ZAMFİRESCU OPERATÖRLERİNİN SINIFINDA BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSIMA HIZLARI

Makbule KAPLAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Sezgin AKBULUT
2009

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ZAMFİRESCU OPERATÖRLERİNİN SINIFINDA
BAZI İTERASYON METOTLARININ
YAKINSAMA HIZLARI**

Makbule KAPLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2009

Doç. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Makbule KAPLAN tarafından hazırlanan bu çalışma **21.07.2009** tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Sezgin AKBULUT imza: S.Akbulut

Üye: Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR imza:

Üye: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN imza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

(imza)

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMFİRESCU OPERATÖRLERİNİN SINIFINDA BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSIMA HIZLARI

Makbule KAPLAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezde, Zamfirescu şartlarını sağlayan operatörlerin sabit noktaları ele alınmıştır. Bu operatör sınıfında, Picard, Krasnoselskij, Mann ve Ishikawa sabit nokta iterasyon yöntemlerinin güçlü yakınsaması araştırılmıştır. Ayrıca sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızları mukayese edilmiştir.

2009,45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Picard, Mann, Ishikawa ve Krasnoselkij iterasyonları, Zamfirescu operatörü, Yakınsam hızı

ABSTRACT

MS Thesis

THE CONVERGENCE SPEEDS OF SAME ITERATİON PROCEDURES IN THE CLASS OF ZAMFIRESCU OPERATORS

Makbule KAPLAN

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

In this thesis, the fixed points of operators which satisfy Zamfirescu conditions are considered. In this class of operator, strong convergence of Picard , Krasnoselskij, Mann and Ishikawa fixed point iteration methods is investigated. Also, convergence speeds of fixed point iteration methods are compared.

2009, 45 pages

Keywords: Picard, Mann, Ishikawa ve Krasnoselskij iterations, Zamfirescu operator, Convergence speed

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocalarım Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT ve Sayın Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve maddi-manevi desteğini esirgemeyen Filiz'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Makbule KAPLAN
Temmuz 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$d(A)$	A kümesinin çapı
$D(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$D^{'}(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{D}(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
E^*	E nin duali
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$I(x_0,\alpha_n,\beta_n,T)$	Ishikawa iterasyonu
$K(x_0,\lambda,T)$	Krasnoselskij iterasyonu
$M(x_0,\alpha_n,T)$	Mann iterasyonu

TABLOLAR DİZİNİ

1. GİRİŞ

Tarihsel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki ana dalda gelişmektedir. Birincisi, normlu lineer uzayların kompakt, konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı, sürekli operatörler için sabit nokta teorisidir. Diğeri ise, tam metrik uzaylar üzerinde büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları,1909-1913 yılları arasında L.E.J Brouwer ile başlamıştır. Analize giriş derslerinden de çok iyi bilinen en basit sabit nokta teoremi:”$\left[a,b\right]\subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f:\left[a,b\right]\rightarrow\left[a,b\right]$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin $\left[a,b\right]$ aralığında bir sabit noktası vardır.”şeklindedir. Brouwer bu teoremi, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genişletmiştir: “B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f:B\rightarrow B$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.”

1922 de Banach, Banach sabit nokta teoeremi veya büzülme ilkesi olarak bilinen “f, bir $\left(X,d\right)$ tam metrik uzayından yine kendisi üzerine tanımlanan bir büzülme dönüşümü ise, f nin X de bir tek sabit noktası vardır ve ayrıca her $x\in X$ için $\left(f^n\left(x\right)\right)$ Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar” teoremi verdi.

Banach’ın bu çalışması bundan sonraki yapılan çalışmaların genelleştirilmesinde temel teşkil eder. 1930 yılında I. Schauder, X Banach uzayının boştan farklı bir konveks alt kümesinden, bu konveks alt kümenin bir kompakt alt kümesine tanımlı, sürekli herhangi bir dönüşümün sabit noktası olduğunu ispatladı. 1950 de F.E. Browder, 1965 de W.A. Kirk, 1968 de R. Kanan, 1972 de Zamfirescu ve daha pek çok kişi bu temel sonuçları genelleştirmiş ve bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Aslında bu teorem, bir integral denkleminde çözümün varlığını göstermek amacıyla kurulmuştur. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini göstermektedir.

Schauder ve Banach sabit nokta teoremleri ve daha sonraki yıllarda verilen pek çok sabit nokta teoremleri, diferansiyel denklemler gibi denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin araştırılmasında önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.

Yine, Banach sabit nokta teoremi belirli dönüşümlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremi olup, ayrıca (uygulamaya yönelik problemlerin çözümünde) sabit noktaya en iyi yaklaşımı elde etmek için inşa esasına dayanan bir işlem yöntemini verir. Bu işleme "iterasyon" adı verilir.

İterasyon işlemleri, uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm dallarında kullanılır. Yakınsaklık ispatları ve hata tahminleri, büyük bir çoğunlukla Banach sabit nokta teoreminin bir uygulaması yardımıyla elde edilir.

İterasyonla iligili kısa bir tarihçe vermek gerekirse; yaklaşık iki bin yıldan fazla tarihe sahip olan Ardışık Yaklaşımlar İterasyonunu ilk kez bir İtalyan matematikçisi olan Picard kullanarak adi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin tahmini çözümünü araştırmıştır. Bu saha da ilk teorik sonuç Polonyalı matematikçi S.Banach'a ait olan "Daralma Dönüşüm Prensibi" veya "Banach Sabit Nokta Teoremi" dir.

Son kırk yılda, operatörlerin bazı sınıfları için iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsaması ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Operatörlerin bazı sınıfları için birden fazla iterasyon sabit noktaya yakınsayabilir. Bu durumda hangi iterasyonun kullanılması gerektiğini karar vermek çok önemlidir. Bunun için son yıllarda bazı operatörlerin sınıfı için, iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsama hızları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde, Zamfirescu operatörlerinin sınıfında Picard, Krasnoseslkij, Mann ve Ishikawa iterasyon metotlarının yakınsama hızları karşılaştırıldı.

Sunulan bu tezde metrik uzayda ve Banach uzayında sabit nokta teoresi detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde hem temel tanım ve kavramlar hem de sabit nokta ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak, Picard, Krasnoselskij, Mann ve Ishikawa gibi önemli iterasyon yöntemleri tanıtılmıştır. İkinci olarak, yakınsama hızı kavramı için detaylı bilgi verilmiştir. Ayrıca Zamfirescu operatörlerinin sınıfında, bahsedilen iterasyon yöntemlerinin bu operatörün sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, Zamfirescu operatörleri sınıfında Picard, Krasnoselskij, Mann ve Ishikawa iterasyonlarının yakınsama hızları mukayese edilmiştir.

Beşinci bölümde ise iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarının karşılaştırılmasının sonucu verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu kısımda, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

2.1.1. Tanım (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

i. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x,y) = d(y,x)$

iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve (X,d) ya da X ile gösterilir.

2.1.2. Tanım (Yakınsak Dizi): (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa , $\{x_n\}$ dizisine X de yakınsak ve x e de dizinin limiti denir. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ve limiti x ise,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim x_n = x \text{ veya } x_n \to x$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

2.1.3. Tanım (Cauchy Dizisi): (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

2.1.4. Tanım (Tam Metrik Uzay): (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

2.1.5. Tanım (Kompakt Metrik Uzay): (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X,d) uzayına kompakt metrik uzay denir (Bayraktar 2002).

2.1.6. Tanım (Sürekli Dönüşüm): $X=(X,d)$ ve $Y=(Y,\rho)$ iki metrik uzay, $f:X\to Y$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısı için,

$$d(x,x_0)<\delta \text{ olduğunda } \rho\big(f(x),f(x_0)\big)<\varepsilon$$

veya denk bir ifade ile,

$$f\big(D(x_0;\delta)\big)\subseteq D\big(f(x_0);\varepsilon\big)$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , X in her noktasında sürekli ise , f ye X de süreklidir denir(Bayraktar 2000).

2.1.7. Tanım (Açık ve Kapalı Küme): X bir metrik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Her $x\in A$ için $D(x;r)\subseteq A$ olacak şekilde bir $r\geq 0$ sayısı varsa, A ya X in açık alt kümesi denir. X in herhangi bir B alt kümesinin X deki tümleyeni olan $B^t=X-B$, X de açıksa B ye kapalı küme denir.

2.1.8. Tanım (Topolojik Uzay): X boş olmayan bir küme ve τ , X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer, aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

i. $X,\varnothing\in\tau$ dur,

ii. τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi, τ ya aittir,

iii. τ ya ait sonsuz sayıda kümenin birleşimi, τ ya aittir,

2.1.9. Tanım (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) $(L,+)$ değişmeli bir gruptur. Yani,

G_1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G_2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y+z) = (x+y) + z$ dir,

G_3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

G_4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

G_5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L_1. $\alpha x \in L$ dir,

L_2. $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir,

L_3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir,

L_4. $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir,

L_5. $1.x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay uzay adı verilir.

2.1.10. Tanım (Konveks Küme): L bir lineer uzay , $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere,

$$B = \{ z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha) y, 0 \le \alpha \le 1 \} \subseteq A$$

ise, A kümesine konveks küme denir.

2.1.11. Tanım (Normlu Uzay): N bir lineer uzay olsun. $\| \; \| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

N_1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N_2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in F)$

N_3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm, $(N, \| \ \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

2.1.12. Tanım (Banach Uzayı): N normlu lineer uzay olsun. N, $d(x,y) = \|x-y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

N nin reel ve kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

2.1.13. Tanım (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \ \rangle : L \times L \to F$ fonksiyonu,

I_1. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

I_2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle \quad (\alpha \in F)$

I_3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

I_4. $\langle x, x\rangle \ge 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(L, \langle \ \rangle)$ ile gösterilir.

2.1.14. Tanım (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \ \|$, iç çarpım normu olsun. $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ olarak tanımlanırsa (X,d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre, X iç çarpım uzayı tam ise X e Hilbert uzayı denir.

Bu tanımdan Hilbert uzaylarının, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzayları olduğu söylenebilir.

2.1.15. Tanım (Kuvvetli Yakınsaklık): X , bir normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$, x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir. Burada x e $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti denir.

2.1.16. Tanım (Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer, her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi, x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \xrightarrow{z} x$ ya da $x_n \dagger x$ şeklinde yazılır. Burada x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

2.1.17. Teorem (Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu durumda,

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.

(b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.

(c) $\dim(X) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

2.2.1. Tanım (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

Yani $Tx = x$ $(x \in X)$ fonksiyon denkleminin çözümü, T nin bir sabit noktasıdır. T nin sabit noktalarının kümesi F_T veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin,

1. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = T(x) = x^2 + 3x + 1$ ise $F_T = \{-1\}$;
2. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x^3 - 3x$ ise $F_T = \{-2, 0, 2\}$;
3. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x + 6$ ise $F_T = \varnothing$ ve
4. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $Tx = x$ ise $F_T = \mathbb{R}$

olur.

X herhangi bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde $T^n(x)$ i tanımlayabiliriz. $T^n(x)$, T altındaki x in $n.$ iterasyonu olarak adlandırılır.

$T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_T \subset F_{T^n}$ dir.
2. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_{T^n} = \{x\}$ ise $F_T = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

Örneğin, $T : \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$ bir dönüşüm ve $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ olsun. Bu durumda $F_{T^2} = \{1,2,3\}$ dür. Ancak $F_T = \{2\}$ dir.

2.2.1.1. Örnek: $X = [0,2]$ olmak üzere $T : X \rightarrow X$, $Tx = 2 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $x = 1$ dir.

2.2.1.2. Örnek: $X \neq \varnothing$ olmak üzere $I : X \to X$ şeklindeki özdeş dönüşümü için X in her bir noktası sabit noktadır.

2.2.1.3. Örnek: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere $T : X \to X$, $T(x, y) = (x, 0)$ dönüşümünün sabit noktaları, $(x, 0)$ şeklindeki noktalardır.

2.2.1.4. Örnek: $T : (0,1] \to (0,1]$, $Tx = \frac{x}{3}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Böyle bir dönüşüm için tek sabit nokta, $x = 0$ noktası olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dır.

2.2.1.5. Örnek: $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$ dönüşümünün $\mathbb{R}$ de hiçbir sabit noktası yoktur.

2.2.2. Tanım (Lipschitzian Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y) \tag{1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti denir.

Bu tanıma göre her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow k d(x, y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y) < k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Yani T düzgün süreklidir.

2.2.3.a. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 2x$ olsun. Bu halde,

$$d(Tx, Ty) = |2x - 2y| = 2|x - y| = 2d(x, y), \quad (k = 2)$$

$k \geq 2$ için T Lipschitz şartını sağlar.

2.2.4. Tanım (Daraltan Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktalara sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \dfrac{x}{2}$ dönüşümünü ele alalım. Burada T dönüşümü daraltan dönüşümdür fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm, düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm olamaz. Buna karşın, T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n bir daraltan dönüşüm olabilir.

2.2.4.a. Örnek: $T:[0,2] \to [0,2]$ olmak üzere $T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$

olarak tanımlansın. T fonksiyonu $x = 1$ de süreksizdir ve dolayısıyla daraltan dönüşüm olamaz. Diğer taraftan, $T^2 : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $T^2(x) = 0$ olup daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T nin tek sabit noktasıdır.

(X,d) tam metrik uzayı ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olarak tanımlanmış ise bu dönüşümün $x_0 \in X$ sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir (Banach Daralma Prensibi).

2.2.5. Tanım (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

2.2.5.a. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 1+\ln\left(1+e^x\right)$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x)-T(y)}{x-y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x)-T(y)}{x-y} < 1 \Rightarrow |T(x)-T(y)| < |x-y|$$

olarak bulunur.

2.2.6. Tanım (Genişlemeyen Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx,Ty) \le d(x,y)$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

2.2.6.a. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x+1$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty) = |x+1-y-1| = |x-y| = d(x,y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx,Ty) \le d(x,y)$ şartı sağlanmış olur. Dolaysıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat T ne daraltan ne de kesin daraltan dönüşümdür.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların var olması gerekmez. Bunun için ya uzay ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulması gereklidir.

2.2.7. Tanım (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan $\forall x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa, X 'e düzgün (uniformly) konveks Banach uzay adı verilir. (Aksoy 1990; Khamsi 1990)

2.2.7.a. Örnek: $\left(x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\right)$ Euclidean normuna göre düzgün konveks, fakat $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ normuna göre düzgün konveks değildir.

2.2.8. Tanım (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T : K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \varnothing$ ve $\forall x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

2.3. Sabit Nokta Teoremleri

2.3.1. Teorem: $[a,b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f : [a,b] \to [a,b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında bir c sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a,b]$ için, $T(x) = x - f(x)$ olacak şekilde bir $T : [a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda, T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise $T(a) \leq 0$ olur. Benzer şekilde, $f(b) \leq b$ ise $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremine göre $T(c) = 0$ olacağından, $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ vardır.

2.3.2. Teorem (Banach Daralma İlkesi): (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T, bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0\,,\quad x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \ldots., x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu, dolayısıyla da $x \in X$ e yakınsadığını ve x in $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
d\left(x_{n+p}, x_n\right) &= d\left(T^{n+p} x_0, T^n x_0\right) \\
&\leq kd\left(x_{n+p-1}, x_{n-1}\right) = kd\left(T^{n+p-1} x_0, T^{n-1} x_0\right) \leq k^2 d\left(x_{n+p-2}, x_{n-2}\right) \leq \ldots \\
&\leq k^n d\left(x_{n+p-n}, x_{n-n}\right) = k^n d\left(x_p, x_0\right) \\
&\leq k^n \left(d\left(x_p, x_{p-1}\right) + d\left(x_{p-1}, x_0\right)\right) \\
&\leq k^n \left(kd\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right) + d\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right) + d\left(x_{p-2}, x_0\right)\right) \\
&= k^n \left(d\left(x_{p-2}, x_0\right) + d\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right) + kd\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right)\right) \\
&\leq k^n \left[d\left(x_{p-2}, x_0\right) + kd\left(x_{p-2}, x_{p-3}\right) + k^2 d\left(x_{p-2}, x_{p-3}\right)\right] \\
&\qquad \vdots \\
&\leq k^n \left(d\left(x_1, x_0\right) + kd\left(x_1, x_0\right) + k^2 d\left(x_1, x_0\right) + \ldots\right) \\
&= k^n d\left(x_1, x_0\right)\left(1 + k + k^2 + k^3 + \ldots\right) \\
&= k^n d\left(x_1, x_0\right)\left(\frac{1}{1-k}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$d\left(x_{n+p}, x_n\right) \leq \frac{k^n}{1-k} d\left(x_1, x_0\right)$$

elde edilir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $d\left(x_{n+p}, x_n\right) \to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x \in X$ dolayısıyla da $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü, sürekli olduğundan dizisel süreklidir. Yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminden $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y, T nin başka bir sabit noktası olsun. Yani, $Ty = y$ dir. O halde, y başka bir çözüm ise

$$d\left(x, y\right) = d\left(Tx, Ty\right) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu da $d\left(x, y\right) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü,

$$\begin{aligned} d\left(x, y\right) \leq kd\left(x, y\right) &\Rightarrow d\left(x, y\right) - kd\left(x, y\right) \leq 0 \\ &\Rightarrow d\left(x, y\right)\left[1 - k\right] \leq 0 \end{aligned}$$

olur. $k \leq 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. O halde hem $1 - k > 0$ hem de $d\left(x, y\right) \geq 0$ olduğundan $d\left(x, y\right)\left[1 - k\right] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d\left(x, y\right) = 0$ olması gerekir. Bu da $x = y$ olmasını gerektirir.

2.3.3. Örnek: $X = \mathbb{R}$, $K = \left[0, 2\right] \subset X$, $T : K \to K$ ve $Tx = \dfrac{x}{5}$ olsun. $x_0 = \dfrac{1}{2}$ olarak seçelim. Daraltan dönüşümden,

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{10}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 = \frac{1}{50}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = \frac{1}{250}$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \ldots = T^n x_0$$

şeklinde bir dizi elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in \left[0, 2\right]$ dir. Eğer bilinen sabit nokta tanımını bu örneğe uygularsak,

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{5} = x \Rightarrow x = 5x \Rightarrow x = 0$$

olur. Yani, sabit nokta $0 \in \left[0, 2\right]$ olarak elde edilir.

2.3.4. Teorem (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (yani $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda , $f : B \to B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Brouwer Teoreminin herhangi bir Banach uzayı (sonsuz boyutlu uzay) için genişletilemez. Bunu aşağıdaki örnekle izah edelim.

2.3.5. Örnek: B , c_0 Banach uzayında bir kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, ,...) \in B$ için

$$T : B \to B, \quad T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, ...)$$

şeklinde tanımlansın. $\forall x, y \in B$ için

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin B de bir çözümü yoktur.

2.3.6. Teorem (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi ve $f : K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: K kompakt olduğundan $f(K)$ ön-kompaktır. Dolayısıyla da total sınırlıdır. Bu yüzden, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in K$ için

$$\min_{1 \le i \le N_n} \|f(x) - y_i\| < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $\{y_1, y_2, ..., y_{N_n}\} \subseteq f(K)$ vardır. Her bir i için

$$a_i(x) = \max\left\{\frac{1}{n} - \|f(x) - y_i\|, 0\right\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece her bir $x \in K$ için $a_i(x) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $i \in \{1, 2, ..., N_n\}$ vardır. Schauder operatörü olarak adlandırılan, $P_n : K \to K$

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)\, y_i}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)}$$

operatörünü göz önüne alalım. Burada $\{y_1, y_2, ..., y_{N_n}\}$ elemanlarının bir konveks kombinasyonu $P_n(x)$ olduğundan $P_n(x) \in K$ dır. Ayrıca, f sürekli olduğundan a_i fonksiyonlarının her biri de süreklidir.

Şimdi, $K_n = conv\left(\{y_1, y_2, ..., y_{N_n}\}\right)$ olsun. Bu durumda, K_n, $\{y_1, y_2, ..., y_{N_n}\}$ vektörleri tarafından gerilen sonlu boyutlu Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir. Üstelik $P_n : K_n \to K_n$ dir. Brouwer teoremine göre P_n dönüşümlerinin her biri $x_n \in K_n \subseteq K$ sabit noktasına sahiptir. K kompakt olduğundan $\{x_n\}$ dizisi, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in K$ ya yakınsayan $\{x_{n_k}\}$ alt dizisine sahiptir. Herhangi n için

$$\left\| P_n(x) - f(x) \right\| = \left\| \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)\left(y_i - f(x)\right)}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)} \right) \right\|$$

$$\leq \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) \right]}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)} = \frac{1}{n}$$

olur. O halde

$$\left\| x_{n_k} - f(x) \right\| \leq \left\| P_{n_k}\left(x_{n_k}\right) - f\left(x_{n_k}\right) \right\| + \left\| f\left(x_{n_k}\right) - f(x) \right\|$$

olduğundan $k \to \infty$ için eşitsizliğin sol tarafı $\left\| x - f(x) \right\|$ e giderken sağ tarafı 0 a gider. Yani,

$$\left\| x - f(x) \right\| \leq 0 \Rightarrow x = f(x)$$

olur. Dolayısıyla x, f nin bir sabit noktasıdır.

2.3.7. Teorem: (X,d) tam metrik uzay, $n \in ¥$ için T^n bir daraltan dönüşüm olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kırk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla,

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0, T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu ise $y = x_0$ olmasını gerektirir.

2.3.8. Teorem: (X,d) bir kompakt metrik uzay ve $T : X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$$

dir (Khamsi and Kırk 2001).

2.3.9. Teorem: (X,d) bir tam metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere $T : D(x_0,r) \to X$ olmak üzere daraltan bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(Tx_0,x_0) < (1-k)r$$

ise, bu durumda T dönüşümü $D(x_0,r)$ diskinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal, Meehan and O'Regan 2001).

İspat: $d(Tx_0,x_0) < (1-k)r_0$ olmak üzere $0 \le r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 sayısı vardır. Göstereceğiz ki $T : \overline{D(x_0,r_0)} \to \overline{D(x_0,r_0)}$ dir. Eğer için, $x \in \overline{D(x_0,r_0)}$ ise,

$$\begin{aligned} d(Tx,x_0) &\le d(Tx,Tx_0) + d(Tx_0,x_0) \\ &\le kd(x,x_0) + (1-k)r_0 \le r_0 \end{aligned}$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden dolayı T nin $\overline{D(x_0,r_0)} \subset D(x_0,r)$ da bir tek sabit noktası vardır.

2.3.10. Örnek: $X=[a,b]$, $d(x,y)=|x-y|$ ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli , (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x\in(a,b)$ için,

$$|T'x|\leq k<1$$

ise, T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x,y\in[a,b]$ için $c\in(x,y)$ olmak üzere,

$$|Tx-Ty|=|T'(c)(x-y)|\leq k\,|x-y|$$

olur. Böylece Banach daralma ilkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

2.3.11. Örnek: $X=(0,2]$ ve $T:X\to X$, $Tx=\dfrac{x}{5}$ dönüşümü verilsin. Ayrıca X kümesi üzerinde alışılmış metrik tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|=\frac{1}{2}|x-y|=\frac{1}{2}d(x,y)$$

olacağından, T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin, X de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımı gereği $Tx=x$ den $\dfrac{x}{5}=x\Rightarrow 5x=x\Rightarrow x=0$ olur. Burada $x=0\notin(0,2]=X$ olduğundan dolayı T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Bu örnekte de görüldüğü gibi tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmez.

2.3.12. Örnek: $X=[1,\infty)$ kümesi üzerinde $d=|x-y|$ metriği verilsin ve $T:X\to X$, dönüşümü $Tx=x+\dfrac{1}{x}$ olarak tanımlansın. $x\neq y$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)=|Tx-Ty|=\left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right|$$

$$=\left|\frac{x^2y-x-xy^2+y}{xy}\right|$$

$$=\left|\frac{xy(x-y)-x+y}{xy}\right|$$

$$\leq\frac{|x-y||xy-1|}{|xy|}$$

olur. Burada $\forall x,y\in X=[1,\infty)$ için $\dfrac{|xy-1|}{|xy|}\leq 1$ olacağından dolayı

$$\leq\frac{|x-y|xy-1||}{|xy|}<|x-y|$$

olur ki bu da $d(Tx,Ty)<d(x,y)$ şartının sağlandığını gösterir. O halde, T bir daraltan dönüşüm değildir fakat kesin daraltan bir dönüşümdür deriz. Burada T nin bir sabit noktası olmadığını dikkat edelim.

2.3.13. Örnek: $X=\{x\geq 0: x\in ¡\}$ kümesi ve küme üzerinde $d(x,y)=|x-y|$ metriği verilsin. $T:X\to X$, $T(x)=(x^2+1)^{1/2}$ dönüşümü her $x,y\in X$ için $d(Tx,Ty)\leq d(x,y)$ şartını sağlar. Çünkü $\forall x,y\in X$ için

$$d(T(x),T(y))=|T(x)-T(y)|$$

$$=\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|$$

$$=\left|\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)\right|$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right|}=\frac{|(x-y)(x+y)|}{\left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right|}$$

$$=\frac{|x+y|}{\left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right|}|x-y|$$

olur. Burada $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \left(x \geq 0\ ve\ y \geq 0\right)$ için $\dfrac{|x+y|}{\left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right|} < 1$ olacağından dolayı

$$d\left(T\left(x\right),T\left(y\right)\right) = \frac{|x+y|}{\left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\right|}|x-y| \leq |x-y| = d\left(x,y\right)$$

olur ki bu da $d\left(Tx,Ty\right) \leq d\left(x,y\right)$ şartının sağlandığını yani T nin genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterir. Ayrıca her $x \in X$ için, $T\left(x\right) = \left(x^2+1\right)^{1/2} \neq x$ olduğundan T nin sabit noktası yoktur.

Bu örnekte de tam metrik uzay üzerine tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

3.1.1. Picard iterasyon metodu: $\left(X,\|\ \|\right)$ reel normlu uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Picard iterasyonu, $x_0\in X$ olmak üzere

$$x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0\,,\qquad n=1,2,... \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1980). Picard iterasyonu, bazen ardışık yaklaşıklıkların dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

3.1.2. Krasnoselskij iterasyon metodu: $\left(X,\|\ \|\right)$ reel normlu uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Krasnoselskij iterasyonu , $x_0\in X$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$x_{n+1}=(1-\lambda)x_n+\lambda Tx_n\,,\qquad \text{n=0,1,2,…} \tag{3}$$

şeklinde tanımlanır (Krasnoselskij 1955). $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Krsanoselskij itersayonunu kısaca $K(x_0,\lambda,T)$ ile gösterilir. Ayrıca bu iterasyon $\lambda=1$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

3.1.3. Mann iterasyon metodu: $\left(X,\|\ \|\right)$ reel normlu uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ keyfi bir nokta olmak üzere, Mann iterasyonu

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTx_n\,,\qquad n\geq 0 \tag{4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ ve $\forall n\in N$ için $\{\alpha_n\}\in(0,1)$ dir (Mann1953). Mann iterasyonu kısaca $M(x_0,\alpha_n,T)$ ile gösterilir.

(4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n=\lambda$ (sabit) olarak alınırsa Mann iterasyonu açık olarak Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

3.1.4. Ishikawa iterasyon metodu: $\left(X,\|\ \|\right)$ reel normlu uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1-\alpha_n\right)x_n+\alpha_n T y_n , \\ y_n &= \left(1-\beta_n\right)x_n+\beta_n T x_n , \qquad n\geq 1 \end{aligned} \tag{5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ ve $\forall n\in N$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}\in\left(0,1\right)$ dir (Ishikawa 1974). İshikawa iterasyonu kısaca $\mathrm{I}\left(x_0,\alpha_n,\beta_n,T\right)$ ile gösterilir. Ayrıca (5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n=0$ alınması durumunda Ishikawa iterasyonunun Mann iterasyonuna indirgendiği aşikar olmasına rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

3.1.5. Noor iterasyon metodu: $\left(X,\|\ \|\right)$ reel normlu uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $u_1\in X$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1-\alpha_n\right)u_n+\alpha_n T v_n , \\ v_n &= \left(1-\beta_n\right)u_n+\beta_n T w_n , \\ w_n &= \left(1-\gamma_n\right)u_n+\gamma_n T u_n , \qquad n\geq 1 \end{aligned} \tag{6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ ve $\forall n\in$ ¥ için $\left(\alpha_n\right)$, $\left(\beta_n\right)$ ve $\left(\gamma_n\right)\in\left(0,1\right)$ dir (Noor 2000).

3.1.6. n-adım iterasyon (multistep iteration) metodu: $\left(X,\|\ \|\right)$ reel normlu uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $k_1\in X$ keyfi bir nokta olmak üzere n-adım iterasyonu, $p\geq 2$ için

$$\begin{aligned} t_n^{p-1} &= \left(1-\beta_n^{p-1}\right)k_n+\beta_n^{p-1}Tk_n , \\ t_n^{i} &= \left(1-\beta_n^{i}\right)k_n+\beta_n^{i}Tt_n^{i+1} , \qquad i=1,2,\ldots,p-2 ; \end{aligned} \tag{7}$$

$$k_{n+1} = (1-\alpha_n) k_n + \alpha_n T t_n^1$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\forall n \in N$ için

$$\{\alpha_n\} \subset (0,1), \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve

$\{\beta_n^i\} \subset [0,1)$, $1 \le i \le p-1$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n^t = 0$ dir (Rhoades and Şoltuz 2004).

3.2. Bazı dönüşümler için yakınsama hızları:

Bir sabit nokta teoremi;

a) Sabit noktaya yaklaşmak için kullanılan iterasyon yöntemleri için bir hata değeri verir.

b) Sabit noktaya bağlı veriler ile kullanılan yöntemin uygunluğu hakkında somut biligiler verir.

(X,d) metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sabit nokta iterasyonu, $T : X \to X$ operatörünün x^* sabit noktasına yakınsasın. Yani, $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve $n \ge N$ için

$$d(x_n, x^*) < \varepsilon \tag{8}$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

Eğer N sayısı, x_0 başlangıç noktasına, ε-sayısına ve T operatörüne bağlı ise, (8) eşitsizliği iterasyon yöntemi için bir durma kriteri olarak kullanılır.

Verilen herhangi bir T operatörü için uygulanan iterasyon metodunda kaçıncı adımda durulması gerektiği ile ilgili aşağıda bir bağıntı verilecektir.

Eğer T, tam metrik uzayında k- daraltan bir operatör ise hem önceki hem de sonraki hata değeri;

$$d\left(x_n, x^*\right) \le \frac{k^n}{1-k} d\left(x_0, x_1\right), \quad n = 0,1,2,.... \tag{9}$$

$$d\left(x_n, x^*\right) \le \frac{k}{1-k} d\left(x_{n-1}, x_n\right), \quad n = 1,2,... \tag{10}$$

şeklindedir. Burada x_0 başlangıç noktası olmak üzere, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu ve x^*, T nin bir tek sabit noktasıdır.

$0 < k < 1$ olduğundan, (9) dan eğer $d\left(x_0, Tx_0\right) \ne 0$ ise

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x^*\right) \le \frac{k^n}{1-k} d\left(x_0, x_1\right) &< \varepsilon \\ k^n d\left(x_0, x_1\right) &< (1-k)\varepsilon \\ k^n &< (1-k)\varepsilon / d\left(x_0, x_1\right) \\ n &< \log_k\left((1-k)\varepsilon / d\left(x_0, x_1\right)\right) \end{aligned}$$

ve $N \le n$ den

$$N = \log_k\left((1-k)\varepsilon / d\left(x_0, x_1\right)\right)$$

elde edilir.

Bu ise, x_0 başlangıç noktası ile başlanıldığında N. adımda, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonun ε den daha az bir hata ile x^* e yaklaşdığı anlamına gelir.

3.2.1. Tanım: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, sırasıyla a ve b ye yakınsayan pozitif sayıların iki dizisi ve

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|} \tag{11}$$

olsun.

1) $l = 0$ ise, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nin a ya yakınsaması, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ nin b ye yakınsamasından daha hızlıdır.

2) $0 < l < \infty$ ise, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri aynı yakınsaklık oranlarına sahiptir.

3) $l = \infty$ ise, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

Yukarıdaki tanımda verilen yakınsama oranı kavramı, iki dizinin yakınsama hızlarını karşılaştırmada yardımcı olur.

Aslında, (9) hata değeri $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin, sıfıra yakınsayan $\{\theta^n\}$ dizisinden x^* e daha hızlı yakınsadığını gösterir ($0<\theta<a$).

Farzedelim ki $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ iki sabit nokta iterasyonu aynı x^* noktasına yakınsasın. Bu taktirde önceki hata değerleri

$$d\left(x_n, x^*\right) \le a_n, \qquad n = 0,1,2,...$$

$$d\left(y_n, x^*\right) \le b_n, \qquad n = 0,1,2,...$$

şeklinde olur. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sıfıra yakınsayan pozitif reel sayıların iki dizisidir. Yukarda ki tanımdan dolayı aşağıdaki tanımın çok doğal olduğu görülür.

3.2.2. Tanım: Eğer $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsarsa; $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sabit nokta iterasyonu, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ sabit nokta iterasyonundan x^* e daha hızlı yakınsar ya da $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sabit nokta iterasyonu $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ sabit nokta iterasyonundan daha iyidir denir.

Rhoades, $\forall n \in N$ için $d\left(x_n, x^*\right) \le d\left(y_n, x^*\right)$ ise, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sabit nokta iterasyonunun $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ sabit nokta iterasyonundan daha iyi olduğunu vermiştir.

3.2.3. Teorem : (X,d) kompakt bir metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan operatör olsun. Bu taktirde T kesin Picard operatördür.

İspat: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu, $x_0 \in X$, $n \ge 0$ için $x_n = T^n x_0$ olsun. (X,d) kompakt olduğundan, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $x^* \in X$ e yakınsayan $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır. T contractive olduğundan, T sürekli ve $\{d\left(x_n, x_{n+1}\right)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi kesin azalan pozitif terimlidir. Dolayısıyla yakınsaktır. Metriğin sürekliliğinden,

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_k}, Tx_{n_k}\right) = d\left(x^*, Tx^*\right)$$

yazılır. Buradan

$$d\left(x,^* Tx^*\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) = d\left(Tx^*, T^2x^*\right)$$

elde edilir.

Şayet $x^* \neq Tx^*$ olduğu kabul edilirse, contractive şartından dolayı

$$d\left(x^*, Tx^*\right) = d\left(Tx^*, T(Tx^*)\right) < d\left(x^*, Tx^*\right)$$

olur. Bu bir çelişkidir. O halde $x^* = Tx^*$ dır. Yani $F_T = \left\{x^*\right\}$ dır. Bu ise, her $x_0 \in X$ için Picard iterasyonun X de yakınsak olduğunu ve limitinin de T nin tek sabit noktası olduğunu gösterir.

3.2.3.a. Sonuç: $\left(X,d\right)$ tam metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan operatör olsun. Eğer $\left\{T^n x_0\right\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonunun yakınsak bir alt diziye sahip olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa, bu taktirde $F_T = \left\{x^*\right\}$ ve x^*, bu alt dizinin limitidir.

3.2.4. Teorem: $\left(X,d\right)$ tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d\left(Tx,Ty\right) \leq a\left[d\left(x,Tx\right) + d\left(y,Ty\right)\right] \tag{12}$$

olacak şekilde $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ varsa T, Picard operatörüdür.

İspat: İlk olarak, T, (12) eşitsizliğini sağlaması durumunda $cardF_T \leq 1$ olduğunu hatırlayalım.

$x_0 \in X$ olsun. $x_n = T^n x_0, \quad n = 0,1,2..$ Picard iterasyonu olsun. Bu durumda (12) eşitsizliğinden

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) = d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \leq a\left[d\left(x_{n-1}, x_n\right) + d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right]$$

elde edilir. Buradan da

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \frac{a}{1-a} d\left(x_{n-1}, x_n\right), \qquad n = 1,2,.... \tag{13}$$

yazılır. $a \in [0, 1/2)$ için, $0 \leq \dfrac{a}{1-a} < 1$ olduğundan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nin Cauchy dizisi olduğu ve bu nedenle de yakınsak olduğu sonucu çıkarılır. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nın limiti $x^* \in X$ olsun. Bu taktirde

$$d\left(x^*, Tx^*\right) \leq d\left(x^*, x_n\right) + d\left(x_n, Tx^*\right) \leq d\left(x^*, x_n\right) + a\left[d\left(x^*, x_{n-1}\right) + d\left(x^*, Tx^*\right)\right]$$

yazılır. Buradan

$$d\left(x^*, Tx^*\right) \leq \frac{1}{a} d\left(x^*, x_n\right) + \frac{a}{1-a} d\left(x_{n-1}, x_n\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ve (13) eşitsizliği ile birlikte

$$d\left(x^*, Tx^*\right) \leq \frac{1}{a} d\left(x^*, x_n\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d\left(x_0, x_1\right) \qquad n = 1,2,... \tag{14}$$

elde edilir. (14) eşitsizliğinde $n \to \infty$,

$$d\left(x^*, Tx^*\right) = 0 \Leftrightarrow x^* = Tx^*$$

olur. Yani $F_T = \{x^*\}$ dır. Dolayısıyla her bir $x_0 \in X$ için $x_n \to x^*$ olur.

3.2.5. Örnek: $X = \mathbb{R}$ ve $T : X \to X$, $T(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2] \quad ise \\ -\dfrac{1}{2}, & x > 2 \quad ise \end{cases}$

olsun. Bu takirde

i) T sürekli değildir,

ii) T, (12) eşitsizliğini sağlar. Bu nedenle 3.2.4.Teoreminden T bir Picard dönüşümdür.

iii) T genişlemeyen değildir.

3.2.6. Sonuç: Yukardaki teoremin şartlar sağlanmış olsun. Bu durumda Picard iterasyonun hata tahminleri,

$$d\left(x_n, x^*\right) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right) \qquad n = 0,1,2,..$$

$$d\left(x_n, x^*\right) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d\left(x_n, x_{n-1}\right) \qquad n = 0,1,2,..$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \dfrac{a}{1-a}$ dır.

Eğer T^k daraltan (veya kesin daraltan ya da (12) eşitsizliğini sağlıyorsa) olacak şekilde $k \in ¥^*$ varsa, $F_T = \left\{x^*\right\}$ dır.

Contractive operatörler sınıfı, genişlemeyen operatörlerin sınıfının içinde yer alır. Ancak, genişlemeyen T operatörü için $F_T \neq \varnothing$ sonucu genelde doğru değildir. Genişlemeyen operatörlerin genelleştirilmesi, en az bir sabit nokta olan quasi-genişlemeyen operatörlerdir.

3.2.7. (Quasi nonexpansive operatör): X tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü olsun. p bir sabit nokta ve $\forall x \in X$ için

$$d\left(Tx, p\right) \leq d\left(x, p\right) \tag{15}$$

oluyorsa T ye Quasi-nonexpansive operatör denir.

Quasi-genişlemeyen dönüşümler sınıfında içerilen bir contractive tanımı 1972 de Zamfirescu tarafından verilmiştir. Zamfirescu'nun teoremi Banach, Kanan ve Chatterjea sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmiş şeklidir.

3.2.8. Tanım (Zamfirescu operatör): $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için aşağıdaki $\left(z_1\right)-\left(z_3\right)$ şartlarından en az biri doğru olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 0{,}5$ ve $0 \leq \gamma < 0{,}5$ değerinde olan α, β ve γ reel sayıları varsa T ye Zamfirescu operatör denir.

$\left(z_1\right)$ $d\left(Tx, Ty\right) \leq \alpha d\left(x, y\right)$;

$\left(z_2\right)$ $d\left(Tx, Ty\right) \leq \beta\left[d\left(x, Tx\right) + d\left(y, Ty\right)\right]$;

(z_3) $d(Tx,Ty) \le \gamma\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]$;

3.2.9. Teorem (Zamfirescu Operatör): (X,d) tam bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve α, β ve γ, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 0{,}5$, $0 \le \gamma < 0{,}5$ şartlarını sağlayan reel sayılar olsun. $\forall x, y \in X$ için $(z_1)-(z_3)$ şartlardan en az biri doğru ise T, Picard operatörüdür.

İspat : $x, y \in X$ olsun. (z_1), (z_2) veya (z_3) den en az biri doğrudur.

Eğer (z_2) doğru ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\le \beta\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right] \\ &\le \beta\left\{d(x,Tx)+\left[d(y,x)+d(x,Tx)+d(Tx,Ty)\right]\right\}. \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$(1-\beta)d(Tx,Ty) \le 2\beta d(x,Tx)+\beta d(x,y),$$

olup

$$d(Tx,Ty) \le \frac{2\beta}{(1-\beta)}d(x,Tx)+\frac{\beta}{(1-\beta)}d(x,y)$$

elde edilir.

Eğer (z_3) doğru ise, benzer şekilde

$$d(Tx,Ty) \le \frac{2\gamma}{1-\gamma}d(x,Tx)+\frac{\gamma}{1-\gamma}d(x,y)$$

elde edilir.

$$\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\} \tag{16}$$

alınırsa, $0 \le \delta < 1$ olur. Bu durumda $\forall\ x, y \in X$ için,

$$d(Tx,Ty) \le 2\delta d(x,Tx)+\delta d(x,y) \tag{17}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $\forall\ x, y \in X$ için,

$$d(Tx,Ty) \le 2\delta d(x,Ty)+\delta d(x,y) \tag{18}$$

yazılabilir.

(17) den card $F_T \leq 1$ olduğu görülür. Şimdi, T nin tek bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim.

x_0 herhangi bir nokta ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$x_n = T^n x_0 \qquad n = 0,1,2,....$$

şeklinde tanımlanan Picard iterasyonu olsun. Eğer (18) de $x := x_n$, $y := x_{n-1}$ alınırsa

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq \delta . d\left(x_n, x_{n-1}\right)$$

olur.

Buradan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nın bir Cauchy dizisi ve bu yüzden yakınsak olduğu sonucu çıkarılır.

$x^* \in X$ dizinin limiti olsun. O halde

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n+1}, x_n\right) = 0$$

dır.

(17) ve üçgen eşitsizliğinden

$$d\left(x^*, Tx^*\right) \leq d\left(x^*, x_{n+1}\right) + d\left(Tx_n, Tx^*\right)$$

$$\leq d\left(x^*, x_{n+1}\right) + \delta d\left(x^*, x_n\right) + 2\delta d\left(x_n, Tx_n\right)$$

elde edilir. Buradan $n \to \infty$ için

$$d\left(x_n, Tx_n\right) = d\left(x_n, x_{n+1}\right) \to 0$$

olup,

$$d\left(x^*, Tx^*\right) = 0 \Leftrightarrow x^* = Tx^*$$

elde edilir. Böylece $\forall x_0 \in X$ ve $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ ve $F_T = \left\{x^*\right\}$ dir.

3.2.10. Teorem: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T : K \to K$ Zamfirescu operatörü olsun. $v_0 \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ Krasnoselskij iterasyonu, T nin bir tek sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: T nin K da bir tek sabit noktası var olduğu 3.2.9.Teoreminde ispatlandı. Bu sabit nokta p olsun.

δ, (16) daki gibi olmak üzere $\forall x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \|x - y\| + 2\delta \|x - Tx\| \tag{19}$$

olur. $v_0 \in K$ olmak üzere, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ Krasnoselskij iterasyonu olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - p\| &= \|(1-\lambda)v_n + \lambda T v_n - (1-\lambda+\lambda)p\| \\ &= \|(1-\lambda)(v_n - p) + \lambda(Tv_n - p)\| \\ &\leq (1-\lambda)\|v_n - p\| + \lambda \|Tv_n - p\| \end{aligned} \tag{20}$$

yazılır. (19) da $x := p$ ve $y := v_n$ alınırsa

$$\|Tv_n - p\| \leq \delta \|v_n - p\| \tag{21}$$

elde edilir. (20) ve (21) den

$$\|v_{n+1} - p\| \leq (1-(1-\delta)\lambda)\|v_n - p\| \qquad n = 0,1,2...$$

yazılır. İndirgeme yöntemiyle

$$\|v_{n+1} - p\| \leq (1-(1-\delta)\lambda)^{n+1} \|v_0 - p\|$$

elde edilir. $0 \leq \delta < 1$ ve $\lambda \in [0,1]$ olduğundan, $n \to \infty$ için

$$(1-(1-\delta)\lambda)^{n+1} \to 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|v_{n+1} - p\| = 0$$

dır. Yani $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ Krasnoselskij iterasyonu p sabit noktasına güçlü yakınsar.

3.2.11. Teorem: E keyfi bir Banach uzay, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ Zamfirescu şartlarını sağlayan bir operatör, $y_0 \in K$, $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ olmak üzere $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ Mann iterasyonu olsun.

Bu durumda $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, T nin bir tek sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: T nin K da bir tek sabit noktaya sahip olduğunu 3.2.9.Teoremde gösterildi. Bu sabit nokta p olsun.

δ, (16) daki gibi olmak üzere $\forall x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \le \delta \|x - y\| + 2\delta \|x - Tx\| \tag{22}$$

olur. Herhangi bir $y_0 \in K$ için, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ Mann iterasyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - p\| &= \|(1-\alpha_n) y_n + \alpha_n T y_n - (1 - \alpha_n + \alpha_n) p\| \\ &= \|(1-\alpha_n)(y_n - p) + \alpha_n (T y_n - p)\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|y_n - p\| + \alpha_n \|T y_n - p\| \end{aligned} \tag{23}$$

dir. (22) eşitsizliğinde $x := p$ ve $y := y_n$ alınırsa $\|Ty_n - p\| \le \delta \|y_n - p\|$ elde edilir. (23) den

$$\|y_{n+1} - p\| \le \left[1 - (1-\delta)\alpha_n\right] \|y_n - p\|, \qquad n = 0,1,2,... \tag{24}$$

bulunur. İndirgeme yöntemiyle

$$\|y_{n+1} - p\| \le \prod_{k=0}^{n} \left[1 - (1-\delta)\alpha_k\right] . \|y_0 - p\|. \qquad n = 0,1,2,... \tag{25}$$

olur. $0 < \delta < 1$, $\alpha_k \in [0,1]$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 - (1-\delta)\alpha_k\right] = 0$$

dır. Dolayısıyla (25) den

$$\lim_{n\to\infty} \|y_{n+1} - p\| = 0$$

olduğu sonucu çıkarılır. Yani $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, p ye kuvvetli yakınsar.

3.2.12. Teorem: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ Zamfirescu operatörü olsun. $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, $z_0 \in K$ olmak üzere $\{\alpha_n\}, \{\beta n\} \subset [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ için

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (1-\alpha_n) z_n + \alpha_n T y_n \qquad && n = 0,1,.. \\ y_n &= (1-\beta_n) z_n + \beta_n T z_n \qquad && n = 0,1,.. \end{aligned} \tag{26}$$

şeklinde tanımlanan Ishikawa iterasyonu olsun. Bu durumda $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ Ishikawa iterasyonu, T nin bir tek sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: T nin K da bir tek sabit noktası var olduğu 3.2.9.Teoremde ispatlandı. Bu sabit nokta p olsun.

δ, (16) daki gibi olmak üzere $\forall x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \le \delta \|x - y\| + 2\delta \|x - Tx\| \tag{27}$$

olur. $z_0 \in K$ olmak üzere, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ Ishikawa iterasyonu olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - p\| &= \|(1-\alpha_n) z_n + \alpha_n T y_n - (1 - \alpha_n + \alpha_n) p\| \\ &= \|(1-\alpha_n)(z_n - p) + \alpha_n (T y_n - p)\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \alpha_n \|T y_n - p\| \end{aligned} \tag{28}$$

yazılır. (27) de $x := p$ ve $y := y_n$ alınırsa

$$\|T y_n - p\| \le \delta \|y_n - p\|$$

elde edilir. Üstelik

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|(1-\beta_n) z_n + \beta_n T z_n - (1 - \beta + \beta) p\| \\ &= \|(1-\beta_n)(z_n - p) + \beta_n (T z_n - p)\| \\ &\le (1-\beta_n)\|z_n - p\| + \beta_n \|T z_n - p\| \end{aligned}$$

yazılır. (27) de $x := p$ ve $y := z_n$ alınırsa

$$\|T z_n - p\| \le \delta \|z_n - p\| \tag{29}$$

elde edilir. (28)- (29) dan

$$\|z_{n+1} - p\| \le \left[1 - (1-\delta)\alpha_n (1 - \delta\beta_n)\right]\|z_n - p\|$$

yazılır. Üstelik

$$\left(1 - (1-\delta)\alpha_n (1 - \delta\beta_n)\right) \le \left(1 - (1-\delta)^2 \alpha_n\right)$$

eşitsizliğinden

$$\|z_{n+1} - p\| \le \left[1 - (1-\delta)^2 \alpha_n\right]\|z_n - p\| \qquad n = 0, 1, ..$$

yazılır. İndirgeme yöntemiyle

$$\|z_{n+1} - p\| \le \prod_{k=1}^{n}\left[1-(1-\delta)^2\alpha_k\right]\|z_0 - p\|$$

elde edilir. $0 \le \delta < 1$, $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$ den

$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[1-(1-\delta)^2\alpha_k\right] = 0$ olur.

Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|z_{n+1} - p\| = 0$$

dır. Yani $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ Ishikawa iterasyonu p sabit noktasına güçlü yakınsar.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Zamfirescu Operatörlerinin Sınıfında Picard, Krasnoselkij, Mann ve Ishikawa İterasyonlarının Karşılaştırılması

Zamfirescu operatörlerinin sınıfında Picard iterasyonu, Krasnoselskij iterasyonu, Mann iterasyonu ve Ishikawa iterasyonu gibi önemli sabit nokta iterasyon metotları, böyle bir operatörün tek bir sabit noktasına yakınsadığı bilinmektedir.
Böyle durumlarda hangi metodun sabit noktaya daha hızlı yakınsadığnı bilmek önemlidir. Bu sebeple, bu kısımda Picard, Krasnoselskij, Mann ve Ishikawa iterasyon metotlarının yakınsama hızları mukayese edilecektir.

4.1.1. Teorem: E keyfi Banach uzayı , K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T:K\to K$ bir Zamfirescu operatörü olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_0\in K$ için (2) ile verilen Picard iterasyonu ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $y_0\in K$, $\{\alpha_n\}\subset[0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ olmak üzere (4) ile verilen Mann iterasyonu olsun. Bu durumda, Picard iterasyonu, T operatörünün tek sabit noktasına Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Berinde 2004).

İspat: 3.2.9.Teoreminden T operatörünün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ve Picard iterasyonunun bu sabit noktaya yakınsadığı bilinmektedir. 3.2.11.Teoreminden de Mann iterasyonunun aynı sabit noktaya yakınsadığını biliyoruz. Bu sabit nokta p olsun. $\forall x,y\in K$ için,

$$\|Tx-Ty\|\le\delta\|x-y\|+2\delta\|x-Tx\| \tag{30}$$

ve

$$\|Tx-Ty\|\le\delta\|x-y\|+2\delta\|y-Tx\| \tag{31}$$

eşitsizliklerini sağlandığını biliyoruz. Burada δ, (16) daki gibidir. (30) da $y:=x_n$ ve $x:=p$ alınarsa

$$\|x_{n+1}-p\|\le\delta\|x_n-p\|$$

yazılır. İndirgeme yöntemiyle

$$\|x_{n+1}-p\| \le \delta^n \|x_1-p\| \quad , \qquad n \ge 0 \tag{32}$$

elde edilir.

$y_0 \in K$ olmak üzere $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ Mann iterasyonu olsun. Mann iterasyonun tanımından

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-p\| &= \left\|(1-\alpha_n)y_n+\alpha_n Ty_n-\left[(1-\alpha_n)+\alpha_n\right]p\right\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|y_n-p\|+\alpha_n\|Ty_n-p\|\end{aligned}$$

yazılabilir.

(30) da $y := y_n$ ve $x := p$ alınırsa

$$\|Ty_n-p\| \le \delta\|y_n-p\|,$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|y_{n+1}-p\| \le \left[1-\alpha_n+\delta\alpha_n\right]\|y_n-p\|, \qquad n=0,1,2,....$$

olur. Buradan

$$\|y_{n+1}-p\| \le \prod_{k=1}^{n}\left[1-\alpha_k+\delta\alpha_k\right]\|y_1-p\|, \qquad n=0,1,2,.... \tag{33}$$

elde edilir. $0 \le \delta < 1$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$ olduğundan,

$$n \to \infty \text{ için } \prod_{k=1}^{n}\left(1-\alpha_k+\delta\alpha_k\right) \to 0$$

olmasını gerektirir.

Böylece $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini karşılaştırmak için, (32) ve (33) den $a_n = \delta^n$ ve $b_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\alpha_k+\delta\alpha_k\right)$ dizileri karşılaştırılır. $c_n = a_n/b_n$ olsun.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\delta}{1-(1-\delta)\alpha_{n+1}} < 1$$

olup $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ yakınsaktır. Bu nedenle

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\delta^n}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\alpha_k+\delta\alpha_k\right)} = 0$$

olur. Bu ise, Picard iterasyonun, Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını gösterir.

4.1.2. Teorem: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir Zamfirescu operatör olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_0 \in K$ için (2) ile verilen Picard iterasyonu, ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, $v_0 \in K$ ve $\lambda \in (0,1)$ için (3) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu olsun. Bu taktirde T nin tek sabit noktasına, Picard iterasyonu Krasnoselskij iterasyonundan daha hızlı yakınsar.

İspat: 3.2.9. ve 3.2.10. Teoremlerinden T operatörünün tek sabit noktaya sahip olduğu, Picard ve Krasnoselskij iterasyonlarının bu sabit noktaya yakınsadığı biliniyor. Bu sabit noktaya p diyelim. δ, (16) daki gibi olmak üzere, $\forall x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \|x - y\| + 2\delta \|x - Tx\| \tag{34}$$

olur. $x_0 \in K$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu olsun. (34) de $y := x_n$ ve $x := p$ alınırsa

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta \|x_n - p\|$$

yazılır. İndirgeme yöntemiyle

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^n \|x_1 - p\| \qquad n \geq 0 \tag{35}$$

elde edilir. $v_0 \in K$ olmak üzere $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ Krasnoselskij iterasyonu olsun.

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - p\| &\leq \|(1-\lambda) v_n + \lambda T v_n - (1 - \lambda + \lambda) p\| \\ &= \|(1-\lambda)(v_n - p) + \lambda (T v_n - p)\| \\ &\leq (1-\lambda)\|v_n - p\| + \lambda \|T v_n - p\| \end{aligned} \tag{36}$$

yazılır. (34) de $x := p$ *ve* $y := v_n$ alınırsa

$$\|T v_n - p\| \leq \delta \|v_n - p\| \tag{37}$$

elde edilir. (36) ve (37) eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - p\| &\leq (1-\lambda)\|v_n - p\| + \lambda\delta \|v_n - p\| \\ &\leq (1 - (1-\delta)\lambda)\|v_n - p\| \end{aligned}$$

yazılır. $\delta \in [0,1)$ *ve* $\lambda \in [0,1]$ olduğundan, $\theta_0 = (1-(1-\delta)\lambda) < 1$ olur. İndirgeme yöntemiyle

$$\begin{aligned}\|v_{n+1} - p\| &\le (1-(1-\delta)\lambda)^{n+1} \|v_0 - p\| \\ &\le \|v_0 - p\| \end{aligned} \tag{38}$$

elde edilir. Böylece $\{x_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerini karşılaştırmak için (35) ve (38) den

$$a_n = \delta^n \quad ve \quad b_n = 1$$

alınırsa $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ olmak üzere

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \delta < 1$$

olup $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ yakınsaktır. O halde $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ olur. Dolayısıyla Picard iterasyonu, Krasnoseslkij iterasyonundan daha hızlı yakınsar.

4.1.3. Teorem: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T : K \to K$ bir Zamfirescu operatör olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_0 \in K$ için (2) ile verilen Picard iterasyonu ve $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, $z_0 \in K$ olmak üzere, $0 \le \alpha_n, \beta_n < 1$ *ve* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ için (5) ile verilen Ishikawa iterasyonu olsun. Bu taktirde T nin tek sabit noktasına Picard iterasyonu, Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Babu and Vara Prasad 2006).

İspat: 3.2.9. ve 3.2.12.Teoremlerinden, Picard iterasyonun ve Ishikawa iterasyonun T nin bir tek sabit noktasına yakınsadığını biliyoruz. Bu sabit nokta p olsun.

δ, (16) daki gibi olmak üzere $\forall x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \le \delta \|x - y\| + 2\delta \|x - Tx\| \tag{39}$$

olur. (39) da $y := x_n$ *ve* $x := p$ alınırsa

$$\|x_{n+1} - p\| \le \delta \|x_n - p\|$$

yazılır. İndirgeme yöntemiyle

$$\|x_{n+1} - p\| \le \delta^n \|x_1 - p\| \quad n \ge 0 \tag{40}$$

elde edilir. $z_0 \in K$ olmak üzere $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ Ishikawa iterasyonu olsun.

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - p\| &= \|(1-\alpha_n) z_n + \alpha_n T y_n - (1-\alpha_n+\alpha_n) p\| \\ &= \|(1-\alpha_n)(z_n - p) + \alpha_n (T y_n - p)\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \alpha_n \|T y_n - p\|\end{aligned} \tag{41}$$

yazılır. (39) da $x := p$ ve $y := y_n$ alınırsa

$$\|T y_n - p\| \le \delta \|y_n - p\| \tag{42}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|y_n - p\| &= \|(1-\beta_n) z_n + \beta_n T z_n - (1-\beta_n+\beta_n) p\| \\ &= \|(1-\beta_n)(z_n - p) + \beta_n (T z_n - p)\| \\ &\le (1-\beta_n)\|z_n - p\| + \beta_n \|T z_n - p\|\end{aligned} \tag{43}$$

yazılır. (39) da $x := p$ ve $y := z_n$ alınırsa

$$\|T z_n - p\| \le \delta \|z_n - p\| \tag{44}$$

elde edilir. (41) ve (44) den

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - p\| &\le (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \delta\alpha_n \|y_n - p\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \delta\alpha_n \left[(1-\beta_n)\|z_n - p\| + \beta_n \|T z_n - p\|\right] \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \delta\alpha_n \left[(1-\beta_n)\|z_n - p\| + \delta\beta_n \|z_n - p\|\right] \\ &= \left((1-\alpha_n) + \delta\alpha_n (1-\beta_n) + \delta\beta_n\right)\|z_n - p\| \\ &= \left[1-(1-\delta)\alpha_n (1-\delta\beta_n)\right]\|z_n - p\|\end{aligned}$$

yazılır. Üstelik

$$\left(1-(1-\delta)\alpha_n (1-\delta\beta_n)\right) \le \left(1-(1-\delta)^2 \alpha_n\right)$$

eşitsizliğinden,

$$\|z_{n+1} - p\| \le \left[1-(1-\delta)^2 \alpha_n\right]\|z_n - p\| \qquad n = 0.1,.. \tag{45}$$

yazılır. İndirgeme yöntemiyle

$$\left\| z_{n+1} - p \right\| \leq \prod_{k=1}^{n} \left[1 - (1-\delta)^2 \alpha_k \right] \left\| z_0 - p \right\| \tag{46}$$

elde edilir.

Böylece $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizilerini karşılaştırmak (40) ve (46) den $a_n = \delta^n$ ve

$b_n = \prod_{k=1}^{n} \left[1 - (1-\delta)^2 \alpha_k \right]$ dizilerini karşılaştırmalıyız. $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ olsun. Bölüm testinden

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\delta}{\left[1 - (1-\delta)^2 \alpha_{k+1} \right]} < 1$$

olup, $\sum c_n$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ olur. Bu ise, Picard iterasyonun, Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını gösterir.

4.1.4. Örnek: $X = ¡$, $K = [0,2] \subset X$, $T : K \to K$ ve $Tx = \dfrac{2x+1}{3}$ olsun. T , $\dfrac{2}{3}$ - daraltan bir dönüşümdür. Dolayısıyla T , Zamfirescu operatörü olur. $x^* = 1$, T nin tek sabit noktasıdır. $\alpha_n = \dfrac{1}{n+2}$ ve $\beta_n = \dfrac{1}{n+2}$ olmak üzere $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ iki dizi ve $x_0 = \lambda = \dfrac{1}{2}$ olsun. Bu taktirde Picard, Krasnoselskij, Mann ve Ishikawa iterasyonlarının $x^* = 1$ sabit noktasına yakınsamalarının ilk 100 adımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.1.4.a.

	Picard iterasyonu	Krasnoselskij iterasyonu	Mann iterasyonu	Ishikawa iterasyonu
1.	0.6666667	0.5833333	0.5555556	0.5679013
2.	0.7777778	0.6527778	0.5925926	0.6099108
3.	0.8518519	0.7106482	0.6197531	0.6393843
4.	0.9012346	0.7588735	0.640878	0.6616445
5.	0.9341564	0.7990612	0.6579790	0.6792912
6.	0.9561042	0.8325510	0.6722299	0.6937676
7.	0.9707361	0.8604591	0.6843695	0.7059497
8.	0.9804907	0.8837160	0.6948905	0.7164049
9.	0.9869938	0.9030967	0.7041363	0.7255195
10.	0.9913293	0.9192472	0.7123547	0.7335675
11.	0.9942195	0.9327060	0.7197303	0.7407495
12.	0.9961463	0.9439217	0.7264034	0.7472160
13.	0.9974309	0.9532681	0.7324833	0.7530831
14.	0.9982873	0.9610567	0.7380565	0.7584416
15.	0.9988582	0.9675472	0.7431927	0.7633638
16.	0.9992388	0.9729561	0.7479483	0.7679082
17.	0.9994925	0.9774634	0.7523703	0.7721229
18.	0.9996617	0.9812195	0.7564974	0.7760474
19.	0.9997745	0.9843495	0.7603626	0.7797151
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
49.	0.9999999	0.9999341	0.8211657	0.8366055
50.	0.9999999	0.9999450	0.8223121	0.8376663
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99.	0. 9999999	0.9999999	0.8574387	0.8700250
100.	0. 9999999	0.9999999	0.8579046	0.8704525
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n \to \infty$	1	1	1	1

5. SONUÇ

Keyfi bir Banach uzayının kapalı konveks alt kümesinde tanımlı Zamfirescu operatörlerinin sabit noktalarını elde etmek için kullanılan Picard, Mann, Krasnoselskij ve Ishikawa iterasyon metotlarının yakınsama hızları karşılaştırıldı. 4.1.1. Teoreminde Picard iterasyonun Mann iterasyonundan, 4.1.2. Teoreminde Picard iterasyonun Krasnoselkij iterasyonundan ve 4.1.3. Teoreminde de Picard iterasyonun Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsadığı gösterildi. Sonuç olarak, Zamfirescu operatörlerin sabit noktalarını elde etmek için en uygun iterasyon metodunun Picard iterasyonu olduğu söylenir. Bununla ilgili bir uygulama 4.1.4. Örnekte verilmiştir.

KAYNAKLAR

Babu, G.V.R, and Vara Prasad, K.N. V.V., 2006, ‘Mann iteration converges faster than Ishikawa iteration for the class of Zamfirescu operators’,Fixed Point Theory and Applications, vol. 2006, Article ID 496, 6 pages,

Babu, G.V.R. and Vara Prasad, K.N.V.V., 2006,’Comparison of fastness of the convergence among Krasnoselskij, Mann and Ishikawa iterations in arbitrary real Banach spaces’, Fixed Point Theory and Applications, Volume 2006, Article ID 35704, pages 1-12

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ısbn 975-442-035-1

Berinde, V., 2004,‘Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators’, Fixed Point Theory and Applications, no.2, p.p 97-105,

Berinde, V., 2004,‘On the convergence of the Ishikawa iteration in the class of quasi contractive operators’ Acta Mathematica Universitatis Comenianae, Vol.73 , no.1, p.p 119-126

Berinde, V., Berinde, M., 2005,’On Zamfirescu’s fixed point theorem’ Rev.Roumaine Math. Pures Appl. 50, No. 5-6,443-453

Berinde, V.,2006, İterative Approximation of Fixed Points

Chidume, C.E., and Osilike, M.O., 1993,’Fixed point iterations for quasi-contractive maps in uniformly smooth Banach spaces’ Bull. Kroean Math. Soc.(1993), No:2, pp.201-212

Ciric, L.B. 2003,:Fixed Point Theory. Contraction Mapping Principle. FME Pres. Beograd.

Kızıltunç, H. 2007 Obtaining with iteration methods of fixed points of nonexpansive mappings, Atatürk üniversitesi, Doktora Tezi

Madox, I.J. 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres.

Noor, M.A., 2000, New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math Anal. Appl., 251, 217-229.

Popescu, O., 2007, ‘Picard iteration converges faster than Mann iterations for a class of quasi-conractive operators’ Mathematical Communocations 12(2007), 195-202

Rhoades, B.E. and Qing, Y., 2008, ‘Comments on the Rate of Convergence between Mann and Ishikawa iterations Applied to Zamfirescu operators’ Fixed Point Theory and Applications, Volume 2008, Article ID 387504, 3 pages

Rhoades, B.E.,1976, ’Comments on two fixed point iteration methods’ J. Math. Anal. Appl., 56, No.2, 741-750

Ünlü, C., 2004 Fixed point theorems on metric spaces and it’s applications, Atatürk üniversitesi, Yükseklisans Tezi

Xue, Z., 2008,‘The comparison of the convergence speed between Picard, Mann, Krasnoselskij and Ishikawa iterations in Banach spaces’, Fixed Point Theory and Applications. Volume 2008, Reiew Article ID 387056, 5 pages

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Adıyaman'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adıyaman'da, lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazanarak 2006 yılında mezun oldu. 2006 da Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.