ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODÜLER ARİTMETİK KAVRAMI İLE İLGİLİ ÖĞRENME GÜÇLÜKLERİNİN BELİRLENMESİ

Onur COŞKUN

ORTAÖĞRETİM FEN ve MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI

ERZURUM
2009

Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ danışmanlığında, Onur COŞKUN tarafından hazırlanan bu çalışma 14/09/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ İmza: R Dikici

Üye : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN İmza:

Üye :Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN İmza:

Üye :.................................... İmza:

Üye :.................................... İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ömer AKBULUT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MODÜLER ARİTMETİK KAVRAMI İLE İLGİLİ ÖĞRENME GÜÇLÜKLERİNİN BELİRLENMESİ

Onur COŞKUN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

Bu çalışmanın amacı ortaöğretim öğrencilerinin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemektir.

Araştırmanın örneklemini Pasinler Anadolu Lisesi ve Erzurum Anadolu Lisesi'nde öğrenim gören sırasıyla 50 ve 114 olmak üzere toplam 164 9.sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Durum çalışması deseni (case study design) araştırma modeli olarak belirlenmiştir. Araştırma 2007–2008 eğitim-öğretim yılının bahar döneminde uygulanmıştır. Araştırmanın verileri, 'Modüler Aritmetik ve Özellikleri Bilgi Testi' ile mülakatlardan elde edilmiştir.

Modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirleme aşamasında elde edilen verileri analiz etmek için yüzde ve frekans kullanılmıştır. Ayrıca yapılan mülakatların verileri betimsel analiz ile değerlendirilmiştir. Verilerin analizi sonucunda öğrencilerin çoğunlukla bölme algoritması ve denklik sınıfları ile ilgili öğrenme güçlüklerine sahip oldukları tespit edilmiştir.

2009, 90 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matematik öğretimi, modüler aritmetik, öğrenme güçlüğü

ABSTRACT

Master Thesis

DIAGNOSING LEARNING DIFFICULTIES IN MODULAR ARITHMETIC

Onur COŞKUN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Secondary Science and Mathematics Education

Supervisor: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ

The aim of this study is to determine learning difficulties of high school students in modular arithmetic and its properties.

Sampling of this study consists of total 164 grade 9 students, studying in Pasinler Anatolia High School (N=50) and Erzurum Anatolia High School (N=114). In this study case study design was identified as a research model. This study was carried out in the spring semesters of 2007–2008 education years. The data was obtained by ‘Modular Arithmetic and Its Properties Knowledge Test’ and interviews.

To analyze the obtained data in the process of diagnosing learning difficulties in modular arithmetic and its properties, percentage-frequency was used. The interview data was evaluated by descriptive analysis. The results showed that the students had learning difficulties in division algorithm and residue classes.

2009, 90 pages

Keywords: Mathematics teaching, modular arithmetic, learning difficulty

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın hazırlanmasında değerli düşüncelerini ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ'ye en içten şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana anlayış gösteren okul idarecilerime ve çalışmam hakkındaki görüşlerini benimle paylaşan meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca aldığım kararlarda yanımda olan aileme ve çalışmalarım sırasında büyük sabır gösteren eşime sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Onur COŞKUN
Eylül 2009

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematik, herkesin en azından zorunlu temel eğitime başladığında karşılaştığı, sevdiği ya da nefret ettiği, belki de korktuğu bir ders, bir bilim dalıdır. Matematiği sevmek, anlamak ve öğrenmek her şeyden önce onu doğru tanımakla başlar. Eğer matematik yaşamımızı kolaylaştıran, bize günlük yaşamımızda her an karşımıza çıkan problemlerle baş edebilmek için, mantıklı, akılcı düşünmenin yollarını açan, olayları daha tutarlı, daha yansız değerlendirmemizi sağlayan, yaşamımızı renkli, eğlenceli kılan bir destekse onu anlamaya çalışmak tercihten öte sorumluluk halini almaktadır (Yenilmez ve Can 2006).

21. yüzyıl teknoloji çağında bilginin önemi hızla artmakta, buna bağlı olarak “bilgi” kavramı ve “bilim” anlayışı da değişmekte, teknoloji ilerlemekte, demokrasi ve yönetim kavramları farklılaşmakta, tüm bu değişimlere ayak uydurabilmek için toplumların bireylerinden beklediği beceriler de değişmektedir (MEB 2005). Bu gerçek, matematik ve matematik eğitim programları için harcanan çabaların çok daha mantıklı ve planlı bir çerçevede ele alınmasını gerektirmektedir. Artık matematik eğitimi, yalnızca matematik bilen değil, sahip olduğu bilgiyi uygulayan, matematik yapan, problem çözen insanlar yetiştirmeyi hedeflemektedir. 21. yüzyıl bilgi toplumları, bireylerin temel becerilerin ötesine geçerek, "yeni yeterlilikler" kazanmalarına gereksinim duymaktadır (Gür ve Korkmaz 2003).

Günümüzde, okullardaki matematik öğretiminin gerçek hayat ile uyumsuz olması, öğrencilerin okulda alınan bilgi ve becerileri gerçek hayatta kullanmada, problemleri çözmede yetersiz kalmaları problemler üzerinde düşünmek ve çözüm stratejileri üretmek yerine, işlemlerle çabucak sonuca gitmeye davranmaları bu konudaki alan araştırmalarının yoğunlaşmasına yol açmıştır (Verschaffel *et al.* 1999). Matematik öğretimi alanında yapılan araştırmalar birçok öğrenci ve öğretmen adayının matematiksel kavram ve süreçleri anlamlandırmada sorun yaşadıklarını ve bunun bir sonucu olarak matematik dersleri ile ilgili düşüncelerinin genellikle olumsuz olduğunu ortaya koymaktadır.

Matematik öğrenciler açısından can sıkıcı, öğretmenler açısından öğrencilerin derse ilgisinin düşük olduğu bir derstir. Ne yazık ki, bu düşünce yargısı geçen yıllar boyunca kırılamamış ve sonunda bir sorun yumağı olarak günümüze gelmiştir. Dersin can sıkıcı olması ve derse yönelik ilginin düşük olmasının en önemli nedenlerinin başında matematiğin yapısına uygun öğretim yöntemlerinin kullanılmaması gelmektedir. Bu durum beraberinde matematik dersinde yaşanan başarısızlığı getirmektedir (Ellez 2004). Doğrudan anlatım yöntemiyle öğrencinin düşünebilme yeteneği yok edilmektedir. Anlatmak her zaman öğretmekle eş anlamlı değildir, aynı sonuçları vermezler. Öğretmek konunun duyumsatılması ve düşündürülmesiyle olur. Günümüzde çoğu öğretmen matematikteki başarıyı formülleri, kural ve yöntemleri anında uygun bir şekilde kullanabilme olarak görmekte, hesaplamayı doğru icra edebilmeyi yeterli saymaktadır (Baki ve Kartal 2004).

Matematik öğretiminde okullarımızda yaygın olarak ders kitapları kullanılmaktadır. Yalnızca ders kitaplarına dayalı bir öğretimde, öğrencinin öğrenme ihtiyaçları tam olarak karşılanamaz, matematik kavramlarını oluşturmasına fırsat tanınmaz (Toluk ve Olkun 2003).

Matematik öğretiminde konuların oldukça soyut olması, sadece işlem becerisine dayalı konu anlatımları ve derslerin öğretmen odaklı olup öğrencilerin derse aktif olarak katılımının sağlanamaması gibi sorunlar matematik dersini monoton, sıkıcı ve anlamsız bir şekle getirmektedir (Ersoy vd 2002).

Ülkemizde pek çok öğrenci matematiğin zor olduğunu ve matematiği başaramayacağını düşünerek kaygılanmakta ve matematiğe karşı olumsuz tutum geliştirmektedir. Bu durum ilköğretimde başlamakta, okul yılları ilerledikçe maalesef artarak devam etmektedir. Sonuçta öğrenciler bu önemli araca karşı olumsuz tutum ve kendilerine güvensizlik geliştirmektedirler. Daha da kötüsü; kendilerinin matematiği öğrenecek kadar zeki olmadıklarını, matematiğin onların uğraşacağı konular arasında bulunmadığı kanaatine varmaktadırlar. Bu yanlışlıkta, öğretimin ve öğretmenin yaklaşımının önemli rolü vardır (Baykul 2005).

Öğrencilerin, matematik başarılarını etkileyen nedenlerden bir kısmının; matematiğin soyut bir alan olması, ders kitaplarının yetersizliği, derslerin genellikle öğretmen odaklı ve işlem bilgisine dayalı olarak işlenmesi, matematik dersinin yapısına uygun öğretim yöntemlerinin kullanılmaması olduğu görülmektedir. Bu sorunların giderilmemesi durumunda ilköğretimin ilk yıllarından başlayarak sonraki öğretim aşamalarında artık bir kangren halini alan öğrencilerde matematik kaygısı ve matematiğe karşı olumsuz tutum gelişmektedir.

Matematik kaygısı ilk olarak Dreger and Aiken (1957) tarafından ‘matematik ve aritmetik alanına karşı sergilenen duygusal tepkiler sendromu’ olarak tanımlanmıştır. Konu ile ilgili ilk çalışmalar 1950’li yıllarda matematik öğretmenlerinin bireysel gözlemleri ile başlamasına rağmen, matematik kaygısı 1970’li yıllara kadar matematik araştırmacılarının ilgisini çekmemiştir. Matematik kullanımının tüm alanlara yayılması ile bu branştaki öğrenci problemleri daha yoğun bir şekilde gözlenmeye başlanmıştır. Matematik alanında yaşanan en önemli problemlerin başında bu konuda öğrencilerin yaşadıkları kaygı gelmektedir (Baloğlu 2001).

Matematik kaygısının etkileri uzun vadeli ve kısa vadeli etkiler olarak iki ana başlık altında incelenebilir. Matematik derslerindeki başarı düşüklüğü, matematik kaygısının en belirgin kısa vadeli etkisidir. Uzun vadeli etkiler olarak matematik derslerinden kaçınma, kişisel değer azalması ve çaresizlik sıralanabilir (Baloğlu 2001).

Matematik bir soyutlama bilimidir ve matematik kavramlar soyutlama sonucu elde edilmektedir (Altun 2007). Bir matematiksel modelin birçok somut durum ve olayı temsil edebilme yeteneği, onun ‘soyut’ diye nitelendirilen üstün bir özelliğidir. Örneğin

$5 \times 80 = 400$ işlemi birçok durum ya da olayı temsil edebilir. Bunlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

- Tanesi 80 lira eden 5 nesnenin tutarıdır
- Saatte 80km hızla giden bir otobüsün 5 saatte alacağı yoldur
- Eni 5m, boyu 80m olan bir alanın yüzölçümüdür
- 80kg lık bir kuvvetle, bir cismin 5m ötelenmesi sonunda yapılan iştir

(Karaçay 1985). Matematik, soyut bir içeriğe sahiptir. Bu nedenle, matematiksel kavramlar öğrenciler tarafından genelde anlaşılamamakta veya zor anlaşılmaktadır (Dede 2004). Genel olarak, soyut kavramların kazanılması zordur. Matematiğin öğrencilere zor gelmesinin sebebi belki burada yatmaktadır (Baykul 2005).

İnsan, hiçbir öğrenme kuramı ya da öğretme modeli olmadan da öğrenebilmektedir. Ancak öğrenme olayının iyi tanınması ve öğretme modellerinin kullanılması, öğrenmeyi etkili ve ekonomik kılmakla birlikte geleneksel öğretim tarzı ile öğrenilmesi mümkün olmayan bazı kavram ve becerilerin öğrenilmesini sağlamaktadır (Altun 2002). Judd (1939)'a göre "Çocuklar dünyaya kalıtımlarında bir sayı sistemi taşıyarak gelmezler; sayı kavramı doğuştan değil, sonradan kazandığımız bir kavramdır. Çocuklardan okulda insan aklının en yetkin ürünü olan sayı simge sistemini öğrenmeleri beklenir. Bu sistemi öğrenme sürecinde onlar soyut düzeyde düşünmeyi de öğrenirler. Bir kişinin ya da bir kuşağın kendi başına asla geliştiremeyeceği son derece karmaşık entelektüel bir aracı kullanmaları söz konusudur. İcadı ve yetkinliğe ulaşması, insanlıktan yüzyıllar alan kavramsal bir yöntemi kullanma becerisini çocuklar çoğunluk birkaç yıllık kısa bir sürede kazanırlar".

Geleneksel matematik eğitimi anlayışında matematiksel bilgiler küçük beceri parçacıklarına ayrılmış halde öğretmen tarafından öğrencilere sunulur. Öğrencilerin bu bilgileri verilen alıştırmalarla tekrar etmeleri beklenir. Soruların önceden belirlenmiş belli yanıtlama yöntemi veya yöntemleri ve tek bir yanıtı vardır. Böylece en çok soruyu en kısa yoldan ve en çabuk yanıtlayan öğrenci en başarılı öğrencidir. Böyle bir anlayış ortamında öğrenciler pasif alıcılar durumundadırlar. En iyi ve en doğruyu bilen öğretmenden bunları öğrenmek durumundadırlar. Bir nedene dayandırılmayan bir sürü bağıntı, kural ve simgeler öğrencilere verilir. Öğrenciler ezbere dayalı öğrenmeye sevk edilir. Sonuç olarak öğrenciler gösterilmeyen problemi çözemez hale gelirler (Toluk ve Olkun 2003).

Matematik öğretiminin her aşamasında sorunlar yaşandığı bir gerçektir. Son yıllarda bu sorunların neler olduklarının saptanması ve giderilmelerine yönelik birçok çalışma yapılmış ve yapılmaktadır. Bu çalışmaların bir bölümü de öğrencilerin kavram yanılgılarını belirlemek üzerinedir. Matematiğin birikimli bir bilim dalı oluşu, başka bir deyişle, daha önceden edinilmiş bilgilerin yeni bilgiler edinmede kullanılması, matematik eğitiminin başarıyla yürütülmesi için kavram yanılgılarının saptanması ve giderilmesi gereğini doğurmaktadır (Moralı vd 2004). Bunun için öğrencilerin öğrenme faaliyetlerini etkileyen faktörler tespit edilerek bu faktörlerden kaynaklanan öğrenim problemlerinin çözüme kavuşturulması gerekmektedir (Dikici ve İşleyen 2003). Yaşanan bu güçlüklerin belirlenmesi ve giderilmesi, öğrenme sürecinde öğrenciye yardımcı olunması ve rehberlik edilmesi, çağdaş eğitimin gereklerinden olduğu kadar öğretmenin de görevlerindendir (Ersoy ve Ardahan 2003). Çünkü matematikteki öğrenmeler, bu alanın yapısı itibariyle, birbirine çok sıkı şekilde bağlıdır, diğer bir deyişle, matematik ön-şart oluş ilişkilerinin en güçlü olduğu bir alandır. Bu bakımdan bir davranış grubuyla ilgili öğrenme ve öğretme etkinliklerine başlamadan önce, bunlarla ilgili önceki öğrenmelerle kazanılmış olması gereken davranışların öğrencilerde var olup olmadığına bakılmalıdır. Bir öğrencide bazı davranışların henüz bulunmadığı anlaşılırsa, yeni konuyla ilgili öğretim etkinliklerine başlanılmadan önce, bu öğrencilerin gözlenmeyen davranışlarla ilgili tamamlama etkinliklerinde bulunulmalıdır (Baykul 2005).

1.1. Araştırmanın önemi

Çağdaş eğitim anlayışı, öğretmenleri, öğrenmeyi maksimum düzeyde gerçekleştirecek öğretim yaklaşımlarını seçme ve uygulama zorunluluğu ve sorumluluğu ile karşı karşıya bırakmıştır (Yılmaz 2001). Hangi branşta olursa olsun bütün öğreticiler için anlattığı konu ile ilgili öğrencilerin ne tür öğrenme güçlüklerine sahip olduğunu bilmesi, bu öğretim yaklaşımlarını seçmede fayda sağlayacaktır (Dikici ve Tatar 2008).

Ülkemizde neredeyse tüm okullarda matematik öğretimi ve eğitiminde çeşitli sorunlar yaşanmaktadır. İlköğretim ve ortaöğretim öğrencileri, matematik konularını öğrenmede birtakım güçlüklerle ve sıkıntılarla karşılaşmakta; ayrıca, matematik derslerinden soğumakta ve kaygı duymaktadırlar. Bu nedenle öğrenci başarı düzeylerinin okul ve sınıf düzeyinde araştırılması, olası olumsuz etmenlerin belirlenerek bunların hızlıca giderilmesi, öğretmen eğitiminin çok yönlü olarak geliştirilmesi ve iyileştirilmesi, öğretmenlere görev başında yardımcı olunması gerekir (Ersoy ve Ardahan 2003).

Eğitim ve öğretime katkıda bulunmak amacıyla yapılan bu çalışmada öğrencilerin modüler aritmetik konusundaki öğrenme güçlüklerinin, yanılgılarının ve yanlışlarının ortaya konulması istenmektedir. Ön-şart oluş ilişkilerinin yoğun olarak görüldüğü konulardan biri de modüler aritmetik konusudur. Çünkü bağıntı, fonksiyon, ikili işlem ve tam sayılarda işlemlerle ilgili yapılan çalışmalarda ortaya çıkan öğrenme güçlükleri bu konuların ardılı olan modüler aritmetik konusunda yaşanan güçlüklerin de habercisidir.

1.2. Temel tanımlar

Araştırmanın bu kısmında eğitim-öğretimle ilgili çeşitli tanımlar verildikten sonra, kavram, kavram öğrenme, kavram yanılgısı ve kavram karmaşası konuları üzerinde durulmaktadır.

1.2.1. Algı

Duyu organlarıyla alınan uyarıcıların anlamlı hale getirilmesidir. Öğretim etkinliklerinin, konuların yapıları da dikkate alınarak örgütlenmiş biçimde düzenlenmesi ve uygulanması öğrencilerin algılamalarını dolayısıyla anlamalarını kolaylaştırır (Baykul 2005).

1.2.2. Bellek

Uyarıcıların algılanması, düzenlenmesi, saklanması, gerektiğinde hatırlanması ve kullanılması sürecidir. Belleğin, kısa ve uzun süreli olmak üzere iki türünden söz edilir. Kısa süreli bellek, tanıma işlemini yapar, uyarıcı analiz programını uygular, duyusal kayda gelen bilgilerin kısa ve uzun süreli belleklere kodlanmasını sağlar, uzun süreli bellekte saklanan bilgileri arama işlemini başlatır ve ilgili davranışın üretilmesini sağlar. Uzun süreli bellek, yeni gelen bilgilerin eskilerle örgütlenerek saklandığı yerdir. Uzun süreli bellekteki bilgilerin hatırlanması, bilgilerin bu belleğe depolanma biçimine bağlıdır; iyi örgütlenerek depolanmış bilgiler daha çabuk ve kolay hatırlanır; bu sebeple öğretimin planlanması ve planın uygulanması bilginin hatırlanması yönünden önemlidir (Ülgen 2004).

1.2.3. Hatırlama

Uzun süreli bellekteki bilgilerin gerektiğinde kısa süreli belleğe getirilerek etkin hale getirilmesine hatırlama denir. İyi örgütlenmiş ve bir şema ile ilişkilendirilmiş bilgiler daha çabuk ve kolay hatırlanırken, basit tekrarlarla uzun süreli belleğe kodlanan bilgiler daha zor ve geç hatırlanır (Baykul 2005).

1.2.4. Bilgi

Bilgi bir bireyin dış dünyadaki olayları algılama, işleme, değerlendirme, muhakeme etme sonucunda zihninde ürettiği anlamdır. Bu tanım, biraz açılacak olursa bilgi ile ilgili olarak şu temel niteliklerin bilinmesi ve bunların unutulmaması gerekir:

- Bilgi, insanın kendisi tarafından yapılandırılır.
- Bilgi, kesin değildir, değişken bir yapıya sahiptir.

- Bilgi, bir birikim sonucu oluşur

(Ersoy 2003). Bütün insanlar dünyaya geldikleri andan başlayarak çevreleriyle etkileşirler; kendi eğilimlerinin ve kapasitelerinin sınırları içinde, dünya ile ilgili obje, olgu ve olayları algılar, yorumlar, sebep sonuç ilişkisini kurar, sonuçların neler olabileceğini ya da karşılaşabilecekleri olası durumları yorumlayabilirler. Sorunların çözümü için tüm bilgilerini akılcı bir yol izleyerek kullanırlar ve sorunları çözerek bilgi üretirler (Ülgen 2004).

1.2.5. Eğitim

Bireyin davranışında kendi yaşantısı yoluyla ve kasıtlı olarak istendik değişme meydana getirme sürecidir (Ertürk 1994).

1.2.6. Davranış

Öğretim sonunda bireyde gözlemlenmesi kararlaştırılan bilinçli tepkidir (Sönmez 2007). Öğrenme ve öğretme sürecinde her bir bilgi ve beceri bir davranıştır. Bir hedefi oluşturan davranışların tamamı öğrenciye kazandırıldığında o hedefe ulaşıldığı kabul edilir. Davranışlar gözlenebilir olduğundan ölçme yönünden önemlidir (Baykul 2005).

1.2.7. Hedef

Bir öğrencinin, planlanmış ve tertiplenmiş yaşantılar sayesinde kazanması kararlaştırılan ve davranış değişikliği veya davranış olarak ifade edilmeye elverişli olan bir özelliktir (Ertürk 1994).

1.2.8. Öğrenme

Yaşantı ürünü ve nispeten kalıcı izli davranış değişmesidir (Ertürk 1994). Çevresel koşulların değişmesiyle bireyin davranışlarında meydana gelen değişmedir (Ülgen 2004). Bir davranışın öğrenme ürünü olması için, bireyin çevresiyle etkileşimi sonucu meydana gelmesi ve bir dereceye kadar kalıcı olması gerekmektedir. Ancak "bir dereceye kadar" ifadesinin bir süre ve düzey olarak matematiksel bir sınırını koymak mümkün olamamaktadır (Baykul 2005).

1.2.9. Öğretme

Öğrenmeyi kılavuzlama veya sağlama etkinliğidir (Ertürk 1994). Genel olarak öğrenmeyi sağlama faaliyetidir (Fidan 1985).

1.2.10. Öğretim

Planlı, kontrollü ve örgütlenmiş öğrenme faaliyetlerinin tümüne öğretim denir. Tüm öğretme faaliyetlerinin önceden belirlenmesi hedefler doğrultusunda planlı ve kontrollü olarak düzenlenmesi ve yürütülmesidir (Fidan 1985).

1.2.11. Öğretim stratejisi

Dersin hedeflerine ulaşılmasında izlenen en genel yola öğretim stratejisi denir (Pesen ve Odabaş 2000).

1.2.12. Yöntem

Hedefe ulaşmak için izlenen en kısa yol ya da konuyu öğrenmek için seçilen düzenli yoldur (Pesen ve Odabaş 2000).

1.2.13. Teknik

Öğrenme yöntemini uygulamaya koyma biçimi ya da sınıf içinde yapılan işlemlerin bütünü olarak tanımlanabilir. Yöntemde kullanılması gereken araçtır (Pesen ve Odabaş 2000).

1.2.14. Kavram

Kavram, insan zihninde anlamlanan, farklı obje ve olguların değişebilen ortak özelliklerini temsil eden bir bilgi formu/yapısıdır; bir sözcükle ifade edilir (Ülgen 2004). Türk Dil Kurumu kavram kelimesini, bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tasarımı, olarakta tanımlamaktadır.

Kavramlar yoluyla insan zihni, çevremizin karmaşıklığını basitleştirir. Kavramlar insanlar arasındaki iletişimin gerçekleşmesinde, insanların birbirini anlamalarını sağlamada çok önemli bir rol oynarlar çünkü yanlış anlamalar kavramlara verdiğimiz farklı anlamlardan da doğabilir. Kavramların birbiri ile ilişkisinden ilkeler ve kurallar ortaya çıkar. İlkelerin sağlamlığı, doğru yargıda bulunmaya ve problemleri anlayarak çözmemize yardımcı olur (Fidan 1985).

Kavram ve ilişkiler bir günde gelişmez, zamanla oluşur. Bir kavramın çok çeşitli anlamları ve diğer kavramlarla olan ilişkileri birbirlerine bağlandığında bilginin hatırlanması ve kullanılması kolaylaşır, yeni kavram ve ilişkilerin öğrenilmesi kolaylaşır, problem çözme becerisi gelişir, tutum ve inançlar olumluya dönüşür ve pozitif döngü kurulur (Toluk ve Olkun 2003).

Kavramların algılanan özellikleri bireyden bireye değişebilir. İnsanlar dünyadaki gerçekleri kendi geçmiş yaşantılarının etkisi altında, yetenekleri ölçüsünde, değer yargılarına dayalı olarak algılamakta ve değerlendirmektedirler. Kavramlar insanlarla ve onların duygu, düşünce, hareket bütünlüğü içinde edindikleri tecrübeleri ile var olurlar.

İnsanların ürettiği bu kavramlar dünyayı anlamaya ve onunla bütünleşmeye yarayan, sonuçta insanlar arası iletişimi sağlayan ve ilkeler geliştirmeye temel olan bir çeşit bilgi formudur. Eğitim programları çoğu zaman kavramların öğrenilmesiyle ilgilidir (Ülgen 2004).

1.2.15. Kavram öğrenme

Kavram öğrenme, uyaranları belli kategorilere ayırarak, zihinde bilgiler oluşturmadır. Yeterli bir öğrenmede bu bilgilerin davranışla bütünleşmesi öngörülür. Kavram öğrenme yapılanma ve yapılandırma işlemidir. Bir öğrenci gördüğü bir objenin adını söyler ise, ya da ona bir olay açıklandığında, o olaya verilen adı söyler ise, öğrencinin bu kavramı kendi zihninde yapılandırdığı anlamına gelmez. Bu sadece bir tanımadır. Sözcük öğrenmedir (Ülgen 2004).

Kavram öğrenme birey dünyaya geldiğinde başlar, ölünceye kadar devam eder. Kavram öğrenmenin planlı biçimde öğretimi okullarda gerçekleşir. Kavram hangi öğrenme yöntemiyle öğrenilirse öğrenilsin, iki aşamada gerçekleştirilir: İlk aşama kavram oluşturma (concept formation/method of reception), ikinci aşama ise kavram kazanmadır (concept attainment/method of development) (Stones 1970). Kavram oluşturma kavramın örneklerinin benzer ve farklı yanlarını algılayarak, benzerliklerden genelleme yaparak oluşturulur. Bu süreçte, birey, objelerle ilgili oluşturduğu şemaya dayalı olarak, hatırlama ve objeler arasında ilişki kurma işlemini yapar. Okul döneminde özellikle yaş ilerledikçe çocuklar kavramlara verilen adları öğrenirler, çünkü dil bu dönemde hızla gelişir. Bu nedenle anlam ağı kurma ve şema geliştirme kavram oluşturma işleminde önemli bir olgudur. Kavram kazanma ise oluşturulan kavramı uygun kural ve ölçütlerle sınıflara ayırma işlemine işaret eder. Kavram kazanma aşamasında, mantıklı bir gruplama, geliştirilen şema ile birlikte, oluşan kavramın niteliğine dayalıdır. Birey, algıladığı özelliklerin ve onlar arasındaki ilişkilerin doğasına uygun mantıksal kurallar ve ölçütler seçer ve onları uygulayarak kavramın ayrıştırmasını yapar. Temelde kavram oluşturma farklıları benzerden ayırarak, benzerlerden genelleme yapma işlemine dayanırken, kavram kazanma ayrıştırma işlemine dayalıdır. Kavram oluşturma tanımsal bilgi, kavram kazanma ise işlemsel bilgi ile ilgilidir (Ülgen 2004).

1.2.16. Kavram yanılgısı

Yeni öğrenilecek kavram, bilgi ve ilkeler daha önce öğrenilmiş olan bilgilerle ilişkilendirildiğinde anlam kazanır. Ancak burada ortaya çıkan en önemli konu öğrencide öğrenme açısından doğru kavramların bilgi olarak algılanması ve saklanmasıdır. Kavram yanılgıları öğrencilerin belli bir probleme yönelik doğru olmayan düşünceleri veya bilimsel olmayan bilgileridir ve büyük bir olasılıkla öğrencilerin anlatılan konuları yanlış anlamalarından kaynaklanırlar. Uygulamalarda öğretmenin konuyu anlatma tarzı yine kavram yanılgılarının oluşmasına neden olabilir. Öğrenciler ayrıca daha önceden öğrenmiş oldukları kavramları yeni öğrendikleri kavramlarla birleştirirken yeni kavram yanılgıları da ortaya çıkabilir (Morgil vd 2003). Öğrenci, hatalarının doğru olduğunu sebepleri ile birlikte açıklıyor ve kendinden emin olduğunu söylüyorsa o zaman kavram yanılgıları var diyebiliriz. Yani bütün kavram yanılgıları birer hatadır ama bütün hatalar birer kavram yanılgıları değildir (Eryılmaz ve Sürmeli 2002).

Yanılgılar bireyin yanlış inanışları ve deneyimleri sonucu ortaya çıkan davranışlardır. Doğal olarak, öğrenciler yeni şeyler öğrenirken bunları daha önceki bilgileri üzerine inşa ederler. Sahip oldukları ön birikimler bazen yani kavramların öğrenilmesinde yanlış öğrenmelere neden olurlar. Bir problemin çözümü veya bir işlemin yürütülmesi öğrencinin mantığına, önceki birikimlerine uygun düşebilir ve yaptıklarının matematiksel geçerliliğinin olmadığını da bilmeyebilir. Bu durumda kavram veya işlem yanılgılarının gelişmesi söz konusudur. Bu tür yanılgılara örnek olarak çarpmanın sonucu her zaman arttırdığı düşüncesi verilebilir. Doğal sayılarda doğru olan bu düşünce, çarpma işlemi reel sayılara genişletildiğinde rahatlıkla kavram yanılgısına dönüşebilir (Baki 1998).

Kathleen(1994) yapmış olduğu çalışmada, kavram yanılgılarının günlük yaşamdaki deneyimler ile kazanılan yanlış kavramlar ve öğretim süresince kazanılan yanlış kavramlar olarak iki temel sınıfa ayırmıştır. Deneysel kavram yanılgıları öğrencilerin sınırlı bilgileri ile duyuşsal bilgileri üzerinden mantıksal yorum yapmalarından kaynaklanmaktadır. Bu yorumlar genellikle şimdiye kadar kabul edilen teorilerle ve uzmanların görüşlerinden farklılık gösterir. Bu çeşit kavram yanılgıları genellikle yeni bir konunun öğretimi başlamadan önce görülür ve değiştirilmeleri çok zordur. İkinci olarak okul ya da okul dışında öğrencinin eğitimi süresince kazandığı kavram yanılgılarıdır. Bu tip kavram yanılgılarının edinilmesinin nedenleri: Bilimsel kavramların, formüllerin ve birbirine benzeyen terimlerinin anlamlarının yanlış anlaşılması ve yorumlanması, öğrencilerin önceki bilgilerinin yetersiz oluşu, öğrencilerin gereğinden fazla bilgiyi kısa sürede ezberlemesi, seçilen öğretim yöntemlerinin konulara uygun olmaması ve öğrencilerin bilgi düzeylerinin düşük olması sayılmaktadır (Bilgin ve Geban 2001).

1.2.17. Kavram kargaşası

Kavram kargaşalığı çok olayla çok sözcükten oluşan bir benzerlik olarak görülmektedir. Bir kavram için bazen birden fazla sözcük kullanılırken, bazen de bir sözcük birden fazla kavram için kullanılmaktadır. Bilimde kullanılan kavramlar evrensel düzeyde kabul edilen kavramlardır. Evrensel düzeydeki kavramlar bir dilden başka bir dile tercüme edilirken, çoğu kez, birbirine benzeyen birden fazla sözcük ile ifade edilmekte, bu arada bir sözcük birden fazla kavram için kullanılabilmektedir. Bu nedenle kavram kargaşası gözlenmektedir. Kavram kargaşalığını tamamıyla ortadan kaldırmak, günümüz koşullarında olası görülmemektedir. Belki zorunlu da değildir. Ama üst düzeydeki mesleki tartışmalar, bu kargaşalığı azaltabilir ve bu kargaşalığın öğrencilerin kavram öğrenmesine yansıması alt düzeye indirgenebilir (Ülgen 2004).

1.3. Matematik nedir?

Matematik nedir? sorusuna günümüzde çeşitli kitaplarda bir çok cevap verilmiş olmakla birlikte verilen cevaplarda bugüne kadar tam bir birliktelik sağlanamamıştır. Bunun başlıca nedenleri, matematiğin oluşmasına ilişkin felsefi yaklaşımların ve amaçların çeşitliliği, biraz da değişik düzeylerde matematik yapanların matematiği anlayışlarındaki farklılıklarıdır (Altun 2002). Bu cevaplardan bazıları şu şekilde sıralanabilir:

- Matematik, ele alınan bilgiyi ya da problemlerin çözümlerini içeren yolları buluşçu düşünceye dayalı sistematik bilgi olarak ifade etmemizi sağlayan bir evrensel dil, evrensel kültür ve bir teknolojidir (MEB 2005).
- İnsan aklı ile insan kültürü, modelleri fark edebilmek, sınıflandırabilmek ve onlardan yararlanabilmek için formel bir düşünce sistemi geliştirmiştir. Bu sisteme matematik denir (Stewart 2000).
- Matematik; doğru düşünme, sistemli ve mantıksal ispat yollarını ortaya koyan bir bilim dalıdır (Göker 1989).
- Dil, din, ırk ve ulus farkı tanımadan uygarlıktan uygarlığa zenginleşerek gelen sağlam, kullanışlı ve evrensel bir dildir (Karaçay 1985).
- Türk Dil Kurumu tarafından matematik; biçim, sayı ve çoklukların yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri mantık yoluyla inceleyen ve sayı bilgisi, cebir, uzam bilgisi gibi dallara ayrılan bilim dalı, olarak
- Türk Ansiklopedisinde ise matematik, “düşüncenin tümdengelimli bir işletim yolu ile sayılar, geometrik şekiller, fonksiyonlar, uzaylar gibi soyut varlıkların özelliklerini ve bunların arasında kurulan ilişkileri inceleyen bilimler grubuna verilen genel ad” olarak tanımlanmıştır (MEB 1976).

Baykul (2005) ise insanların matematiği nasıl gördükleri ve onun ne olduğu konusundaki düşüncelerini 4 grupta toplamıştır:

1. Matematik, günlük hayattaki problemleri çözmede başvurulan sayma, hesaplama, ölçme ve çizmedir.

2. Matematik, bazı sembolleri kullanan bir dildir.
3. Matematik, insanda mantıklı düşünmeyi geliştiren mantıklı bir sistemdir.
4. Matematik, dünyayı anlamamızda ve yaşadığımız çevreyi geliştirmede başvurduğumuz bir yardımcıdır.

Evrenin en ince ayrıntısından tümüne kadar bir yapılar kompleksi olduğu, matematiğin de bu yapıların açıklanmasında kullanıldığı anlaşılmaktadır. Sanki matematiksel sistemler, evrendeki sistemlerin idealleridir (Altun 2007).

Görülmektedir ki matematiği tanımlamaya çalışanlar genellikle onun bazı özelliklerini sıralamakla yetinmişlerdir. Ancak bu özellikler genellikle onun doğasının, tam olarak ne olup ne olmadığının anlaşılmasına yetmez. Öyle ki, matematik üzerine yüksek öğrenim görenlerin bile, özellikle son yıllarda sayıları oldukça fazlalaşan popüler matematik kitaplarını okurken kimi zaman matematiğin hiç tanımadıkları yüzleriyle karşılaştıkları, çelişkilere, hayretlere düştükleri gözlenmektedir (Umay 2002).

Matematiğin ne olduğunu anlatmak zor olsa bile ne olmadığı kolayca söylenebilir: her şeyden önce matematik, hesaplamalardan ibaret değildir. Matematik, hesaplamalar demek olmadığı gibi hızlı ve hatasız işlem yapmak da üstün bir matematik yeteneğinin kanıtı değildir (Umay 2002).

1.4. Matematik eğitimi

Matematik, düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli araçlardan biridir. Bilindiği gibi insanı diğer canlılardan ayıran temel özelliği düşünebilme, olaylardan anlam çıkartıp koşulları kendine uygun olarak yeniden düzenleyebilme yeteneğidir. Bu nedenledir ki matematik eğitimi temel eğitimin önemli yapı taşlarından birini, belki de en önemlisini oluşturur. Matematik eğitimi sayıları, işlemleri öğretmekten, günlük yaşamın vazgeçilmez bir parçası olan hesaplama becerilerini kazandırmaktan öte bir işlev üstlenmekte, her geçen gün biraz daha karmaşıklaşan yaşam savaşında ayakta kalmamızı sağlayan düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminlerde bulunma, problem çözme gibi önemli destekler sağlamaktadır (Umay 2003).

Matematik eğitiminin başlıca amacı kişiyi, aritmetik, cebir ve geometrinin temel bilgileriyle donatmanın yanı sıra, düşünmeye yöneltmek; uslamlamalarında, ulaştığı sonuçlarda tutarlı olma duyarlığına ulaştırmaktır (Yıldırım 1996).

Matematik eğitimi, ancak 1800’lü yılların ortalarına doğru bir disiplin olarak ele alınmış ve 1850 yılında öğrenciler ve öğretmenler için “Entellektüel Aritmetik” adlı ilk kitap yayınlanmıştır. 1960’lı yılların başında, matematik eğitiminde yapılan devrimle birlikte öğrencilerin hesaplama sürecindeki neden ve niçin sorularının cevaplarını anlamalarına yardımcı olmak üzere yeni fikirler, esaslar ve yaklaşımlar öne çıkarılmıştır (Hacısalihoğlu 2004). Matematik öğretiminde reform ihtiyacı, kökleri çok gerilere uzanmakla birlikte, İkinci Dünya Savaşı sonrası dönemde, özellikle Sputnik yapay uydusunun 1957 yılında Sovyetler Birliği tarafından uzaya fırlatılmasıyla eyleme dönüşmüştür. Matematik programlarının modası geçmiş, donuk, tekdüze bir anlayışa dayandığı, modern gelişmeleri içerik ve yöntem olarak yansıtmadığı görüşü gelişmiş ülkelerde ağırlık kazanmıştır (Yıldırım 1996). Bilimsel ve teknolojik gelişmelerle ortaya çıkan küresel dünyanın yeni gerçekleri, demokrasi ve yönetim kavramlarını farklılaştırmış, öğretim kurumlarını ve içinde bulunduğu koşulları değişime zorlamıştır. Bu gelişmeler, dünyada büyük etki yaratmış ve politika belirleyicilerini ülkelerindeki öğretim sistemlerini yeniden gözden geçirerek yapabilecekleri değişimler üzerinde fikir üretmeye yöneltmiştir (MEB 2005). Bu tartışmalara paralel olarak ülkemizde 1960 ve 70’li yıllar, dünyadaki gelişmelerin de etkisiyle, matematik programının içeriğinde, modern matematik adıyla bilinen önemli program değişikliklerinin yapıldığı ve uygulanmaya konduğu yıllar olmuştur (Altun 2002). 1964’de Türkiye’de “Fen Lisesi Projesi” adı altında “yeni/modern” matematik/fen programı başlatılmış, yeni program 10 yıl içinde Türkiye genelinde yaygınlaştırılmıştır. 1980 sonralarında önce ilkokullar, 1990 başlarında da liselerde kredili sistem yapılandırması sırasında ortaöğretim matematik öğretim programları hedef ve davranışlar açısından geliştirilmiş; Türkiye genelinde, önceki dönemlerde olduğu gibi, ulusal programlar olarak ve yerel değişiklikler yapılmadan uygulanmaya başlanmıştır (Ersoy 2004).

1980 ve 90'lı yıllarda program geliştirme çalışmalarında ilgi içerikten ziyade metodolojiye yönelmiştir. Matematikten yararlanmanın yolunun, onun öğreniliş biçiminden geçeceği düşüncesi öne çıkmış, bu amaçla yurt içinde ve dünyada matematik öğretimi ile ilgili birçok yeni proje başlatılmıştır (Altun 2002). Okullarda matematik öğretimi ve eğitimi alanında son yarım yüzyılda bir dizi yenilik hareketinin başlatıldığı, bazılarının zaman içinde yeniden şekillendirilerek ve geliştirilerek sürdürüldüğü görülmektedir (Ersoy 2004). Ülkemizde de son dönemlerde MEB bünyesinde ders programlarının yenilenmesi çalışmaları ağırlık kazanmış ve 2005 yılında ortaöğretim matematik dersi öğretimi programında çeşitli değişiklikler yapılmıştır. Öğrenciler, bu programın sonunda:

1. Matematiksel kavramları ve sistemleri anlayabilecek, bunlar arasında ilişkiler kurabilecek, günlük hayatta ve diğer öğrenme alanlarında kullanabilecektir.
2. Matematikte veya diğer alanlarda, ileri bir eğitim alabilmek için gerekli matematiksel bilgi ve becerileri kazanabilecektir.
3. Tüme varım ve tümden gelim ile ilgili çıkarımlar yapabilecektir.
4. Matematiksel problemleri çözme süreci içinde, kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir.
5. Matematiksel düşüncelerini, mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminoloji ve dili doğru kullanabilecektir.
6. Tahmin etme ve zihinden işlem yapma becerilerini etkin olarak kullanabilecektir.
7. Problem çözme stratejileri geliştirebilecek ve bunları günlük hayattaki problemlerin çözümünde kullanabilecektir.
8. Model kurabilecek, modelleri sözel ve matematiksel ifadelerle ilişkilendirebilecektir.
9. Matematiğe yönelik olumlu tutum geliştirebilecek, özgüven duyabilecektir.
10. Matematiğin gücünü ve ilişkiler ağı içeren yapısını takdir edebilecektir.
11. Entelektüel merakını ilerletecek ve geliştirebilecektir.

12. Matematiğin tarihî gelişimi ve buna paralel olarak insan düşüncesinin gelişmesindeki rolünü ve değerini, diğer alanlardaki kullanımının önemini kavrayabilecektir.
13. Sistemli, dikkatli, sabırlı ve sorumlu olma özelliklerini geliştirebilecektir.
14. Araştırma yapma, bilgi üretme ve kullanma gücünü geliştirebilecektir.
15. Matematik ve sanat ilişkisini kurabilecek, estetik duygularını geliştirebilecektir.

Matematik eğitimcileri matematiksel bilgiyi kavramsal bilgi ve işlemsel bilgi olarak ikiye ayırmayı faydalı görmektedirler. Kavramsal bilgi birey tarafından içsel olarak ve o anda sahip olduğu bilgiye bağlı olarak oluşturulmuş ilişkilerden oluşur. İşlemsel bilgiler ise rutin matematiksel soruları yapmakta kullanılan kural ve işlemlerle matematiksel bilgiyi temsil etmekte kullanılan sembolleri içerir ve aralarında mantıksal bağlar vardır ancak kişinin bunları uygulayabilmesi için mantıksal nedeni anlaması zorunluluğu yoktur. Kavramsal bilgide anlam önemlidir. Bu anlam kişinin mevcut bilgilerini kullanarak yeni bilgiyi açıklamasıdır. Matematik öğrenmek için hem işlemsel hem de kavramsal bilgiye ihtiyaç vardır. Kavramsal bilgi işlemsel bilgiye anlam kazandırarak ona destek olur (Toluk ve Olkun 2003) .

İşlemsel bilgi daha çok ezberlemeye dayalı öğrenilirken kavramsal bilgi anlamayı gerektirir. Hatta ezberlenen işlemsel bilgilerin çokluğu ve kolay hatırlanabilmesi bile onların ne derecede kavramsal bilgi ile desteklendiklerine ve ne derece birbirlerine eklemlendiklerine bağlıdır. O halde matematiksel bilgiyi anlamanın bir koşulu işlemsel ve kavramsal bilgilerin birbirleri ile entegre olmasıdır (Toluk ve Olkun 2003).

Matematikte işlem ve kavramlar arasındaki ilişkilerin öğrenciler tarafından sezilmesi ve görülmesi; problemlerin, öğrenciler tarafından görüş ve seziş yoluyla çözülmesi, problemlerin çözümünde, düşünme yolunun geliştirilmesi, matematik öğretiminde, matematiğin doğası gereği göz önüne alınacak en önemli yaklaşımlar arasında yer almalıdır (MEB 2005).

Problem çözme matematiğin odak noktasıdır denilebilir. Şöyle ki; matematiğin tarihi gelişimine bakıldığında matematiğin insanların gündelik hayatta karşılaştıkları sorunları çözme isteğinden doğduğu görülmektedir. Problem; kişide çözme arzusu uyandıran ve çözüm prosedürü hazırda olmayan fakat kişinin bilgi ve deneyimlerini kullanarak çözebileceği durumlara denir (Toluk ve Olkun 2003).

Çağımızın seçkin matematikçilerinden G. Polya bir buluş sanatından söz etmekte, bu sanatın bir yöntem olarak matematik öğretiminde kullanılabileceğini savunmaktadır. Ona göre matematik, bir yığın hazır bilgi değil, çocuğun arayışına açık bir problem çözme etkinliğidir. Polya’nın öğretim stratejisini oluşturan noktaları başlıca dört adıma indirgeyebiliriz:

- Birinci adım: Probleme duyarlılık kazandırma: Öğrenciyi problem oluşturma, verilen bir problemi anlama çabası içine sokmak.

- İkinci adım: Çözüm arama: Probleme ilişkin veri ve bilgileri belirlemek, ilişkiler kurmak; gerekirse problemi ana bölümlerine indirgeyerek basitleştirmek.

- Üçüncü adım: Çözüm getirme: Sezgisel ussal tahminlerde bulunmak, bilinen çözümlerden yararlanmak, hipotez kurmak, teori geliştirmek.

- Dördüncü adım: Çözümü test etme: Getirilen çözüme karşı alternatif çözümler oluşturmak, karşıt örnekler aramak; en güçlü çözümü seçmek ve yoklamak.

Öğrenci bu yaklaşımda edilgen olmaktan çıkmakta bir araştırmacı davranışı içine girmektedir (Yıldırım 1996).

Matematik derslerinde seçilen problemler, çocuğun günlük hayatıyla ve okulda yaptığı etkinliklerle yakından ilgili olmalıdır. Öğrencilerin, matematiği bu tür problemleri çözerek öğrenmeleri durumunda, hem kazandıkları matematikle ilgili bilgileri daha anlamlı olacak hem de bu bilgileri farklı durumlara uygulamaları kolaylaşacaktır (MEB 2005).

Öğrenciler, problem çözme sürecinde başarı kazandıkça, kendi çözüm yollarına değer verildiğini hissettikçe, kendilerinin de matematiği başarabileceklerine ilişkin güvenleri artar. Böylece öğrenciler, problem çözerken daha sabırlı ve yaratıcı bir tutum içine girerler. Matematiği kullanarak iletişim kurmayı öğrenirler ve üst düzey düşünme becerilerini geliştirirler (MEB 2005).

1.5. Modüler aritmetik

1.5.1. Modüler aritmetik ile ilgili tanımlar

Türk Dil Kurumu tarafından yayınlanan Matematik Terimleri Sözlüğünde (Hacısalihoğlu vd 2000) modüler aritmetik, modülo bağıntısı, modülo m denklik sınıfı ve bölme algoritması kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

modüler aritmetik

m bir pozitif tamsayı olmak üzere sadece $0,1,2,....,m-1$ tamsayılarından oluşan kümede $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma işlemlerini birer iç işlem olarak tanımlamak suretiyle yapılan aritmetik.

modülo bağıntısı

a ve b tam sayıları arasında $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ biçimindeki bağıntı. Anlamı : $a-b$ sayısı, verilen m tamsayısına bölünmektedir.

modülo m denklik sınıfı

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında $a \sim b \Leftrightarrow \left(a-b, m\text{'ye bölünebilir}\right)$

biçiminde tanımlanan $\sim$ denklik bağıntısının ortaya çıkardığı denklik sınıflarından her biri. $a \sim b$ yerine genellikle $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$ yazılır. a’ nın denklik sınıfı $\overline{a}$ ile gösterilirse $\overline{a} = \left\{ b \in \mathbb{Z} \middle| \exists k \in \mathbb{Z}, b = a + mk \right\}$ olur.

bölme algoritması

n ve m tam sayıları verildiğinde, $n = qm + r,\ 0 \leq r < |m|$ olacak biçimde negatif olmayan, q ve r sayıları vardır, sonucu üzerine kurulan algoritma.

1.5.2. Modüler aritmetik ile ilgili özellikler

MEB tarafından 2005 yılında yayınlanan matematik dersi öğretim programı ve kılavuz kitabında modüler aritmetik ile ilgili kazanımlar dikkate alındığında 9.sınıf öğrencilerinin aşağıdaki özellikleri kullanabilmeleri beklenmektedir.

1. $a \equiv a_1 (\operatorname{mod} m)$ ve $b \equiv b_1 (\operatorname{mod} m)$ ise $a + b \equiv a_1 + b_1 (\operatorname{mod} m)$’ dir.
2. $a \equiv a_1 (\operatorname{mod} m)$ ve $b \equiv b_1 (\operatorname{mod} m)$ ise $ab \equiv a_1 b_1 (\operatorname{mod} m)$’dir.
3. $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ için, $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}$
4. $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ için, $\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{ab}$
5. $\mathbb{Z}_m$ de $\oplus$ işleminin şu özellikleri vardır. $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$ için,
    - $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{b} \oplus \overline{a}$
    - $\overline{a} \oplus \left(\overline{b} \oplus \overline{c}\right) = \left(\overline{a} \oplus \overline{b}\right) \oplus \overline{c}$
    - $\overline{a} \oplus \overline{0} = \overline{a}$
    - $\overline{a} \oplus \overline{x} = \overline{0}$ olacak şekilde $\exists \overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ bulunabilir.
6. $\mathbb{Z}_m$ de $\odot$ işleminin şu özellikleri vardır. $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$ için,
    - $\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{b} \odot \overline{a}$
    - $\overline{a} \odot \left(\overline{b} \odot \overline{c}\right) = \left(\overline{a} \odot \overline{b}\right) \odot \overline{c}$
    - $\overline{a} \odot \overline{1} = \overline{a}$
    - $\overline{a} \odot \overline{0} = \overline{0}$
    - $\overline{a} \odot \overline{x} = \overline{1}$ olacak şekilde $\exists \overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ varsa $\overline{x}$’ye $\overline{a}$’nin tersi denir.

7. $\forall\ \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in\mathbb{Z}_m$ için,

   $\overline{a}\odot\left(\overline{b}\oplus\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\odot\overline{b}\right)\oplus\left(\overline{a}\odot\overline{c}\right)$’dir.

8. $m\neq 0$ ve $m,n\in\mathbb{Z}$ olsun. Tek türlü olarak belirli öyle $q,r\in\mathbb{Z}$ bulunur ki $n=qm+r,\ 0\leq r<|m|$ olur. Burada q bölüm, r ise kalandır. Yapılan bu işlem ise bir kalanlı bölme işlemidir.

1.5.3. Modüler aritmetik konusunun tarihsel gelişimi

Britannica ansiklopedisinde belirtildiğine göre modüler aritmetik konusunun eski zamanlarda Çin, Hint ve İslam kültüründe kullanıldığına dair örnekler vardır. Bu örnekler özellikle astronomi olayları ve periyodik olarak tekrarlanan olaylarla ilgili olduğu gibi pür matematikte de kullanım alanları bulmuştur. 3.yüzyılda Sun Zi tarafından Çince kaleme alınan Usta Sun’ın Matematik El Kitabı adlı eserinde;

> “Bizim çok sayıda nesnemiz var ancak kaç tane olduğunu bilmiyoruz. Eğer üçer sayarsak iki tane kalır, beşer sayarsak üç tane kalır ve yedişer sayarsak iki tane kalır ise kaç tane nesnemiz vardır?”

sorusu sorulmuştur. Günümüzde ders kitaplarında da birçok uygulamasını bulduğumuz çinli kalan teoreminin alt yapısında modüler aritmetik kavramının yattığı ortadadır.

Modüler aritmetik konusunu sistemli bir şekilde ele alarak birçok özelliğini bulan Carl Friedrich Gauss’tur. Cebirde sıklıkla kullanılan $a\equiv b\left(\mathrm{mod}\,m\right)$ gösterimini olağanüstü bir şekilde kullanmıştır. Gauss’ un şaheser kitaplarından ilki olan ve 1801 yılında yayınlanan Disquisitiones Arithmeticae’ nin ilk üç bölümü denklik modülleri üzerinedir (Dönmez 2005).

1.5.4. Modüler aritmetik konusunun uygulama alanları

Modül ve modüle göre denklik kavramının en seçkin uygulamaları hesap makinelerinin dahi almadığı bazı sayılarla ilgili işlemsel sonuçlar elde etmede kullanılmalarıdır (Altun 2007).

Modüler aritmetik, özellikle diyofant denklemlerinin tamsayı çözümlerinde temel araç olduğundan sayılar teorisinde oldukça önemlidir. Konunun genellemeleri, modern cebirin önemli bölümlerinin gelişmesine ve 19.yüzyılda Fermat'ın Son Teoremini ispat etme girişimlerine yol göstermiştir.

Modüler aritmetik konusunun bilgisayar teknolojisinde, fizikte, kimyada, görsel sanatlarda, müzikte, ekonomide ve tıpta nörologlar tarafından kullanımına dair çeşitli örnekler vardır. Trigonometrik fonksiyonların yardımıyla özellikle ışık ve ses dalgalarının hareketlerini ortaya koyma çalışmalarında da kullanılmaktadır. Aşağıda özellikle iki yaygın kullanım alanı olan barkod ve kriptografi kavramlarından kısaca bahsedilmiştir.

1.5.4.a. Barkod

Verilerin kalın ve ince çubuklarla, bu çubuklar arasındaki boşluklardan oluşan bir çubuklar dizisi ile simgelenmesini sağlayan veri kodlama ve tanımlama tekniği olan barkod sistemi sayesinde günümüzde neredeyse tüm firmalar üretim ve satış bilgilerini bilgisayar ortamına hızlı, hatasız ve otomatik bir şekilde taşımaktadır. Barkodların doğruluğunu sağlayan ise modüler aritmetik işlemlerine dayalı olarak oluşturulan kontrol kodudur. Yaygın olarak kullanılan barkod tiplerinden biri olan EAN 13 (Uluslararası Mal Numaralama Birliği tarafından verilen 13 haneli kod) kodu 4 bölümden oluşmaktadır.

Şekil 1. 1. EAN 13 barkod tipi

EAN 13 barkod tipinde kontrol kodu hesaplanırken sırasıyla aşağıdaki işlemler uygulanır:

- Kontrol kodu hariç sağdan başlayarak tüm haneler tek çift olmak üzere ikiye ayrılır.
- Tek hanedeki sayılar toplanır ve 3 ile çarpılır.

  7 + 9 + 5 + 2 + 3 + 8 = 34 . 3 = 102
- Çift hanedeki sayılar toplanır.

  9 + 9 + 7 + 3 + 9 + 6 = 43
- 102 + 43 = 145

145 sayısına kontrol kodu olan 5 rakamı eklenirse mod10’da 0 rakamına denk olan 150 sayısı elde edilir. Tarayıcı bir ürünü her taradığında bu işlemi yapar. Hesapladığı kontrol sayısı, okuduğu kontrol sayısından farklıysa, bir şeylerin yanlış olduğu ve ürünün yeniden taranması gerektiği anlaşılır (Yöney 2005).

1.5.4.b. Kriptografi

Kriptografi, köken olarak Yunanca gizli saklı anlamına gelen kryptos ve yazmak anlamına gelen graphein sözcüklerinden türetilmiştir. Kriptografi gizlilik, kimlik denetimi, bütünlük gibi bilgi güvenliği kavramlarını sağlamak için çalışan matematiksel yöntemler bütünüdür.

Tarih boyunca haberleşmelerimizde gizliliği sağlayan, kralların, kraliçelerin ölümüne sebep olup, savaşların seyrini değiştiren kriptografi günümüzde gittikçe popülerleşen ve üniversitelerde ders olarak okutulan oldukça önemli disiplinler arası bir bilimdir. Günümüzde hayatımızın vazgeçilmezleri haline gelen kredi kartı ve bankacılık işlemleri, cep telefonları, şifreli televizyon kanalları, internet ve e-devlet uygulamalarındaki bireysel güvenlik ve gizlilik ihtiyacı kriptografi bilimindeki gelişmeler sayesinde sağlanmaktadır. Eski çağlardan beri geliştirilen şifreleme yöntemlerinde ve bunların çözümlerinde modüler aritmetik, taban aritmetiği ve matris işlemleri sıklıkla kullanılmaktadır.

Modüler aritmetik konusunun bu alandaki kullanımı ile ilgili olarak verilecek tarihi örneklerden biri, M.Ö. 60–50 yılları arasında Galya Savaşları'nda kullanılan ve Sezar şifresi adı verilen şifreleme sistemidir. Düz alfabe harflerinin yerlerinin sola ya da sağa doğru aynı sayıda kaydırılmasıyla elde edilmektedir.

Düz Alfabe
A B C Ç D E F G Ğ H I İ J K L M N O Ö P R S Ş T U Ü V Y Z
Şifre Alfabe
Ç D E F G Ğ H I İ J K L M N O Ö P R S Ş T U Ü V Y Z A B C

Görüldüğü gibi şifre alfabe, düz alfabenin üç harf sola kaydırılmış halidir. Bu şifre alfabe ile " MODÜLER" kelimesinin "ÖRGZOĞT" şeklinde şifrelenmesi gerekirdi. Sezar tarzında olan kaydırma şifrelerinin olası şifre alfabe sayıları oldukça azdır. Örneğin, Türkçe alfabeyi 29 ve 29'un katları kez aynı yönde kaydırdığımızda bize yine alfabenin kendisini verecektir. Dolayısıyla şifreleme ve şifre çözme işlemleri için dilimizde mod29' da yapılan işlemler kullanılmaktadır (Akyıldız vd 2007).

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Kaynak özetleri, modüler aritmetikte öğrenme güçlükleri ve matematikte öğrenme güçlükleri ile ilgili ülkemizde yapılan çalışmalar olmak üzere iki başlık altında incelenmiştir.

2.1. Modüler aritmetikte öğrenme güçlükleri ile ilgili araştırmalar

Bu kısımda modüler aritmetik konusunun öğretiminde karşılaşılan zorluklar ile ilgili yapılan bazı araştırmalar incelenmiştir.

Wenzelburger (1974), "Bilginin transferi için matematikte sözlü aracılar" (Verbal Mediators in Mathematics for Transfer of Learning) adlı doktora tez çalışmasında sınıf ortamındaki matematiksel kavramları öğrenme sırasında oluşabilecek bilgi transferlerinin seviyesi üzerinde, seçilmiş sözlü aracıların etkisini araştırmıştır. Bilgi transferi problemini; önceden öğrenilmiş konu, davranış, anlama ve yeteneklerin sonradan oluşan durumlarda davranışları nasıl etkilediği konusuyla ilgili bir endişe olarak tanımlamıştır. Çalışmada 104 yedinci sınıf öğrencisine modüler toplama ile ilgili broşürler hazırlanarak yönerge şeklinde verilmiştir. Kural tipleri, çalışılmış örneklerin sayısı ve konuya giriş sırasında öğrencilerde ön bilgilerin hazır bulunup bulunmaması çalışmanın sonuçlarını etkilemiştir. Yönergeden sonra konular; uzmanlaşma, genelleştirme ve benzerliklerden sonuç çıkarma olmak üzere üç transfer tipi için test edilmiştir. Öğrencilere saat aritmetiği ve mod 5'de toplama işlemi tablosu örneklerle gösterilmiştir. Çalışmada, uzmanlaşma olarak mod 5'de ki toplamadan mod 4 ve mod 3'te ki toplamaya geçiş, genelleştirme olarak mod 5'ten mod n'ye geçiş ve benzerliklerden sonuç çıkarma olarakta mod 5'in toplama işleminden çarpma işlemine geçiş olarak belirlenmiştir. İki aşamadan oluşan çalışmanın ilk kısmı olan yönergelerin uygulanması 3 gün ve transfer tiplerinin test edilmesi ise 2 gün olmak üzere 5 günde çalışma tamamlanmıştır.

Myerscough *et al.* (1996) çalışmalarında şifreleme konusunu lise sınıflarında sunmuşlardır. İlk olarak harflerin sola ya da sağa kaydırılmasıyla elde edilen Sezar şifresini tanıtmışlardır. Modül 12 kullanılarak saat aritmetiği işlemleri yapılmış ve şifreleme ile ilgili olarak modüler aritmetiğin nasıl kullanıldığı mod 26' da gösterilmiştir. Son olarak ilgi çekici alıştırmalar çözülerek modüler aritmetikteki lineer dönüşümler sunulmuştur. Myerscough *et al.* (1996) şifreleme aktiviteleri ile ilgili yaptıkları çalışmada öğrencilerde merak duygusu uyandırarak şifreyi çözmelerini sağlamışlardır. Öğrencilerin şifreyi çözmede zorlandıkları anlarda ipucu vererek onları yönlendirmişlerdir. Yapılan çalışmada araştırmacılar bazı sınıfların şifreyi çözmede zorlandıklarını, bazılarının öğretmen ipucu vermeden şifre hakkında yorum yapmadıklarını fakat birçoğunun şifreyi çözmede inatçı ve başarılı olduğunu söylemişlerdir. Bu aktivitelerin farklı öğrenme ve öğretme tekniklerine kolaylıkla uyarlanabileceği, öğrencilerin çoğunluğu için uygun olduğu ve keşfetmeyi cesaretlendireceği belirtilmiştir.

Johnson (1998), "denklik sınıflarını kullanarak cebirsel düşünceye hazırlık yapmak" (Paving the Way to Algebraic Thought Using Residue Designs) isimli çalışmasında Brynn Foggie isimli bir sekizinci sınıf öğrencisinin denklik sınıfları ile ilgili bir matematiksel araştırma projesindeki çalışmalarından bahsetmiştir. Modüler aritmetikteki skaler çarpımdan elde edilen kalanlara dayanan denklik sınıflarının matematikteki ilgi çekici kavramlardan olduğu ama nadiren orta dereceli matematik sınıflarında anlatıldığını ifade etmiştir. Öğrencilerin denklik sınıfları ile çalışırken hem sayısal ve simgesel temsiller arasındaki ilişkileri inceleyebileceğini, hem de matematiksel becerilerine olan güvenlerinin gelişeceğini belirtmiştir. Ayrıca denklik sınıfları ile ilgili bir çalışmanın cebir ve sayılar teorisinin temel kavramlarına öğrencilerin başlangıç yapabilmesi için mükemmel bir potansiyele sahip olduğunu Locke (1972)'den aktarmıştır. Çalışma sırasında The Geometer's Sketchpad, TI-82 hesap makinesi ve BASIC programından faydalanılmıştır. Öğrenciler tarafından çalışma sırasında [n:k] şeklinde yeni bir notasyon geliştirilmiştir. Çalışmaya başlamadan önce öğrencilere 1 hafta araştırma yapmaları için süre verilmiş, ardından sınıf içi tartışmalar, problem çözme etkinlikleri, bireysel ve takım halinde ödevlendirmeler yapılmış ve sonunda elde edilen verilen genelleştirilmesiyle çalışma tamamlanmıştır.

Caballero and Bruno (2006), "Matematik Öğretiminin Kriptolojik İlerlemesi" (A cryptological way of teaching mathematics) adlı makalelerinde bilgisayar bilimleriyle yakından alakalı olduğu görülen ve oldukça ilgi çeken bir eğilimi, kriptolojiyi ele almışlardır. Kriptolojinin, birçok öğrenci tarafından zor olarak nitelenen matematik konuları olan fonksiyonlar, matrisler, modüler aritmetik, kombinatorik, denklem çözümleri ve ispat etme kavramlarını farklı sınıf seviyeleri ile tanıştırmanın büyüleyici bir yolu olduğunu belirtmişlerdir. Gizli şifreleri kırmak veya üretmekle ilgili birçok farklı kriptografi ve modern kriptoanaliz uygulamalarının öğrencilerin birtakım cebir, analitik ve istatistik kavramlarını anlayarak kendilerini geliştirmeleri için önemli ve matematik öğrenme içinde motive edici bir kaynak olduğunu belirtmişlerdir. Çalışmalarının matematik müfredatını zenginleştirmek ve öğrenciler arasında matematiğin popülerliğini arttırmak olmak üzere iki ana amacı olduğunu ifade etmişlerdir. Bilgisayar bilimlerindeki hızlı yükselişin matematik öğretimi için büyük bir fırsat olduğunu belirtmişlerdir. Araştırmacılara göre matematik derslerinde kriptoloji konusu için ön hazırlık yaparken, öğretmenler başlıca iki soruyu cevaplamak zorundadırlar: "Ne öğretmeli ve nasıl öğretmeli?". İlk sorunun cevabı olarak özellikle kriptoloji uygulamalarının çoğunlukla sunulduğu modüler aritmetik konusundaki bilgileri olmak üzere öğrencilerin ilkokulda edindikleri matematiksel bilgilerinin hesaba katılarak sınıfın homojenliğinin sağlanması gerektiğini vurgulamışlardır. Diğer sorunun cevabı olarak derslere kriptografi tarihi ya da yaygın kriptografi örnekleri ile başlayıp matematik derslerini bitirip bilgisayar kullanımına geçiş olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Çalışma fonksiyonlar, asal sayılar, vektörler, eğriler, istatistik, denklemler ve kanıtlarla ilgili kriptografi örnekleri ile sonlandırılmıştır.

Güler (2007), modüler aritmetik konusunun öğretiminde şifreleme aktivitelerinin matematik başarısına etkisi adlı yüksek lisans tez çalışmasında araştırma modeli olarak ön test–son test kontrol gruplu model kullanmıştır. Seçilen öğrencilerin kişisel özelliklerini, ailelerinin içinde bulundukları sosyoekonomik durumlarını, anne babalarının eğitim düzeylerini tespit etmek amacıyla kişisel bilgi anketi uygulanmıştır. Matematik öğretmeni aynı olmak üzere kontrol grubu öğrencileriyle yapılan öğretimde geleneksel öğretim metoduyla öğretim gerçekleştirilmiş, deney grubu öğrencileriyle yapılan öğretimde ise kaynak olarak önceden dağıtılmış şifreleme aktiviteleriyle ders akışı uygulanmış, grup çalışmalarına ve bulmacalara yer verilmiştir. 25 soruluk bir matematik testi, matematik tutum ölçeği ve öğrenci bilgi formu anket sorularının değerlendirilmesi sonucunda modüler aritmetik konusunun öğretiminde şifreleme aktivitelerinin kullanıldığı öğretimde, geleneksel öğretim metoduna göre başarının daha olumlu yönde olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca şifreleme aktiviteleri ile ders işlemenin daha eğlenceli olduğu ve öğrencilerin bu tür öğrenme hakkındaki görüşlerinin olumlu olduğu ifade edilmiştir.

2.2. Matematikte öğrenme güçlükleri ile ilgili araştırmalar

Bu kısımda matematik kavramlarında karşılaşılan öğrenme güçlükleri ile ilgili olarak ülkemizde yapılan bazı araştırmalar ve bu araştırmalardan elde edilen sonuçlar kısaca özetlenmektedir.

Baki (1998) ortaöğretim öğrencilerinin cebirle ilgili işlem yanılgılarını tespit etmek, öğretmenlerin bu yanılgılar hakkındaki görüş ve düşüncelerini ortaya koymak amacıyla yaptığı araştırmada anket yöntemi ile öğrencilerin cebirsel işlem yapma ve akıl yürütme yanılgıları ve öğretmenlerin konu ile ilgili deneyimlerini belirlemeye çalışmıştır. Bu araştırma 20 matematik öğretmenini ve bu öğretmenlerin 8. ve 11. sınıf öğrencilerini kapsayan bir özel durum çalışmasıdır. Elde edilen verilere göre öğrencilerin parantez alma, işaret hatası, sayısal ifadeler ile ilgili akıl yürütme, sözel ifadeleri cebirsel ifadelere dönüştürme ve denklem çözme gibi konularda yanılgıları olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca deneyimli öğretmenlerin öğrencilerin yapmış oldukları hatalar ile ilgili birden çok sebep gösterebildikleri halde deneyimsiz öğretmenlerin genelde sadece bir tek neden gösterdiği belirtilmiştir.

Trigonometri konuları hakkındaki öğrencilerin düşünceleri ve trigonometri konularının işlenişi, öğrencilerin bu konuda hangi yanılgılara sahip oldukları ve alınabilecek tedbirleri belirlemek amacıyla Doğan (2001) tarafından bir doktora tezi hazırlanmıştır. Araştırmacı tarafından Konya ili ilçe merkezlerindeki genel liselerde öğrenim gören 1316 lise 2.sınıf öğrencisine çoktan seçmeli olarak hazırlanmış trigonometri düşünceler anketi, trigonometri bilgi formu ve trigonometri teşhis testi olmak üzere üç test uygulanmıştır. Öğrencilerin trigonometri konularını mecbur oldukları için okudukları, hayatta bir işlerine yaramayacağı, okutulmasının bile anlamsız olduğu gibi kaygı verici düşünceler içinde oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin trigonometrik kavramları karıştırdıkları, trigonometrik denklemlerin çözümlerinde, özdeşliklerin kullanılmasında ve birim çemberin kullanılmasında ciddi güçlükler içinde oldukları belirtilmiştir. Geometrik şekillere dayalı trigonometri sorularında öğrencilerin başarısız oldukları, formüllere uygulayabilecekleri soruları daha kolay yaptıkları ortaya çıkmıştır.

Demetgül (2001) lise 2. sınıf öğrencilerinin trigonometri konusunda sahip oldukları kavram yanılgılarını tespit etmek ve tanı koyucu test geliştirmek amacı ile bir yüksek lisans tez çalışması yapmıştır. Araştırmacı öğretmen yöntemi ile sınıf içi gözlemlerden ve diğer okullarda görev yapan 6 matematik öğretmeni ile mülakat yapıldıktan sonra geliştirilen tanı koyucu teşhis testleri 280 lise 2 öğrencisine uygulanmıştır. Elde edilen verilere göre öğrenciler esas ölçü, açı ölçülerinin birbirine dönüştürülmesi, trigonometrik fonksiyonların açı değerlerinin bölgelere göre işaretleri, birim çember, ters trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik denklem çözümleri konularında kavram yanılgılarına sahiptirler. Trigonometri konusunda ezberleyerek öğrenmeye çalışmanın sıklıkla yapıldığı, öğrencilerin formülleri uygularken eksik olarak uyguladıkları sonuç olarak hatalı değerler elde ettikleri tespit edilmiştir. Ayrıca öğrenciler trigonometrik fonksiyonların terslerini bulurken reel sayıların çarpmaya göre tersleri bulunurken yapıldığı gibi $f^{-1} = 1/f$ yazmışlardır. Öğrencilerin başarılarını olumsuz yönde etkileyen faktörlerden biri olan kavram yanılgılarının belirlenmesi amacıyla hazırlanan tanı koyucu testlerin matematik öğretmenleri tarafından kullanılması ve bu yanılgıların giderilmeye çalışılmasının öğrenci başarısını arttıracağı belirtilmiştir.

Ertekin (2002) denklem öğretimindeki yanılgıların tespiti ve alınması gereken tedbirlerin neler olacağı ile ilgili yaptığı yüksek lisans tez çalışmasında 7.sınıflardan 553 ve 8.sınıflardan 517 öğrenciye bir teşhis testi uygulamıştır. Bu araştırma ile öğrencilerin denklemleri çözmede, özellikle "=" işaretinin anlamı, harfli ifadeler, toplama işaretinin anlamı, kesirler, işlem önceliği, dağılma özelliği, yönlü sayılar gibi konulardaki bilgi eksikliklerinden kaynaklanan güçlük ve yanılgılarının olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin denklem çözme başarılarını; bilinmeyenin eşitliğin iki tarafında da bulunması, bilinmeyenlerin yazılış sırası gibi durumların etkilediği ayrıca sayılarla bilinmeyeni toplama ve çıkarma işlemi ile bir araya getirme hatasına düştükleri, rasyonel katsayı içeren denklemleri doğru çözme oranının ise oldukça düşük olduğu ortaya çıkmıştır.

Şenay (2002) yüksek lisans tez çalışmasını üslü ve köklü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptıkları hatalar ve yanılgıları tespit etmek amacıyla yapmıştır. Genel liselerin lise 1.sınıflarında öğrenim görmekte olan 729 öğrenciye çoktan seçmeli olarak hazırlanan teşhis testi uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin tabanları aynı olan üslü ifadeler veya üsleri aynı olan üslü ifadeler ile ilgili kuralları karıştırdıkları, negatif üs kavramını öğrenemedikleri, üssün işaretinin tabandaki sayının işaretine etkisinin olduğu düşüncesine sahip oldukları, köklü sayılarla ilgili çok sayıda yanılgılara sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Ersoy vd (2002) tarafınca geliştirilen Keşfederek, Uygulayarak Logaritma Öğretimi Etkinlikleri olan KULE, 2001–2002 öğretim yılında 9. ve 10. sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Araştırma örneklemi üzerinde yapılan kontrol gruplu ön-test ve son-test deneyi sonucu deney ve kontrol grupları arasında, öğrencilerin logaritma kavramı başarısı yönünden anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Ancak öğrencilerin KULE'yi faydalı ve sosyal yönden geliştirici buldukları, dersi kolay, zevkli ve anlamlı bir biçime dönüştürdüğü belirtilmiştir.

Doğan vd (2002), öğrencilerin lisede okudukları; özel fonksiyonlar, fonksiyonlarda limit ile fonksiyonlarda türev ve uygulamaları konularında ne kadar hazır hale geldiklerini tespit amacına yönelik olarak ÖYS’de sorulan sorular içerisinden araştırma konuları ile ilgili olarak 18 soruluk çoktan seçmeli bir test hazırlamışlardır. Hazırladıkları bu testi 2001–2002 öğretim yılında ilköğretim matematik öğretmeni adayı olan 189 öğrenciye uygulamışlardır. Araştırma sonucunda öğrencilerin; fonksiyonlarda limit konusunda %19, fonksiyonlarda türev ve uygulamaları konusunda %6 oranında doğru cevap verebildikleri, doğru cevap ortalamasının 2,2 olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin lisede öğrenmeleri gereken konuları öğrenmeden geldikleri için üniversite programlarının ciddi şekilde aksadığı ifade edilmiştir.

Güveli ve Güveli (2002) lise 1 matematik dersi müfredatının temel konularından olan bağıntı, fonksiyon tanımı, bire-bir ve örten fonksiyon konularındaki kavram yanılgılarını tespit etmek amacıyla bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada çeldiricileri ve konu hakkındaki muhtemel kavram yanılgılarını içerecek şekilde hazırlanan çoktan seçmeli bir test rastgele seçilen 120 kişilik öğrenci grubuna uygulanmıştır. Öğrencilerde her bağıntının fonksiyon olduğu ve birebirlik ile örtenlik kavramları arasında bir ilişki olduğunu zannetme gibi kavram yanılgılarının olduğu tespit edilmiştir.

İlköğretim 8.sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğreniminde yaptıkları hata ve yanlış anlamaları ortaya koymak için Dede vd (2002) bir çalışma yapmışlardır. Araştırma özel bir dershanenin 8 sınıf öğrencilerine uygulanmıştır. Araştırmanın verileri, alt maddeleriyle birlikte toplam 26 adet açık uçlu soru ve bu sorulara ilişkin 15 öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Elde edilen verilerin analizi sonucunda, öğrencilerin değişken kavramının öğreniminde yaptıkları hata ve yanlış anlamaları aşağıdaki şekilde sınıflandırmak mümkündür:

- Değişkenin farklı kullanımlarını bilememe,
- Değişkenin genelleme yapmadaki rolünün ve öneminin farkında olamama,
- Değişkenin matematiğin alt bilim dallarındaki temsil yeteneğini bilememe ve yorumlayamama,
- Matematikte daha önceden öğrenilen bilgilerin yanlış transferi,
- Değişken kavramıyla ilgili işlem yapabilme yetersizliği.

Erbaş ve Ersoy (2002) lise öğrencilerinin eşitliklerin çözümündeki başarıları ile olası kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmada farklı lise tiplerinin hazırlık ve lise 1. sınıflarında okuyan 217 öğrenciye 28 soru ve iki bölümden oluşan toplam 56 soruluk bir test uygulamışlardır. Öğrencilerin başarıları arasında okul tipi, sınıf düzeyi ve bir önceki yıl matematik notuna göre anlamlı farklar bulunurken, cinsiyete göre karşılaştırıldığında anlamlı bir fark bulunmamıştır. Ayrıca düşük başarı seviyesindeki öğrencilerde ve okullarda yapılan hataların daha çok yanlış kurallamalar odaklı iken, orta ve yüksek başarı seviyesinde hataların daha çok aritmetiksel veya işlemsel olduğu ortaya çıkarılmıştır. Öğrenci hatalarının başarı düzeyinin göreceli olarak daha yüksek olduğu okullarda daha iyi teşhis edileceği belirtilmiştir.

Arıkan ve Özer (2002) yaptıkları çalışmada lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerini ve öğrencilerin ispat düzeylerini incelemişlerdir. 110 lise 2.sınıf öğrencisine açık uçlu sorular sorulmuş ve 3 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin verilen bir ifadenin doğruluğunu göstermek için özel sayısal değerler verdikleri, böylece bu ifadenin doğruluğunu gösterdiklerine inandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları saptanmıştır.

Şandır vd (2002) ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin mutlak değer kavramındaki performanslarını ve kavramsal yanılgılarını ortaya koymak amacıyla yaptıkları araştırmada 8 açık uçlu sorudan oluşan bir kavramsal test ile 11 açık uçlu sorudan işlemsel testi 67 9.sınıf öğrencisine uygulamışlardır. Elde edilen veriler sonucunda mutlak değer konusundaki kavramsal sorularda işlemsel sorulara oranla performansın daha düşük olduğu görülmüştür. Kavramsal yanılgıların en önemli nedenlerinin mutlak değerin tanımının ve geometrik yorumunun anlaşılamaması olduğu, öğrencilerin geçmiş konulardan çok fazla kavram yanılgısı ve yanlış algılamalarla geldiği ve bunun yeni konunun öğrenilmesini de zorlaştırdığı ifade edilmiştir.

Dikici ve İşleyen (2003) bağıntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüğü ile öğrencinin matematiğe yönelik tutumu, matematik benlik duygusu ve kullanılan öğretim metotları arasında bir ilişkinin olup olmadığını araştırmak amacıyla yaptıkları çalışmayı 248 lise 1 öğrencisine uygulamışlardır. Verileri toplamak için araştırmacılar tarafından geliştirilen anketler kullanılmış ve bu verilerin analizinde varyans analizi, korelasyon analizi ve aritmetik ortalama kullanılmıştır. Elde edilen verilerin değerlendirilmesi sonucunda bağıntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüğü ile öğrencinin matematiğe yönelik tutumu, matematik benlik duygusu ve kullanılan öğretim metotları arasında anlamlı bir ilişki bulunmuştur.

Dede ve Argün (2003) değişken kavramının öğretiminde harf sembollerin farklı kullanımlarının belirlenmesi ve bu farklı kullanımlardan kaynaklanan karışıklıkların giderilmesi amacıyla yaptıkları çalışmada matematik öğretmenliği son sınıfında okuyan 35 öğrenciye bir etkinlik uygulamışlardır. Bu etkinlikte, öğrencilerin harf sembollerin farklı kullanımlarına yönelik bilgi düzeylerini belirlemek üzere 12 sorudan oluşan bir çalışma kağıdı cevaplamaları için verilmiş daha sonra da sınıfta bir tartışma ortamı oluşturulmuştur. Bu çalışmayla öğrencilerin matematik eğitiminin en temel amaçlarından birisi olan eleştirel ve alternatifli düşünebilme yeteneklerinde bazı eksikliklerin olduğu ortaya çıkarılmıştır. Ayrıca matematik öğretmeni adayı olan bu öğrencilerin harf sembollerin farklı kullanımları hakkında yetersiz ve eksik bilgiye sahip oldukları tespit edilmiştir.

Yıldırım (2003) öğrencilerin lise 1 fonksiyonlar konusunda sahip oldukları kavram yanılgılarını tespit etmek ve tanı koyucu test geliştirmek amacıyla yaptığı yüksek lisans tez çalışmasının birinci aşamasında tanı koyucu testin geliştirilmesi ve pilot çalışmasını, ikinci aşamasında ise geliştirilen testin uygulanması ve elde edilen verilen analizini yapmıştır. İkinci aşamada geliştirilen teşhis testi 188 lise 1 öğrencisine uygulanmıştır. Değerlendirme sonucunda öğrencilerin sahip olduğu önemli kavram yanılgıları;

- İki kümenin kartezyen çarpımının her alt kümesinin fonksiyon olabileceği,
- Tanım, değer ve görüntü kümelerinin birbirine karıştırıldığı,
- Örten fonksiyon ve içine fonksiyon kavramlarının karıştırıldığı, her fonksiyonun birebir ve örten bir yapı içinde olması gerektiği gibi bir düşüncede oldukları

- Verilen bir grafiğin fonksiyon olup olmayacağı değerlendirilirken kullanılan dik doğrular testi olarak bilinen yöntemin ya da fonksiyonların tersleri bulunurken kullanılan pratik bilgilerin altında yatan manaları bilmedikleri

ortaya çıkarılmıştır. Matematik eğitiminin her aşamasında tanı koyucu testlerin kullanılarak öğrencilerin kavram yanılgılarının belirlenmesi ve bunlara uygun öğretim teknikleri ve materyaller geliştirilmesi gerektiği belirtilmiştir.

Durmuş (2004) ortaöğretim matematik derslerinde zor olarak algılanan konuları belirlemek ve bu zorlukların arkasında yatan nedenleri ortaya çıkarmak amacıyla yaptığı çalışmayı ilköğretim bölümü matematik, fen bilgisi ve sınıf öğretmeni adayı olan 481 üniversite 1.sınıf öğrencisine uygulamıştır. Araştırmacı tarafından, çalışmada kullanılmak üzere ortaöğretim matematik konularını içeren 28 maddelik öğrenme güçlükleri anketi geliştirilmiştir. Anketteki her bir konunun ayrı ayrı güçlük indeksleri hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Zorluk nedenlerini ortaya koymak için bu öğrencilerden 20’si ile görüşme yapılmıştır. Kavramların soyut olmasının ve motivasyon eksikliğinin zorluk sebepleri olduğu ortaya çıkmıştır.

Akkuş (2004) logaritma konusunun öğretiminde öğrenci yanılgılarını belirlemek amacıyla yaptığı yüksek lisans tez çalışmasında 10.sınıf öğrencisi olan 475 öğrenciye bir teşhis testi uygulamıştır. Verilerin değerlendirilmesi sonucunda öğrencilerin logaritma fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini kavrayamadıkları, pozitif sayıların logaritmalarını pozitif olarak düşündükleri, “negatif sayıların logaritmaları tanımsızdır” ifadesinden yola çıkarak bir sayının logaritmasının negatif olamayacağı şeklinde bir yanılgıya sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Ayrıca bir tek bilginin doğrudan kullanıldığı sorularda veya bağıntıların hatırlanmasında öğrencilerin başarısının % 95’e kadar değiştiği halde, bilgilerin birden fazlasını birlikte kullanma noktasında başarısız oldukları, bilgi transferi yapamadıkları, ön-şart oluş ilişkilerine dayalı sorularda başarısız oldukları ve başarı oranının % 12’ye kadar düştüğü ifade edilmiştir.

Baki ve Kartal (2004), lise öğrencilerinin cebirsel bilgilerinin doğasını, işlem ve kavram bilgisi bağlamında değerlendirmek amacıyla bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada bağıntı, fonksiyon, işlem, sayılar, polinomlar, çarpanlara ayırma ve birinci dereceden denklemler gibi konuları içeren işlemsel ve kavramsal bilgi gerektiren 20 soruluk uzun cevaplı yazılı sınavların yanı sıra öğrencilerin cebir bilgilerini karakterize eden bir ölçek beş ayrı lisede 250 lise 2 ve lise 3 öğrencisine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda matematiksel anlamanın öğrencilerin formülleri bilmesi, hesaplamaları doğru yapması ile değil, kavramları, işlemleri anlamasına ve matematiksel düşünmesinin gelişmesine bağlı olduğu belirtilmiştir. Matematiksel öğrenmenin işlem ve kavram bilgisine dengeli bir şekilde yer veren kavramsal öğrenme ile gerçekleşebileceği ifade edilmiştir.

İşleyen (2005) fonksiyon kavramıyla ilgili kavram yanılgılarının tespit edilebilmesi için bir doktora tez çalışması yapmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adayı olan 98 üniversite ikinci sınıf öğrencisi ile yapılan araştırmanın verileri fonksiyon bilgi testi 1, fonksiyon bilgi testi 2, mülakat ve matematiksel tanımları uygulayabilme testi olmak üzere dört farklı ölçekten elde edilmiştir. Verilerin değerlendirilmesi sonucunda öğrencilerin fonksiyonları kavramsal olarak öğrenemedikleri, fonksiyonların çeşitli gösterim tarzları arasında yeterince ilişki kuramadıkları tespit edilmiştir. Lisansüstü düzeyde öğrenim gören öğrencilerinde benzer kavram yanılgıları içinde olduğu belirlenmiştir. Özellikle öğretmen adaylarının öğretecekleri konular hakkında kavram yanılgılarına sahip olmalarının gelecek kuşaklarda çoğu öğrencinin birçok kavram yanılgısına sahip olmasına sebep olacağından öğretmen adaylarının kavram yanılgılarının belirlenmesinin önemli olduğu ifade edilmiştir.

Melemezoğlu (2005) yönlü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptığı hatalar ve yanılgılar üzerine bir araştırma adlı yüksek lisans tez çalışmasında 23 soruluk bir teşhis testini 12–13 yaşlarındaki 300 öğrenciye uygulamıştır. Verilerin analiz edilmesi sonucunda öğrencilerin yönlü sayılarla işlem yapabilme, model oluşturabilme konularında güçlüklerinin ve yanılgılarının olduğu tespit edilmiştir. Bu sorunların temel nedeninin okullarda kavram eğitimine yer verilmemesi olduğu belirtilmiştir. Halen görev yapmakta olan öğretmenlere hizmet içi eğitim kursları ile kavram eğitimi konusunda bilgilendirme çalışmaları yapılması gerektiği önerilmiştir.

Soylu ve Aydın (2006) matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine yaptıkları araştırmada sınıf öğretmeni adayı olan 100 üçüncü sınıf öğrencisine 5 tanesi işlemsel bilgiyi, 5 tanesi de kavramsal bilgiyi ölçen sorular olmak üzere 10 adet açık uçlu sorudan oluşan bir test uygulamışlardır. İşlemsel bilgiyi gerektiren sorulardaki doğru cevap oranı % 73,6 iken kavramsal bilgiyi gerektiren sorularda doğru cevap oranı % 17 gibi düşük bir oranda kalmıştır. Öğrencilerin problemlerdeki kavramlara dikkat etmeden verilen sayılarla hemen aritmetik işlemler yapmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Okullarda işlemsel öğrenmeye ağırlık verildiği görülmekle birlikte kavramsal öğrenme ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesi gerektiği belirtilmiştir.

Duru (2006) bir fonksiyonla onun türevi ve fonksiyonların sürekliliği ile türevlenebilmesi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaştıkları zorlukları tespit etmek amacıyla “durum çalışması deseni” araştırma modeli kullanarak bir çalışma yapmıştır. Araştırmanın örneklemini Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Anabilim Dalında öğrenim gören 52 birinci sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Araştırma 2004–2005 öğretim yılının bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın verileri; fonksiyon ve türevle ilgili işlemsel beceri testi, bir fonksiyonla onun türevi, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlamayla ilgili bilgi testi, bir fonksiyonla onun türevi arasındaki ilişkiyi anlama testi, süreklilik ve türevlenebilme arasındaki ilişkiyi anlama testi ve mülakatlardan elde edilmiştir. Toplanan verilerin değerlendirilmesi sonucunda öğrencilerin birtakım zorluklara sahip oldukları görülmüştür. Bu zorlukların, öğrencilerin ön şart durumundaki bilgileri eksik ya da yanlış bilmelerinden, çoklu gösterimler arasındaki ilişkiyi kuramamalarından, kısıtlı bir sürede çok kompleks olan kavram ve fikirleri özümseyememelerinden, kavramsal anlama yerine işlemsel anlamayı tercih etmelerinden, fonksiyon ve türev kavramlarıyla ilgili hayallerinin sınırlı olmasından kaynaklandığı belirtilmiştir.

Özdemir (2006) ortaöğretimde kompleks sayılarla ilgili kavram yanılgılarını belirlemek ve çözüm önerilerinde bulunmak amacıyla yaptığı yüksek lisans tez çalışmasında 50 maddelik çoktan seçmeli bir testi 483 öğrenciye uygulamıştır. Tarama modelindeki araştırmada elde edilen verilere göre öğrenciler karmaşık sayılar kümesine neden ihtiyaç duyulduğu, *i* sayısının anlamı, *i* sayısı ile reel sayıların karşılaştırılıp karşılaştırılamayacağını bilme konusunda bilgi eksikliklerine sahiptirler. Ayrıca öğrencilerin ikinci dereceden denklemlerin köklerinin bulunması, kareköklü ifadelerin içlerinin negatif olması şeklinde matematikte sorun yaratan durumlar ile karmaşık sayılar arasındaki ilişkiyi tam olarak anlayamadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Cengiz (2006) reel sayıların öğretiminde öğrencilerin yanlışlarını ve yanılgılarını tespit etmek amacıyla bir yüksek lisans tez çalışması yapmıştır. Araştırmanın verileri iki genel lisenin 9.sınıf öğrencileri olan 163 öğrenciye uygulanan rasyonel sayılar bilgi testi, üslü ifadeler bilgi testi ve köklü ifadeler bilgi testi olmak üzere üç farklı ölçekten elde edilmiştir. Araştırma modeli olarak durum çalışması deseni kullanılmıştır. Öğrencilerin rasyonel sayıları sayı doğrusunda gösteremedikleri, bir rasyonel sayı ile bir tamsayıyı çarparken çarpma işlemini dikkate almadan tamsayılı kesir gibi düşünerek bileşik kesre çevirdikleri, işlem önceliğine dikkat etmedikleri belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin üslü ifadeler ve köklü ifadeler konularında yanlışlar ve yanılgılara sahip oldukları ifade edilmiştir.

Tatar (2006) ikili işlem kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi ve 4MAT yönteminin başarıya etkisi isimli bir doktora tezi araştırması yapmıştır. İki kısımdan oluşan araştırmanın birinci kısmında amaç; ortaöğretim öğrencilerinin ikili işlem ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek, ikinci kısmındaki amaç ise ikili işlem ve özellikleri konusunun öğretiminde öğrenme stili ve beyin yarıkürelerinin dikkate alındığı 4MAT öğretim yönteminin etkinliğini belirlemek olduğu ifade edilmiştir. Araştırmanın ilk kısmında durum çalışması deseni kullanılmıştır. Bu kısmın örneklemini Erzurum Ziya Gökalp Lisesi ve Mehmet Akif Ersoy Lisesinde 2004–2005 eğitim-öğretim yılında öğrenim gören sırasıyla 79 ve 39 dokuzuncu sınıf öğrencisi olmak üzere toplam 118 öğrenci ve 8 ortaöğretim matematik öğretmeni oluşturmuştur. İkinci kısmın örneklemini ise, Erzurum Ziya Gökalp Lisesinin iki farklı şubesindeki 58 dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Şubelerden biri, 4MAT öğretim yönteminin kullanılacağı deney grubu; diğeri ise geleneksel öğretimin yapılacağı kontrol grubu olarak seçilmiştir. Çalışmanın bu kısmında 2005–2006 eğitim-öğretim yılının birinci döneminde 2 hafta süreyle uygulama yapılmıştır. Araştırmanın verileri; “matematik bilgi testi”, “matematik tutum ölçeği”, ikili işlem ve özellikleri bilgi testi” olmak üzere başlıca üç ölçek ve mülakatlardan elde edilmiştir. Öğrencilerin ikili işlem ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirleme aşamasında elde edilen verileri analiz etmek için yüzde ve frekans kullanılmıştır. Ayrıca yapılan mülakatların verileri betimsel analiz ile değerlendirilmiştir. Araştırmanın birinci kısmına ait verilerin analizi sonucunda öğrencilerin çoğunlukla ikili işlemin özelliklerini öğrenmede güçlüklere sahip oldukları tespit edilmiştir. İkinci kısımdaki verilerin analizi sonucunda ise, ikili işlem konusunun öğretiminde 4MAT öğretim yönteminin geleneksel öğretim yöntemine göre daha etkili olduğu belirlenmiştir.

Şandır vd (2007) mutlak değer kavramının öğretilmesine temel teşkil eden aritmetik işlemler, sayıların sıralanması, denklem ve eşitsizlik çözümlerindeki 9.sınıf öğrencilerinin hatalarını ve zorluklarını ortaya çıkarmak amacıyla yaptıkları araştırmada 10 açık uçlu sorudan oluşan bir hazır bulunuşluk sınavını 54 lise 1 öğrencisine uygulamışlardır. Öğrencilerin vermiş oldukları cevapları 0–3 arasındaki puan kriterine göre analiz etmiş ve değerlendirmişlerdir. Elde edilen sonuçlara göre öğrenciler dört işlemde, çarpmanın toplama veya çıkarma üzerine dağılmasında, denklem ve eşitsizlik çözümlerinde çok sık hata yapmaktadırlar. Ayrıca öğrencilerin özellikle irrasyonel sayıların tahmini olarak ondalık gösterimini hesaplayamadıkları, bundan dolayı da bu sayıları sıralayamadıkları tespit edilmiştir. Bu hataların düzeltilmesinin bu konulara bağlı olan mutlak değer gibi konuların öğrenilebilmesi açısından büyük önem taşıdığı belirtilmiştir.

Keçeli (2007), karmaşık sayılarda kavram yanılgısı ve hata ile tutum arasındaki ilişki adlı yüksek lisans tez çalışmasını karmaşık analiz dersini almış çeşitli üniversitelerin matematik ve ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencileri ile gerçekleştirmiştir. Çalışmanın amacı üniversite öğrencilerinin karmaşık sayılar konusundaki kavram yanılgıları, hatalarını, karmaşık sayılara yönelik tutumlarını belirlemek ve öğrencilerin karmaşık sayılara yönelik tutumları ile kavram yanılgıları ve hataları arasında bir ilişki olup olmadığı şeklinde belirlenmiştir. Veri toplama araçları olarak 20 maddelik karmaşık sayılar tutum ölçeği ve 17 maddelik karmaşık sayılar teşhis testi kullanılmıştır. Karmaşık sayılar konusunda üniversite öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları ve hatalar tespit edilmiştir. Bu yanılgı ve hataların daha önce ortaöğretim ikinci sınıf öğrencilerinde karşılaşılan hata ve yanılgılarla benzerlik gösterdiği belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin karmaşık sayılara yönelik tutumları ile karmaşık sayılar konusundaki kavram yanılgıları arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır.

Özçifçi (2007), rasyonel sayıların öğretimindeki hatalar ve alınması gereken tedbirler adlı yüksek lisans tez çalışmasında Konya ve Aksaray illerinin farklı sosyo-ekonomik durumdaki ilçelerinde öğrenim gören 943 ilköğretim 7.sınıf öğrencisine 20 soruluk bir teşhis testi uygulamıştır. Öğrencilerin rasyonel sayıları kavramada, rasyonel sayılar ile işlem yapmada, rasyonel sayıların diğer sayı kümeleri ile olan ilişkilerini ifade etmede, rasyonel sayıları sıralamada, rasyonel sayıların kuvvetlerini almada, işlemlerin karışık olarak verildiği durumlarda işlem sırasını belirlemede tam sayılar konusundaki eksik öğrenmelerden kaynaklanan ciddi yanılgılarının ve hatalarının olduğu tespit edilmiştir.

Akgün (2007) öğrencilerin değişken kavramına yükledikleri anlam, değişken kavramının farklı kullanımları ve değişken kavramının öğreniminde öğrencilerde oluşan kavram yanılgıları ve zorlukları ile ilgili bir doktora tez çalışması yapmıştır. Araştırmanın örneklemini Erzurum il merkezindeki ilköğretim okullarında öğrenim gören 158 8.sınıf öğrencisi oluşturmuş ve araştırmada durum çalışması deseni araştırma modeli kullanılmıştır. Araştırmanın verileri; değişken kavramı ve bu kavramın farklı kullanımları için hazırlanmış olan bilgi testi I, bilgi testi II, öğrencilerin dönem içerisindeki sınav dökümanları ve mülakatlardan elde edilmiştir. Verilerin değerlendirilmesi sonucunda öğrencilerin değişken kavramını anlamada ve farklı kullanımlarını ayırt etmede bazı zorluklara ve kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin değişken kavramı veya harfli ifadelerle işlem yapmada ve değişkenle kelime problemleri arasında ilişki kurmada zorlandıkları tespit edilmiştir.

Ayrıca değişken kavramının kalıcı olarak öğretilmesine yönelik çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde; araştırmanın amacı, problem ve araştırma problemleri, araştırmanın deseni, araştırmanın örneklemi, veri toplama araçları, uygulama, araştırmanın kabul ve sınırlılıkları incelenmiştir.

3.1. Araştırmanın amacı

Günümüzde ilköğretim ve ortaöğretim matematik dersi müfredatında konuların her birinin öğretim süreci, öğrenci ve öğretmen yeterlilikleri, öğrenci hataları ve sahip oldukları yanılgılar çeşitli yöntemlerle belirlenip bilimsel gerçeklere dayalı olarak sonuçlar ortaya konmaya çalışılmaktadır. Araştırmacılar öğrencilerin sahip oldukları hataların ve yanılgıların bilinmesinin ve bunları gidermeye yönelik çalışmalar yapılmasının derslerdeki başarıyı arttıracağını ve kalıcı öğrenmeyi gerçekleştireceğini vurgulamaktadırlar.

Bu araştırmanın amacı ortaöğretim öğrencilerinin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini tespit etmektir. Tespit edilecek öğrenme güçlüklerinin, konunun hedef-davranışlar düzeyinde kavratılması sırasında oluşan sorunların giderilmesinde eğitimcilere kaynak olacağı düşünülmektedir. Ortaöğretim 9.sınıf matematik dersi müfredatında yer alan ve MEB tavsiyesi ile 6 ders saati süre ayrılan “Modüler Aritmetik” konusunda öğrencilerin yaptıkları hatalar ve yanılgıları üzerine henüz ülkemizde bir çalışma yapılmamış olması araştırmanın önemini ortaya koymaktadır.

3.2. Problem

Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusunda öğrenme güçlükleri nelerdir?

3.2.1. Araştırma problemleri

1. Modüler aritmetik konusunda ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin tanımsal öğrenme güçlükleri nelerdir?

2. Modüler aritmetik konusunda ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin işlemsel öğrenme güçlükleri nelerdir?

3. Modüler aritmetik özellikleri konusunda ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin öğrenme güçlükleri nelerdir?

4. Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetikte denklem çözümleri ile ilgili öğrenme güçlükleri nelerdir?

5. Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusu ile bağıntı ve fonksiyon konularının örtüştüğü sorularda öğrenme güçlükleri nelerdir?

6. Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusunu takvim problemlerine uygulama ile ilgili öğrenme güçlükleri nelerdir?

3.3. Araştırmanın deseni

Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusu ile ilgili bilgi eksikliklerini ve yanılgılarını belirlemeye yönelik bu çalışmada derinlemesine veri toplama ihtiyacı olduğu için "durum çalışması deseni (case study design)" araştırmanın modeli olarak belirlenmiştir. Durum çalışmalarında doküman analizi ile birlikte çoğunlukla gözlem ve görüşmeler kullanılır. Burada amaç, duruma ilişkin kesin ve detaylı tanımlamaların yapılmasıdır. Daha derinlemesine bilgi toplayabilmek için birden fazla veri toplama aracının kullanılmasında fayda vardır (Büyüköztürk vd 2008).

3.4. Araştırmanın örneklemi

Bu araştırmanın örneklemini, 2007–2008 eğitim-öğretim yılında Erzurum ili Pasinler ilçesi Pasinler Anadolu Lisesi ve Erzurum Anadolu Lisesinde öğrenim görmekte olan sırasıyla 50 ve 114 9.sınıf öğrencisi oluşturmaktadır.

3.5. Veri toplama araçları

3.5.1. Modüler aritmetik ve özellikleri bilgi testi

Modüler Aritmetik öğretimindeki hatalar, kavram yanılgıları ve öğrenme güçlüklerini ölçmek amacıyla hazırlanan bu test açık uçlu 20 sorudan oluşmaktadır (EK 2). Test hazırlanırken Bloom Taksonomisi göz önüne alınmış; bilgi, kavrama ve uygulama düzeyi sorulardan oluşan sırasıyla 7, 6 ve 7 adet soru öğrencilere yöneltilmiştir.

Araştırmada kullanılan bilgi testi Milli Eğitim Bakanlığının öğretim programındaki kazanımlara uygun olarak hazırlanmıştır (EK 3). Bilgi testi hazırlanırken araştırmacı tarafından hem ilgili literatür hem de Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu tarafından kabul edilen lise 1 matematik ders kitaplarından (Bozkurt vd 2007; Mutlu ve Ercan 2008) yararlanılmıştır.

Testin geçerliliği için bu alandaki uzman kişilerin görüşleri alınmıştır. Görüşlerine başvurulan uzmanlar Modüler Aritmetik ve Özellikleri Bilgi Testi'nin konu ile ilgili kazanımları ölçebilecek seviyede olduğunu ifade etmişlerdir.

3.5.2. Mülakat

Öğrencilerin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini ayrıntılı olarak belirlemek için 21 öğrenci ile yarı yapılandırılmış mülakat yapılmıştır.

Mülakatların başlangıcında, her bir öğrenciye bu araştırmanın amacı açıklanmış görüşmeler daha sonra analiz edilmek için sesli olarak kaydedilmiştir. Öğrencilere yapmış oldukları hatalar tekrar sorularak, hatalarının nedenleri ve hatalarında ısrarcı olup olmadıkları anlaşılmaya çalışılmıştır. Yapılan görüşmeler her öğrenci için ortalama 10 dakika sürmüştür.

3.6. Uygulama

Bu araştırma, 2007–2008 öğretim yılı bahar döneminde Erzurum ili Pasinler ilçesi Pasinler Anadolu Lisesi ve Erzurum Anadolu Lisesinde öğrenim görmekte olan 164 9.sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Modüler aritmetik ve özellikleri bilgi testi; nisan ayının ilk haftası, her iki okulun tüm 9.sınıflarında, matematik öğretmenleri tarafından konunun öğretimi tamamlandıktan sonra aynı anda 1 ders saati süre içerisinde uygulanmıştır. Araştırmanın yürütüleceği ortaöğretim okulları için İl Milli Eğitim Müdürlüğünden gerekli izin alınmıştır (EK 1).

Araştırma yapılmadan önce modüler aritmetik konusunun anlatılmış olduğu 15 öğrenci ile 2007–2008 öğretim yılı güz döneminde pilot bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışmanın neticesinde öğrencilerin verdikleri cevaplar incelenerek kimi sorular testten çıkarılmış, kimi sorular üzerinde ise değişiklikler yapılmıştır. Modüler Aritmetik ve Özellikleri Bilgi Testi’nin uygulanması esnasında 1 ders saati sürenin yeterli olduğu görülmüştür.

Araştırmacı elde edilecek sonuçların öğrencilere hiçbir şekilde olumlu ya da olumsuz etkisinin olmayacağını çalışmalardan önce belirtmiş, sadece araştırma amaçlı kullanılacağını belirterek öğrencilerin rahat olmalarını sağlamaya çalışmıştır.

3.7. Veri analizi

Ortaöğretim 9. sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemeyi amaçlayan çalışmada verileri analiz etmek için yüzde ve frekans hesapları kullanılmıştır. Öğrencilerin yapmış olduğu hatalar ve kavram yanılgılarını gösteren cevapları bilgisayar ortamına taranarak alınmış, mülakatlardan elde edilen veriler ile birlikte bulgular bölümünde bunlara yer verilmiştir. Öğrencilerin tümünün vermiş olduğu cevapları bu bölümde vermek imkansız olduğundan özellikle kavram yanılgısına sahip olduğu düşünülen öğrenci cevapları isim belirtilmeksizin sunulmuştur.

Modüler aritmetik ve özellikleri bilgi testi sorularına verilen cevaplar; doğru, kısmen doğru, yanlış ve boş olarak sınıflandırılmış ve her biri için yüzde ve frekans hesaplamaları yapılmıştır.

Doğru: Soru ile ilgili bilimsel fikirlerin tamamını ihtiva eden cevaplar bu kategoriye dahil edilmiştir.
Kısmen Doğru: Soru ile ilgili bilimsel fikirlerin bir kısmını ihtiva eden cevaplar bu kategoriye dahil edilmiştir.
Yanlış: Soru ile ilgili tamamen yanlış olan cevaplar bu kategoriye dahil edilmiştir.
Boş: Soru ile ilgili boş bırakılan veya sorunun aynen ya da kısmen tekrarlandığı cevaplar bu kategoriye dahil edilmiştir.

3.8. Araştırmanın kabulleri ve sınırlılıkları

Bu araştırmadaki kabuller ve sınırlılıklar aşağıdaki gibidir:

3.8.1. Araştırmanın kabulleri

1. Uygulanan bilgi testi ve yapılan mülakatlar öğrencilerin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirleyebilecek niteliktedir.

2. Öğrenciler veri toplama araçlarındaki sorulara samimi bir şekilde cevap vermişlerdir.

3.8.2. Araştırmanın sınırlılıkları

1. Araştırmada incelenen öğrenme güçlükleri sosyolojik ve psikolojik etkenlerden ziyade bilişsel boyutlarda incelenecektir.

2. Araştırma ortaöğretim 9.sınıf matematik dersinin modüler aritmetik ve özellikleri konusu ile sınırlı tutulmuştur.

3. Araştırmanın örneklemi 2007–2008 eğitim-öğretim yılında Pasinler Anadolu Lisesi ve Erzurum Anadolu Lisesinde öğrenim görmekte olan 164 9.sınıf öğrencisi ile sınırlıdır.

4. Araştırmanın uygulama süresi bir dönem ile sınırlıdır.

4. ARAŞTIRMANIN BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, araştırma problemlerinin incelenmesi sonucunda elde edilen bulgular ve bu bulgular ile ilgili tartışmalar verilmiştir. Araştırmanın deseni gereği gerekli görülen öğrenci cevapları bilgisayar ortamında taranarak hiç değiştirilmeden sunulmuştur. Ayrıca öğrencilerle yapılan mülakatlardan elde edilen veriler de belirtilmiştir. Araştırma problemlerine ait bulgular ve tartışma aşağıdaki şekilde yorumlanmıştır.

4.1. Birinci araştırma problemine ait bulgular ve tartışma

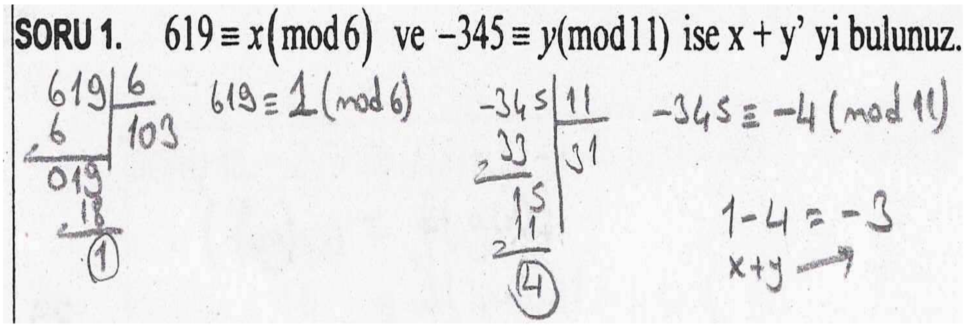
Bu başlık altında birinci araştırma problemi olan ‘Modüler aritmetik konusunda ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin tanımsal öğrenme güçlükleri nelerdir?’ sorusuna cevap aranmak üzere öğrencilerin bilgi testindeki 1-7-8-12 numaralı sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir.

Öğrencilerin bilgi testindeki birinci araştırma problemi ile ilgili sorulara verdikleri cevaplara ait bulgular Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4. 1. Öğrencilerin birinci araştırma problemine ilişkin sorulara verdikleri cevapların frekans ve yüzde dağılımı.

SORU	Frekans Yüzde	Doğru Cevap	Kısmen Doğru Cevap	Yanlış Cevap	Boş Cevap
Soru 1	f	47	107	9	1
	%	%28,7	%65,2	%5,5	%0,6
Soru 7	f	77	11	37	39
	%	% 47,6	%6,7	%22,6	%23,8
Soru 8	f	34	2	32	96
	%	%20,7	%1,2	%19,5	%58,5
Soru 12	f	18	102	6	38
	%	%11	%62,2	%3,7	%23,2

Öğrencilerin modüler aritmetik konusunun temelini oluşturan bölme işleminde kalan bulma konusundaki eksikliklerini belirlemek amacıyla “$619 \equiv x(\bmod 6)$ ve $-345 \equiv y(\bmod 11)$ ise x + y’ yi bulunuz (Soru 1)” sorusu soruldu. İki kısımdan oluşan soruda, araştırmaya katılan öğrencilerin 47 ‘si (%28,7) hem pozitif bir tamsayının bölme işleminden kalanı bulma, hem de negatif bir tamsayının bölme işleminden kalanı bulma sorusunu doğru bir şekilde cevaplamıştır. Öğrencilerin 153’ü (%93,3) sorunun ilk kısmı olan pozitif bir tamsayının bölme işleminden kalanı bulma sorusunu doğru cevaplamıştır. 10 öğrenci bu soruyu yanlış cevaplamıştır. Öğrencilerin 48’i (%29,3) sorunun ikinci kısmı olan negatif bir tamsayının bölme işleminden kalanı bulma sorusunu doğru cevaplamıştır. 107 öğrenci bu soruyu yanlış cevaplamıştır. 10 öğrenci ise sorunun bu kısmını boş bırakmayı tercih etmiştir. Bir öğrencinin bu soruya verdiği cevap Şekil 4.1’de ve kendisiyle yapılan mülakat aşağıda verilmiştir.



SORU 1. $619 \equiv x(\bmod 6)$ ve $-345 \equiv y(\bmod 11)$ ise x + y’ yi bulunuz.

Şekil 4. 1. Bir öğrencinin soru 1 için verdiği cevap

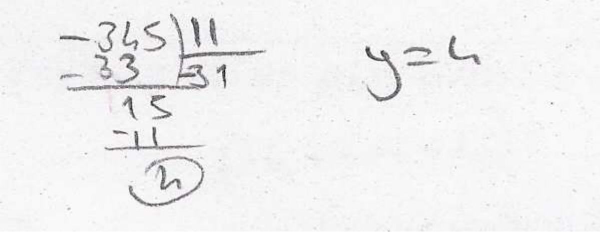
Mülakatçı: y’ yi nasıl bulduğunu anlatır mısın?

Öğrenci: 345’i 11’e böldüm. Bölüm 31 çıktı, kalanda 4. sayı eksi 345 olduğu için eksiyi kalana verdim.

Mülakatçı: Peki, bölme işleminde kalan negatif olabilir mi?

Öğrenci: Hayır, kesinlikle olamaz. Her zaman pozitif olmalıdır.

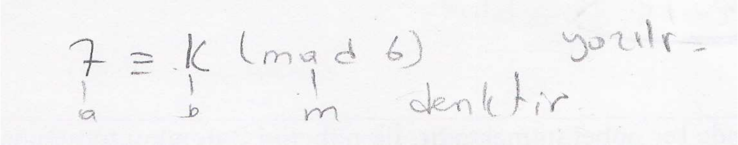
Negatif bir tamsayının pozitif bir tamsayıya bölümünden kalanı bulma işleminde başarı oranı oldukça düşmüştür. Sorunun bu kısmına verilen yanlış cevaplar 46 öğrenci (% 28) $y=-4$ ve 33 öğrenci (%20,1) $y=4$ şeklinde yoğunlaşmıştır. Sadece 2 öğrenci bölme işlemi tablosunu doğru bir şekilde yaparak bu soruyu çözmüştür. Öğrenciler genellikle $-345-y$ ifadesinin 11'in katı olması gerektiğini ya da kendilerine kısa yol olarak öğretilen, bölünen sayıyı pozitif düşünüp bölme işlemi yapma, elde edilen kalanı negatif kabul edip mod kadar ekleyerek pozitif bir kalan bulma şeklinde doğru çözmüşlerdir. Burada kimi öğretmenlerin konuyu anlatırken kullandığı sözde kısa yoldan doğru cevabı bulmanın yol açtığı yanılgılar ve öğrenme güçlükleri ön plana çıkmaktadır. Bölme algoritmasını tam olarak kavrayamayan bir öğrencinin sorunun ikinci kısmına vermiş olduğu cevap Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4. 2. Bir öğrencinin soru 1 de negatif bir tamsayının pozitif bir tamsayıya bölümünden kalanını bulma işlemine verdiği cevap (f=8)

Bu hatayı yapan öğrenciler bölümün negatif olması gerektiğini düşünüp doğru bir yaklaşım sergilemekte ancak bölme algoritmasını hatalı kullanmaktadırlar. Bu durum tamsayılarda bölme algoritmasının öğrencilere tam olarak kavratılmadığını, öğrencilerin sağlama yapmadan ezbere bilgiler ile sonuca hızlı bir şekilde ulaşmaya çalıştıklarını göstermektedir.

Öğrencilerin modüler aritmetik yazımındaki notasyon ve bölme algoritması kavramlarını bir araya getirme konusunda yaşadıkları güçlükleri ortaya koymak amacıyla "$\{x|x=7k+6 \text{ ve } k\in Z\}$ kümesi elemanları modüler aritmetik yapısına [$a\equiv b(\bmod m)$] uygun yazılabilir mi? Açıklayınız(Soru 8)" sorusu soruldu. Öğrencilerden birinin vermiş olduğu cevap Şekil 4.3'de verilmiştir.



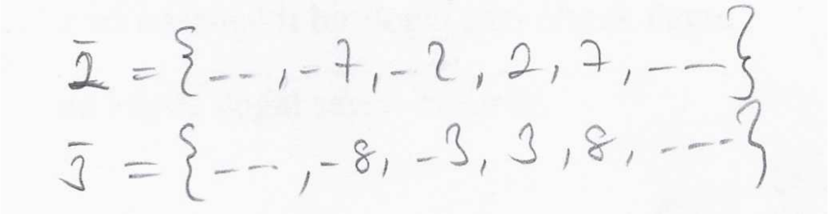
$7 \equiv k \ (\text{mad } 6)$ yazılr.

a b m denktir

Şekil 4. 3. Bir öğrencinin soru 8 için verdiği cevap (f=5)

Soru 8, 96 öğrenci(%58,5) tarafından boş bırakılmıştır. Bu sorunun doğru cevaplanma oranı ise %20,7 ile oldukça düşüktür. Öğrenciler modüler aritmetik konusunun temelini oluşturan bölme algoritmasını doğru bir şekilde kullanamamaktadırlar.

Öğrencilerin verilen bir moda göre kalanlar kümesi elemanlarının denklik sınıflarını yazma konusunda öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla Soru 7 öğrencilere yöneltilmiştir. Bu soruya verilen cevaplardan ikisi Şekil 4.4 ve Şekil 4.5’te verilmiştir.

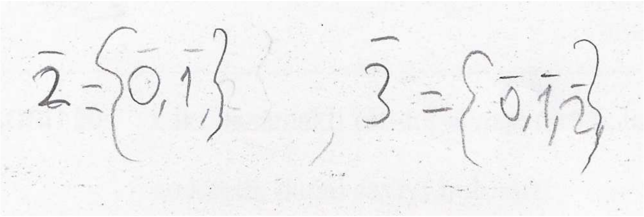


$\bar{2} = \{--, -7, -2, 2, 7, --\}$

$\bar{3} = \{--, -8, -3, 3, 8, --\}$

Şekil 4. 4. Bir öğrencinin soru 7 için verdiği cevap (f=11)

Denklik sınıflarını yazarken öğrencilerin pozitif tamsayıları yazmayı tercih ettikleri, negatif tamsayıları kullanırken de hatalara ve yanılgılara düştükleri tespit edilmiştir. Şekil 4.4’te öğrencilerin denklik sınıflarını yazarken 0 rakamını ortaya alıp pozitif ve negatif yönde moda göre ekleme yaparak devam ettirdikleri görülmektedir. Bu durum negatif tamsayılarda bölme işleminden kalanı bulma yönteminin öğrencilere öğretilmemesinden ya da öğrencinin pozitif tamsayılardakine uyarlayarak genelleme yapmasından kaynaklanmaktadır.

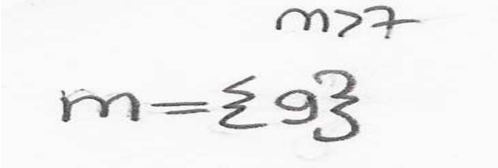


Şekil 4. 5. Başka bir öğrencinin soru 7 için verdiği cevap (f=10)

Denklik sınıfı kavramının öğretiminde ortaya çıkan başka bir güçlük Şekil 4.5’te belirtilmiştir. Öğrencilerin modüler aritmetik konusunun temel kavramları olan denklik sınıfı ve mod kavramlarını birbirine karıştırdıkları görülmektedir. Bu hatayı yapan bir öğrenci ile yapılan mülakat aşağıda belirtilmiştir.

Mülakatçı: bana 5 ile bölündüğünde 2 kalanı veren bir sayı söyleyebilir misin?
Öğrenci: 7
Mülakatçı: evet, peki neden 7’yi yazmadın.
Öğrenci: bu konuyu tam olarak anlayamadım.

Verilen bir denklikte modun ne olduğunu bulabilme konusunda öğrencilerin yaşadığı güçlükleri belirlemek amacıyla “$m \in Z^{+}$ $(m > 1)$ olmak üzere, $70 \equiv 7 \pmod{m}$ denkliğini sağlayan m değerlerinin toplamını bulunuz (Soru 12)” sorusu soruldu. Şekil 4.6’da bir öğrencinin bu soruya verdiği cevap verilmiştir.



Şekil 4. 6. Bir öğrencinin soru 12 için verdiği cevap

Soruya tam olarak doğru cevap veren öğrencilerin oranı %11 gibi çok düşük bir seviyede kalmıştır. Öğrenciler genel olarak bir tane m değeri bulup soruyu çözdüklerini düşünmüşlerdir. Ayrıca $m > 7$ olması gerektiği düşüncesi öğrencilerin cevaplarında sıkça görülmüştür. Bu yüzden de $m = 3$ cevabı sadece 22 öğrenci (%13,4) tarafından verilmiştir. Verilen cevaplardan en sık karşılaşılanları $m = 9$ (f=84, %51,2) ile $m = 63$ (f=34, %20,7) tür.

4.2. İkinci Araştırma Problemine Ait Bulgular ve Tartışma

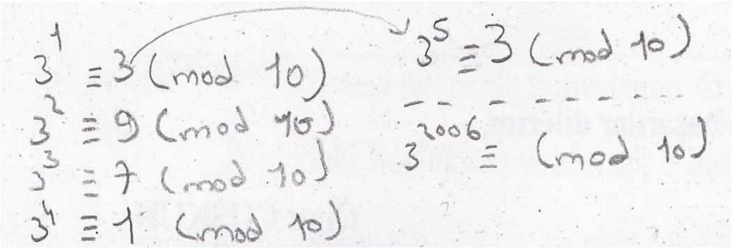
Bu başlık altında ikinci araştırma problemi olan 'Modüler aritmetik konusunda ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin işlemsel öğrenme güçlükleri nelerdir?' sorusuna cevap aranmak üzere öğrencilerin bilgi testindeki 4-5-13-18-19 numaralı sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir.

Öğrencilerin bilgi testindeki ikinci araştırma problemi ile ilgili sorulara verdikleri cevaplar ile ilgili bulgular Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4. 2. Öğrencilerin ikinci araştırma problemine ilişkin sorulara verdikleri cevapların frekans ve yüzde dağılımı.

SORU	Frekans Yüzde	Doğru Cevap	Kısmen Doğru Cevap	Yanlış Cevap	Boş Cevap
Soru 4	f	82	9	25	48
	%	%50	%5,5	%15,2	%29,3
Soru 5	f	44	44	28	48
	%	% 26,8	%26,8	%17,1	%29,3
Soru 13	f	48	7	34	75
	%	%29,3	%4,3	%20,7	%45,7
Soru 18	f	82	45	9	28
	%	%50	%27,4	%5,5	%17,1
Soru 19	f	32	6	49	77
	%	%19,5	%3,7	%29,9	%47

Öğrencilerin üslü sayıların belli bir moda göre kalanını belirleme konusunda yaptıkları hataları belirlemek için “ 3^{2006} sayısının birler basamağındaki rakamı bulunuz (Soru 4)” sorusu soruldu. Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin sırayla kuvvet alarak 1 sayısını bulmaya çalıştıkları ancak 1 sayısını bulduktan sonra işlemi devam ettiremedikleri görülmüştür. Şekil 4.7’de bir öğrencinin Soru 4’e verdiği cevap belirtilmiştir.



$3^1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 10)$

$3^2 \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 10)$

$3^3 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 10)$

$3^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10)$

$3^5 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 10)$

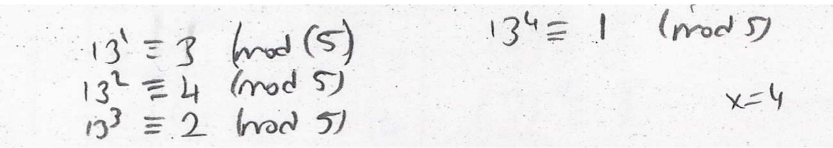
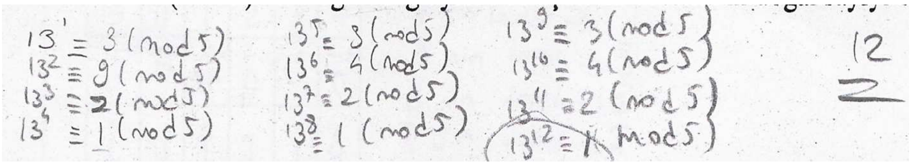
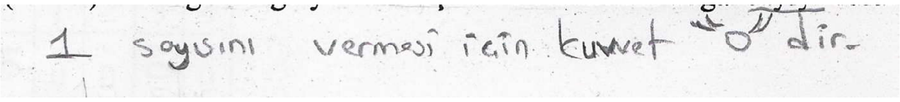
$- - - - - - -$

$3^{2006} \equiv (\mathrm{mod}\ 10)$

Şekil 4. 7. Bir öğrencinin soru 4 için verdiği cevap (f=7)

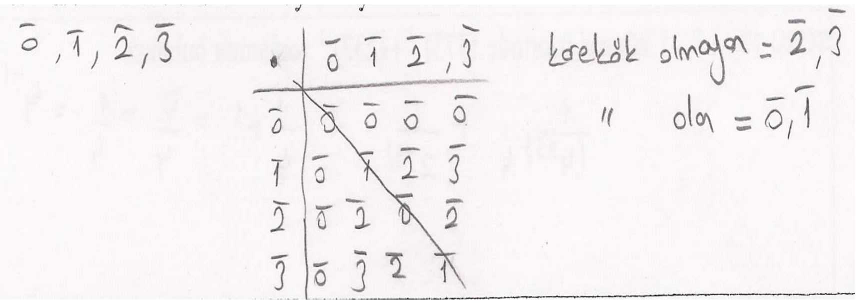
Soru 4 için yaşanan bu zorluk, bir sonraki soruda çok daha etkilidir. Öğrencilerin üslü ifadelerin belli bir moda göre kalanını bulma sorularında periyodik olarak tekrar eden sistemi kavrayıp kavrayamadıklarını belirlemek için “$13^x \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ denkliğini sağlayan en küçük iki basamaklı doğal sayıyı bulunuz(Soru 5)” sorusu sorulmuştur. Öğrencilerin Soru 5 için verdiği cevaplar Çizelge 4.3’te verilmiştir.

Çizelge 4. 3. Öğrencilerin soru 5 için verdiği cevaplar

Öğrenci cevabı	f
 $13^1 \equiv 3 \pmod{(5)}$ $13^2 \equiv 4 \pmod{5}$ $13^3 \equiv 2 \pmod{5}$ $13^4 \equiv 1 \pmod{5}$ $x=4$	41
 $13^1 \equiv 3 \pmod{5}$ $13^2 \equiv 9 \pmod{5}$ $13^3 \equiv 2 \pmod{5}$ $13^4 \equiv 1 \pmod{5}$ $13^5 \equiv 3 \pmod{5}$ $13^6 \equiv 4 \pmod{5}$ $13^7 \equiv 2 \pmod{5}$ $13^8 \equiv 1 \pmod{5}$ $13^9 \equiv 3 \pmod{5}$ $13^{10} \equiv 4 \pmod{5}$ $13^{11} \equiv 2 \pmod{5}$ $13^{12} \equiv 1 \pmod{5}$ 12	3
 1 sayısını vermesi için kuvvet "0" dir	2

Öğrenciler yine sırayla kuvvet alarak 1 sayısını bulmaya çalışmış ancak 1 sayısını bulduktan sonra işlemi devam ettirememişlerdir(f=41, %25). 3 öğrenci 12. kuvvete kadar teker teker açarak soruyu çözmüştür. 2 öğrenci ise $13^0 = 1$ cevabını vermiştir.

Öğrencilerin modüler aritmetik ile kareköklü sayılar arasındaki ilişki konusunda yaptığı hataları belirlemek amacıyla “$Z/4$’te karekökü olmayan sayıları bulunuz (Soru 13)” sorusu soruldu. Bu sorunun çözümünde öğrenciler genellikle $Z/4$’te çarpma işlemi tablosu yapmış; ardından köşegen üzerindeki sayıların karekökü vardır, diğerlerinin yoktur gibi ÖSS hazırlık kitaplarında sıkça karşılaşılan işlemsel olarak doğru ama anlamlı olmayan bir öğrenme içine girmişlerdir. Şekil 4.8’de bir öğrencinin bu şekilde verdiği doğru cevap görülmektedir.



$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$

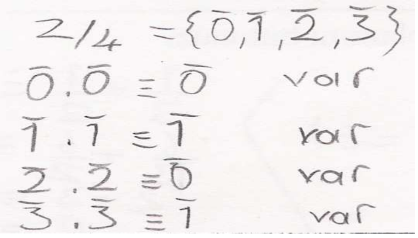
$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

karekök olmayan $= \bar{2}, \bar{3}$

〃 olan $= \bar{0}, \bar{1}$

Şekil 4. 8. Bir öğrencinin soru 13’e işlem tablosu yaparak verdiği doğru cevap

Tablo yapmadan soruyu çözmeye çalışan birçok öğrencinin ise çarpma işlemi yaptıktan sonra işlemi doğru yorumlayamadığı görülmektedir (f=5). Şekil 4,9’da bir öğrencinin verdiği cevap belirtilmiştir.



$Z/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$\bar{0} . \bar{0} \equiv \bar{0}$ var

$\bar{1} . \bar{1} \equiv \bar{1}$ var

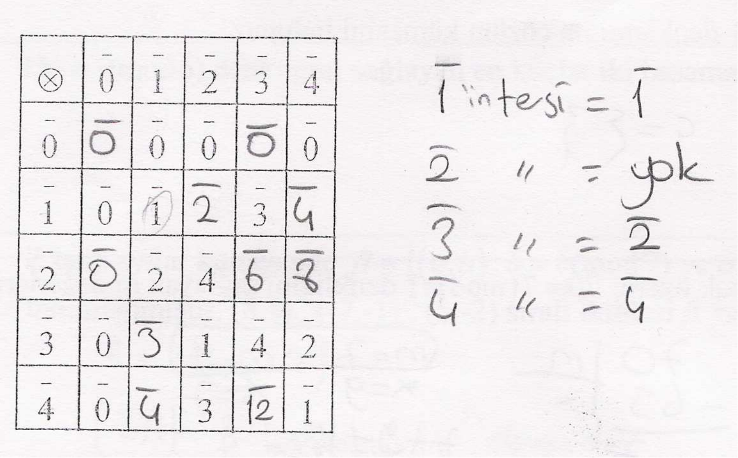
$\bar{2} . \bar{2} \equiv \bar{0}$ var

$\bar{3} . \bar{3} \equiv \bar{1}$ var

Şekil 4. 9. Bir öğrencinin soru 13 için verdiği cevap

Ayrıca kimi öğrencilerde $Z/4$’ün elemanlarının karekökünü alarak soruyu çözmeye çalışmışlardır(f=5).

Öğrencilerin verilen bir moda göre çarpma işlemi tablosu oluşturarak elemanların terslerini bulma konusunda yaşadıkları güçlükleri belirlemek amacıyla Soru 18 sorulmuştur. Bir öğrencinin bu soruya verdiği cevap Şekil 4.10’da ki gibidir.



$\otimes$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$

$\overline{1}$'in tersi = $\overline{1}$
$\overline{2}$ 〃 = yok
$\overline{3}$ 〃 = $\overline{2}$
$\overline{4}$ 〃 = $\overline{4}$

Şekil 4. 10. Bir öğrencinin soru 18 için verdiği cevap

İki kısımdan oluşan soruda, tablodaki boşlukları 127 öğrenci (%77,4) doğru olarak doldurmuş, 45 öğrenci(%27,4) ise tabloyu doğru olarak doldurduğu halde elemanların terslerini bulmamıştır. 9 öğrenci hem tabloyu hem de tersleri yanlış yapmıştır. 3 öğrenci ise tabloyu doldururken $Z/5$'te kapalılık özelliğini ihmal edip 6,8 ve 12 gibi sayıları kullanmışlardır. Bu hatayı yapan öğrencilerden biri ile yapılan mülakat aşağıda belirtilmiştir.

Mülakatçı: tabloyu nasıl doldurduğunu anlatır mısın?

Öğrenci: $Z/5$ kümesinde sadece $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}$ ve $\overline{4}$ bulunur, tabloda 4'den yukarı elemanların olmaması lazım, ama burada yukarıda olan elemanlar var.

Mülakatçı: kim yazdı onları?

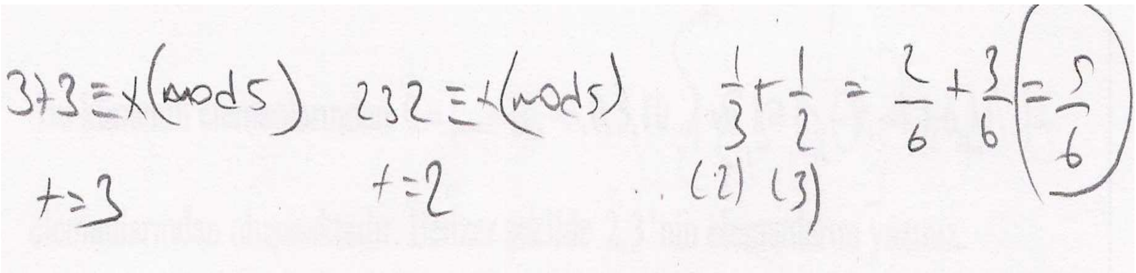
Öğrenci: (gülümsüyor)ben

Mülakatçı: $\overline{6},\overline{8}$ ve $\overline{12}$ kullanmışsın, bunları yazmanın sebebi nedir?

Öğrenci: yanlış yazmışım, $Z/5$ kümesinde $\overline{6},\overline{8}$ ve $\overline{12}$ sayıları bulunmaz.

Öğrencilerin verilen bir moda göre, herhangi bir sayının çarpma işlemine göre tersini bulma konusunda yaptıkları hataları belirlemek amacıyla "$Z/5$ kümesi üzerinde

$(373)^{-1} + (232)^{-1}$ toplamını bulunuz(Soru 19)” sorusu soruldu. Bu soruya verilen cevaplar içinde Şekil 4.11’de belirtilmiş olanı oldukça dikkat çekicidir.



Şekil 4. 11. Bir öğrencinin soru 19 için verdiği cevap

Öğrenciler, $Z/5$ kümesinde soruyu çözmeleri gerektiğini ihmal edip, reel sayılarda düşünerek soruyu cevaplamış, kapalılık özelliğini yine göz ardı etmişlerdir (f=30, %18,3). Soru 18’de de karşılaşılan bu güçlük Soru 19 için çok daha etkili bir şekilde kendini göstermiştir, öyle ki bir öğrenci ile yapılan mülakat aşağıda verilmiştir.

Mülakatçı: soruyu nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

Öğrenci: 373’ü $Z/5$ kümesinde 3 buldum, sonra 232’yi de $Z/5$ kümesinde 2 buldum. Sonra 3’ün tersini 1/3, 2’nin tersini de 1/2 aldım, ikisini topladım 5/6 buldum.

Mülakatçı: $Z/5$ kümesinin elemanlarını sayar mısın?

Öğrenci: 4, 3, 2, 1 ve 0.

Mülakatçı: 1/3 sayısı $Z/5$’in elemanı mıdır?

Öğrenci: değildir(düşünüyor)..ama -1 demiş(kuvvetin -1 olduğunu belirtiyor).

Mülakatçı: $Z/5$ kümesinde 3’ün tersi 1/3 müdür?

Öğrenci: evet,

Mülakatçı: peki, 18.soruda 3’ün tersine kaç yazmışsın?

Öğrenci: 2

Mülakatçı: burada neden 1/3 dedin

Öğrenci: bu, üstünde -1 yazıyor.

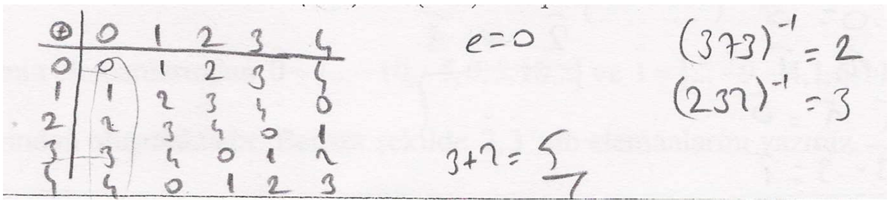
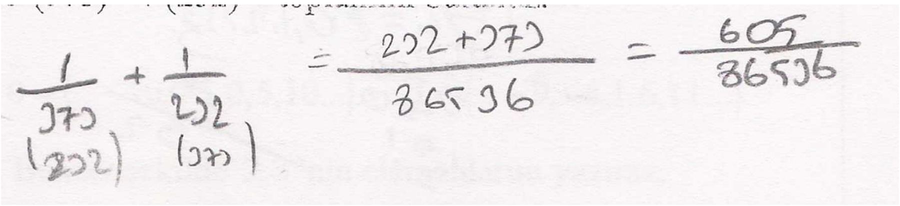
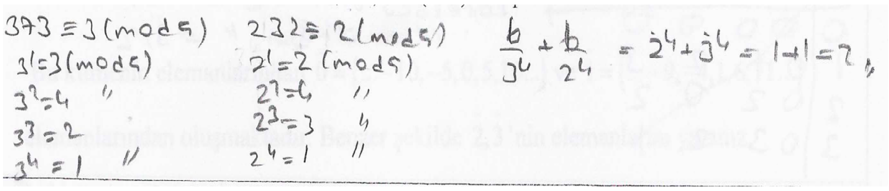
Mülakatçı: burada da üstünde -1 yazıyor.

Öğrenci: burada tablodan yararlandım.

Mülakatçı: bir elemanın tersi nasıl bulunur, işlem konusunu hatırlıyor musun?
Öğrenci: birim elemanı buluyoruz, o hizada gidip yukarı çıkıyoruz. Tablodan faydalanıyoruz.

Bu mülakat sırasında öğrenci cevabının doğru olduğunu ısrarla savunmuş, tanım kümesinin değişmesi durumunda bir elemanın tersinin değişebileceği kendisine anlatılmıştır. İşlem konusu anlatılırken sadece tablodan faydalanarak soru çözümü yapılması ya da tablo sorularının çözümüne ağırlık verilmesi, işlem özelliklerinin öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılmadan soru çözümlerine geçilmesi öğrencilerde bu şekilde öğrenme güçlüğüne sebep olmuştur. Soru 19'da öğrencilerin vermiş olduğu diğer yanlış cevaplar Çizelge 4.4'te verilmiştir.

Çizelge 4. 4. Öğrencilerin Soru 19 için verdiği diğer yanlış cevaplar

Öğrenci cevabı	f
 ⊕ 0 1 2 3 4 0 0 1 2 3 4 1 1 2 3 4 0 2 2 3 4 0 1 3 3 4 0 1 2 4 4 0 1 2 3 $e=0$ $(373)^{-1}=2$ $(232)^{-1}=3$ $3+2=5$	6
 $\frac{1}{373}_{(232)} + \frac{1}{232}_{(373)} = \frac{232+373}{86536} = \frac{605}{86536}$	5
 $373 \equiv 3 (mod 5)$ $232 \equiv 2 (mod 5)$ $3^1 \equiv 3 (mod 5)$ $2^1=2 (mod 5)$ $3^2=4$ 〃 $2^2=4$ 〃 $3^3=2$ 〃 $2^3=3$ 〃 $3^4=1$ 〃 $2^4=1$ 〃 $\frac{6}{3^4}+\frac{6}{2^4} = 2^4+3^4 = 1+1=2$	5

Öğrenciler, $3+2=5$ şeklinde bulup $5\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ yazmama(f=6), ifadeleri rasyonel hale getirdikten sonra payda eşitleme(f=5), kuvvetlerin açılımını yaparak 1 sayısını ya da sistem bulmaya çalışma(f=5) gibi hatalar yapmışlardır.

4.3. Üçüncü Araştırma Problemine Ait Bulgular ve Tartışma

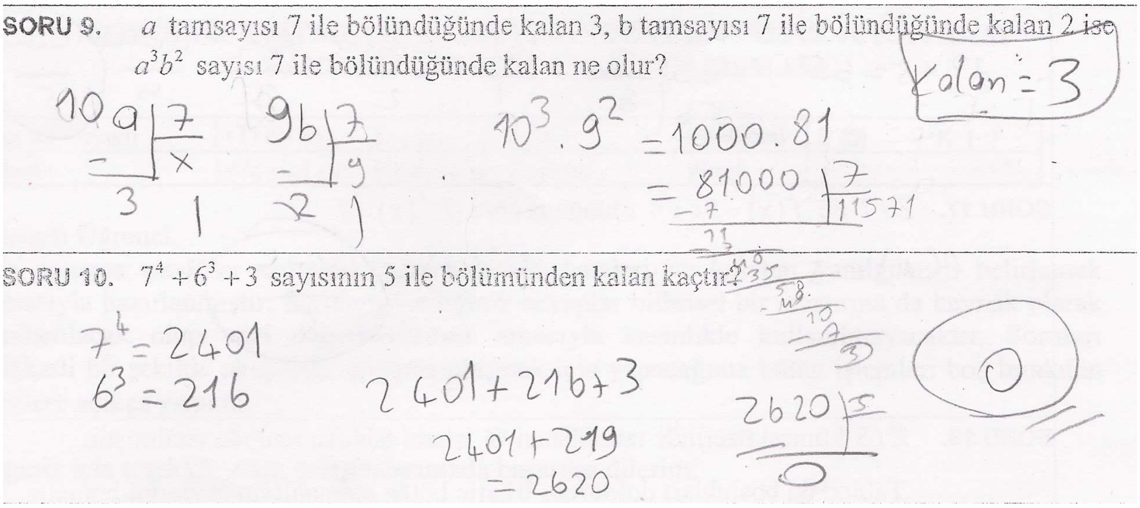
Bu başlık altında üçüncü araştırma problemi olan ‘Modüler aritmetik özellikleri konusunda ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin öğrenme güçlükleri nelerdir?’ sorusuna cevap aranmak üzere öğrencilerin bilgi testindeki 9 ve 10 numaralı sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir.

Öğrencilerin bilgi testindeki üçüncü araştırma problemi ile ilgili sorulara verdikleri cevaplara ait bulgular Çizelge 4.5’de verilmiştir.

Çizelge 4. 5. Öğrencilerin üçüncü araştırma problemine ilişkin sorulara verdikleri cevapların frekans ve yüzde dağılımı.

SORU	Frekans Yüzde	Doğru Cevap	Kısmen Doğru Cevap	Yanlış Cevap	Boş Cevap
Soru 9	f	80	28	36	20
	%	%48,8	%17,1	%22	%12,2
Soru 10	f	91	37	17	19
	%	% 55,5	%22,6	%10,4	%11,6

Öğrencilerin modüler aritmetik konusundaki özellikleri kullanıp kullanamadığını belirlemek amacıyla “a tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 3, b tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 2 ise a^3b^2 sayısı 7 ile bölündüğünde kalan ne olur? (Soru 9)” ve “7^4+6^3+3 sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır? (Soru 10)”soruları soruldu.



SORU 9. a tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 3, b tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 2 ise a^3b^2 sayısı 7 ile bölündüğünde kalan ne olur?

$10a \,|\, 7$ $9b \,|\, 7$ $10^3 . 9^2 = 1000 . 81$

$= 81000 \,|\, 7$

$- 7 \,|\, 11571$

11

Kalan = 3

SORU 10. $7^4 + 6^3 + 3$ sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

$7^4 = 2401$

$6^3 = 216$

$2401 + 216 + 3$

$2401 + 219$

$= 2620$

$2620 \,|\, 5$

0

0

Şekil 4. 12. Bir öğrencinin hem soru 9 hem de soru 10 için verdiği cevap

Şekil 4.12’de görüldüğü gibi öğrenciler genel olarak bölme işleminde kalan bulma dışında hiçbir modüler aritmetik özelliğini kullanmamışlardır. Soru 9’da 101 öğrenci (%61,6) değer vererek soruyu çözmüştür. Soru 10’da ise 31 öğrenci (%18,9) verilen işlemi hesaplayarak ardından 5 ile bölümden kalanı bulmuştur. Sayısal değer vererek soru 9’u çözen öğrencilerin 51’i $a = 10$ ve $b = 9$ ikilisini, 46’sı ise $a = 3$ ve $b = 2$ ikilisini kullanmıştır. 4 öğrenci ise çok daha büyük ikilileri kullanmayı tercih etmiştir. Harfli ifadeler yerine sayısal değer vererek Soru 9’u çözen bir öğrenci ile yapılan mülakat aşağıda verilmiştir.

Mülakatçı: $a = 3$ ve $b = 2$ ikilisini kullanmanın sebebini açıklar mısın?

Öğrenci: işte, yani, daha küçük sayıları aldım ki işlemlerde kolaylık olsun.

Mülakatçı: peki a ’nın kuvvetlerini alarak işlem yapabilir miydin burada?

Öğrenci: nasıl yani?

Mülakatçı: örneğin $a \equiv 3(\bmod 7)$ (yazıyor).

Öğrenci: ama a ’nın ne olduğunu bilmiyoruz ki.

Mülakatçı: a mesela kaç olabilir? Sen 3 dedin, ben 10 diyebilir miyim?

Öğrenci: (düşünüyor)..

Mülakatçı: sayısal değer vererek modüler aritmetik sorularını çözmek sence daha mı kolay?

Öğrenci: bana göre öyle.

Öğrencilerin harfli ifadeleri kullanmaktan kaçındıkları ve sayısal değerler vererek soruları çözmeyi tercih ettikleri görülmektedir. Ayrıca, Z/5'te çözüm istenen 10.soru da 17 öğrenci kapalılık özeliğine dikkat etmeden 1 + 1 + 3 = 5 yazarak işlemi bitirmiştir.

4.4. Dördüncü Araştırma Problemine Ait Bulgular ve Tartışma

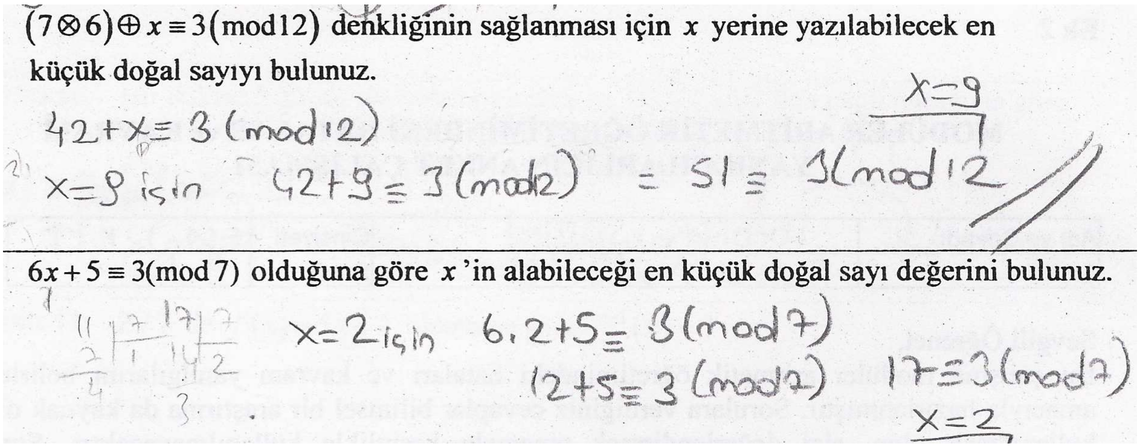
Bu başlık altında dördüncü araştırma problem olan 'Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetikte denklem çözümleri ile ilgili öğrenme güçlükleri nelerdir?' sorusuna cevap aranmak üzere öğrencilerin bilgi testindeki 2-3-11-20 numaralı sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir.

Öğrencilerin bilgi testindeki dördüncü araştırma problemi ile ilgili sorulara verdikleri cevaplar ile ilgili bulgular Çizelge 4.6'da verilmiştir.

Çizelge 4. 6. Öğrencilerin dördüncü araştırma problemine ilişkin sorulara verdikleri cevapların frekans ve yüzde dağılımı.

SORU	Frekans Yüzde	Doğru Cevap	Kısmen Doğru Cevap	Yanlış Cevap	Boş Cevap
Soru 2	f	99	7	30	28
	%	%60,4	%4,3	%18,3	%17,1
Soru 3	f	112	8	28	16
	%	% 68,3	%4,9	%17,1	%9,8
Soru 11	f	29	68	29	38
	%	%17,7	%41,5	%17,7	%23,2
Soru 20	f	105	14	26	19
	%	%64	%8,5	%15,9	%11,6

Öğrencilerin verilen bir moda göre, içinde toplama ve çarpma işlemlerinin bulunduğu bir denklemi sadeleştirip sonucu söyleme ile ilgili öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla “$(7\otimes 6)\oplus x\equiv 3(\mathrm{mod}12)$ denkliğinin sağlanması için x yerine yazılabilecek en küçük doğal sayıyı bulunuz(Soru 2)” ve “$6x+5\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$ olduğuna göre x’in alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulunuz(Soru 3)” soruları soruldu. Şekil 4.13’te bir öğrencinin sayısal değer vererek her iki soruyu da doğru çözmüş olduğu görülmektedir.



$(7\otimes 6)\oplus x\equiv 3(\mathrm{mod}12)$ denkliğinin sağlanması için x yerine yazılabilecek en küçük doğal sayıyı bulunuz.

$42+x\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,12)$

$x=9$ için $42+9\equiv 3\,(\mathrm{mod}12) = 51\equiv 3(\mathrm{mod}\,12$

$x=9$

$6x+5\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$ olduğuna göre x’in alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulunuz.

$x=2$ için $6.2+5\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$

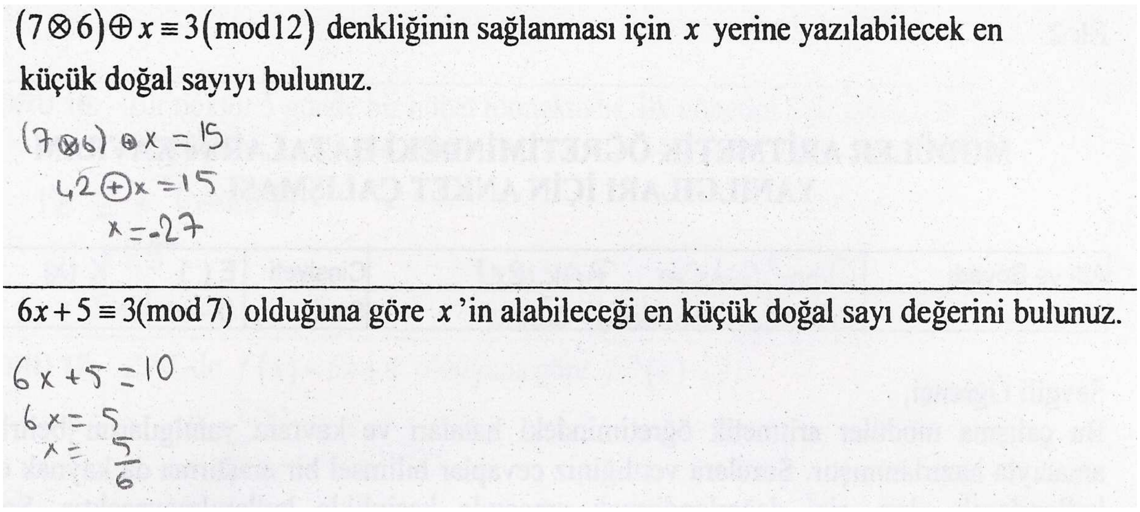
$12+5\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,7)$

$17\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$

$x=2$

Şekil 4. 13. Bir öğrencinin hem soru 2, hem de soru 3 için sayısal değerler ile verdiği cevap

Bu sorulara verilen cevaplar incelendiğinde her iki soruda da öğrencilerin bir kısmının hiçbir modüler aritmetik işlemi yapmadan sadece değer vererek soruyu çözdüğü ortaya çıkmıştır. Bu şekilde 61 öğrenci Soru 2’yi, 66 öğrenci ise Soru 3’ü çözmüştür. Bu şekildeki çözümlerin doğru çözümler içindeki yüzdesi sırasıyla % 61,6 ve % 58,9 olmak üzere oldukça yüksektir. Sorularda cevabın doğal sayı olarak istenmesine rağmen özellikle soru 3 için $x=-3\,,1/3,-1/3,6/5,5/6,-5$ gibi sayılar sonuç olarak bulunmuştur(f=8). Başka bir öğrencinin aynı sorular için vermiş olduğu cevap Şekil 4.14’te verilmiştir.



$(7 \otimes 6) \oplus x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 12)$ denkliğinin sağlanması için x yerine yazılabilecek en küçük doğal sayıyı bulunuz.

$(7 \otimes 6) \oplus x = 15$

$42 \oplus x = 15$

$x = -27$

$6x + 5 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 7)$ olduğuna göre x'in alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulunuz.

$6x + 5 = 10$

$6x = 5$

$x = \frac{5}{6}$

Şekil 4. 14. Başka bir öğrencinin soru 2 ve soru 3 için verdiği yanlış cevap

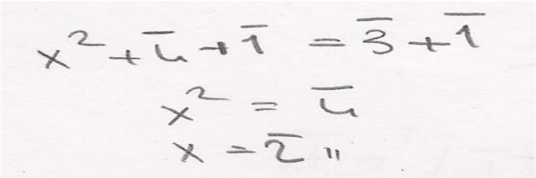
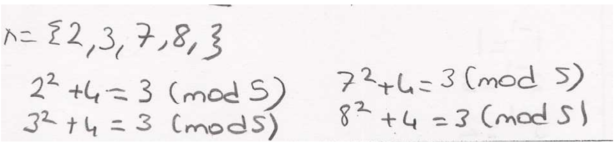
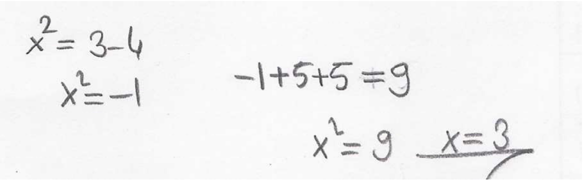
Öğrenci ile yapılan mülakatta kendisine Soru 2'de neden sadece 15 değerini aldığı sorulmuştur.

Mülakatçı: 15 dışında başka sayılar olamaz mı?
Öğrenci: olabilir de, ben tek bir değer düşündüm.

Aynı durum Soru 3 içinde geçerlidir. Öğrenci kendi geliştirdiği yargılarla hareket etmekte, modüler aritmetik yapısını kullanmadan, cevabın hangi sayı kümesinde bulunması gerektiğine dikkat etmeden sadece denklemi çözmeye çalışmaktadır. Ayrıca Şekil 4.14'te görüldüğü gibi birçok öğrenci (mod m) ifadesini kullanmadan soruları çözmeye çalışmaktadır.

Öğrencilerin verilen bir moda göre denklem çözümü sırasında yaptığı hataları belirlemek amacıyla "$Z/5$'te $x^2 + \overline{4} = \overline{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz (Soru 11)" sorusu soruldu. Bu soruya verilen cevaplardan bir kısmı Çizelge 4.7'de verilmiştir.

Çizelge 4. 7. Soru 11 için öğrencilerin verdiği eksik ya da hatalı cevaplar

Öğrenci cevabı	**f**
 $x^2+\overline{4}+\overline{1}=\overline{3}+\overline{1}$ $x^2=\overline{4}$ $x=\overline{2}$,,	47
 $x=\{2,3,7,8,\}$ $2^2+4=3$ (mod 5) $7^2+4=3$ (mod 5) $3^2+4=3$ (mod5) $8^2+4=3$ (mod 5)	9
 $x^2=3-4$ $x^2=-1$ $-1+5+5=9$ $x^2=9$ $x=3$	6
 $x^2+\overline{4}=\overline{3}$ Ç.K.$=\{\,\}$ $x^2=3-4$ $x^2=-1$	3
 $x^2+(\bar{3},\bar{2},1)=(\bar{2},\bar{1})$	2

Kapalılık özelliğine dikkat edilmeden, $Z/5$ kümesinin elemanları dışında bazı elemanların çözüm kümesinde yazıldığı, denklik sınıfı ve mod kavramının 2 öğrenci tarafından karıştırıldığı görülmektedir. 3 öğrenci ise bir tamsayının karesi -1 olamaz düşüncesi ile çözüm kümesini boş bırakmıştır. Çözüm kümesinin elemanlarını eksik bulan öğrencilerden biri ile yapılan mülakat aşağıda verilmiştir.

Mülakatçı: 11.sorunun çözümünü anlatır mısın?

Öğrenci: $Z/5$ kümesinde çalışıyoruz, x'i yalnız bırakabilmek için her iki tarafa 1 eklemek zorundayız. $x^2=\overline{4}$ oldu, buradan da $x=\overline{2}$ oldu.

Mülakatçı: hangi sayıların karesi 4'tür?

Öğrenci: 2 ve -2'nin.

Mülakatçı: hangi sayı kümesinde çalışıyoruz?

Öğrenci: $Z/5$ de olduğuna göre 2'dir.

Mülakatçı: sadece 2'dir.

Öğrenci: evet

Mülakatçı: $Z/5$ 'de -2 olabilir mi?

Öğrenci: olamaz, çünkü 0,1,2,3 ve 4'ten oluşur.

Mülakatçı: hangi sayıların karesini 5'e böldüğümüzde 4 kalanını verir? $Z/5$ 'de ki sayıların karesini bir al bakalım.

Öğrenci: 1, 4, 9 ve 16

Mülakatçı: $Z/5$ 'de 9 diye bir sayı var mı?

Öğrenci: yoktur..demek ki elemanı değildir.

Öğrenci denklik sınıfları ile tamsayıları birbirine karıştırmakta, kapalılık özelliğine dikkat etmeye çalışarak sadece pozitif çözümü kabul etmekte, bulduğu negatif tamsayı değerini $Z/5$ 'de yorumlayamamaktadır.

4.5. Beşinci Araştırma Problemine Ait Bulgular ve Tartışma

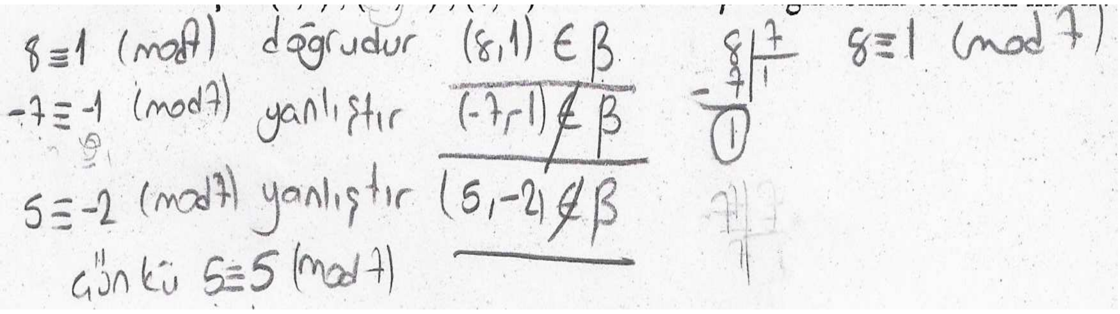
Bu başlık altında beşinci araştırma problemi olan 'Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusu ile bağıntı ve fonksiyon konularının örtüştüğü sorularda öğrenme güçlükleri nelerdir?' sorusuna cevap aranmak üzere öğrencilerin bilgi testindeki 6-15-17 numaralı sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir.

Öğrencilerin bilgi testindeki beşinci araştırma problemi ile ilgili sorulara verdikleri cevaplara ait bulgular Çizelge 4.8'de verilmiştir.

Çizelge 4. 8. Öğrencilerin beşinci araştırma problemine ilişkin sorulara verdikleri cevapların frekans ve yüzde dağılımı.

SORU	Frekans Yüzde	Doğru Cevap	Kısmen Doğru Cevap	Yanlış Cevap	Boş Cevap
Soru 6	f	61	60	1	42
	%	%37,2	%36,6	%0,6	%25,6
Soru 15	f	61	35	34	34
	%	%37,2	%21,3	%20,7	%20,7
Soru 17	f	32	7	82	43
	%	%19,5	%4,3	%50	%26,2

Öğrencilerin modüler aritmetik ve bağıntı kavramlarının birlikte kullanıldığı bir soruda yapmış oldukları hataları belirlemek amacıyla “Z tamsayılar kümesinde $\beta = \{(a,b) : a \equiv b(\text{mod}\,7) \text{ ve } a,b \in Z\}$ biçiminde bir β bağıntısı tanımlanmıştır. (8,1), (-7,-1), (5,-2) sıralı ikilileri β bağıntısının elemanı mıdır?(Soru 6)” sorusu soruldu. Verilen bir moda göre sıralı ikililerin birbirine denk olup olmadığının araştırılmasının istendiği soruda öğrencilerin verdikleri cevapların incelenmesi sonucunda 117 öğrencinin (%71,3), (8,1) sıralı ikilisinin bağıntının elemanı olduğunu doğru bir şekilde tespit ettiği ortaya çıkmıştır. Ancak negatif tamsayıları içeren sıralı ikililer sorulduğunda başarı oranı düşmüştür. 86 öğrenci(%52,4) (-7,-1) sıralı ikilisinin bağıntının elemanı olmadığını, 71 öğrenci (%43,3) (5,-2) sıralı ikilisinin bağıntının elemanı olduğunu doğru bir şekilde belirtmiştir. Negatif tamsayıların bulunduğu sıralı ikilileri sırasıyla 6 ve 9 öğrenci boş bırakmıştır. Şekil 4.15’te bir öğrencinin bu soruya verdiği cevap ve ardından öğrenciyle yapılan mülakat verilmiştir.



$8 \equiv 1 \pmod 7$ doğrudur $(8,1) \in \beta$

$-7 \equiv -1 \pmod 7$ yanlıştır $(-7,-1) \notin \beta$

$5 \equiv -2 \pmod 7$ yanlıştır $(5,-2) \notin \beta$

çünkü $5 \equiv 5 \pmod 7$

$8 \mid 7$, -7, 1, ①

$8 \equiv 1 \pmod 7$

Şekil 4. 15. Bir öğrencinin soru 6 için verdiği cevap

Mülakatçı: 8’in mod7’de 1 olduğuna nasıl karar verdin?

Öğrenci: 7’ye bölüp kalanı alıyoruz..kalanı 1 olduğu için

Mülakatçı: 8’i 7’ye böldün kalanı 1 buldun yani,

Öğrenci: evet,

Mülakatçı: $-7 \equiv -1 \pmod 7$ ifadesine yanlış demişsin. Buna nasıl karar verdin?

Öğrenci: bunu pek anlamamıştım ama 7’ye bölmemiz gerekiyor, yanlış yapmışım.

Mülakatçı: negatif olması mı senin kafanı karıştırdı?

Öğrenci: evet

Mülakatçı: diğer işlemi nasıl yaptın?

Öğrenci: 5’i mod7’ye göre aldığımızda yine 5 olur, -2 olmaz. Denklik yanlış olur. O yüzden 5 olması lazım.

Mülakatçı: 5’i yine 7’ye böldün, bölüm olmayacak, 5 yine 5 olarak kalır diye mi düşündün?

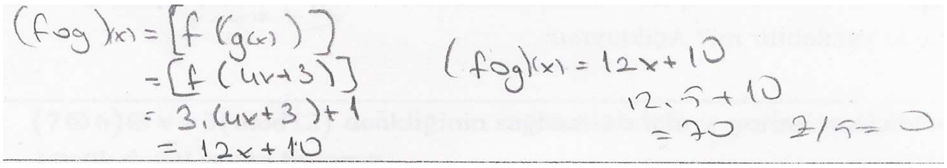
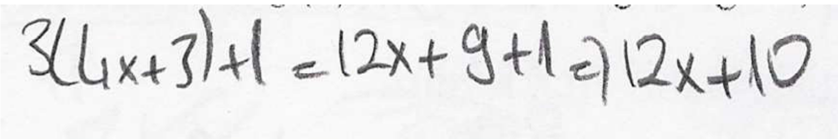
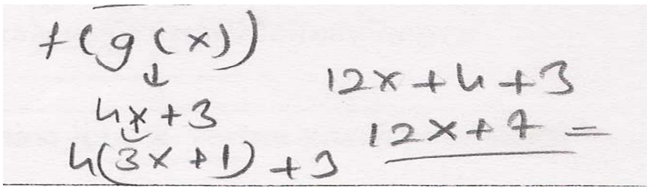
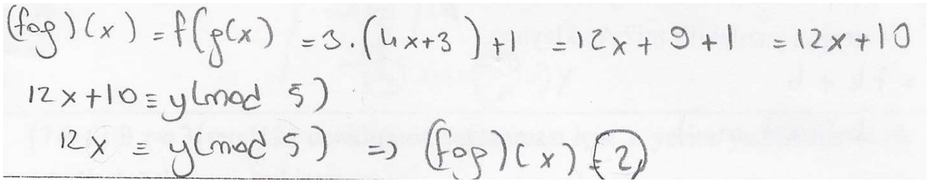
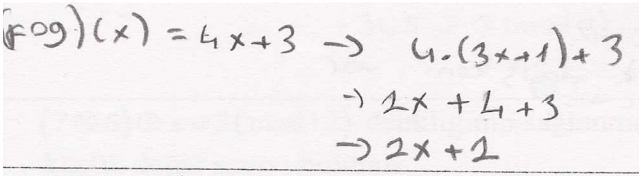
Öğrenci: evet

Öğrencilerin, negatif tamsayılar ile ilgili işlemleri içeren sorularda olan başarısızlığı devam etmektedir. Özellikle denklik sınıflarının incelenmiş olduğu Soru 7’de yapılan hatalar ile Soru 6’da yapılan hatalar birbiriyle örtüşmektedir.

Öğrencilerin verilen bir moda göre bileşke fonksiyon işlemini yapabilme konusunda ki hatalarını belirlemek amacıyla “ $Z/5$ de $f(x)=3x+1$ ve $g(x)=4x+3$ olduğuna göre,

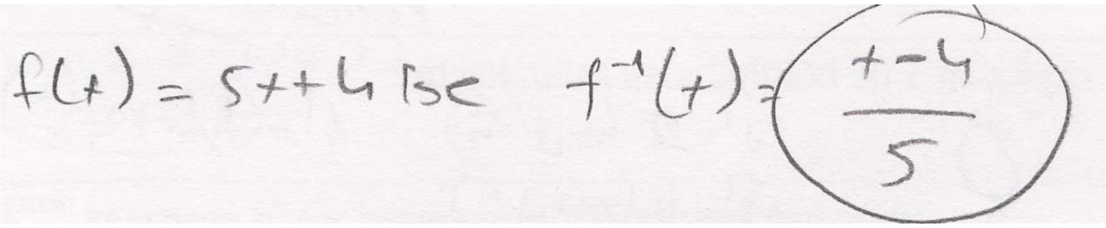
$(fog)(x) = ?$ (Soru 15)” sorusu soruldu. Bu soruda öğrenciler tarafından verilen cevaplar Çizelge 4.9’da verilmiştir.

Çizelge 4. 9. Soru 15 için öğrencilerin verdiği cevaplar

Öğrenci cevabı	**f**
 $(fog)(x) = [f(g(x))]$ $= [f(4x+3)]$ $= 3.(4x+3)+1$ $= 12x+10$ $(fog)(x) = 12x+10$ $12.5+10$ $= 70$ $7/5 = 0$	24
 $3(4x+3)+1 = 12x+9+1 \Rightarrow 12x+10$	13
 $f(g(x))$ $\downarrow$ $4x+3$ $4(3x+1)+3$ $12x+4+3$ $12x+7 =$	12
 $(fog)(x) = f(g(x) = 3.(4x+3)+1 = 12x+9+1 = 12x+10$ $12x+10 \equiv y(\mathrm{mod}\ 5)$ $12x \equiv y(\mathrm{mod}\ 5) \Rightarrow (fop)(x) = \boxed{2}$	8
 $(fog)(x) = 4x+3 \rightarrow 4.(3x+1)+3$ $\rightarrow 2x+4+3$ $\rightarrow 2x+2$	4

Öğrencilerin, verilen bir moda göre bileşke fonksiyon işlemi yapılırken $(f \circ g)(x)$ ifadesini sayısal bir değer olarak bulmaya çalıştığı (f=24), sonucu $Z/5$ kümesine dikkat etmeden 12x + 10 ya da 2 şeklinde buldukları görülmektedir. Ayrıca bileşke fonksiyonu bulurken, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliğini yanlış uygulayan 12 öğrenci vardır. 4 öğrenci ise $(f\circ g)(x)$ ve $(g\circ f)(x)$ kavramlarını birbirine karıştırmıştır.

Öğrencilerin verilen bir moda göre ters fonksiyon işlemini yapabilme konusunda ki hatalarını belirlemek amacıyla "$Z/7$ de $f\left(x\right)=5x+4$ olduğuna göre $f^{-1}\left(x\right)=?$ (Soru 17)" sorusu soruldu. Araştırmada ki dikkat çekici sonuçlardan birisi de bu soruda ortaya çıkmıştır. Şekil 4.16'da bu soruda sıklıkla yapılan bir hata verilmiştir.



$f(x)=5x+4$ ise $f^{-1}(x)=\frac{x-4}{5}$

Şekil 4. 16. Bir öğrencinin soru 17 için verdiği cevap

Öğrencilerin 69'u (%42) $Z/7$'de istenen fonksiyon tersini, reel sayılar kümesinde bulmuşlardır. 18 öğrenci ise bu hatanın üzerine bir de fonksiyon tersini sayısal değer olarak bulmaya çalışmıştır. Bir öğrenci ile bu konuda yapılan mülakat aşağıda verilmiştir.

Mülakatçı: soruyu nasıl çözdüğünü anlatır mısın?
Öğrenci: ortadaki işaretin tersini aldım, baştaki sayıyı da bölüm olarak yazdım.
Mülakatçı: peki, hangi kümede çalışıyoruz?
Öğrenci: $Z/7$
Mülakatçı: burada modüler aritmetik ile ilgili herhangi bir işlem yaptın mı?
Öğrenci: hayır.
Mülakatçı: bana $Z/7$ kümesinin elemanlarını sayar mısın?
Öğrenci: 7'den alt sayılar
Mülakatçı: -4 ya da 1/5 , $Z/7$'nin elemanı mıdır?
Öğrenci: hayır.

Öğrenciler, fonksiyonlar konusu işlenirken öğrenmiş oldukları "$ax+b$ şeklindeki bir fonksiyonun tersini reel sayılarda bulmanın kısa yolu $\frac{x-b}{a}$'dır" bilgisini tanım kümesine dikkat etmeden, burada da kullanmışlardır. Öğrencilerin %42'si tarafından yapılan bu hata fonksiyonlar konusunun önemi de dikkate alınacak olursa üst sınıflarda ki yeni konuların öğrenilmesini zorlaştıracaktır.

4.6. Altıncı Araştırma Problemine Ait Bulgular ve Tartışma

Bu başlık altında altıncı araştırma problemi olan 'Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusunu takvim problemlerine uygulama ile ilgili öğrenme güçlükleri nelerdir?' sorusuna cevap aranmak üzere öğrencilerin bilgi testindeki 14 ve 16 numaralı sorulara verdikleri cevaplar incelenmiştir.

Öğrencilerin bilgi testindeki altıncı araştırma problemi ile ilgili sorulara verdikleri cevaplara ait bulgular Çizelge 4.10'da verilmiştir.

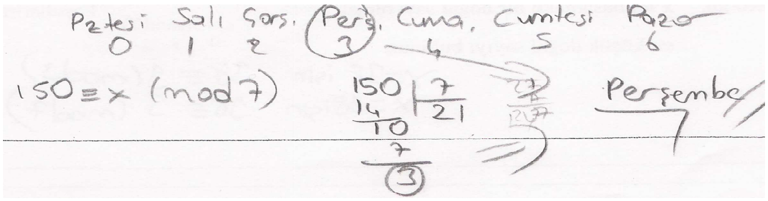
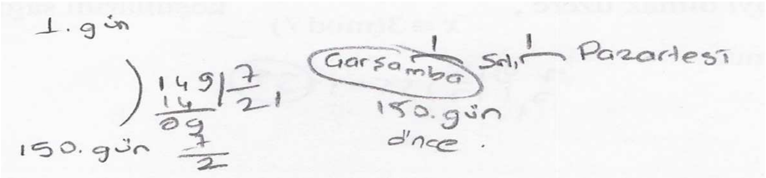
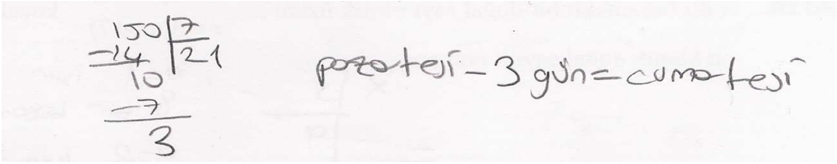
Çizelge 4. 10. Öğrencilerin altıncı araştırma problemine ilişkin sorulara verdikleri cevapların frekans ve yüzde dağılımı.

SORU	Frekans Yüzde	Doğru Cevap	Kısmen Doğru Cevap	Yanlış Cevap	Boş Cevap
Soru 14	f	111	33	13	7
	%	%67,7	%20,1	%7,9	%4,3
Soru 16	f	60	40	43	21
	%	%36,6	%24,4	%26,2	%12,8

Modüler aritmetiği, verilen bir takvim problemine uygularken öğrencilerin yapmış oldukları hataları belirlemek amacıyla "Bugün günlerden pazartesi ise 150 gün önce doğan bir çocuk hangi gün doğmuştur?(Soru 14)" ve "Bir doktor 5 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini Salı günü tuttuğuna göre 12.nöbetini hangi gün tutar?

(Soru 16)" soruları soruldu. Öğrencilerin Soru 14 için verdiği cevaplar Çizelge 4.11'de incelenmiştir.

Çizelge 4. 11. Soru 14 için öğrencilerin verdiği cevaplar

Öğrenci cevabı	f
 Pztesi Salı Çars. Pers. Cuma, Cumtesi Pazar 0 1 2 3 4 5 6 150≡x (mod 7) 150 | 7 14 | 21 10 7 3 Perşembe	34
 1. gün 149 | 7 14 | 21 09 7 2 150. gün Çarşamba Salı Pazartesi 150. gün önce	14
 150 | 7 -14 | 21 10 -7 3 pazatesi – 3 gün = cumatesi	7

Öğrencilerin önce ve sonra kavramlarını karıştırdıkları görülmektedir. Soru 14'de 34 öğrenci(%20,7) önce yerine sonra kavramına göre soruyu cevaplamıştır. Öğrencilerin önce kavramına göre soruyu çözerken, kalanı bulduktan sonra geriye gitmek yerine, sonra kavramında olduğu gibi ileriye doğru günleri saydıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin kalanı bulduktan sonra soruda verilen güne kalan olarak 0 yerine 1 rakamlarını atamak konusunda yanılgıya düştükleri görülmüştür. Bir öğrenci ile bu konuda yapılan mülakat aşağıda verilmiştir.

Mülakatçı: işlemlerini anlatır mısın?

Öğrenci: burada 150 gün demiş, bir hafta 7 gün olduğundan 150’yi 7’ye böldüm, bölüm 21 ve kalan 3.hangi gün doğmuş demiştir. Pazartesiden kalan üçü çıkardım cumartesiyi buldum.

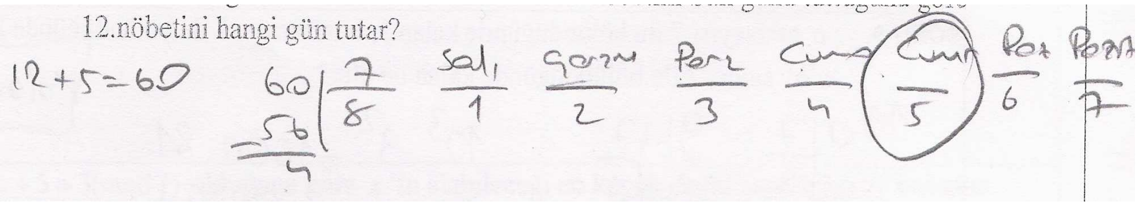
Mülakatçı: pazartesiden üç gün çıkarınca hangi günü bulursun? Nasıl buldun cumartesiyi?

Öğrenci: 3 gün geri geldim

Mülakatçı: hangi günleri sayarak geri geliyorsun?

Öğrenci: pazartesi, pazar, cumartesi. 3.gün cumartesi olur.

Soru 16 da öğrencilerin 34’ünün (%20,7) aradaki gün sayısını $12.5 = 60$ şeklinde yanlış hesapladıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin kalanı bulduktan sonra soruda verilen güne kalan olarak 0 yerine 1 rakamlarını atamak konusunda Soru 14’te karşılaşılan yanılgıya düştükleri görülmüştür. Şekil 4.17’de bir öğrencinin Soru 16’ya verdiği cevap verilmiştir.



12.nöbetini hangi gün tutar?

12+5=60

60 | 7
-56 | 8
4

Salı 1 Çarş 2 Perş 3 Cuma 4 Cumt 5 Paz 6 Pazt 7

Şekil 4. 17. Bir öğrencinin soru 16 için verdiği cevap

Öğrenci sorunun çözümü sırasında hem nöbetler arasında geçen gün sayısını yanlış hesaplamış hem de soruda geçen gün ile bölme işleminde kalan sayıyı ilişkilendirme konusunda yanılmıştır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu araştırma ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik konusundaki öğrenme güçlüklerini tespit etmek amacıyla yapılmıştır. Araştırmada uygulanan bilgi testinden elde edilen veriler analiz edilmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Öğrencilerin modüler aritmetik konusunun temelini oluşturan bölme algoritması kavramı ile ilgili bilgi eksiklikleri vardır ve bu kavramı tam olarak öğrenememişlerdir. Özellikle bölme algoritmasının simgesel gösteriminin modüler aritmetik notasyonu ile yazılmasının istendiği Soru 8'de öğrenciler %50 oranında sorunun çözüm kısmını boş bırakmış, soru hakkında öğrencilerin sadece %21,9'u yorum yapmıştır. Ayrıca bölme algoritması ve negatif tamsayılar kavramlarının birlikte kullanıldığı Soru 1 ve Soru 6'da başarı oranları pozitif tamsayılardakine oranla oldukça düşmüştür.

Denklik sınıflarını yazarken öğrencilerin ciddi anlamda güçlükler yaşadığı belirlenmiştir. Öğrenciler, Soru 7'de denklik sınıflarını yazarken, negatif tamsayıları da pozitif tamsayılardaki gibi yazıp yanlış bir genelleme içine girmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin herhangi bir denklik sınıfı ile mod kavramını birbirine karıştırdıkları tespit edilmiştir. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı tarafından açıklanan öğretim programları değerlendirme çalışmaları sonuç raporunda, 2005 yılında uygulamaya konulan ortaöğretim matematik öğretim programı ve ders kitaplarında, denklik sınıfları kavramının öğrenciler için karmaşık olduğu ve daha anlaşılır bir hale getirilmesi gerektiği belirtilmiştir.

Kapalılık özelliğinin birçok soruda öğrenciler tarafından önemsenmediği soruları çözerken öğrencilerin tanım kümesine dikkat etmedikleri belirlenmiştir. Bilgi testindeki birçok sorunun çözümünde öğrenciler reel sayılarda ya da rasyonel sayılarda işlemler yapılıyormuş gibi yanılgıya düşmüşlerdir.

Öğrencilerin modüler aritmetik özeliklerini kullanmak yerine üslü sayıları hesaplamaya çalıştıkları ve dolayısıyla sıklıkla dört işlem hataları yaptıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin bilgi testinde herhangi bir moda göre sorulmuş olan denklemleri çözerken bilinmeyenler yerine sayısal değerler vermeyi tercih ettikleri ve bir ya da birkaç sayısal değeri denedikten sonra bölme işleminden kalanı bulmak dışında hiçbir modüler aritmetik özelliği kullanmadan doğru cevabı bulmaya çalıştıkları tespit edilmiştir.

Üslü ifadelerin bulunduğu ve kalanların periyodik olarak tekrar ettiği sorularda öğrencilerin ezbere bilgiler ile hareket edip kalan olarak 1 sayısını buldukları ancak sonrasında soruları yorumlayamadıkları görülmüştür.

$\mathbb{Z}/5$’de iki fonksiyonun bileşkesinin bulunması ile ilgili soruda öğrencilerin işlemleri yaptıktan sonra elde edilen bileşke fonksiyonunu tanım kümesine göre yorumlamadıkları ve değişken yerine özellikle mod değerini vererek sayısal değer bulmaya çalıştıkları görülmüştür.

Öğrencilere kısa yol adı altında öğretilen ifadeler öğrenme güçlüklerine sebep olmaktadır. Soru 1’in ikinci kısmında negatif bir tamsayının herhangi bir moda göre kalanını, öğrencilerin %28’i kalanın pozitif bir tamsayı olması gerektiğini bildiği halde kısa yol mantığını eksik kullanarak negatif bir tamsayı olarak bulmuştur. Sadece 2 öğrencinin bölme işlemi tablosunu bölme algoritmasına uygun bir şekilde yaptığı belirlenmiştir. Ayrıca Soru 19’da $\mathbb{Z}/7$’ye göre bir fonksiyonun tersinin bulunması istenmiş, 69 öğrenci (%42) soruyu fonksiyonlar konusunda öğrenmiş oldukları kısa yolu kullanarak “$ax+b$’nin tersi $\frac{x-b}{a}$” şeklinde çözmüşlerdir.

Öğrencilerin, bir takvim problemi olan Soru 14’te doğru cevap yüzdelerinin oldukça yüksek olduğu görülmüştür(%67,7). Takvim problemlerinde öğrencilerin kalan yerine 0 veya 1 rakamını vermek konusunda yanılgı içinde oldukları tespit edilmiştir.

Ayrıca verilerin analizi sırasında araştırmacı öğrencilerin soru çözümleri yaparken $\left(\bmod m\right)$ ifadesini yazmadıklarını tespit etmiştir.

Araştırmada elde edilen sonuçlara göre, matematik öğretmenleri ve matematik eğitimi alanında çalışma yapan araştırmacılar için yararlı olacağı düşünülen öneriler aşağıda sunulmaktadır.

Modüler aritmetik konusu anlatılmadan önce öğrencilerin, tamsayılarda bölme işlemi, herhangi bir işlemde kapalılık ve ters eleman özelliği, üslü sayılar, bir fonksiyonun tanım kümesi kavramı gibi gerekli ön-şart bilgilerindeki eksiklikleri tamamlanmalıdır. Böylece bu konulardaki bilgi eksikliklerinden kaynaklanan hatalar ve yanılgılar en aza indirilebilir.

Öğrencilerin birbirine karıştırabileceği kavramlar ve kurallar üzerinde durulmalı, özellikle modüler aritmetik konusunda negatif tamsayılarla işlem yapabilme becerilerini geliştirmeye yönelik etkinlikler yapılmalıdır.

Öğrencilerin esas tanım ve kuralları unutmasına sebep olan kısa yol ya da pratik yol adı altında birtakım sonuçlar yazdırmak yerine, öğrencilerin istenen sonuçlara ulaşmaları sağlanmalı, keşfetme duygusu geliştirilmelidir.

Gündelik hayatta karşılığını bulan problemler ile karşılaşıldığında öğrenci başarısı artmaktadır. Modüler aritmetik konusu bu anlamda diğer matematik konularına göre daha şanslı sayılabilir. Ders kitapları hazırlama komisyonlarının ve öğretmenlerin konunun ilgi çekici yanlarına yer vermeleri öğrencilerin konuyu öğrenmeye olan isteklerini arttırabilir. Ancak, ders kitaplarında modüler aritmetik konusu işlenirken gündelik hayatta nerelerde kullanıldığından, yaygın olarakta kriptografiden kısaca bahsedilmekte ardından konu bütün özellikleri ve farklı soru tipleriyle işlenmektedir. Kriptografi kullanılarak yapılan bir etkinlik ile öğrencilerdeki keşfetmeye hazır olma duygusu tam ortaya çıkmışken, soyut olabilecek onlarca soru peş peşe sıralanmakta öğrencilerin bu istekli hallerinden geriye eser kalmamaktadır. Ülkemizde, ders kitaplarının birçok yerde tek ve temel kaynak olduğu göz önüne alınmalı, öğrencilerde keşfetme duygusunu canlandırabilen, aynı zamanda öğrenci hatalarına ve yanılgılarına dikkat çekerek öğretmenlere kılavuz olabilen ders kitapları hazırlanmalıdır.

Öğretmenler, konularını işledikten sonra öğrencilerin yapmış olduğu hataları, sahip oldukları yanılgıları ve öğrenme güçlüklerini belirlemek için kısa süreli ve az sorulu bilgi testleri düzenlemeli, bu testlerden elde edilecek verilere göre öğrencilerdeki eksik ya da hatalı öğrenmeler giderilmeye çalışılmalıdır. Bu testler, öğrencilerin kaygı düzeyini arttırıcı bir şekilde notla değerlendirme amacıyla kullanılmamalıdır.

Bilgi teknolojisinin sunduğu imkanlardan faydalanılmalı, her konu aynı yöntem ve tekniklerle anlatılmamalıdır. Öğrenmeyi kolaylaştırıcı öğretim stratejileri geliştirilmeli, öğrencilerin sınıf içinde derse aktif olarak katılımı sağlanmalı, düşüncelerini ifade edebilmeleri için fırsatlar tanınmalı ve iletişim güçleri arttırılmalıdır.

Modüler aritmetik ve diğer matematik konularında öğrencilerin yapmış oldukları hataları, yanılgıları ve öğrenme güçlüklerini belirleyip bunları gidermeye yönelik çalışmalara devam edilmeli, öğretmenler araştırma yapmaya teşvik edilmelidir.

KAYNAKLAR

Akgün, L., 2007. Değişken kavramına ilişkin yeterlilikler ve değişken kavramının öğretimi. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Akkuş, M., 2004. Logaritma konusunda 10.sınıf öğrencilerinin kavram yanılgıları nelerdir. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Akyıldız, E., Çimen, C. ve Akleylek, S., 2007. Şifrelerin Matematiği: Kriptografi. 2.baskı, ODTÜ Yayıncılık, Ankara.

Altun, M., 2002. Matematik Öğretimi. 10.baskı, Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul.

Altun, M., 2007. Orta Öğretimde Matematik Öğretimi. 1.baskı, Aktüel Alfa Akademi Bas.Yay.Dağ., Bursa.

Arıkan, A. ve Özer, Ö., 2002. Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 1083–1089, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Baki, A., 1998. Cebirle ilgili işlem yanılgılarının değerlendirilmesi. III. Ulusal Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu Bildiriler Kitabı, 46–49, KTÜ, Trabzon.

Baki, A. ve Kartal, T., 2004. Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, 2 (1), 27–50.

Baloğlu, M., 2001. Matematik Korkusunu Yenmek. Kuram ve uygulamada eğitim bilimleri dergisi, 1/1, 59–76, www.edam.com.tr (15.02.2009)

Baykul, Y., 2005. İlköğretimde Matematik Öğretimi. 8.baskı, Pegem A Yayıncılık, Ankara.

Bilgin, İ. ve Geban, Ö., 2001. Benzeşim (analoji) yöntemi kullanarak lise 2.sınıf öğrencilerinin kimyasal denge konusundaki kavram yanılgılarının giderilmesi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 20, 26–32.

Bozkurt, A., Ak, S., Erdoğan, A. ve Şahin, İ., 2007. Ortaöğretim Matematik 9.Sınıf Ders Kitabı. Eko-yay, 153-162, Ankara.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F., 2008. Bilimsel Araştırma Yöntemleri. Pegem Akademi, 330 s, Ankara.

Caballero, P. G., and Bruno, C. C., 2007. A Cryptological Way of Teaching Mathematics. EJ785735, www.eric.ed.gov (10.05.2008).

Cengiz, Ö. M., 2006. Reel sayıların öğretiminde bir kısım ortaöğretim öğrencilerinin yanılgıları ve yanlışları üzerine bir çalışma. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Dede, Y., Yalın, H. İ. ve Argün, Z., 2002. İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanılgıları. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 962–968, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Dede, Y. ve Argün, Z., 2003. Değişken kavramının öğretimi: harf sembollerin farklı kullanımları. Burdur Eğitim Fakültesi Dergisi, 4 (6), 39–51.

Dede, Y., 2004. Öğe Gösterim Teorisinin Bir Uygulaması: Fonksiyon Kavramının Öğretimi. Gazi Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 5, Sayı 2, 287–297, www.kefad.ahievran.edu.tr (17.05.2009)

Demetgül, Z., 2001. Trigonometri konusundaki kavram yanılgılarının tespit edilmesi. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Dikici, R. ve İşleyen, T., 2003. Bağıntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. Kastamonu Eğitim Dergisi, Cilt 11, 2, 105–116.

Dikici, R. ve Tatar, E., 2008. Matematik eğitiminde öğrenme güçlükleri. Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt 5, Sayı 9, 183–193.

Doğan, A., 2001. Genel liselerde okutulan trigonometri konularının öğretiminde öğrencilerin yanılgıları, yanlışları ve trigonometri konularına karşı öğrenci tutumları üzerine bir araştırma. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Doğan, A., Sulak, H. ve Cihangir, A., 2002. İlköğretim matematik eğitimi anabilim dalı öğrencilerinin özel fonksiyonlar ile fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yeterlilikleri üzerine bir araştırma. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 975–981, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Dönmez, A., 2005. Matematiğin Öyküsü ve Serüveni. Toplumsal Dönüşüm Yayınları, s 143-146, İstanbul.

Duatepe, A. ve Çilesiz, Ş., 1999. Matematik tutum ölçeği geliştirilmesi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 16, 45-52.

Durmuş, S., 2004. Matematikte öğrenme güçlüklerinin saptanması üzerine bir çalışma. Kastamonu Eğitim Dergisi, 12 (1), 125–128.

Duru, A., 2006. Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Ellez, A., M., 2004. Etkin öğrenme, strateji kullanımı, matematik başarısı ve cinsiyet ilişkileri. Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Erbaş, A. K. ve Ersoy, Y., 2002. Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin eşitliklerin çözümündeki başarıları ve olası kavram yanılgıları. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 988–994, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Ertürk, S., 1994. Eğitimde Program Geliştirme. Meteksan A.Ş., Ankara.

Ersoy, Y., Çakıroğlu, E. ve Çetin, Y., 2002. KULE: keşfederek, uygulayarak logaritma öğretimi etkinlikleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 853–859, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Ersoy, Y. ve Ardahan, H., 2003. İlköğretim okullarında kesirlerin öğretimi-II:Tanıya yönelik etkinlikler düzenleme. Matematikçiler derneği, matematik köşesi makaleleri www.matder.org.tr (25.01.2009).

Ersoy, Y., 2003. Matematik okur yazarlığı II. Hedefler, geliştirilecek yetiler ve beceriler. Matematikçiler derneği, matematik köşesi makaleleri www.matder.org.tr (25.01.2009).

Ersoy, Y., 2004. Problem kurma ve çözme yaklaşımlı matematik öğretimi yönünde yenilik hareketleri. Matematikçiler derneği, matematik köşesi makaleleri, www.matder.org.tr (25.01.2009).

Ertekin, E., 2002. Denklem öğretimindeki hata ve yanılgıların teşhisi ve alınması gereken tedbirler. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Eryılmaz, A. ve Sürmeli, E., 2002. Üç aşamalı sorularla öğrencilerin ısı ve sıcaklık konularındaki kavram yanılgılarının ölçülmesi. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Fidan, N., 1985. Okulda Öğrenme ve Öğretme. Alkım Yayıncılık, Ankara.

Göker, L., 1989. Matematik Tarihi. Kültür Bakanlığı, Ankara.

Güler, E., 2007. Modüler aritmetik konusunun öğretiminde şifreleme aktivitelerinin matematik başarısına etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Gür, H. ve Korkmaz, E., 2003. İlköğretim 7.sınıf öğrencilerinin problem ortaya atma becerilerinin belirlenmesi. Matematikçiler derneği, matematik köşesi makaleleri, www.matder.org.tr (25.01.2009).

Güveli, H. ve Güveli, E., 2002. Bağıntı, fonksiyonun tanımı, bire-bir fonksiyon ve örten fonksiyon konularında lise-1 düzeyinde kavram yanılgılarının tespiti. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 1019–1023, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown, L., İbikli, E., ve Brown, S., 2000. Matematik Terimleri Sözlüğü. Türk Dil Kurumu Yayınları:739, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A., 2004. Matematik Öğretimi. Asil Yayın Dağıtım, Ankara.

İşleyen, T., 2005. Fonksiyon kavramı, tarihsel gelişimi, öğretimi ve kavram yanılgıları. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Johnson, I. D., 1998. Paving the Way To Algebraic Thought Using Residue Designs. EJ564640, www.eric.ed.gov (10.05.2008).

Judd, C. H., 1939. Educational Psychology. New York, Houghton Mifflin, 270.

Karaçay, T., 1985. Orta Öğretim Kurumlarında Matematik Öğretimi ve Sorunları, Türk Eğitim Derneği, 13-14 Haziran.

Kathleen, M. S., 1994. The development and validation of a categorization of misconceptions in the learning of chemistry. Doctoral Thesis, University of Massachusetts Lowell, USA.

Keçeli, V., 2007. Karmaşık sayılarda kavram yanılgısı ve hata ile tutum arasındaki ilişki. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Melemezoğlu, Ç., 2005. Yönlü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptığı hatalar ve yanılgılar üzerine bir araştırma. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 2005. Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu(9–12.Sınıflar), Ankara.

Moralı, S., Köroğlu, H. ve Çelik, A., 2004. Buca eğitim fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları. GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 24, Sayı 1, s.161–175.

Morgil, İ., Erdem, E. ve Yılmaz, A., 2003. Kimya eğitiminde kavram yanılgıları. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25, 246-255.

Mutlu, A., ve Ercan, M. A., 2008. Ortaöğretim Matematik 9.Sınıf Ders Kitabı. Gün Yayıncılık, 157-166, Ankara.

Myerscough, D., *et al.*, 1996. Cryptography: Cracking Codes. EJ538337, www.eric.ed.gov (10.05.2008).

Özdemir, M. F., 2006. Ortaöğretimde kompleks sayılarla ilgili kavram yanılgılarının belirlenmesi ve çözüm önerileri. Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Özçifçi, R., 2007. Rasyonel sayıların öğretimindeki hatalar ve alınması gereken tedbirler. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Pesen, C., ve Odabaş, A., 2000. Matematik Öğretimi. Mikro yayınları, Konya.

Soylu, Y. ve Aydın, S., 2006. Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine bir çalışma. Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi, 8 (2), 83–95.

Sönmez, V., 2007. Program Geliştirmede Öğretmen Elkitabı. 13.baskı, Anı yayıncılık, Ankara.

Stewart, I., 2000. Doğanın Sayıları. İzdüşüm Yayınları, İstanbul, s 7.

Şandır, H., Ubuz, B. ve Argün, Z., 2002. Ortaöğretim 9.sınıf öğrencilerinin mutlak değer kavramındaki öğrenme hataları ve kavram yanılgıları. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 1107–1112, 16–18 Eylül, ODTÜ, Ankara.

Şandır, H., Ubuz, B. ve Argün, Z., 2007. 9.sınıf öğrencilerinin aritmetik işlemler, sıralama, denklem ve eşitsizlik çözümlerindeki hataları. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 32, 274–281.

Şenay, Ş. C., 2002. Üslü ve köklü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptıkları hatalar ve yanılgıları üzerine bir araştırma. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Tatar, E., 2006. İkili işlem kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi ve 4MAT yönteminin başarıya etkisi. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Toluk, Z. ve Olkun, S., 2003. İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi. Anı Yayıncılık, Ankara.

Umay, A., 2002. Öteki Matematik. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23, 275–281.

Umay, A., 2003. Matematiksel Muhakeme Yeteneği. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24, 234–243.

Ülgen, G., 2004. Kavram Geliştirme Kuram ve Uygulamalar. 4.baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Yenilmez, K. ve Can, S., 2006. Matematik Öğretimi Dersine Yönelik Görüşler. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 22, 47–59.

Yıldırım, C., 1996. Matematiksel Düşünme. 2.baskı, Remzi Kitabevi, İstanbul, 168, 150–159.

Yıldırım, A. F., 2003. Lise öğrencilerinin lise-I fonksiyonlar konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Yılmaz, A., 2001. İşbirliğine dayalı öğrenme, etkili ancak ihmal edilen yada yanlış kullanılan bir metot. MEB Dergisi, 150.

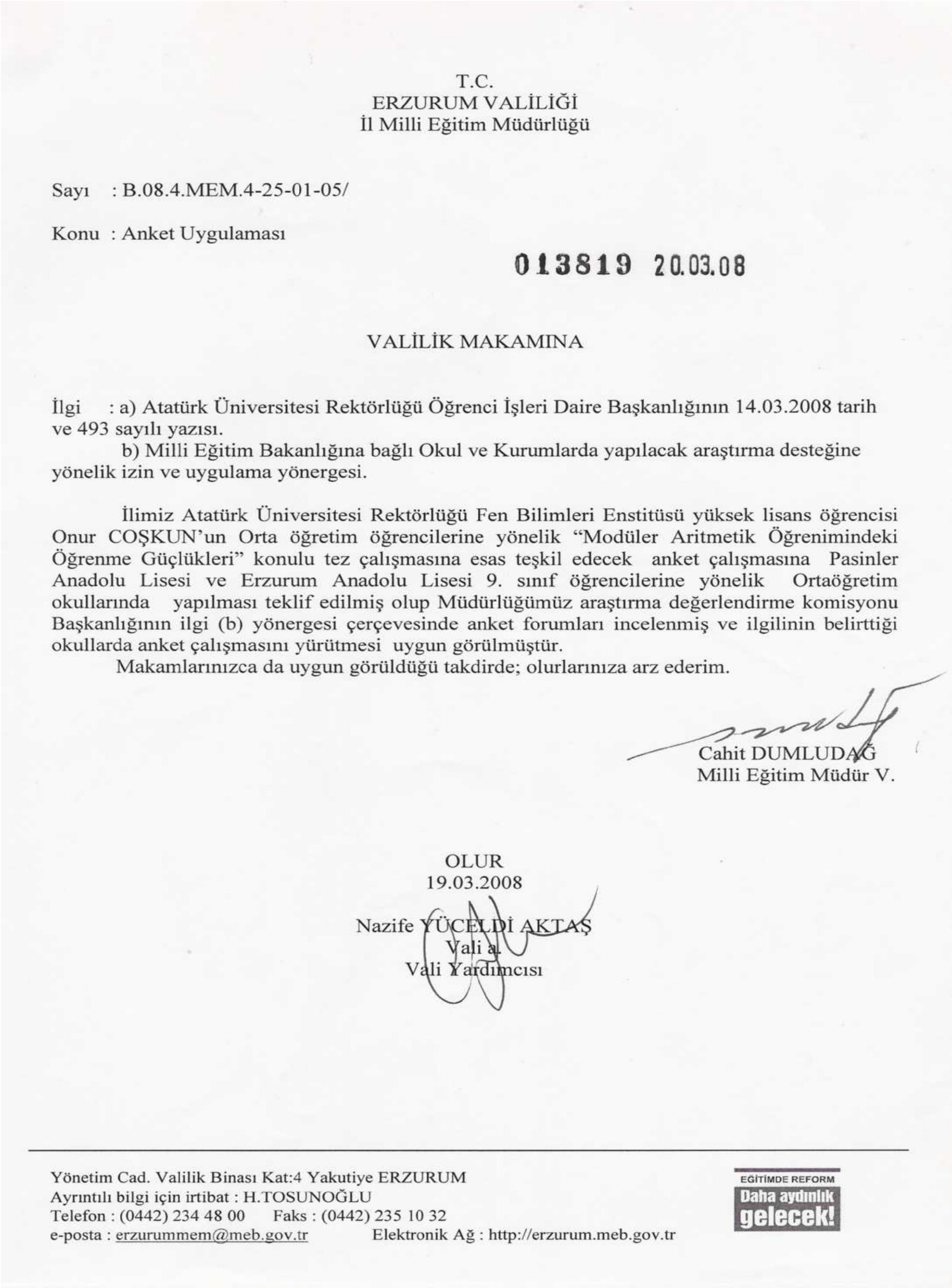
Yöney, T., 2005. Barkodlar nasıl çalışır?. Bilim ve Teknik Dergisi, 448, 102, Mart 2005.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S.,Vaerenbergh, B. H. and Ratinckx, E., 1999. Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment with Fifth Graders. Mathematical Thinking and Learning, 1(3), 195–229.

Wenzelburger, E., 1974. Verbal Mediators in Mathematics for Transfer of Learning. Technical Report No.3. ED113195, www.eric.ed.gov (10.05.2008).

EKLER

EK 1. Erzurum Milli Eğitim Müdürlüğü’nden Alınan İzin Belgesi



T.C.
ERZURUM VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : B.08.4.MEM.4-25-01-05/

Konu : Anket Uygulaması

013819 20.03.08

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) Atatürk Üniversitesi Rektörlüğü Öğrenci İşleri Daire Başkanlığının 14.03.2008 tarih ve 493 sayılı yazısı.
b) Milli Eğitim Bakanlığına bağlı Okul ve Kurumlarda yapılacak araştırma desteğine yönelik izin ve uygulama yönergesi.

İlimiz Atatürk Üniversitesi Rektörlüğü Fen Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans öğrencisi Onur COŞKUN’un Orta öğretim öğrencilerine yönelik “Modüler Aritmetik Öğrenimindeki Öğrenme Güçlükleri” konulu tez çalışmasına esas teşkil edecek anket çalışmasına Pasinler Anadolu Lisesi ve Erzurum Anadolu Lisesi 9. sınıf öğrencilerine yönelik Ortaöğretim okullarında yapılması teklif edilmiş olup Müdürlüğümüz araştırma değerlendirme komisyonu Başkanlığının ilgi (b) yönergesi çerçevesinde anket forumları incelenmiş ve ilgilinin belirttiği okullarda anket çalışmasını yürütmesi uygun görülmüştür.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde; olurlarınıza arz ederim.

Cahit DUMLUDAĞ
Milli Eğitim Müdür V.

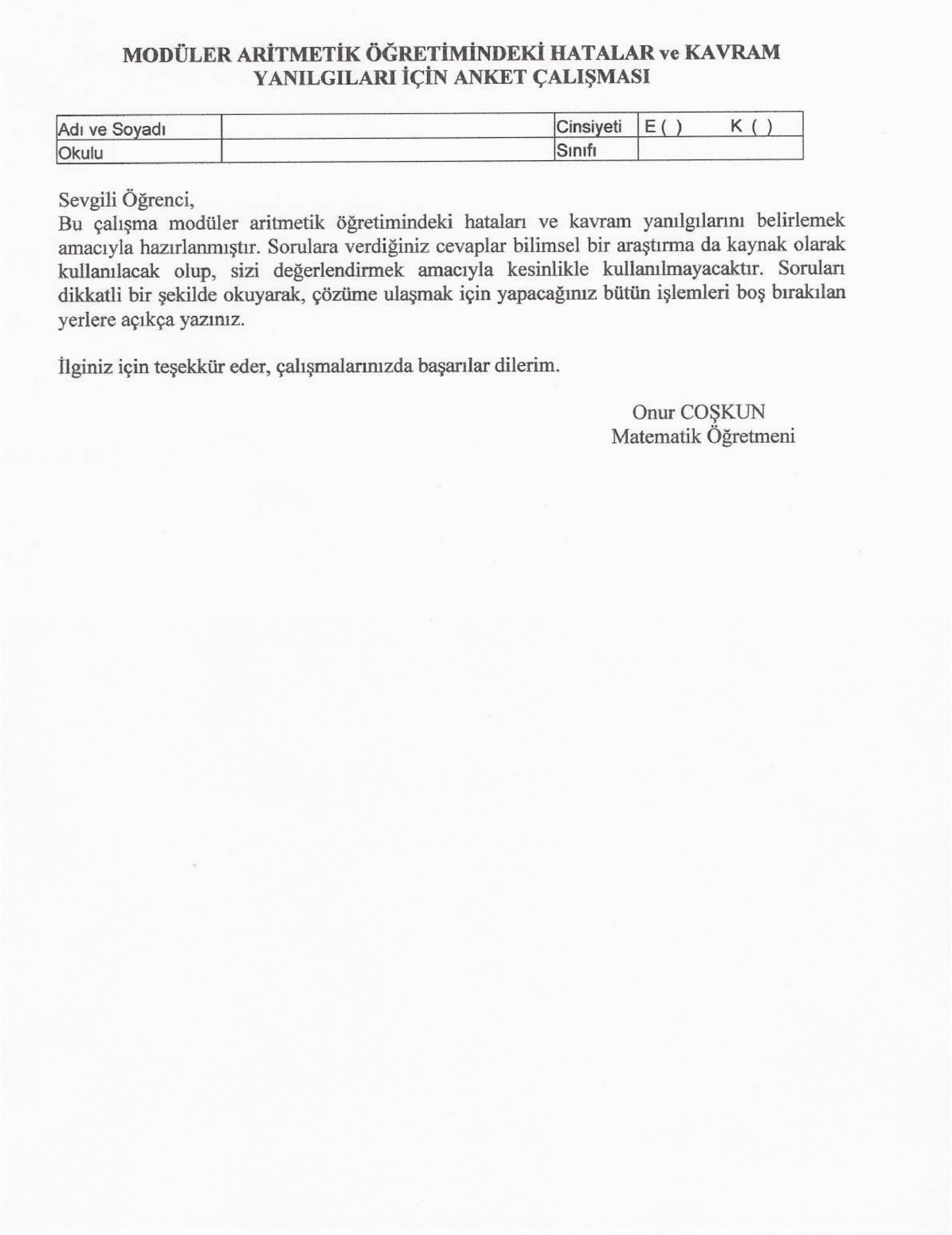
OLUR
19.03.2008

Nazife YÜCELDİ AKTAŞ
Vali a.
Vali Yardımcısı

Yönetim Cad. Valilik Binası Kat:4 Yakutiye ERZURUM
Ayrıntılı bilgi için irtibat : H.TOSUNOĞLU
Telefon : (0442) 234 48 00 Faks : (0442) 235 10 32
e-posta : erzurummem@meb.gov.tr Elektronik Ağ : http://erzurum.meb.gov.tr

EĞİTİMDE REFORM
Daha aydınlık gelecek!

EK 2. Modüler Aritmetik ve Özellikleri Bilgi Testi



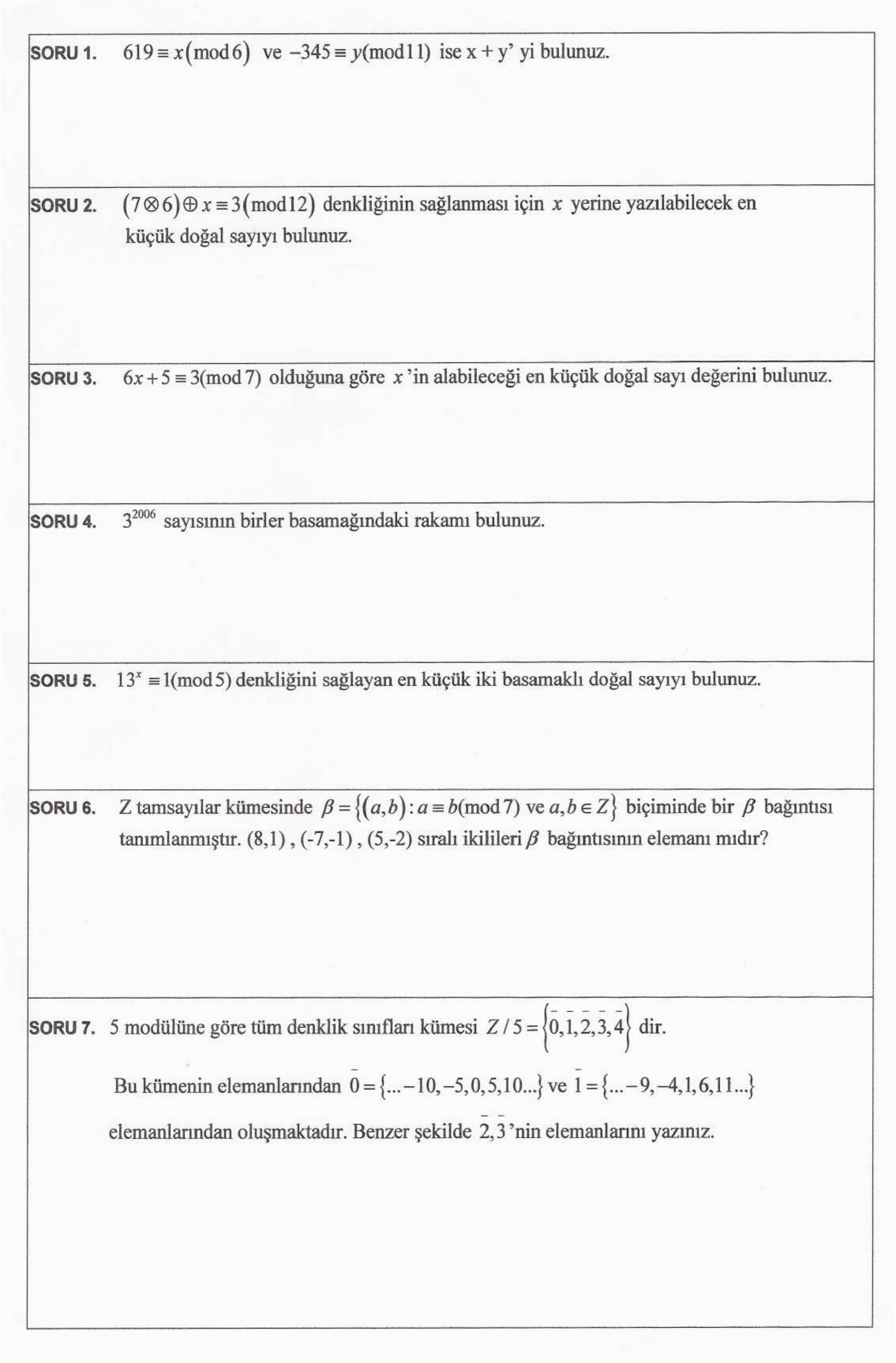
MODÜLER ARİTMETİK ÖĞRETİMİNDEKİ HATALAR ve KAVRAM YANILGILARI İÇİN ANKET ÇALIŞMASI

Adı ve Soyadı		Cinsiyeti	E ( ) K ( )
Okulu		Sınıfı	

Sevgili Öğrenci,
Bu çalışma modüler aritmetik öğretimindeki hataları ve kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Sorulara verdiğiniz cevaplar bilimsel bir araştırma da kaynak olarak kullanılacak olup, sizi değerlendirmek amacıyla kesinlikle kullanılmayacaktır. Soruları dikkatli bir şekilde okuyarak, çözüme ulaşmak için yapacağınız bütün işlemleri boş bırakılan yerlere açıkça yazınız.

İlginiz için teşekkür eder, çalışmalarınızda başarılar dilerim.

Onur COŞKUN
Matematik Öğretmeni



SORU 1. $619 \equiv x(\text{mod}\,6)$ ve $-345 \equiv y(\text{mod}\,11)$ ise x + y' yi bulunuz.

SORU 2. $(7 \otimes 6) \oplus x \equiv 3(\text{mod}\,12)$ denkliğinin sağlanması için x yerine yazılabilecek en küçük doğal sayıyı bulunuz.

SORU 3. $6x + 5 \equiv 3(\text{mod}\,7)$ olduğuna göre x 'in alabileceği en küçük doğal sayı değerini bulunuz.

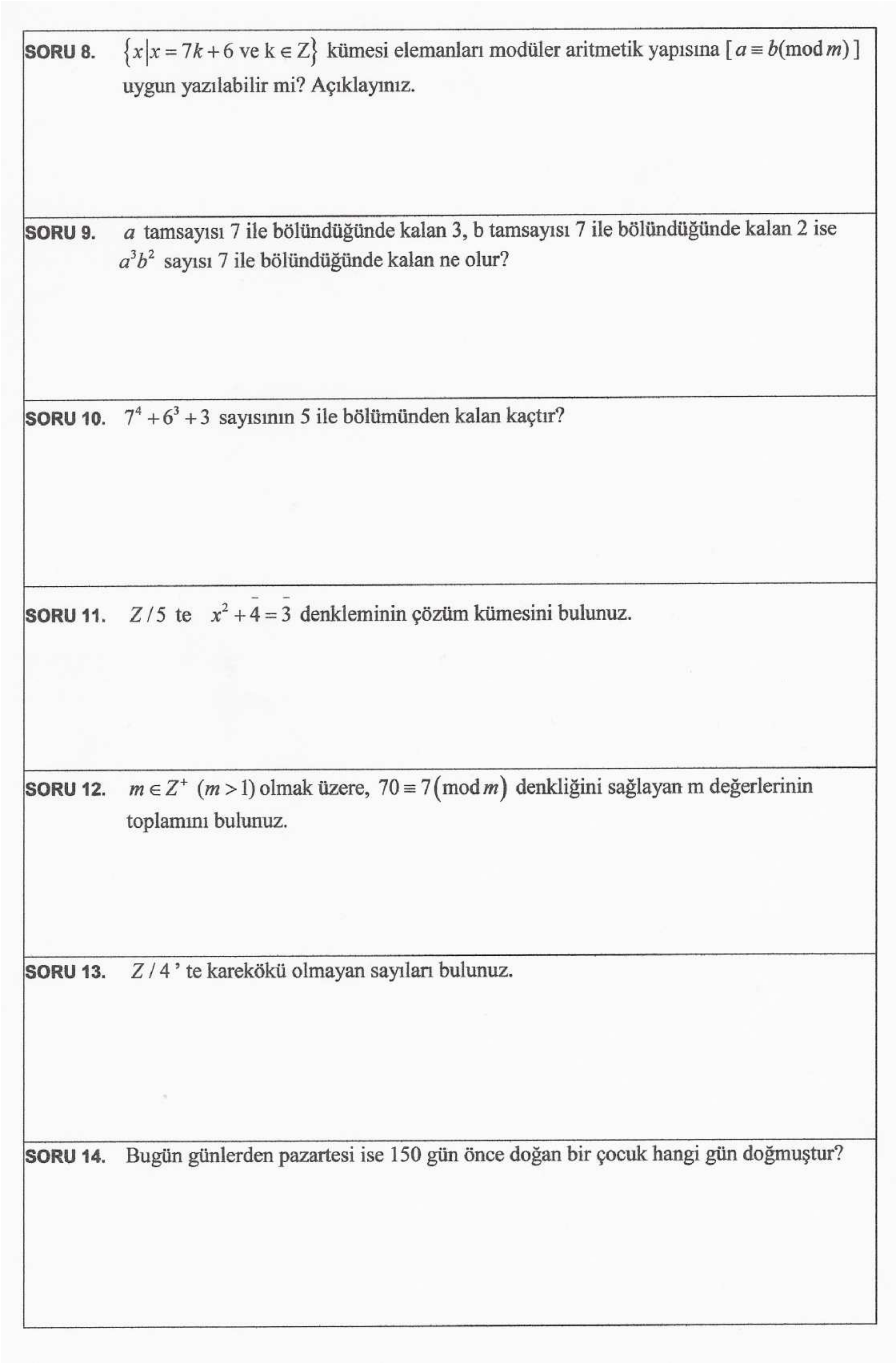
SORU 4. 3^{2006} sayısının birler basamağındaki rakamı bulunuz.

SORU 5. $13^{x} \equiv 1(\text{mod}\,5)$ denkliğini sağlayan en küçük iki basamaklı doğal sayıyı bulunuz.

SORU 6. Z tamsayılar kümesinde $\beta = \{(a,b) : a \equiv b(\text{mod}\,7) \text{ ve } a,b \in Z\}$ biçiminde bir β bağıntısı tanımlanmıştır. (8,1) , (-7,-1) , (5,-2) sıralı ikilileri β bağıntısının elemanı mıdır?

SORU 7. 5 modülüne göre tüm denklik sınıfları kümesi $Z/5 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ dir.

Bu kümenin elemanlarından $\overline{0} = \{\ldots -10,-5,0,5,10\ldots\}$ ve $\overline{1} = \{\ldots -9,-4,1,6,11\ldots\}$ elemanlarından oluşmaktadır. Benzer şekilde $\overline{2},\overline{3}$ 'nin elemanlarını yazınız.



SORU 8. $\{x | x = 7k + 6 \text{ ve } k \in Z\}$ kümesi elemanları modüler aritmetik yapısına [$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$] uygun yazılabilir mi? Açıklayınız.

SORU 9. a tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 3, b tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 2 ise a^3b^2 sayısı 7 ile bölündüğünde kalan ne olur?

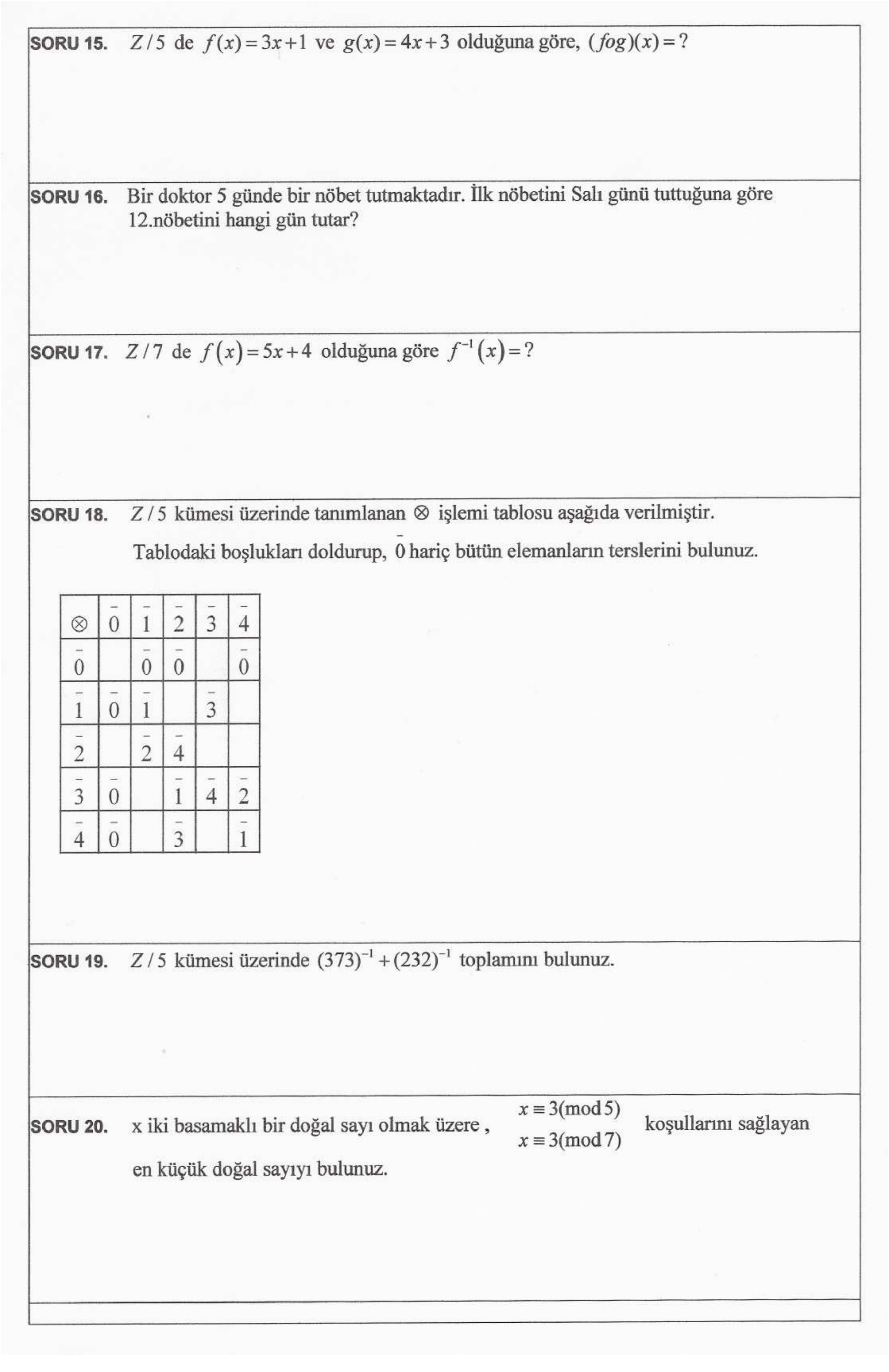
SORU 10. $7^4 + 6^3 + 3$ sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

SORU 11. $Z/5$ te $x^2 + \bar{4} = \bar{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

SORU 12. $m \in Z^+$ $(m > 1)$ olmak üzere, $70 \equiv 7(\mathrm{mod}\, m)$ denkliğini sağlayan m değerlerinin toplamını bulunuz.

SORU 13. $Z/4$ ' te karekökü olmayan sayıları bulunuz.

SORU 14. Bugün günlerden pazartesi ise 150 gün önce doğan bir çocuk hangi gün doğmuştur?



SORU 15. $Z/5$ de $f(x)=3x+1$ ve $g(x)=4x+3$ olduğuna göre, $(fog)(x)=?$

SORU 16. Bir doktor 5 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini Salı günü tuttuğuna göre 12.nöbetini hangi gün tutar?

SORU 17. $Z/7$ de $f(x)=5x+4$ olduğuna göre $f^{-1}(x)=?$

SORU 18. $Z/5$ kümesi üzerinde tanımlanan $\otimes$ işlemi tablosu aşağıda verilmiştir.

Tablodaki boşlukları doldurup, $\bar{0}$ hariç bütün elemanların terslerini bulunuz.

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$		$\bar{3}$	
$\bar{2}$		$\bar{2}$	$\bar{4}$		
$\bar{3}$	$\bar{0}$		$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$		$\bar{3}$		$\bar{1}$

SORU 19. $Z/5$ kümesi üzerinde $(373)^{-1}+(232)^{-1}$ toplamını bulunuz.

SORU 20. x iki basamaklı bir doğal sayı olmak üzere , $\begin{matrix} x\equiv 3(\text{mod}\,5) \\ x\equiv 3(\text{mod}\,7) \end{matrix}$ koşullarını sağlayan en küçük doğal sayıyı bulunuz.

EK 3. Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzundan (MEB 2005) Modüler Aritmetik konusu ile ilgili kazanımlar ve etkinlik örnekleri.

9. SINIF ÖĞRETİM PROGRAMI

ÖĞRENME ALANI: CEBİR **4. BÖLÜM:** SAYILAR

ALT ÖĞRENME ALANI	KAZANIMLAR	ETKİNLİK ÖRNEKLERİ	AÇIKLAMALAR
MODÜLER ARİTMETİK	1. Kalan sınıflarını (denklik sınıflarını) ve kalan sınıflarının kümesini (Z/m kümesini) belirtir.	Modüler aritmetik, gizli haberleşme bilimi olan **kriptolojide** mesajların şifrelenmesinde sıkça kullanılmaktadır. Aşağıdaki tabloda alfabemizdeki harflere ve bazı noktalama işaretlerine sayılar atanmıştır.	[!] $m \in Z^+$ olmak üzere, m ile bölünmesinden aynı kalanı veren tam sayıları denk sayan bağıntının yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip olduğu (bir denklik bağıntısı olduğu) verilir. Bağıntı

Harfler	Sayısal Değerler (d)	Harfler	Sayısal Değerler (d)	Harfler	Sayısal Değerler (d)
A	00	İ	11	Ş	22
B	01	J	12	T	23
C	02	K	13	U	24
Ç	03	L	14	Ü	25
D	04	M	15	V	26
E	05	N	16	Y	27
F	06	O	17	Z	28
G	07	Ö	18	.	29
Ğ	08	P	19	,	30
H	09	R	20	"	31
I	10	S	21	Boşluk	32

Bu tabloya göre Atatürk'ün, " Tek ihtiyacımız, çalışkan olmaktır." sözünü

$$k = d + 6 \pmod{33}$$

şifreleme işlemiyle şifrelenmiş sayı dizisine dönüştürmeleri istenir.

$k =$ 04 29 11 19 05 17 15 29 17 00 06 08 16 21 16 01 03 09
06 20 16 28 19 06 22 05 23 20 21 06 19 29 16 26 02 04

Sınıf İçi Etkinlik [!] Uyarı İç İlişkilendirme Diğer Derslerle Bağlantılar Ölçme ve Değerlendirme

ÖĞRENME ALANI: CEBİR **4. BÖLÜM:** SAYILAR

ALT ÖĞRENME ALANI	KAZANIMLAR	ETKİNLİK ÖRNEKLERİ	AÇIKLAMALAR
MODÜLER ARİTMETİK	2. Modüler aritmetik ile ilgili özellikleri gösterir ve işlemler yapar.	⌂ 11 ile bölünebilme kuralını modüler aritmetik yardımıyla göstermeleri istenir. ⌂ $m \in Z^+$ olmak üzere, $70 \equiv 7 \pmod{m}$ denkliğini sağlayan m değerlerinin toplamı buldurulur. ⌂ $5x+4 \equiv 3 \pmod{7}$ olduğuna göre, x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri buldurulur. ⌂ $23^{2005} \equiv x \pmod{5}$ olduğuna göre, x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri buldurulur. ⌂ $19^x \equiv 2 \pmod{7}$ olduğuna göre, x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri buldurulur. ⌂ $1234^{1234} \equiv x \pmod{8}$ olduğuna göre, x in alabileceği en küçük doğal sayı değeri buldurulur. ⌂ 1923^{82} sayısının birler basamağındaki rakam buldurulur. ⌂ $24^{25}+25^{26}+26^{27}+27^{28}$ toplamının 6 ile bölümünden kalan buldurulur. ⌂ x tam sayısının 8 ile bölümünden kalan 5, y tam sayısının 8 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre, x^4y^3 tam sayısının 8 ile bölümünden kalan buldurulur.	[!] Özellikler : $\forall\, a,b,c,d \in Z$ ve $m \in Z^+$ için $a \equiv b \pmod{m}$ ve $c \equiv d \pmod{m}$ ise • $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ • $a.c \equiv b.d \pmod{m}$ dir. [!] Üslü biçimde verilen bir tam sayının başka bir tam sayıya bölünmesinden kalanın bulunması verilir. 🗐 3^{122} sayısının 5 ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz. 🗐 $33^{11}+11^{33}$ sayısının 7 ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz. 🗐 $444^{777}+777^{444}$ sayısının birler basamağını bulunuz. 🗐 $m \in Z^+$ olmak üzere, $88 \equiv 4 \pmod{m}$ denkliğini sağlayan m değerlerini bulunuz.

⌂ Sınıf İçi Etkinlik [!] Uyarı ↻ İç İlişkilendirme ▭ Diğer Derslerle Bağlantılar 🗐 Ölçme ve Değerlendirme

9. SINIF ÖĞRETİM PROGRAMI

ÖĞRENME ALANI: CEBİR **4. BÖLÜM:** SAYILAR

<table>
<tr><th>ALT ÖĞRENME ALANI</th><th>KAZANIMLAR</th><th>ETKİNLİK ÖRNEKLERİ</th><th>AÇIKLAMALAR</th></tr>
<tr>
<td>MODÜLER ARİTMETİK</td>
<td>3. <i>Z/m</i> kümesinde toplama ve çarpma işlemlerini yapar ve özelliklerini belirtir.</td>
<td>
$Z/5 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ kümesi için ⊕ ve ⊗ işlemlerinin tabloları aşağıda verilmiştir. Tablodaki boşlukların doldurulması istenir.
<table>
<tr><th>⊕</th><th>$\bar{0}$</th><th>$\bar{1}$</th><th>$\bar{2}$</th><th>$\bar{3}$</th><th>$\bar{4}$</th></tr>
<tr><td>$\bar{0}$</td><td>$\bar{0}$</td><td></td><td>$\bar{2}$</td><td>$\bar{3}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\bar{1}$</td><td>$\bar{1}$</td><td>$\bar{2}$</td><td></td><td>$\bar{4}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\bar{2}$</td><td></td><td>$\bar{3}$</td><td></td><td>$\bar{0}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\bar{3}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\bar{2}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{4}$</td><td>$\bar{4}$</td><td></td><td>$\bar{1}$</td><td></td><td>$\bar{3}$</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>⊗</th><th>$\bar{0}$</th><th>$\bar{1}$</th><th>$\bar{2}$</th><th>$\bar{3}$</th><th>$\bar{4}$</th></tr>
<tr><td>$\bar{0}$</td><td>$\bar{0}$</td><td>$\bar{0}$</td><td></td><td></td><td>$\bar{0}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{1}$</td><td></td><td></td><td>$\bar{2}$</td><td></td><td>$\bar{4}$</td></tr>
<tr><td>$\bar{2}$</td><td>$\bar{0}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\bar{3}$</td><td>$\bar{0}$</td><td>$\bar{3}$</td><td>$\bar{1}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\bar{4}$</td><td></td><td></td><td>$\bar{3}$</td><td></td><td>$\bar{1}$</td></tr>
</table>
Tablolar yardımıyla işlemlerin özelliklerini fark etmeleri sağlanır. Aşağıdaki denklemleri çözmeleri istenir.
• $\bar{3}\otimes\bar{x}\otimes\bar{2}\equiv\bar{4}$
• $\bar{2}\otimes\bar{x}\otimes\bar{4}\equiv\bar{0}$

<i>Z</i>/5 te $\bar{2}x+\bar{3}=\bar{2}$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

<i>Z</i>/5 te karekökü olmayan sayılar buldurulur.

<i>Z</i>/5 te $x^2+\bar{4}=\bar{2}$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

<i>Z</i>/5 te $x^2+\bar{4}=\bar{3}$ denkleminin çözüm kümesi buldurulur.

<i>Z</i>/5 te $f(x)=\bar{2}x+\bar{1}$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ buldurulur.
</td>
<td>[!] <i>Z/m</i> de birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümü verilir.</td>
</tr>
</table>

Sınıf İçi Etkinlik [!] Uyarı İç İlişkilendirme Diğer Derslerle Bağlantılar Ölçme ve Değerlendirme

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Erzincan’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul’da tamamladı. 1997 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve bu bölümden 2001 yılında mezun oldu. 2002–2005 yılları arasında Erzincan ili Tercan ilçesinde, 2005–2008 yılları arasında Erzurum ili Pasinler ilçesinde lise matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2005 yılından itibaren Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Matematik Eğitimi Anabilim Dalında yüksek lisans programına devam edip, aynı zamanda matematik öğretmeni olarak İstanbul’da çalışmaktadır.