bar{\psi}_{jk}\right)Z_{jk}\right],\ \ k=\overline{1,N}.$$

Burada Z_{jk} ağ fonksiyonu için (3.164) formülünün aynısı ve (3.184), (3.185) formülleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|Z_{jk}\right|^2 - \left|Z_{jk-1}\right|^2 + \left|Z_{jk} - Z_{jk-1}\right|^2\right) = 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Im}\left(F_{jk}\bar{Z}_{jk}\right) -$$

$$-2\tau h\operatorname{Im} a_1\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 + \left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2 - 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Im}\left(a_1\phi_{jk}\psi_{jk}\left(\bar{Z}_{jk}\right)^2\right),\ \ k=\overline{1,N}.$$

Bu eşitlikler k üzerinden 1 den $m \le N$ ye kadar toplanırsa

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}-Z_{jk-1}\right|^2+2\tau h\operatorname{Im}a_1\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2=$$
$$=2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Im}\left(F_{jk}\bar{Z}_{jk}\right)-2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\operatorname{Im}\left(a_1\phi_{jk}\psi_{jk}\left(\bar{Z}_{jk}\right)^2\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki üç terimin de negatif olmadığı dikkate alınırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}-Z_{jk-1}\right|^2+2\tau h\left|\operatorname{Im}a_1\right|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2\le$$
$$\le 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right|+2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|a_1\right|\left|\phi_{jk}\right|\left|\psi_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right|^2.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}-Z_{jk-1}\right|^2+2\tau h\left|\operatorname{Im}a_1\right|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2\le$$
$$\le 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right|+\tau h\left|a_1\right|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim sol tarafa atılır ve

$$2\left|\operatorname{Im}a_1\right|-\left|a_1\right|\ge 2\left|\operatorname{Im}a_1\right|-\left(\left|\operatorname{Re}a_1\right|+\left|\operatorname{Im}a_1\right|\right)\ge\left|\operatorname{Re}a_1\right|$$

olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}-Z_{jk-1}\right|^2+\left|\operatorname{Re}a_1\right|\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2\le$$
$$\le 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right|.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki toplamın $m.$ terimini ayıralım ve ayırdığımız bu terime ε-Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}-Z_{jk-1}\right|^2+\left|\operatorname{Re}a_1\right|\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2\le$$
$$\le\frac{\tau h}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+\varepsilon\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jm}\right|^2+2\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|\left|Z_{jk}\right|$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\varepsilon=2\tau$ olarak seçilir ve sağ taraftaki üçüncü terime Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}-Z_{jk-1}\right|^2+\left|\operatorname{Re}a_1\right|\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2\le$$
$$\le 2T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jm}\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2+\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}\right|^2$$

olup

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2+2h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}-Z_{jk-1}\right|^2+2\left|\operatorname{Re}a_1\right|\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2+\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\left|Z_{jk}\right|^2\le$$
$$\le\left(4T+2\right)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}\right|^2,\quad\forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki ikinci ve üçüncü terimlerin negatif olmadığını dikkate alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2\le\left(4T+2\right)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}\right|^2,\quad\forall m\in\{1,2,...,N\}.$$

Burada Gronwall lemmasının ayrık aynısını kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2\le c_{125}\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2,\quad k=\overline{1,N}\tag{3.248}$$

eşitsizliğini elde ederiz. . Burada $c_{125}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Şimdi (3.248) eşitsizliğinin sağ tarafını yani F_{jk} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla F_{jk} fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterelim:

$$F_{jk}=F_{jk}^1+F_{jk}^2+F_{jk}^3+F_{jk}^4+F_{jk}^5.\tag{3.249}$$

Burada

$$F_{jk}^1=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}dxdt-i\delta_{\bar t}\psi_{jk},\tag{3.250}$$

$$F_{jk}^2=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a_0\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar x}\psi_{jk},\tag{3.251}$$

$$F_{jk}^3=-\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a(x)\psi(x,t)dxdt+a^j\psi_{jk},\tag{3.252}$$

$$F_{jk}^4 = -\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x)\psi(x,t)dxdt + v_j\psi_{jk},$$

$$\text{(3.253)}\ F_{jk}^5 = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_1|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)dxdt - a_1|\psi_{jk}|^2\psi_{jk},\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}$$

(3.254)

şeklindedir.

$j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{2,N}$ için (3.176) ve (3.250) formülleri kullanılırsa

$$\left|F_{jk}^1\right| \le \frac{1}{\tau^2 h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right| d\theta dxdt, \tag{3.255}$$

ve $j=\overline{1,M-1}$ için

$$\left|F_{j1}^1\right| \le \frac{2}{\tau h}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right| dxdt \tag{3.256}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $j=\overline{2,M-2},\ \ k=\overline{1,N}$ için (3.176) ve (3.251) formülleri kullanılırsa

$$\left|F_{jk}^2\right| \le \frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_0^h\int_{-h}^{0}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi(x+\xi+\eta,t)}{\partial x^2}\right| d\eta d\xi dxdt, \tag{3.257}$$

$$j=\overline{2,M-2},\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliği ve $k=\overline{1,N}$ için F_{1k}^2 ve F_{M-1k}^2 fonksiyonları için de

$$\left|F_{1k}^2\right| \le \frac{3a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right| dxdt,\ \ k=\overline{1,N} \tag{3.258}$$

ve

$$\left|F_{M-1k}^2\right| \le \frac{3a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right| dxdt,\ \ k=\overline{1,N} \tag{3.259}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^{3} ve F_{jk}^{4} fonksiyonları için sırasıyla (3.176) ile (3.252) ve (3.176) ile (3.253) formüllerini kullanırsak

$$\left|F_{jk}^{3}\right| \le \frac{\mu_0}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|dxdt+\frac{\mu_0}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|dxdt \tag{3.260}$$

ve

$$\left|F_{jk}^{4}\right| \le \left|\psi_{jk}\right|\left|v_j-w_j\right|+$$
$$+b_0\left[\frac{\sqrt{2\tau}}{h}\left(\int_{t_k-1}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tau}}\left(\int_{t_k-1}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right] \tag{3.261}$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

Şimdi $j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^{5} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. Bu amaçla (3.176) ve (3.254) formülleri kullanılırsa

$$\left|F_{jk}^{5}\right| \le \frac{3}{2}\frac{|a_1|}{\tau h}\left(\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}^2+\max_{\substack{1\le j\le M-1\\1\le k\le N}}\left|\psi_{jk}\right|^2\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi-\psi_{jk}\right|dxdt \tag{3.262}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.176) formülünden

$$\left|\psi_{jk}\right| \le \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi(x,t)\right|dxdt,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte (3.83) kestiriminden elde edilen

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{126}\ (c_{126}>0 \text{ sayısı } x \text{ ve } t \text{ den bağımsız bir sabittir}) \tag{3.263}$$

kestirimi kullanılırsa ψ_{jk} fonksiyonu için

$$\left|\psi_{jk}\right| \le c_{126},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$$

yazılır. Bu kestirim ile (3.263) kestirimi (3.262) eşitsizliğinde kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|F_{jk}^{5}\right| \le c_{127}\frac{|a_1|}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi-\psi_{jk}\right|dxdt.$$

Bu eşitsizlikte (3.206) ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliği kullanılırsa $j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}$ için

$$\left|F_{jk}^{5}\right| \le c_{127}\left|a_1\right|\left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right] \quad (3.264)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{127}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Fubini teoremini kullanarak $j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{2,N}$ için (3.255) den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\tau h\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{1}\right|^2 \le \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}\left[\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right]d\theta.$$

Herhangi $\varepsilon>0$ sayısı alalım. $L_2(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonların sürekliliği ile ilgili teoreme göre (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.2) $|\theta|\le\tau<\sigma$ için

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\sigma>0$ sayısı vardır. Dolayısıyla $|\theta|\le\tau<\sigma$ şartını sağlayan τ değerleri için

$$\tau h\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{1}\right|^2 \le \omega_\tau^0 \quad (3.265)$$

olduğu elde edilir. Burada $\omega_\tau^0>0$ ve $\tau\to 0$ için $\omega_\tau^0\to 0$ dır.

(3.256) eşitsizliğinden ve (3.83) kestiriminden

$$\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{j1}^{1}\right|^2 \le 4\int\limits_{0}^{\tau}\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 dt \le c_{128}\tau$$

olup bu eşitsizlik ile (3.265) eşitsizliği birleştirilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{1} \right|^2 \le c_{128}\tau + \omega_{\tau}^{0}. \tag{3.266}$$

Burada $c_{128} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

(3.265) eşitsizliğinin elde edilmesine benzer olarak (3.257) den $j = \overline{2, M-2}$, $k = \overline{1, N}$ için

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=2}^{M-2} \left| F_{jk}^{2} \right|^2 \le \omega_{h}^{1} \tag{3.267}$$

eşitsizliği kolaylıkla elde edilir. Burada $\omega_h^1 > 0$ ve $h \to 0$ için $\omega_h^1 \to 0$ dır.

(3.258) ve (3.259) eşitsizliklerinden

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{1k}^{2} \right|^2 \le 9a_0^2 \int_0^h \left\| \frac{\partial^2 \psi(x,.)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,T)}^2 dx$$

ve

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{M-1k}^{2} \right|^2 \le 9a_0^2 \int_{l-h}^{l} \left\| \frac{\partial^2 \psi(x,.)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,T)}^2 dx$$

olup bunlar taraf tarafa toplanırsa

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{1k}^{2} \right|^2 + \tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{M-1k}^{2} \right|^2 \le \omega_h^2$$

yazılır. Burada $\omega_h^2 > 0$ ve $h \to 0$ için $\omega_h^2 \to 0$ dır. Bu eşitsizlik ile (3.267) birleştirilirse

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{2} \right|^2 \le \tilde{\omega}_h^0. \tag{3.268}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\tilde{\omega}_h^0 = \omega_h^1 + \omega_h^2$ olup $\tilde{\omega}_h^0 > 0$ ve $h \to 0$ için $\tilde{\omega}_h^0 \to 0$ dır.

Şimdi $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, N}$ için F_{jk}^3 fonksiyonu için olan (3.260) eşitsizliğini göz önüne alalım. (3.260) eşitsizliğinde (3.83) kestirimi kullanılırsa

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{3}\right|^{2}\leq c_{129}\left(\tau^{2}+h^{2}\right). \tag{3.269}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{129}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Benzer şekilde $j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için F_{jk}^{4} fonksiyonu için olan (3.261) eşitsizliği göz önüne alınır ve burada

$$\left|\psi_{jk}\right|\leq c_{126},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$$

kestirimi ile (3.83) kestirimi ve $c_{122}\leq\dfrac{\tau}{h}\leq c_{123}$ uyum şartı kullanılırsa

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{4}\right|^{2}\leq c_{130}\left(\tau+h+\left\|Q_{n}(v)-[v]_{n}\right\|^{2}\right) \tag{3.270}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{130}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}$ için (3.264) eşitsizliğini göz önüne alır ve burada (3.83) kestirimini kullanırsak

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{5}\right|^{2}\leq c_{131}\left(\tau^{2}+h^{2}\right) \tag{3.271}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{131}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Böylece (3.266), (3.268), (3.269), (3.270) ve (3.271) eşitsizliklerinden

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^{2}\leq c_{132}\left(\tau+h+\tau^{2}+h^{2}+\omega_{\tau}^{0}+\tilde{\omega}_{h}^{0}+\left\|Q_{n}(v)-[v]_{n}\right\|^{2}\right) \tag{3.272}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{132}>0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır. (3.272) kestirimi (3.248) eşitsizliğinde dikkate alınır ve

$$\beta_{\tau h}=\tau+h+\tau^{2}+h^{2}+\omega_{\tau}^{0}+\tilde{\omega}_{h}^{0}$$

olarak tanımlanırsa teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Böylece Teorem 3.4.3.1 ispatlanmış oldu.

3.4.4. Fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı

Bu kısımda fark şemasının hatası için olan kestirimi kullanarak fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle $J(v)$ ve $I_n\left([v]_n\right)$ fonksiyonellerinin farkını göz önüne alıp bu farkı değerlendirelim. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edebiliriz:

Teorem 3.4.4.1: Teorem 3.4.3.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde $\forall v \in V$ ve $\forall [v]_n \in V_n$ için

$$\left|J(v) - I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{132}\left(\sqrt{\beta_{\tau h}} + \left\|Q_n(v) - [v]_n\right\|\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{132} > 0$ sayısı h ve τ dan bağımsızdır.

Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.4.1 in ispatında olduğu gibi kolaylıkla ispatlanabilir.

Şimdi fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını ifade eden teoremi vermeden önce bu teoremin ispatında kullanacağımız iki yardımcı lemmayı verelim:

Lemma 3.4.4.2: Teorem 3.4.4.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $Q_n(v)$ operatörü (3.177) formülü ile tanımlansın. Bu durumda $\forall v \in V$ için $Q_n(v) \in V_n$ dir ve

$$\left|J(v) - I_n\left(Q_n(v)\right)\right| \le c_{132}\sqrt{\beta_{\tau h}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu lemmanın ispatı da Lemma 3.3.4.2 nin ispatına benzer şekilde kolaylıkla ispatlanabilir.

Lemma 3.4.4.3: Teorem 3.4.4.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve P_n operatörü (3.228) biçiminde tanımlansın. Bu takdirde $\forall [v]_n \in V_n$ iken $P_n\left([v]_n\right) \in V$ ve

$$\left|J\left(P_n\left([v]_n\right)\right)-I_n\left([v]_n\right)\right|\le c_{132}\sqrt{\beta_{\tau h}}$$

dır.

Bu lemmanın ispatı da Lemma 3.3.4.3 in ispatında olduğu gibi kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 3.4.4.4: Lemma 3.4.4.2 ve Lemma 3.4.4.3 ün şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $v^*\in V$ ve $[v]_n^*\in V_n$ sırasıyla (3.232)-(3.235) ve (3.236)-(3.239) problemlerinin çözümleri olsun. Yani

$$J_*=J(v^*)=\inf_{v\in V} J(v),$$

$$I_{n*}=I_n([v]_n^*)=\inf_{[v]_n\in V_n} I_n\left([v]_n\right)$$

olsun. Bu takdirde (3.236)-(3.239) problemler dizisi (3.232)-(3.235) optimal kontrol probleminin yaklaşımıdır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} I_{n*}=J_*$$

şartı sağlanır ve fonksiyonele göre yakınsama için

$$\left|I_{n*}-J_*\right|\le c_{132}\sqrt{\beta_{\tau h}},\quad n=1,2,...$$

kestirimi geçerlidir.

Bu teoremin ispatı, Lemma 3.4.4.2 ve Lemma 3.4.4.3 ün yardımıyla Teorem 3.3.4.4 ün ispatında olduğu gibi kolaylıkla ispatlanabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada durumu lineer olmayan Schrödinger denklemiyle ifade edilen başlangıç-sınır değer problemi için iki farklı optimal kontrol problemi ve onların nümerik çözümleri ele alınmıştır.

Yaptığımız çalışmaların yer aldığı 3. bölümde ilk olarak, kontrolün ölçülebilir, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması ve lineer olmayan kısımda bir reel katsayının olması durumunda lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle, başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış, daha sonra optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olması için gerekli olan sorular incelenmiş ve fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için bir de gerek şart elde edilmiştir.

İkinci olarak, 3.2. bölümde, kontrolün ölçülebilir, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması ve lineer olmayan kısımda bazı özel şartlar altında bir kompleks katsayının olması durumunda lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle, başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış, daha sonra optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olması için gerekli olan sorular incelenmiş ve fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bu bölümde ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için bir de gerek şart elde edilmiştir.

Tezin 3.3. bölümünde, 3.1. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin nümerik çözümü incelenmiştir. Bu amaçla, 3.1. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin özel bir haline sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. İlk olarak, ele alınan optimal kontrol problemi diskritleştirilmiş ve elde edilen fark şeması için kararlılık kestirimi ispatlanmıştır. Daha sonra, fark şemasının hatası değerlendirilmiş ve fonksiyonele göre yakınsama ispatlanmıştır.

Son olarak, tezin 3.4. bölümünde de, 3.2. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin özel bir haline sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Bu amaçla, ele alınan optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısı yazılmış ve elde edilen fark şeması için kararlılık kestirimi ispatlanmıştır. Daha sonra, fark şemasının hatası değerlendirilmiş ve fonksiyonele göre yakınsama ispatlanarak 3.2. bölümde ele alınan optimal kontrol problemi de nümerik olarak incelenmiştir.

5. SONUÇ

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri daha önce A. G. Butkovskiy, Yu. İ. Samoilenko, A. D. İskenderov, F. P. Vasilyev, M. A. Vorontsov, V. I. Shmalgauzen, G. Ya. Yagubov, M. M. Potapov, A. V. Razgulin, Dın Nıo Hao, N. Silla, B. Yıldız, M. A. Musayeva, N. M. Mahmudov, M. Subaşı, H. Yetişkin ve diğer bilim adamlarının çalışmalarında incelenmiştir. Ayrıca Schrödinger denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyelin ölçülebilir, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda, optimal kontrol problemleri ilk olarak İskenderov (2001), Cances *et al.* (2000), Baundoin *et al.* (2005) çalışmalarında ve Yetişkin (2005)'in doktora tezinde incelenmiştir. Ancak, İskenderov (2001) in çalışmasında lineer Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemi, Cances *et al.* (2000) ve Baundoin *et al.* (2005) çalışmalarında durumu Schrödinger denklemi için Cauchy problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri ve Yetişkin(2005)' in doktora tezinde de kompleks potansiyelli lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri incelendiğinden, bu tezde incelenen optimal kontrol problemleri konulma açısından daha önce incelenen optimal kontrol problemlerinden farklıdır. Çünkü bu çalışmada, durumu lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. Bu nedenle, bu çalışmadan elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmaların sonuçlarından farklı olup, önceki çalışmalara göre daha günceldir ve hem teorik hem de pratik bir öneme sahiptir.

KAYNAKLAR

Adams, R. A., 1978. Sobolev spaces. Academic Press Inc., 268 s, California.

Ahmedov, G. T., Ahiyev, S. S., 1972. Optimal kontrol teorisinin bazı problemleri için gerekli optimallık şartları. Azerbaycan Bilimler Akademisi Bildirileri, 28 (25), 12-15.

Baundoin, L., Kavian, O., Puel, J. P., 2005. Regularity for a Schrödinger equation with singuler potentials and application to bilinear optimal control. Journal Differential Equations, 2005, 216, 188-222.

Bidaut, M. G.,1973. These Universite de Paris. –VI.

Butkovskiy, A.G., Samoilenko Yu.İ., 1984. Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. Nauka, 256 s, Moscow. (Rusça)

Cances, E., Le Bris, G., Pilot, M., 2000. Controle optimal bilineare d'una equation de Schrödinger. C. R. Acad. Sci., t.330, serie 1,567-571/ Controle optimal.

Cavadov, A. V., İskenderov, A. D., 1965. Gartinhouse tipli potansiyele sahip çekirdeğin kararlı durumunun araştırılması. Azerbaycan Devlet Üniversitesinin bilim haberleri, Fizik ve Matematik serisi, 2, 77-84.

Dın Nıo Hao, 1986. Kuantum objektlerinin optimal kontrolü. Nauka, Moscow, N. 2, 14-20. (Rusça)

Egorov, Yu. V., 1963. Optimal kontrolün bazı problemleri. Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik Dergisi, 3(5), 887-904. (Rusça)

Goebel, M., 1979. On existence of optimal control. Math. Nachr., Vol 93, 67-73.

Hsieh, P. F., Sibuya, Y., 1999. Basic theory of ordinary differential equations. Springer Verlag, 468 s, New york.

Hunter, J. K., Nachtergaele, B., 2000. Applied analysis. 438 s, California.

İskenderov, A. D., Tagiev, R. G., 1983. Parabolik denklemlerin katsayılarında olan kontrolörle optimizasyon problemi. Diferansiyel Denklemler, 19 (8), 1324-1334.

İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., 1989. A variational method for solving the inverse problem of determining the quantum-mechanical potential. Soviet Math. Dok1., 38 (3), 637-641.

İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., 1989. Lineer olmayan kuantum mekanik sistemlerin optimal kontrolü.Otomatik ve Telemekanik, 12, 27-38. (Rusça)

İskenderov, A.D., 2001. Durgun olamayan Schrödinger denkleminde potansiyelin bulunması. Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri Dergisi, Baku, 6-36. (Rusça)

İskenderov, A. D., Tagiev, R. G., Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleştirme metodları. Çaşıoğlu, 400 s, Bakü.

Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1975. Introductory real analysis. Dover Pub., 403 s, New york.

Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1989. Fonksiyonlar teorisinin ve fonksiyonel analizin elemanları. Nauka, 624 s, Moscow. (Rusça)

Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N., 1967. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, 736 s, Moscow. (Rusça)

Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N., 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Math. Soc., 646 s, ABD. (İng.)

Ladyzenskaja, O. A., Ural’ceva, N. N., 1973. Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type. Nauka, Moscow. (Rusça)

Lions, J.L., Magenes, E. 1972. Non homegeneous boundary value problems and applications. Springer-Verlag, vol. 2, 307 s, Berlin.

Lions, J.L., Magenes, E. 1972. Non homegeneous boundary value problems and applications. Springer-Verlag, vol. 1, Berlin.

Lions, J.L., 1971. Optimal control for systems governed by partial differential equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 400 s, New York.

Lurye, K. A., 1975. Matematiksel Fiziğin Problemlerinde Optimal Kontrol. Nauka, 478 s, Moskova. (Rusça)

Mahmudov, N. M., 1997. Lions fonksiyonelli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin farklar metoduyla çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82. (Rusça)

Mikhailov, V. P., 1983. Kısmi türevli diferansiyel denklemler. Nauka,424 s, Moskova. (Rusça)

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel analiz. 470 s, Kütahya.

Plotnikov, V. İ., 1976. Optimal kontrol teorisinde varyasyon ve eşlenik problem hakkında. Fonksiyonel Analiz ve onun uygulamaları, 10 (4), 95-96. (Rusça)

Pontryagin, L. S., 1976. Adi diferansiyel denklemler. Nauka, 332 s, Moskova.(Rusça)

Pontryagin, L. S., Boltyansky, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mişenko, E. F., 1969. Optimal süreçlerin matematik teorisi. Nauka, 384 s, Moskova. (Rusça)

Potapov, M. M., Razgulin, A. V. ve Şameeva, T. Y., 1987. Schrödinger tipli optimal kontrol probleminin yaklaşımı ve regülarizasyonu. Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri “Nümerik Analiz ve Sibernetik”, 15(1), 8-13.(Rusça)

Pozzi, G. A., 1968, 1969. Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazione de evoluzine del tipo di Schrödinger lineari e nonlineary. I,II. Ann. Mat. Pura appl. I. Vol 78, II. Vol81.

Razgulin, A. V., 1998. Lineer olmayan Schrödinger denklemi için kontrol problemlerinin yaklaşımları. Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri “Nümerik Analiz ve Sibernetik”, 15(2), 28-33.(Rusça)

Reddy, B. D., 1998. Introductory functional analysis. Springer Verlag, 471 s, New york.

Samarskii, A. A., Lazarov, R. D., Makarov, V. L., 1987. Genelleşmiş çözümlü diferansiyel denklemler için fark şemaları. Vıssaya Şkola, 296 s, Moskova. (Rusça)

Silla, N., 1991. Schrödinger tipli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin nümerik çözümü. Doktora Tezi, Bakü devlet üniversitesi, 165 s, Bakü.

Sobolev, S. L., 1988. Matematiksel fizikte fonksiyonel analizin bazı uygulamaları. Nauka, 334 s, Moskova. (Rusça)

Sokolowski, J., 1978. Remarks on existence of optimization problems for partial differential equations of parabolic type. Control and Cybernetics, 7 (2), 47-61.

Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya., 1979. İll-posed problemlerin çözüm metodları. Nauka, 288 s, Moskova. (Rusça)

Vasilyev, F. P., 1980. Ekstremal problemlerin nümerik çözüm metodları. Nauka, 388 s, Moskova. (Rusça)

Vasilyev, F. P., 1981. Ekstremal problemlerin çözüm metodları. Nauka, 400 s, Moskova. (Rusça)

Vorontsov, M. A., Shmalgauzen, V. I., 1985. Adaptiv optiğin prensipleri. Nauka, 336 s, Moskova. (Rusça)

Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., 1997. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için İdentifikasyon Problemi Hakkında. Diferansiyel Denklemler, 33 (12), 1691-1698. (Rusça)

Yagubov, G.Ya., 1990. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Fark Yöntemi. Matematik Modelleme ve Otomatik Sistemler Dergisi, 53-60, Baku. (Rusça)

Yagubov, G.Ya., 1994. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol, Kiev, 318 s.

Yagubov, G.Ya., 2001. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Bölgenin Sınırı Üzerinden İntegralle verilen Kritere Sahip Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Fark Yöntemi. Matematik Modellemenin Temelleri ve Optimal Kontrol Dergisi, 37-48, Baku. (Rusça)

Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., 1995. Finite-difference method solution of variation formulation of an inverse problem for nonlinear Schrodinger equation. Izv. AN Azerb.-Ser. Physictex.matem.nauk, vol.16, No 1-2,46-51. (Rusça)

Yakupov, S. Ya., 1970. Evolusyon Denklemler için Cauchy Probleminin İyi Konulması ve Onun Uygulamaları. Moskova Matematik Derneği Eserleri, 4(3), 86-94. (Rusça)

Yegorov, A. İ., 1978. Isı ve difüzyon süreçlerinin optimal kontrolü. Nauka, 463 s, Moskova. (Rusça)

Yetişkin, H., 2005. Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Yıldız, B., Yagubov, G.Ya., 1997. On an optimal control problem. Journal of computational and applied mathematics, vol 88 , 275-287.

Yıldız, B., Subaşı, M., 2001. On the optimal control problem for linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 121, 373-381.

Yosida, K., 1980. Functional Analysis. Springer-Verlag, 624 s, New York.

Zeidler, E., 1995. Applied functional analysis. Springer Verlag, 404 s, New york.