E_1^3 MİNKOWSKİ UZAYINDA YÜZEYLER

Semra KAYA

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKCI
2009

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

E_1^3 MİNKOWSKİ UZAYINDA YÜZEYLER

Semra KAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2009

Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKÇI danışmanlığında, Semra KAYA tarafından hazırlanan bu çalışma 25.08.2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKCI

Üye: Yrd. Doç. Dr. Necmi CENGİZ

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

E_1^3 MİNKOWSKİ UZAYINDA
YÜZEYLER

Semra KAYA

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKCI

Bu tezde ilk olarak indefinit metrik ele alınmış ve bu metrik yardımıyla yarı-Riemann manifoldlarının tanımı verilmiştir. Daha sonra indefinit metriğe bir örnek olarak Lorentz metriği verilip, bu metrik vasıtasıyla Minkowski uzayı tanımlanmıştır. Bu tezdeki asıl amacımız olan, E_1^3 Minkowski uzayındaki yüzeyler teorisine girmeden önce Öklid uzayındaki yüzeyler hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak, E_1^3 Minkowski uzayında time-like, space-like ve null yüzeylerin tanımları verilerek, Öklid uzayındaki yüzeylerle, bu yüzeyler arasındaki bazı fark ve benzerlikler incelenmiştir.

2009, 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: İndefinit metrik, indeks, yarı-Riemann manifoldları, Minkowski uzayı, time-like yüzeyler, space-like yüzeyler, null yüzeyler.

ABSTRACT

Master Thesis

SURFACES IN E_1^3 MİNKOWSKİ
SPACE

Semra KAYA

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ömer TARAKCI

In this thesis, firstly indefinite metric is described and definition of semi-Riemannian manifolds is given by this metric. Secondly, Lorentz metric is given as an example of indefinite metric and Minkowski space is defined by this metric. Before surfaces theory in E_1^3 Minkowski space which is our main aim in this thesis, surfaces in Euclidean space are described. Finally, definition of time-like, space-like and null surfaces in E_1^3 Minkowski space are given and some differences and similarities between these surfaces and surfaces in Euclidean space are analyzed.

2009, 64 pages

Keywords: Indefinite metric, index, semi-Riemannian manifolds, Minkowski space, time-like surfaces, space-like surfaces, null surfaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tezi hazırlarken karşılaştığım bütün engelleri aşmamı sağlayan, beni her adımda bilgilendiren kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKÇI'ya saygı ve minnet duyar, teşekkür ederim.

Bilgilerine her zaman ihtiyaç duyacağım ve hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV, Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Yrd. Doç. Dr. Necmi CENGİZ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN, Sayın Yrd. Doç. Dr. Aydın GEZER ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Kürşat AKBULUT'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca tez bitene kadar bana büyük bir sabırla katlanan aileme, özellikle de anne ve babama sevgi, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Semra KAYA
Ağustos 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

D	Yönlü türev
g	Metrik tensör
H	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğriliği
K_N	Normal eğrilik
N	Normal vektör alanı ve Gauss dönüşümü
R	Eğrilik tensörü
S	Şekil operatörü
$T_P(M)$	M nin P noktasındaki tanjant uzayı
$T_q^p(V)$	V üzerindeki bütün (p,q) tipli tensörlerin uzayı
$\aleph(M)$	M manifoldu üzerideki vektör alanlarının kümesi
ν	İndeks
V_P	P noktasındaki tanjant vektör
∇	Öklid uzayındaki afin konneksiyon
∇^0	E_1^3 deki Levi-Civita konneksiyonu
∇_X	Kovaryant türev
$<,>$	Simetrik bilineer form
$<,>_L$	Lorentz metriği
$[\ ,\ ]$	Lie parantez operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu tezdeki amacımız, E_1^3 Minkowski uzayında tanımlanan time-like, space-like ve null yüzeyleri incelemek ve daha önce Öklid uzayında verilen yüzeylerle ilgili bazı kavramların bu yüzeylerde nasıl bir farklılık veya benzerlik gösterdiğini ifade etmektir.

İlk bölümde, simetrik bilineer formlar incelenerek bu formun non-dejenere olduğu durumda skalar çarpım uzaylarından bahsedilmiştir. Simetrik bilineer formun indefinit olması halinde semi-Riemann manifoldlardan konuşulacağı için daha öncesinde genel olarak manifoldlar teorisi hatırlatılmıştır. Ve nihayet bu tezin başlangıç bölümünde tanıtılması amaçlanan semi-Riemann manifoldları ele alınmış ve bu manifoldlar üzerindeki konneksiyon ve eğriliklerin tanımı verilmiştir.

İkinci bölümde, Öklid uzayında yüzeyler teorisi ele alınmış, yüzeyin *I, II* ve *III.* esas formları ve eğrilikleri verilmiştir.

Son bölümde, Öklid uzaydan Minkowski uzayına geçiş yapılmıştır. Bu uzayda tanımlanan yüzeyler incelenmiş ve indefinit metriğin varlığından dolayı time-like, space-like ve null yüzeyler olarak sınıflara ayrılmıştır. Doğal olarak, yüzeylerin karakteri değiştikçe konneksiyonlarının, temel formlarının ve eğriliklerinin nasıl değişiklik gösterdiği ifade edilmiştir.

Minkowski uzayı adını, uzayın üç boyutuyla zamanın boyutunu birleştiren dört boyutlu bir uzay zamanı olabildiğini 1907'li yıllarda özel izafiyet teorisinin de yardımıyla fark eden ünlü Alman matematikçi Hermann Minkowski'den almıştır. Aslında ilk olarak bu çalışmaları izafiyet teorisi ile bilinen Albert Einstein ele almıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Skalar Çarpım Uzayları

2.1.1. Simetrik bilineer formlar

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun. $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\ \in\ V$ için,

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

(ii) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle\ =\ \mathrm{a}\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle +\ b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle\ =\ \mathrm{a}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle +\ b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

özelliklerine sahip ise $<,>$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2: $<,>$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

(i) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna pozitif definit,

(ii) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna negatif definit,

(iii) $\forall\ \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna pozitif semi-definit,

(iv) $\forall\ \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna negatif semi-definit,

(v) $\forall\ \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ olduğunda $\vec{v} = 0$ olmak zorunda ise $<,>$ simetrik bilineer formuna non-dejenere, değilse dejeneredir denir (O'Neill 1983).

Bu tanımdaki (i) ve (ii) özelliklerine sahip $<,>$ simetrik bilineer formuna definit'dir, (iii) ve (iv) özelliklerine sahip $<,>$ simetrik bilineer formuna semi-definit'dir denir.

Eğer $<,>$ definit ise hem semi-definit hem de non-dejeneredir. $<,>$ definit değilse $<,>$ ye V üzerinde indefinitdir denir.

V vektör uzayı üzerinde $<,>$ simetrik bilineer formu indefinit ise, $\vec{v} \in V$ vektörleri için

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \quad \text{veya} \quad \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0 \quad \text{veya} \quad \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

olur. V üzerinde bir simetrik bilineer form $<,>$ ise V nin herhangi bir W altuzayı için $<,>\big|_W$ kısıtlaması da yine simetrik ve bilineerdir.

Tanım 2.1.3: V bir vektör uzayı ve $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun.

$$<,>\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $<,>$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Buna göre $1 \leq \nu \leq boyV$ dir. $\nu = 0$ olması için gerek ve yeter şart $<,>$ nın pozitif semi-definit olmasıdır.

V nin bir bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ olsun. $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ olarak tanımlanan $n \times n$ tipindeki (g_{ij}) matrisine, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ bazına göre $<,>$ simetrik bilineer formunun matrisi denir. $<,>$ simetrik olduğundan (g_{ij}) matrisi de simetriktir. Ayrıca

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} w^j \vec{e}_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j$$

olduğundan (g_{ij}) matrisi $<,>$ yi belirtir.

Teorem 2.1.1: Bir $<,>$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $<,>$ nın herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4: Bir $\vec{v} \in V$ vektörü için

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne space-like vektör,

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne time-like vektör,

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ ve $\vec{v} \neq 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne null vektör denir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.1: $\mathbb{R}^2$ de $\vec{X} = (x_1, x_2)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2)$ olmak üzere $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2$ olarak tanımlansın. Buna göre,

$\vec{X} = (1,0)$ için $< \vec{X}, \vec{X} >= -1$ olduğundan $\vec{X}$ bir time-like vektördür.

$\vec{Y} = (0,1)$ için $< \vec{Y}, \vec{Y} >= 1$ olduğundan $\vec{Y}$ bir space-like vektördür.

$\vec{Z} = (1,1)$ için $< \vec{Z}, \vec{Z} >= 0$ olduğundan $\vec{Z}$ bir null vektördür.

2.1.2. Skalar çarpım

Tanım 2.1.5: Bir V vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik bilineer formuna V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir. V üzerindeki bir skalar çarpım $<,>$ ise $(V, <,>)$ ikilisine skalar çarpım uzayı denir.

Pozitif definit skalar çarpıma bir iç çarpım denir. Buna örnek olarak, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\vec{v}.\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$ şeklinde tanımlanan nokta çarpmasını verebiliriz.

İç çarpımın çoğu özellikleri skalar çarpımda vardır. Bununla birlikte $<,>$ skalar çarpımın indefinit olmasından bazı farklılıklar ortaya çıkar.

Örnek 2.1.2:
$$\begin{aligned} <,>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v^1 w^1 - v^2 w^2 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Açıkça $<,>$ simetrik ve bilineerdir. $\vec{w}$ yerine $(1,0)$ ve $(0,1)$ gibi iki farklı vektör alınarak $<,>$ nın non-dejenere olduğu aşağıdaki gibi görülür;

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v^1 w^1 - v^2 w^2$$

$$\langle (v^1, v^2), (1,0) \rangle = 0 \;\Rightarrow\; v^1 = 0$$

$$\langle (v^1, v^2), (0,1) \rangle = 0 \;\Rightarrow\; -v^2 = 0 \;\Rightarrow\; v^2 = 0.$$

Yani $\vec{v} = (v^1, v^2) = (0,0)$ bulunur. Böylece $<,>$ bir skalar çarpımdır. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = (v^1)^2 - (v^2)^2$ olduğundan $<,>$ indefinitdir. Zira

$v^1 = v^2$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0,$

$|v^1| > |v^2|$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ve

$|v^1| < |v^2|$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$

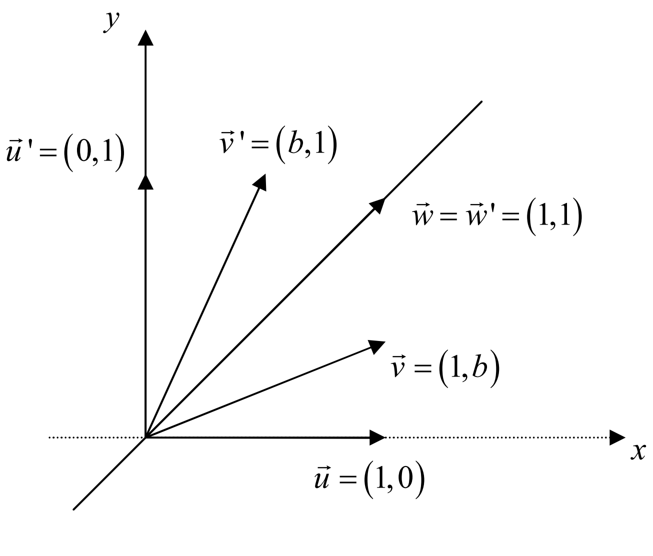
olur.

Tanım 2.1.6: $\vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerine diktir denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.3: $<,>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \to \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v^1 w^1 - v^2 w^2$$

olarak tanımlansın.



Şekil 2.1. *xy*-düzleminde indefinit metriğe göre birbirlerine dik vektörler

Şekil 2.1.'de görülen $\vec{u}$ ve $\vec{u}\,'$, $\vec{v}$ ve $\vec{v}\,'$, $\vec{w}$ ve $\vec{w}\,'$ vektörleri $<,>$ skalar çarpımına göre diktirler.

V vektör uzayının bir alt uzayı W olsun. $W^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in V : \left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle = 0,\ \forall \vec{w} \in W \right\}$ olarak tanımlanır. Burada $W^{\perp}$ ye W nın ortogonal komplemanı diyemeyiz. Çünkü $<,>$ indefinit olduğunda $W + W^{\perp}$ genel olarak V nin tümünü vermeyebilir. Örnek 2.1.3'te eğer $W = Sp\left\{(1,1)\right\}$ olarak alırsak $W^{\perp} = W$ ve $W + W^{\perp} = W \neq V$ olur.

Teorem 2.1.2: W, V skalar çarpım uzayının bir altuzayı olsun. Bu durumda şu özellikler vardır.

(1) $boyW + boyW^{\perp} = n = boyV$

(2) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$

Tanım 2.1.7: $<,>$, V üzerinde bir skalar çarpım ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde $<,>$ non-dejenere ise W'ya non-dejenere altuzay, non-dejenere değil ise W'ya dejenere altuzay denir (O'Neill 1983).

Eğer $<,>$ indefinit ise V nin daima dejenere altuzayı vardır. Bunu bir örnekle ifade edelim:

Örnek 2.1.4: $\mathbb{R}^2$ skalar çarpımlı vektör uzayını alalım. Bu uzay üzerindeki simetrik bilineer form

$$<,> : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \left(\vec{v}, \vec{w}\right) \to \left\langle \vec{v}, \vec{w} \right\rangle = v^1 w^1 - v^2 w^2$$

olarak tanımlansın. Bu metriğin indefinit olduğu daha önce gösterilmişti. $\mathbb{R}^2$ nin bir $W = Sp\left\{(1,1)\right\}$ altuzayını alalım. Bu altuzay dejeneredir. Çünkü $\forall\ \vec{v} \in W$ için $\left\langle \vec{v}, \vec{u} \right\rangle = 0$ eşitliği $\forall\ \vec{u} \in W$ için sağlanır. Yani $\vec{u} = 0$ olmak zorunda değildir. Dolayısıyla W bir dejenere altuzaydır.

Böylece bir V skalar çarpım uzayının herhangi bir altuzayı, skalar çarpım uzayı olmak zorunda değildir.

Teorem 2.1.3: V bir skalar çarpım uzayı ve W da V nin bir altuzayı olsun. W nın non-dejenere altuzay olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^{\perp}$ olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8: $<,>$, V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpım olsun. Bir $\vec{v} \in V$ vektörünün normu $\|\vec{v}\| = |\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlanır. Normu 1 birim olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin kümesine ortonormal sistem denir.

Teorem 2.1.4: Her $V \neq \{0\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir.

İspat: $<,>$ non-dejenere olduğundan $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $\vec{v} \in V$ vardır. $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ birim vektördür. Böylece $k < n$ olmak üzere ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k\}$ kümesini tümevarımla genişletmek yeterlidir. Teorem 2.1.1. gereğince bu vektörler *k*-boyutlu bir W non-dejenere alt uzayını gererler.

Geriye yalnız $W^{\perp} \neq \{0\}$ da bir birim vektör bulmak kaldı. W non-dejenere olduğundan $W^{\perp}$ de non-dejeneredir. O halde $W^{\perp}$ bir birim vektör ihtiva eder. Böylece V nin bir ortonormal bazı bulunabilir.

$<,>$ ye karşılık gelen matris V nin $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ ortonormal bazına göre diyagonaldir. Gerçekten, $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$ dır ve burada $\varepsilon_j = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = \pm 1$ dir.

Teorem 2.1.5: V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle$ olmak üzere $\forall\ \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

İspat: $\forall\ \vec{v} \in V$ vektörünün $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ bazına göre tek türlü yazıldığını biliyoruz. Buna göre, $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$ vektörü için

$$\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle \ , \ \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$$ olduğundan,

$$\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ik} \varepsilon_k$$

$$\langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle = a_k \varepsilon_k, \quad 1 \le k \le n$$

dır. $\varepsilon_k = \langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle = \pm 1$ olduğundan

$$a_k = \varepsilon_k \langle \vec{v}, \vec{e}_k \rangle \ , \quad 1 \le k \le n$$

yazılır. O halde

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$

olarak yazılır.

Teorem 2.1.6: V nin bir $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ ortonormal bazı için $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ işaretindeki negatif terimlerin sayısı V nin ν indeksidir (O'Neill 1983).

Sonuç olarak, V nin non-dejenere W altuzayı için $indV = indW + indW^{\perp}$ olur.

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1: Bir M topolojik uzayı için aşağıdaki önermeler doğru ise, M ye n-boyutlu topolojik manifold denir (Hacısalihoğlu 1983).

(1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(2) M nin her bir açık alt kümesi E^n ye veya E^n nin bir açık alt kümesine homeomorftur.

(3) M sayılabilir çoklukta açık alt kümelerle örtülebilir.

Tanım 2.2.2: M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n nin bir açık alt kümesi olsun. Bu durumda Tanım 2.2.1 gereğince $W \subset M$ olmak üzere,

$$\psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

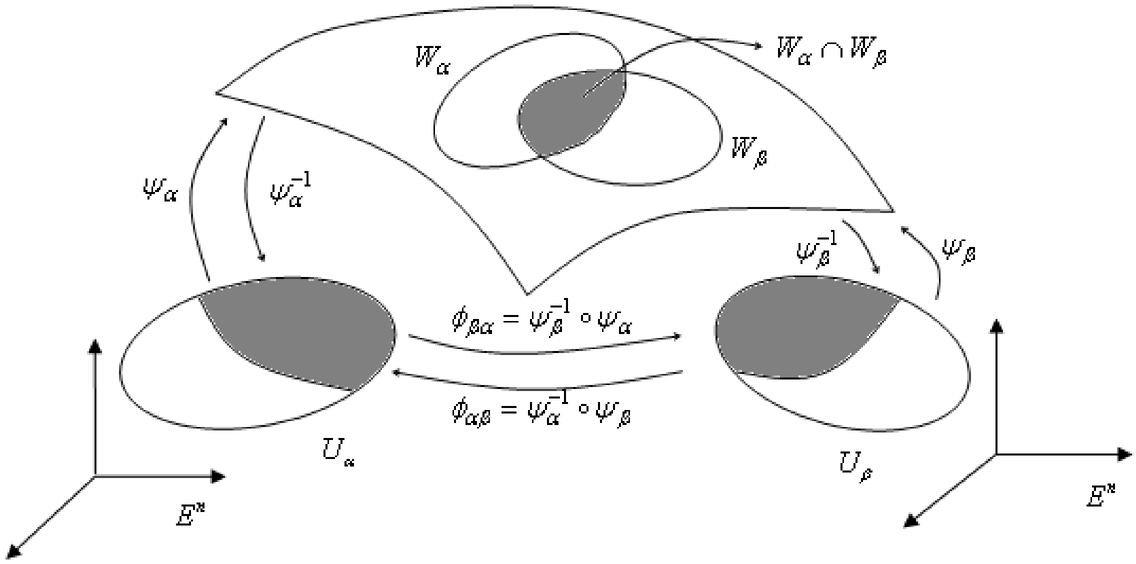
homeomorfizmi vardır. (ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir.

$u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in U$ için $\psi(u) \in M$ dir ve

$$\psi(u) = (x_1(u), x_2(u), ..., x_n(u)), \ x_i(u) \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n$$

dir. Burada $x_i(u)$ reel sayısına $\psi(u) \in M$ noktasının *i*-yinci koordinatı denir ve $u_i : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna da u nun *i*-yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

Tanım 2.2.3: M bir topolojik *n*-manifold ve α indislerinin kümesi A olmak üzere, M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ olsun. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan M deki açık küme W_α olsun. Bu şekildeki (ψ_α, W_α) haritalarının $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir atlas denir (Hacısalihoğlu 1983).



Şekil 2.2. Diferensiyellenebilir yapı

(ψ_α, W_α) ve (ψ_β, W_β) haritaları için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\Phi_{\beta\alpha} : \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$
$$\Phi_{\alpha\beta} : \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

homeomorfizmlerini tanımlayabiliriz.

Tanım 2.2.4: M bir topolojik *n*-manifold ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere $\forall\ \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\Phi_{\alpha\beta}$ ve $\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı denir ve M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir.

Bir M manifoldu üzerindeki bütün reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterilsin.

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{ f \mid f : M \to \mathbb{R},\ \ f \text{ fonksiyonu diferensiyellenebilir} \}$$

Eğer $f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ise $f+g$ toplama ve $f.g$ çarpma işlemlerine göre, $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ değişimli bir halkadır.

Tanım 2.2.5: M manifoldunun bir p noktası için,

$$V_p : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa V_p ye M nin p noktasında bir tanjant vektörü denir.

(1) $V_p(af+bg) = a.V_p(f) + b.V_p(g), \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

(2) $V_p(f.g) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g), \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

Tanım 2.2.6: M nin bir p noktasındaki iki tanjant vektör V_p ve W_p olsun. $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}$ için,

$$\left(V_p + W_p\right)(f) = V_p(f) + W_p(f)$$
$$\left(a.V_p\right)(f) = a.V_p(f)$$

işlemleri ile, M nin p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir ve $T_p(M)$ ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.7: Bir M manifoldunun her bir p noktasına, p de bir V_p tanjant vektörü karşılık getiren

$$V : M \to \bigcup_{p\in M} T_p(M)$$

fonksiyonu için $\pi \circ V : M \longrightarrow M$ özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$\pi : \bigcup_{p\in M} T_p(M) \to M$$

projeksiyonu var ise V ye M üzerinde bir vektör alanı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.8: M ve N iki manifold, $F: M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve p, M nin bir noktası olsun. $g \in C^{\infty}(N, \mathbb{R})$ için,

$$F_*\big|_p : T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$$
$$\left(F_*\big|_p(V_p)\right)(g) = V_p(g \circ F), \qquad \forall\, V_p \in T_p(M)$$

ile tanımlanan $F_*\big|_p$ dönüşümüne F dönüşümünün diferensiyel dönüşümü denir (O'Neill 1983).

2.3. Riemann Manifoldu ve Kovaryant Türev

Tanım 2.3.1: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\aleph(M)$ ve reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonların halkası $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \aleph(M) \times \aleph(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada g işlemine, M üzerinde metrik tensör veya Riemann metriği denir (Hicks 1974).

Tanım 2.3.2: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\aleph(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \aleph(M) \times \aleph(M) &\longrightarrow \aleph(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için,

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad \forall\, X, Y, Z \in \aleph(M),\ \forall\, f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$

(2) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \quad \forall\, X, Y \in \aleph(M),\ \forall\, f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve ∇_X e de, X e göre kovaryant türev operatörü denir (Hicks 1974).

Özel olarak M manifoldu bir Riemann manifoldu olarak alınırsa, konneksiyonun iç çarpımla ilgisi düşünülebilir. Bu ise bizi Riemann konneksiyonu (Levi-Civita konneksiyonu) kavramına götürür.

Tanım 2.3.3: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$[\ ,\ ]:\aleph(M)\times\aleph(M)\to\aleph(M),$$
$$[X,Y](f)=X\big(Y(f)\big)-Y\big(X(f)\big),\ \ \forall f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

olarak tanımlanan $[\ ,\ ]$ dönüşümüne $\aleph(M)$ üzerinde Lie parantez operatörü denir (Hicks 1974).

Tanım 2.3.4: M bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer,

(1) ∇, C^{∞} *sınıfından*,

(2) $[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X, \qquad\qquad \forall\, X,Y\in\aleph(M)$

(3) $X\big(\langle Y,Z\rangle\big)=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle,\ \ \forall\, X,Y,Z\in\aleph(M)$

özellikleri sağlanıyorsa, ∇ ya Riemann konneksiyonu (Levi-Civita konneksiyonu) denir (Hicks 1974).

Teorem 2.3.1: Bir Riemann manifoldu üzerindeki Riemann konneksiyonu tekdir (Hicks 1974).

2.4. Tensör Alanları

Tanım 2.4.1: V, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. V vektör uzayı üzerinde tanımlanan

$$\alpha:V\to\mathbb{R}, \qquad z=\alpha(\vec{x})$$

vektör değişkenli reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in V,\ \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ için,

$$\alpha(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda\alpha(\vec{x})+\mu\beta(\vec{y})$$

şartı sağlanırsa $z = \alpha(\vec{x})$ fonksiyonuna lineer fonksiyon denir. $\alpha : V \to \mathbb{R}$ dönüşümüne lineer operatör de denir.

V vektör uzayının bütün lineer operatörlerinin oluşturduğu vektör uzayına, V vektör uzayının dual (kovektör) uzayı denir ve V^* ile gösterilir. V^* uzayının vektörlerini V nin vektörlerinden ayırmak için, onlara kovaryant vektörler veya kovektörler diyeceğiz. Bu yüzden V^* uzayına kovektör uzayı da denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.4.2: $\vec{x}_j \in V,\quad j = 1,...,q$ vektör ve $\overset{i}{\xi} \in V^*,\quad i = 1,...,p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}\right)$$

reel değerli fonksiyonun göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, buna multilineer fonksiyon denir. Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\omega = t\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}\right) = \lambda t\left(\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}\right) + \mu t\left(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}\right)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{q} \times \overbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne V uzayında p. dereceden kontravaryant, q. dereceden kovaryant tensör adı verilir. $p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere $s = p + q$ sayısına tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p,0)$ tipli tensörlere kontravaryant tensörler ve $(0,q)$ tipli tensörlere kovaryant tensörler denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.4.3: Aynı tipli $\underset{1}{t}$ ve $\underset{2}{t}$ tensörlerinin toplamı,

$$\left(\underset{1}{t}+\underset{2}{t}\right)\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},\ldots,\overset{p}{\xi}\right)=\underset{1}{t}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},\ldots,\overset{p}{\xi}\right)+\underset{2}{t}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},\ldots,\overset{p}{\xi}\right)$$

şeklinde ve keyfi (p,q) tipli t tensörü ile $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısının çarpımı,

$$(\lambda t)\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},\ldots,\overset{p}{\xi}\right)=\lambda t\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},\ldots,\overset{p}{\xi}\right)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.4.4: V vektör uzayında tanımlanmış (p,q) tipli bütün tensörlerin kümesini $T_q^p(V)$ ile gösterelim. Bu küme Tanım 2.4.3'de verilen toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzaya tensör uzayı denir.

Tanım 2.4.5: M bir diferensiyellenebilir manifold ve $T_q^p(m)$, $\forall\, m \in M$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M manifoldunun $\forall\, m \in M$ noktasına, $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna, (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p=1,\ q=0$ ise vektör alanları elde ederiz. Yani $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=q=0$ ise, $\forall\, m \in M$ noktasına bir skalar değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli bir tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

2.5. Yarı Riemann Manifoldları

Tanım 2.5.1: M bir diferensiyellenebilir manifold, $\aleph(M)$, M manifoldu üzerinde tanımlanan tüm vektör alanlarının kümesi ve $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, M den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan tüm diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi olmak üzere;

$$\begin{aligned} g : \aleph(M)\times\aleph(M) &\longrightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ (x,y) &\longrightarrow g(x,y) : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad P \longrightarrow g(x,y)\big|_P = g(x_P, y_P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı, simetrik, bilineer, non-dejenere ve sabit indeksli g fonksiyonuna M manifoldu üzerinde bir metrik tensör denir.

Diğer bir deyişle her $T_p(M)$ tanjant uzayı üzerinde sabit indekse sahip $g\big|_p : T_p(M)\times T_p(M)\rightarrow\mathbb{R}$ simetrik, bilineer, non-dejenere dönüşüm tanımlayan g fonksiyonuna M üzerinde metrik tensör denir.

M nin her P noktasındaki $T_p(M)$ tanjant uzayında $g|_P$, indeksi v olan bir skalar çarpım tanımlıyorsa, $(0,2)$ tipli g tensör alanına non-dejeneredir denir.

g, M üzerinde v indeksli non-dejenere bir metrik tensör olsun. Bu durumda $(T_p(M), g|_P)$ tanjant uzayının

$$g(x_i, x_i) = \begin{cases} -1, & 1 \le i \le v \\ 1, & v+1 \le i \le n \end{cases}$$

olacak şekilde $T_p(M)$ nin $\{x_1, x_2, ..., x_v, x_{v+1}, ..., x_n\}$ ortonormal bazı vardır.

Tanım 2.5.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere (M,g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O’Neill 1983).

(M,g) yarı Riemann manifoldundaki $g\big|_p$ nin sabit indeksine M yarı Riemann manifoldunun indeksi denir ve v ile gösterilen bu indeks için $0 \leq v \leq n = boyM$ dir.

Eğer $v = 0$ ise M bir Riemann manifoldudur. Bu takdirde $g\big|_p$, $T_p(M)$ üzerinde bir iç çarpım (pozitif tanımlı) dır.

Eğer $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise M ye Lorentz manifoldu denir. Buna göre (M,g) Lorentz manifoldu için g Lorentz metriği

$$g(v_p, w_p) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\big|_p \, w_i\big|_p - v_n\big|_p \, w_n\big|_p \;,\; p \in M, \quad v_p, w_p \in T_p(M)$$

dir.

Eğer $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ ise g metrik tensörünün bileşenleri $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ dir.

$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i$ ve $\vec{w} = \sum_{j=1}^{n} w^j \partial_j$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} g(\vec{v}, \vec{w}) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i, \sum_{j=1}^{n} w^j \partial_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g(\partial_i, \partial_j) v^i w^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j \end{aligned}$$

yazılır.

(g_{ij}) matrisinin tersi vardır ve (g^{ij}) ile gösterilir. g simetrik olduğundan $1 \leq i, j \leq n$ için $g_{ij} = g_{ji}$ ve $g^{ij} = g^{ji}$ dir. Sonuç olarak U üzerindeki g metrik tensörü,

$$<,>= g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

olarak yazılabilir.

Her $p \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p\left(\mathbb{R}^n\right) \\ v &\longrightarrow \vec{v}_p = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i \end{aligned}$$

şeklinde $\mathbb{R}^n$ den $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ ye bir lineer izomorfizm vardır. Böylece $\mathbb{R}^n$ üzerindeki nokta çarpımı olan

$$\left\langle v_p, w_p \right\rangle = v.w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

$\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik tensördür. $\mathbb{R}^n$ bu anlamda ele alındığında bir Riemann manifoldudur ve bu durumda $\mathbb{R}^n$ ye n-boyutlu Öklid uzayı denir.

$0 \leq v \leq n$ tam sayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki metrik tensörü

$$\left\langle v_p, w_p \right\rangle = -\sum_{i=1}^{v} v^i w^i + \sum_{j=v+1}^{n} v^j w^j$$

olarak alırsak, $\mathbb{R}^n$ indeksi v olan yarı-Öklid uzayı adını alır ve $\mathbb{R}^n_v$ ile gösterilir. $n \geq 2$ için $\mathbb{R}^n_1$ ye n-boyutlu Minkowski uzayı denir.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq v \\ 1, & v+1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{R}^n_v$ yarı-Öklid uzayının metrik tensörü

$$<,>= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i du^i \otimes du^i$$

olarak yazılabilir.

2.5.1. Yarı-Riemann manifoldları üzerinde konneksiyon

Yarı-Riemann manifoldları üzerindeki konneksiyonun tanımı da Riemann manifoldlarında olduğu gibidir:

Tanım 2.5.3: $\forall\, X,Y,U,V \in \aleph(M)$ ve $\forall\, h \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için, aşağıdaki şartları sağlayan

$$\nabla :\ \aleph(M)\times\aleph(M)\rightarrow\aleph(M)$$

dönüşümüne M üzerinde bir konneksiyon denir.

(1) $\nabla_{X+Y}U = \nabla_X U + \nabla_Y U$

(2) $\nabla_{hX}U = h\nabla_X U$

(3) $\nabla_X (U+V) = \nabla_X U + \nabla_X V$

(4) $\nabla_X (hU) = X(h)U + h\nabla_X U$

Tanım 2.5.4: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun ve M üzerinde ∇ konneksiyonu verilsin.

$$(\nabla U)(X) = \nabla_X U$$

olarak tanımlanan

$$\nabla U :\ \aleph(M)\rightarrow\aleph(M)$$

dönüşümüne U nun kovaryant türevi denir.

Teorem 2.5.1: (M,g) bir yarı Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde aşağıdaki iki şartı sağlayan bir tek konneksiyon vardır.

(1) $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X,Y) + g(X,\nabla_Z Y), \quad \forall\, X,Y,Z \in \aleph(M)$

(2) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \quad \forall\, X,Y \in \aleph(M)$

İspat: $\forall\, X,Y,Z \in \aleph(M)$ için, (1) ve (2) şartlarını kullanarak

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
&= Xg(Y,Z) - g(Y, \nabla_Z X + [X,Z]) \\
&= Xg(Y,Z) - Zg(Y,X) + g(\nabla_Z Y, X) + g(Y,[Z,X]) \\
&= Xg(Y,Z) - Zg(Y,X) + g(\nabla_Y Z + [Z,Y], X) \\
&\quad + g(Y,[Z,X]) \\
&= Xg(Y,Z) - Zg(Y,X) + Yg(Z,X) - g(Z, \nabla_Y X) \\
&\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) \\
&= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) \\
&\quad + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) - g(\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Böylece

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{ & Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) \\
& + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \}
\end{aligned}
$$

eşitliği (Koszul formülü) elde edilir. Bu eşitlik M üzerindeki her bir ∇ konneksiyonu için (1) ve (2) şartlarını sağlandığından ve g non-dejenere olduğundan, ∇ tekdir.

Tanım 2.5.5: (M,g), bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Teorem 2.5.1'de verilen ve tek olan konneksiyona (M,g) manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu denir.

2.5.2. Yarı-Riemann manifoldlarının eğrilikleri

Tanım 2.5.6: M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde bir konneksiyon olsun. Bu durumda ∇ konneksiyonunun R eğrilik tensörü

$$R(X,Y)U = \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X,Y]} U$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\forall\, X,Y,U \in \aleph(M)$ ve $[\,,]$, Lie parantezidir.

$$R(X,Y,U) = R(X,Y)U$$

ile tanımlanan

$$R:\ \aleph(M)\times\ \aleph(M)\times\ \aleph(M)\rightarrow\ \aleph(M)$$

dönüşümünün bütün değişkenlerine göre lineer olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Örneğin; $h\in C^{\infty}(M)$ fonksiyonu için U değişkenine göre lineerliğin sağlandığı aşağıdaki ifadeden görülür.

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(hU) &= \nabla_X\nabla_Y(hU)-\nabla_Y\nabla_X(hU)-\nabla_{[X,Y]}(hU)\\
&= \nabla_X\big(Y(h)U+h\nabla_Y U\big)-\nabla_Y\big(X(h)U+h\nabla_X U\big)\\
&\quad -[X,Y](h)U-h\nabla_{[X,Y]}U\\
&= X\big(Y(h)\big)U+Y(h)\nabla_X U+X(h)\nabla_Y U\\
&\quad +h\nabla_X\nabla_Y U-Y\big(X(h)\big)U-X(h)\nabla_Y U-Y(h)\nabla_X U\\
&\quad -h\nabla_Y\nabla_X U-X\big(Y(h)\big)U+Y\big(X(h)\big)U-h\nabla_{[X,Y]}U\\
&= hR(X,Y)U
\end{aligned}$$

Teorem 2.5.2: ∇, bir (M,g) yarı-Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ve *R*, ∇ nın eğrilik tensörü olsun. Bu durumda $\forall\ X,Y,Z,V\in\aleph(M)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Garcia-Rio and Küpeli 1999).

(1) $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$

(2) $g\big(R(X,Y)Z,V\big)=-g\big(R(X,Y)V,Z\big)$

(3) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$

(4) $g\big(R(X,Y)Z,V\big)=g\big(R(Z,V)X,Y\big)$

Tanım 2.5.7: (M,g) bir yarı-Riemann manifold olsun. Bu durumda (M,g) nin Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörüne, (M,g) nin eğrilik tensörü denir (Garcia-Rio and Küpeli 1999).

(M,g) yarı-Riemann manifoldunun eğrilik tensörü, geometrik açıdan daha anlamlı olan, (M,g) üzerindeki diğer geometrik objeleri de tanımlar.

Tanım 2.5.8: V bir n-boyutlu vektör uzayı ve $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ V nin bir bazı olsun. $g:V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ simetrik bilineer formu için, μ, ν, η, 1 ile n arasında tamsayılar olmak üzere,

(1) $g(\alpha_i,\alpha_j)=0,\ i\neq j$

(2) $g(\alpha_i,\alpha_i)=0,\ 1\leq i\leq \mu$

(3) $g(\alpha_i,\alpha_i)=-1,\ \mu+1\leq i\leq \mu+\nu$

(4) $g(\alpha_i,\alpha_i)=1,\ \mu+\nu+1\leq i\leq \mu+\nu+\eta$

ise $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ vektör sistemine V nin g ye göre ortonormal bazı ve (μ,ν,η) ya da g nin tipi denir. Buradaki ν ye, g nin indeksi dendiği daha önce belirtilmişti.

Tanım 2.5.9: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $T_p(M)$ nin 2-boyutlu Π altuzayına $T_p(M)$ de bir düzlem denir.

Genelde g nin bir Π düzlemine kısıtlanmışı olan $g|_{\Pi}$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ veya $(1,0,1)$ tipinden olabilir. Bu durumda $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ veya $(1,0,1)$ tiplerine karşılık $g|_{\Pi}$ nin $T_p(M)$ deki bir Π düzlemindeki işareti, sırasıyla, $(-,-)$, $(+,+)$, $(-,+)$, $(0,0)$, $(0,-)$ veya $(0,+)$ olur. $g|_{\Pi}$ nin işaretinin $(-,-)$, $(+,+)$ veya $(-,+)$ olduğunda $g|_{\Pi}$ non-dejenere olduğundan, $T_p(M)$ deki bu Π düzlemlerine non-dejeneredir denir. Ayrıca $g|_{\Pi}$ nin $(0,0)$, $(0,-)$ veya $(0,+)$ işaretli olduğu düzlemlere kısıtlanması dejenere olduğu için, $T_p(M)$ deki bu tip düzlemlere dejeneredir denir. $g\big|_{\Pi}$ nin işaretine Π düzleminin işareti denir (Garcia-Rio and Küpeli 1999).

(M,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Herhangi $\vec{x},\vec{y}\in T_P(M)$ vektörleri için

$$Q(\vec{x},\vec{y})=g(\vec{x},\vec{x})\,g(\vec{y},\vec{y})-g(\vec{x},\vec{y})^2$$

eşitliği tanımlansın.

Teorem 2.5.3: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve Π, $T_p(M)$ de bir düzlem olsun. Bu durumda Π nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart, $\Pi=span\{\vec{x},\vec{y}\}$ olmak üzere, $Q(\vec{x},\vec{y})\neq 0$ olmasıdır. Dahası, Π nin $(-,-)$ veya $(+,+)$ işaretli olması için gerek ve yeter şart $Q(\vec{x},\vec{y})>0$ ve Π nin $(-,+)$ işaretli olması için gerek ve yeter şart $Q(\vec{x},\vec{y})<0$ olmasıdır (Garcia-Rio and Küpeli 1999).

İspat: İlk olarak, Q nun işaretinin Π nin baz seçiminden bağımsız olduğunu gösterelim. Π nin iki bazı $\{\vec{x},\vec{y}\}$ ve $\{\vec{x}',\vec{y}'\}$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere, $\vec{x}'=a\vec{x}+b\vec{y}$ ve $\vec{y}'=c\vec{x}+d\vec{y}$ olur. Bu durumda,

$$Q(\vec{x}',\vec{y}')=(ad-bc)^2\,Q(\vec{x},\vec{y})$$

olduğu gösterilebilir. Böylece Q nun işareti Π nin baz seçiminden bağımsızdır. Şimdi Π yi non-dejenere alalım ve $\{\vec{x},\vec{y}\}$, $(\Pi, g_{\Pi p})$ için bir ortonormal baz olsun. O zaman

$$Q(\vec{x},\vec{y})=g(\vec{x},\vec{x})\,g(\vec{y},\vec{y})\neq 0$$

olur. Özellikle, Π nin $(-,-)$ veya $(+,+)$ işaretli olması için gerek ve yeter şart $Q(\vec{x},\vec{y})>0$ ve Π nin $(-,+)$ işaretli olması için gerek ve yeter şart $Q(\vec{x},\vec{y})<0$ olmasıdır.

Tersine, Π yi dejenere alalım ve $\{\vec{x},\vec{y}\}$, $g_{\Pi p}$ ye göre Π nin bir ortonormal bazı olsun. Böylece $\vec{x}$ veya $\vec{y}$ null vektör olur. O zaman $Q(\vec{x},\vec{y})=0$ olur.

Tanım 2.5.10: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve *R*, (M,g) nin eğrilik tensörü olsun. Bu durumda $T_p(M)$ deki bir Π non-dejenere düzleminin sectional eğriliği, $\Pi = span\{\vec{x},\vec{y}\}$ olmak üzere,

$$K(P)=\frac{g\left(R(\vec{x},\vec{y})\vec{y},\vec{x}\right)}{Q(\vec{x},\vec{y})}$$

dir (Garcia-Rio and Küpeli 1999).

Bir non-dejenere düzlemin sectional eğriliği iyi tanımlıdır yani, Π nin baz seçiminden bağımsızdır. Bunu görmek için Π nin $\{\vec{x},\vec{y}\}$ ve $\{\vec{x}',\vec{y}'\}$ gibi iki bazını alalım. Bu durumda, $ad-bc\neq 0$ olmak üzere, $\vec{x}'=a\vec{x}+b\vec{y}$ ve $\vec{y}'=c\vec{x}+d\vec{y}$ dir. Böylece bazı hesaplamalar sonucunda,

$$g\left(R(\vec{x}',\vec{y}')\vec{y}',\vec{x}'\right)=(ad-bc)^2\, g\left(R(\vec{x},\vec{y})\vec{y},\vec{x}\right)$$

ve

$$Q(\vec{x}',\vec{y}')=(ad-bc)^2\, Q(\vec{x},\vec{y})$$

olduğu görülür. Böylece,

$$K(P)=\frac{g\left(R(\vec{x}',\vec{y}')\vec{y}',\vec{x}'\right)}{Q(\vec{x}',\vec{y}')}=\frac{g\left(R(\vec{x},\vec{y})\vec{y},\vec{x}\right)}{Q(\vec{x},\vec{y})}$$

olur. Yani, non-dejenere bir düzlemin sectional eğriliği iyi tanımlıdır.

(M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve *R*, (M,g) nin eğrilik tensörü olsun. $\forall\, X,Y,Z\in\aleph(M)$ için, *R* nin lineer olmasından dolayı,

$$R(\;.\,,Y,Z)=\left(X\rightarrow R(X,Y)Z\right)$$

$\aleph(M)$ den $\aleph(M)$ ye tanımlanan dönüşüm de lineerdir.

Tanım 2.5.11: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve *R*, (M,g) nin eğrilik tensörü olsun.

$$Ric(Y,Z) = traceR(\ .\ ,Y)Z$$

şeklinde tanımlanan

$$Ric : \aleph(M)\times\aleph(M)\rightarrow C^{\infty}(M)$$

dönüşümüne (M,g) nin Ricci tensörü denir (Garcia-Rio and Küpeli 1999).

Ricci tensörü, açık bir şekilde bütün değişkenlerine göre lineerdir ve böylece (M,g) üzerinde $(0,2)$ tipli bir tensör alanıdır.

Teorem 2.5.4: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve Ric, (M,g) nin Ricci tensörü olsun. Bu durumda $\forall\ Y,Z\in\aleph(M)$ için

$$Ric(Y,Z) = Ric(Z,Y)$$

dir yani (M,g) nin Ricci tensörü simetriktir.

Tanım 2.5.12: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve Ric, (M,g) nin Ricci tensörü olsun. Sıfırdan farklı, null olmayan bir $\vec{v}\in\aleph(M)$ vektörüne göre, (M,g) nin Ricci eğriliği

$$\Re(\vec{v}) = \frac{Ric(\vec{v},\vec{v})}{\left|g(\vec{v},\vec{v})\right|}$$

ile tanımlanır (Garcia-Rio and Küpeli 1999).

Ayrıca (M,g) nin skalar eğriliği, *g* ye göre Ric nin izi olarak tanımlanır yani,

$$S = \sum_{i=1}^{n} g(X_i,X_i)Ric(X_i,X_i)$$

olur. Burada $\left\{\vec{X}_1,\vec{X}_2,...,\vec{X}_n\right\}$, ortonormal bir lokal çatıdır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 3.1.1: I, $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilir bir $\alpha : I \longrightarrow E^n$ fonksiyonuna E^n de bir eğri denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.2: E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha : I \longrightarrow E^n, \quad \alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)\right)$$

olmak üzere $\alpha'(t) = \left(\left.\dfrac{d\alpha_1}{dt}\right|_t, ..., \left.\dfrac{d\alpha_n}{dt}\right|_t \right)$ dir. $\left.\alpha'(t)\right|_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}E^n$ tanjant vektörüne M nin $\alpha(t)$ noktasındaki (I,α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü ve $\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise M ye birim hızlı eğri denir. Bu durumda eğrinin $t \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.3: $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \left\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\right\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için, $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $P \in M$ için $\{V_1(P), ..., V_r(P)\}$ ye $P \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.4: $M \subset E^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için, M nin Frenet 3- ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ise,

(1) $Sp\{T(s), N(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya oskülatör düzlem,

(2) $Sp\{N(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya normal düzlem,

(3) $Sp\{T(s),B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya rektifiyan düzlem denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.5: $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ bu eğrinin yay parametresi olmak üzere, M'nin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),...,V_r(s)\}$ olsun. Buna göre $1 \le i \le r$ için,

$$k_i : I \longrightarrow R\,,\;\; k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s)\right\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 3.1.1: $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ bu eğrinin yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),...,V_r(s)\}$ ise

(1) $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

(2) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s),\;\; 1\langle i \langle r,$

(3) $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

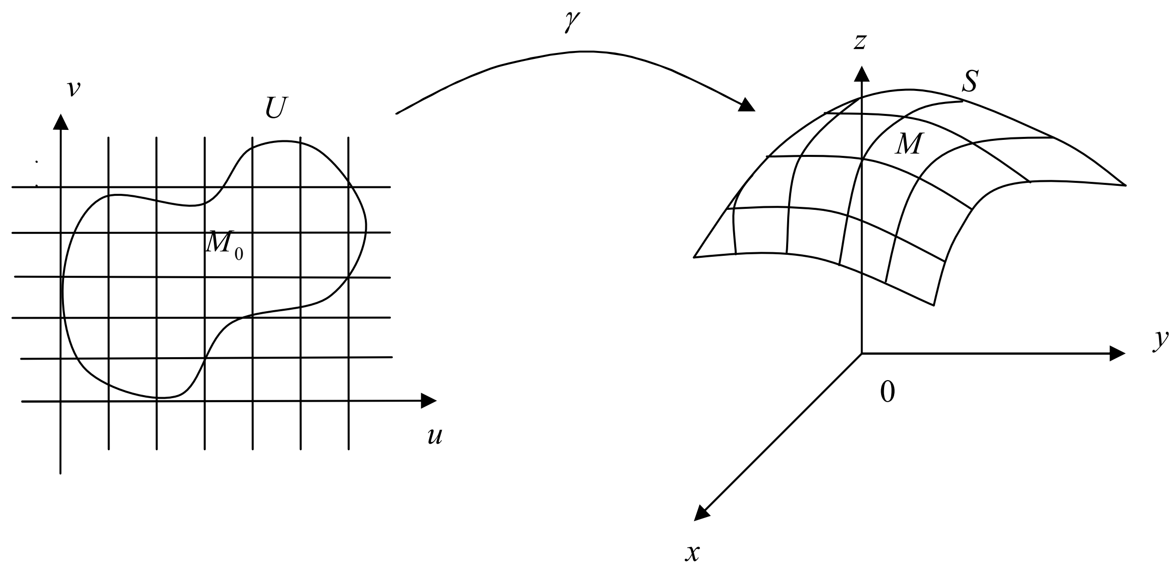
3.2. Öklid Uzayında Yüzeyler

3.2.1. Yüzeylerin parametrizasyonu

Tanım 3.2.1: U, E^2 düzleminin bağlantılı bir açık alt kümesi olsun. U ile homeomorf olan E^3 Öklid uzayının alt kümesine sade yüzey denir.

Tanım 3.2.2: S yüzeyi verilmiş olsun. E^2 düzleminin $U \subset E^2$ bölgesinin homeomorf $\gamma : U \to S$ dönüşümünde yüzeyin $M \in S$ noktasının, E^2 düzleminin $M_0 \in E^2$ noktasına dönüştüğü açıktır. M_0 noktasının kartezyen koordinatlarını u ve v ile gösterelim. u ve v ye yüzeyin M noktasının eğrisel koordinatları denir. γ ya ise S yüzeyinin parametrizasyonu denir (Salimov ve Mağden 2008).

Sürekliliğe göre, U bölgesindeki her bir doğruya, yüzeyde herhangi bir eğri karşılık gelecektir. $u = sbt,\ v = sbt$ doğrularına, yüzeyde karşılık gelen eğrilere yüzeyin koordinat eğrileri denir. $u = sbt,\ v = sbt$ aileleri yüzey üzerinde koordinat şebekesi adı verilen bir sistem oluşturur.



Şekil 3.1. S yüzeyi üzerindeki koordinat şebekesi

Yüzeyin M noktasının (u, v) eğrisel koordinatlarının verilmesi, M noktasını tayin eder. Bu ise, M noktasının $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ yer vektörünün tayin edilmesi demektir. Böylece γ parametrizasyonu, yüzeyin noktalarının yer vektörü olan noktaların eğrisel koordinatlarının sürekli fonksiyonu olarak verilebilir.

Bu yer vektörünü

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u, v\right)$$

ile göstereceğiz. Buna yüzeyin parametrik denklemi denir. $\vec{r} = \vec{r}\left(u, v\right)$ ifadesi

$$\begin{cases} x = x\left(u, v\right) \\ y = y\left(u, v\right) \\ z = z\left(u, v\right) \end{cases}$$

üç koordinat denklemlerine denktir. Bu ifadeye yüzeyin parametrik denkleminin koordinatlarla ifadesi denir.

$$\left(A\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Eğer $\left(u_0, v_0\right)$ noktasında A matrisinin rankı 2 ise böyle noktaya regüler nokta, bu şart bozulursa, singüler nokta denir (Salimov ve Mağden 2008).

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ ve } \vec{r}_2 = \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

vektörlerine koordinat vektörleri denir.

Yüzey, lokal olarak birbirine denk olan,

(1) $\vec{r} = \vec{r}\left(u, v\right), \quad \left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]\Big|_{\left(u_0, v_0\right)} \neq 0,$

(2) $\begin{cases} x = x\left(u, v\right) \\ y = y\left(u, v\right) \\ z = z\left(u, v\right) \end{cases}, \qquad rank \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2,$

(3) $F\left(x, y, z\right) = 0, \qquad gradF\Big|_{\left(x_0, y_0, z_0\right)} \neq 0,$

(4) $z = f\left(x, y\right)$

ifadelerinden biri ile verilebilir.

3.2.2. Yüzeyin teğet düzlemi

Tanım 3.2.3: Yüzey üzerindeki keyfi bir M noktasından geçen bir doğru, bu noktadan geçen herhangi bir eğriye teğetse, bu doğru yüzeye M noktasında teğettir denir.

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u^1, u^2\right)$$

yüzeyi üzerinde

$$u^1 = u^1(t)$$
$$u^2 = u^2(t)$$

denklemi ile verilen eğriyi göz önüne alalım. Bu eğri yüzey üzerinde olduğundan,

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u^1(t), u^2(t)\right)$$

olarak yazabiliriz. Bu eğrinin teğet vektörünü bulmak için t değişkenine göre türev alırsak,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt} = \vec{r}_1\frac{du^1}{dt} + \vec{r}_2\frac{du^2}{dt}$$

bulunur. Yüzey üzerinde olan ve M noktasından geçen keyfi eğrinin teğet vektörünün $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ vektörlerinin lineer terkibi olarak yazılabildiği bu eşitlikten görülür. Buradan da $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ vektörlerinin tayin ettiği düzlemin, M noktasında yüzeye teğet olan bütün doğruları ihtiva ettiği çıkar. Bu düzleme, M noktasında yüzeye teğet düzlem denir (Salimov ve Mağden 2008).

3.2.3. Yüzey elementleri ve birinci esas form

Tanım 3.2.4: U, E^2 nin açık alt kümesi olsun.

$$\vec{r} : U \to E^3$$

immersiyonuna parametrelendirilmiş yüzey elementi denir. $\vec{r}$ dönüşümünün immersiyon olması, bu dönüşümün rankının maksimum olması demektir. $\vec{r}$ nin rankının maksimum olduğu durumda regüler yüzey elementinden konuşulur. Aksi takdirde singülerlik söz konusudur.

$$\vec{r}: U \to E^3, \quad u \in U, \quad p = \vec{r}(u)$$

olmak üzere $\vec{r}$ yüzey elementi için aşağıdaki notasyonları kullanacağız.

T_uU : U nun u noktasındaki tanjant uzayı, $T_uU = \{u\} \times \mathbb{R}^2$,

T_pE^3 : E^3 ün p noktasındaki tanjant uzayı, $T_pE^3 = \{p\} \times E^3$,

$T_u\vec{r}$: $\vec{r}$ dönüşümünün p noktasındaki tanjant düzlemi (teğet düzlemi) ve

$\perp_u \vec{r}$: $\vec{r}$ dönüşümünün p noktasındaki normal uzayı

$$T_u\vec{r} \oplus \perp_u \vec{r} = T_{\vec{r}(u)}E^3$$

şeklindedir. $T_u\vec{r}$ nin elemanlarına teğet vektörler, $\perp_u \vec{r}$ in elemanlarına normal vektörler denir (Kühnel 2005).

Tanım 3.2.5: Herhangi $X, Y \in T_u\vec{r}$ tanjant vektörleri için birinci esas form,

$$I(X,Y) = \langle X, Y \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Buna T_uU tanjant uzayındaki simetrik bilineer form olarak da bakılabilir.

$$\vec{r}(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$

dönüşümünün birinci esas formu aşağıdaki simetrik, pozitif tanımlı matris ile tanımlanır.

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right) & I\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \\ I\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right) & I\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$\left(g_{ij}\right)$ matrisine metrik tensör de denir.

Birinci esas form quadratik diferensiyel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Burada ds^2, yay uzunluğu elemanıdır. E, F, G fonksiyonları ise u ve v parametrelerine bağlıdır.

Teorem 3.2.1: Birinci esas formun matrisi $\tilde{\vec{r}} = \vec{r} \circ \varphi$ parametre dönüşümü altında aşağıdaki gibi olur.

$$\left(\tilde{g}_{ij}\right) = \left(D\varphi\right)^{T}\left(g_{ij}\right)\left(D\varphi\right)$$

Burada $D\varphi$, φ nin Jacobi matrisini gösterir (Kühnel 2005).

Tanım 3.2.6: $\vec{r} : U \to E^3$ bir yüzey elementi ve $u = \left(u^1, u^2\right) \in U$ olsun.

$$X : U \to T_{f(u)}E^3, \quad X\left(u\right) = \alpha\left(u\right)\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}\right|_u + \beta\left(u\right)\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}\right|_u$$

şeklinde tanımlanan X dönüşümüne tanjant vektör alanı denir. Normal vektör alanı ise,

$$X\left(u\right) = \gamma\left(u\right)\left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}\right|_u \times \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}\right|_u$$

şeklinde tanımlanır (Kühnel 2005).

Örnek 3.2.1: $N = \pm \dfrac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\|}$

birim vektörü bir normal vektör alanıdır. N birim normaline $N : U \to S^2 \subset E^3$ dönüşümü gibi de bakılabilir. Orijine bağlı olan bu vektöre Gauss dönüşümü denir. Bu dönüşüm ayrıca *II.* esas formu ve eğriliği tanımlar.

Tanım 3.2.7: Yüzey üzerinde diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına bu yüzey üzerinde bir yönlendirme denir (Kühnel 2005).

3.2.4. Gauss dönüşümü ve yüzeylerin eğriliği

Eğrilerin eğriliğinin teğetlerin değişimi olarak tanımlanması gibi, yüzeylerin eğriliği de teğet düzlemlerdeki değişim olarak tanımlanacaktır. Her bir düzlem onun normal vektörü ile karakterize edilebileceğinden, düzlemlerdeki değişimi incelemek yerine onların normal vektörlerindeki değişimi inceleyebiliriz.

Tanım 3.2.8: $\vec{r}:U \to E^3$ yüzey elementi ve bu yüzey elementinden bağımsız olan birim küre $S^2 = \left\{ (x,y,z) \in E^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$ olsun. $N:U \to S^2$ Gauss dönüşümü

$$N\left(u^1,u^2\right) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\|}$$

şeklinde tanımlanır (Kühnel 2005).

Buradaki anlayış, $N(u)$ birim normal vektörünün artık $\vec{r}(u)$ görüntü noktasına bağlanması değil, bir paralel taşıma ile uzayın orijinine bağlanmasıdır.

$$-N = \frac{-\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\|}$$

şeklinde tanımlanan $-N$ vektörü ile N vektörü yer değiştirebilir. Yani işaret seçimi keyfi olup yönlendirmenin seçimine bağlıdır. Bu durumda iki farklı Gauss dönüşümü vardır.

Tanım 3.2.9: Y, E^n nin açık bir alt kümesinde tanımlanan bir diferensiyellenebilir vektör alanı ve X, bu açık kümenin sabit bir P noktasında yönlü bir vektör olsun yani, $(P,X) \in T_P E^n$ olsun. Bu durumda,

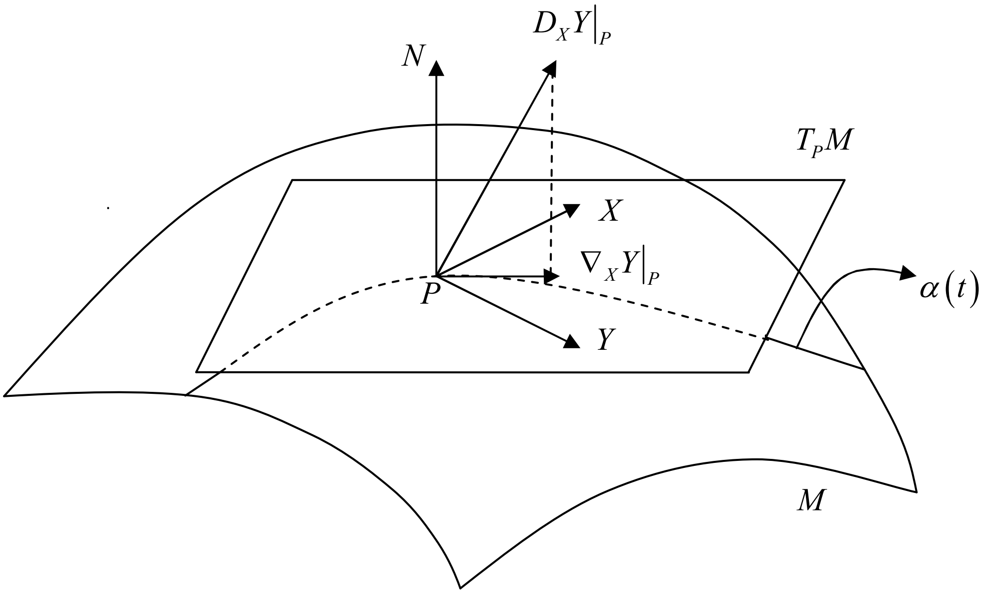
$$D_X Y\big|_P = DY\big|_P (X) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(Y(P + tX) - Y(P) \right)$$

ifadesine Y nin X vektör alanı boyunca yönlü türevi denir (Kühnel 2005).

Tanım 3.2.10: $\vec{r}$ yüzeyine teğet olan X ve Y vektör alanlarını alalım. Bu durumda

$$\nabla_X Y = \left(D_X Y \right)^{Tang} = D_X Y - \left\langle D_X Y, N \right\rangle N$$

ifadesine Y nin X yönündeki kovaryant türevi denir (Kühnel 2005).



Şekil 3.2. *M* yüzeyi üzerinde tanımlanan yönlü türev ve kovaryant türevin geometrik gösterimi

D yönlü türev operatörü uzaydaki herhangi vektör alanlarıyla tanımlanırken, ∇ kovaryant türev operatörü sadece yüzey elementi üzerindeki teğet vektör alanları ile tanımlanır. Kovaryant türev, bir yüzey üzerindeki paralellik kavramı ile ilgilidir. Eğer $\mathbb{R}^n$ uzayındaki farklı iki noktadaki tanjant vektörler birbirine eşit ise bu vektörlere Öklid anlamında paraleldirler denir.

Tanım 3.2.11: E^n de bir M yüzeyini ve bu yüzey üzerinde bir $\alpha : I \to M$ parametrik eğrisini alalım. α eğrisi boyunca M ye teğet olan X ve Y vektör alanları için,

$$\nabla_X Y = 0$$

oluyorsa bu vektör alanlarına Levi-Civita anlamında paraleldir denir.

Tanım 3.2.12 (Weingarten dönüşümü=Şekil operatörü): N, E^n de bir M yüzeyi üzerinde tanımlanan birim normal vektör alanı ve ∇, Riemann konneksiyonu olmak üzere, $\forall\, X \in \aleph(M)$ için

$$S(X) = \nabla_X N$$

şeklinde tanımlanan S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.2.13 (*II.* ve *III.* esas form): E^n de bir M yüzeyi ve bu yüzey üzerinde tanımlı, N birim normal vektör alanı verilsin. X ve Y tanjant vektörleri için;

(1) *II.* esas form, $II(X,Y) = I(S(X),Y) = \langle S(X),Y \rangle$

(2) *III.* esas form, $III(X,Y) = I(S^2(X),Y) = I(S(X),S(Y)) = \langle S(X),S(Y) \rangle$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikler, S nin self-adjoint olma özelliğinden yazıldı.

Teorem 3.2.2: *M*, E^n de bir yüzey ve S, *M* nin şekil operatörü olsun. Bu durumda, $S : \aleph(M) \to \aleph(M)$ dönüşümü lineerdir.

Teorem 3.2.3: *M*, E^n de bir yüzey ve S, *M* nin şekil operatörü olsun. Bu durumda S şekil operatörü simetriktir.

I, II ve III. esas formu lokal koordinatlarda aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$I: \quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} \right\rangle \qquad \text{(Birinci esas form)}$$

$$II: \quad h_{ij} = \left\langle N, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} \right\rangle \qquad \text{(İkinci esas form)}$$

$$III: \quad e_{ij} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial u^i}, \frac{\partial N}{\partial u^j} \right\rangle \qquad \text{(Üçüncü esas form)}$$

$S\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\right) = \sum_j h_i^j \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j}$ eşitliği ile verilen Weingarten dönüşümünün h_i^j matrisi,

$$\left\langle S\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\right), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} \right\rangle = h_{ik} = \sum_j h_i^j g_{jk}$$

$$h_i^j = \sum_k h_{ik} g^{kj}$$

eşitliklerini sağlar. Burada $\left(g^{ij}\right)$ matrisi $\left(g_{ij}\right)^{-1}$, yani $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin ters matrisidir (Kühnel 2005).

$\left(h_{ij}\right)$, her zaman simetrik bir matris olmasına rağmen, $\left(h_i^j\right)$ matrisi her zaman simetrik olmak zorunda değildir. Bu durum S nin self-adjoint olma özelliğine bir çelişki teşkil etmez.

Tanım 3.2.14: E^n nin bir M yüzeyi üzerinde q-yuncu esas formu, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q : \aleph(M) \times \aleph(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$
$$I^q(X,Y) = \left\langle S^{q-1}(X), Y \right\rangle$$

şeklinde tanımlanan I^q fonksiyonudur (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.2.15: M, E^n de bir yüzey ve S, M nin şekil operatörü olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır. Bu eğrilikler k_1, k_2 ile gösterilir.

Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir.

Tanım 3.2.16: M, E^n de bir yüzey ve $S(P)$, M nin P noktasındaki şekil operatörü olmak üzere,

$$K : M \to \mathbb{R}, \quad K(P) = \det S(P)$$

olarak tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.2.17: M, E^n de bir yüzey ve $S(P)$, M nin P noktasındaki şekil operatörü olmak üzere,

$$H : M \to \mathbb{R}, \quad H(P) = \dot{I}z(S(P))$$

olarak tanımlanan H fonksiyonuna M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.2.18: M, E^n de bir yüzey ve α, M üzerinde bir eğri olsun. Ayrıca T, α nın teğet vektör alanı ve S, M nin şekil operatörü olsun. T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.2.19: M, E^n de bir yüzey ve $S(P)$, M nin P noktasındaki şekil operatörü olmak üzere,

(1) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ için, $S(P) = \lambda I^{n-1}$ ise P noktasına M nin umbilik noktası denir.

(2) $S(P) = 0$ ise P noktasına M nin bir düzlenme noktasıdır denir (Hacısalihoğlu 1983).

3.2.5. Normal eğrilik ve yüzeyin ikinci esas formu

Tamamen yüzey üzerinde yatan bir eğrinin eğriliğinin ne kadarının sadece o yüzeyden kaynaklandığını sorgulamak doğaldır. Bu durumu sorgulamak için yüzey üzerinde yatan bir α eğrisi alalım. α eğrisinin herhangi bir P noktasındaki birim teğet vektörü $\alpha'(P) = X$ olsun. (Buradaki α' vektörü, eğrinin doğal parametreye göre türevini göstermektedir) α nın κ eğriliği, α'' vektörünün uzunluğu olarak tanımlanır. α'' vektörünü onun teğet ve normal bölümlerine ayıralım.

$$\alpha'' = \underbrace{(\alpha'')^{Tang}}_{\text{teğet bölümü}} + \underbrace{\langle \alpha'', N \rangle N}_{\text{normal bölümü}}$$

α'' vektörünün normal bölümü

$$\langle \alpha'', N \rangle N = \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, N \right\rangle N = -\left\langle \alpha', \frac{dN}{ds} \right\rangle N = \langle X, S(X) \rangle N = II(X, X) N$$

şeklindedir (Kühnel 2005).

Böylece normal bileşenin, eğrinin seçimine değil, P noktasındaki $\alpha' = X$ teğetine bağlı olduğunu gördük. Bu ilişki Meusnier Teoremi olarak ifade edilir.

Bu yüzden $II(X, X)$ ifadesine, α eğrisinin κ_N normal eğriliği diyebiliriz. Şimdi normal eğriliğin tanımını verelim.

Tanım 3.2.20: Yüzeyin bir P noktasındaki α'' eğrilik vektörünün, bu noktadaki yüzey normali doğrultusundaki izdüşümüne, bu noktadaki yüzey eğrisinin normal eğriliği denir ve κ_N ile gösterilir (Salimov ve Magden 2008).

3.2.6. Yüzey noktalarının sınıflandırılması

S, yüzey üzerinde alınan şekil operatörü ve k_1, k_2 asli eğrilikler olsun. Bu durumda,

(1) $K = k_1.k_2$ değerine Gauss eğriliği ve

(2) $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ değerine ortalama eğrilik denir.

(3) Yüzey üzerinde alınan bir P noktasına,

$K(P) > 0$ ise eliptik nokta,

$K(P) < 0$ ise hiperbolik nokta,

$K(P) = 0$ ve $H(P) \neq 0$ ise parabolik nokta,

$k_1(P) = k_2(P)$ ise umbilik nokta ve,

$k_1(P) = k_2(P) = 0$ ise bir yayılma noktası denir (Kühnel 2005).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. E_1^3 Minkowski Uzayı

Bu bölümde, önce Lorentz metriğini tanıtacak ve daha sonra bu metrik yardımıyla bir vektörün, tanjant düzlemin, yüzeyin ve en nihayetinde bir uzayın karakterini yani, space-like, time-like veya null olma durumunu inceleyeceğiz.

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir bazı, $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ olmak üzere, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kümesini alalım. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere, $u, v \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için,

$$\langle u, v \rangle_L = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

şeklinde tanımlanan metriğe Lorentz metriği denir. Metriği bu şekilde tanımlanan ve $E_1^3 = (\mathbb{R}^3, <,>_L)$ ile gösterilen uzaya ise Minkowski uzayı denir. Bu bölümde E^3 metrik uzayını Minkowski uzayından ayırmak için, $E^3 = (\mathbb{R}^3, <,>_e)$ ile göstereceğiz.

Bu uzayda u ve v gibi iki vektörün çarpımı

$$\langle u, v \rangle = u^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v = u^t G v$$

şeklinde de verilir. Burada metrik katsayılarının $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ şeklinde tanımlandığını hatırlayarak, $G = (g_{ij})$ matrisinin, metrik tensör olduğunu söyleriz (Lopez 2008).

Tanım 4.1.1: E_1^3 uzayının null vektörlerinin tamamının oluşturduğu kümeye null koni denir ve

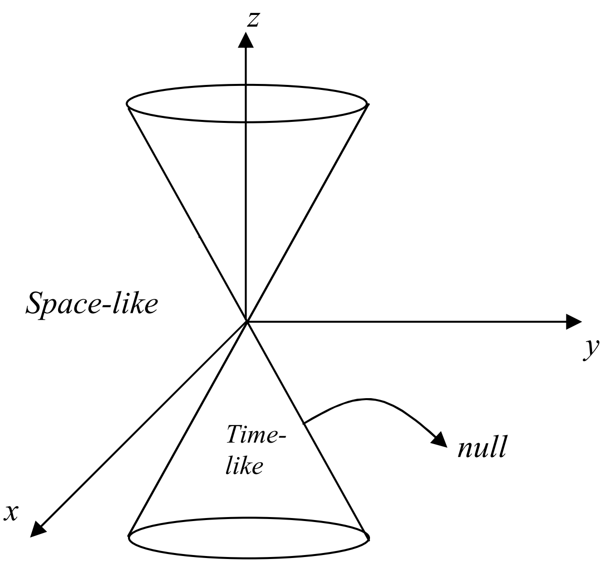
$$C = \{(x, y, z) \in E_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0,0,0)\}$$

şeklinde tanımlanır.

E_1^3 uzayındaki time-like vektörlerin kümesini T ile gösterecek olursak, bu küme

$$T = \{(x, y, z) \in E_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

şeklinde tanımlanır (Lopez 2008).



Şekil 4.1. E_1^3 uzayındaki null koni

Tanım 4.1.2: Bir $U \subset \mathbb{R}^3$ alt vektör uzayı verilsin. U üzerinde $<,>|_U$ indirgenmiş metriği,

$$\langle u, v\rangle|_U = \langle u, v\rangle_L, \qquad u, v \in U$$

şeklinde tanımlansın. Eğer indirgenmiş metrik, pozitif tanımlı ise, U alt uzayına space-like, non-dejenere ise U alt uzayına time-like, dejenere ve $U \neq \{0\}$ ise U alt uzayına null denir. E_1^3 deki herhangi bir alt uzay bu üç çeşitten birine aittir (Lopez 2008).

Örnek 4.1.1: $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir bazı, $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ olmak üzere,

(1) $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri space-like, $\vec{e}_3$ vektörü time-like ve $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ vektörü null vektördür.

(2) $Sp\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ düzlemi space-like, $Sp\{\vec{e}_1,\vec{e}_3\}$ ve $Sp\{\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ düzlemleri time-like ve $Sp\{\vec{e}_1,\vec{e}_2+\vec{e}_3\}$ düzlemi null olur.

(3) $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ vektörü space-like vektördür ama $Sp\{\vec{e}_1,\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\}$ düzlemi null düzlemdir.

(4) $\vec{e}_2+\vec{e}_3$ vektörü null vektördür ama $Sp\{\vec{e}_2+\vec{e}_3,\vec{e}_3\}$ düzlemi time-likedır.

Şimdi bir metrik uzayın özelliklerini inceleyelim. g, non-dejenere bir metrik olmak üzere (V,g) metrik uzayını alalım. $U\subset V$ alt vektör uzayına dik olan alt uzay $U^{\perp}$ ile gösterilir ve

$$U^{\perp}=\{v\in V:\ g(u,v)=0,\ \ \forall u\in U\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.1: (V,g) bir metrik uzay olsun.

(1) Eğer $U\subset V$ bir alt uzay ise $boy(V)=boy(U)+boy(U^{\perp})$,

(2) Eğer $U\subset V$ bir alt uzay ise $(U^{\perp})^{\perp}=U$ ve

(3) Eğer $U\subset V$ bir non-dejenere alt uzay ise $U^{\perp}$ de bir non-dejenere alt uzaydır.

İspat:

(1) U nun bir bazı $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_m\}$ olsun. Bunu V nin bir bazı olan $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$ bazına genişleteceğiz. Eğer $u=\sum_i x_i\vec{e}_i\in U^{\perp}$ olursa, bu durumda

$$0=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i,\vec{e}_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}g_{ji}x_i=0,\qquad 1\le j\le m$$

olur. Son eşitliği matris şeklinde ifade edecek olursak,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{m1} & \cdots & g_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Yani $AX=0$ ve $A=\left(g_{ij}\right)_{m\times n}$ olur. Metrik non-dejenere olduğundan A nın rankı m dir. Sonuç olarak, $AX=0$ denkleminin çözümleri $n-m$ boyutlu bir alt uzay oluşturur.

(2) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}\subset U$ olduğu için $boy\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=boy\left(U\right)$ olur.

(3) $B=\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_m\right\}$, U nun bir ortonormal bazı olsun. V nin bir $B=\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\right\}$ bazını elde etmek için bu bazı genişleteceğiz. $U^{\perp}$ nin boyutu $n-m$ olduğu için, $U^{\perp}$ nin bazı $\left\{\vec{e}_{m+1},\vec{e}_{m+2},...,\vec{e}_n\right\}$ olur.

Teorem 4.1.2:

(1) $\vec{v}\in E_1^3$ vektörünü alalım. $\vec{v}$ nin time-like olması için gerek ve yeter şart $\left(Sp\left\{\vec{v}\right\}\right)^{\perp}$ nin space-like olmasıdır. Bu durumda $E_1^3=Sp\left\{\vec{v}\right\}+\left(Sp\left\{\vec{v}\right\}\right)^{\perp}$ olur. Diğer taraftan $\vec{v}$ nin space-like olması için gerek ve yeter şart $\left(Sp\left\{\vec{v}\right\}\right)^{\perp}$ nin time-like olmasıdır.

(2) $U\subset V$ alt uzayının space-like olması için gerek ve yeter şart $U^{\perp}$ nin time-like olmasıdır.

(3) $U\subset V$ alt uzayının null olması için gerek ve yeter şart $U^{\perp}$ nin null olmasıdır (Lopez 2008).

İspat:

(1) Eğer $\vec{v}$ bir time-like vektör ise bu vektörü, E_1^3 ün bir ortonormal bazı olan $B=\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{v}\right\}$ nin bir parçası olarak alabiliriz. Bu durumda

$$\left(Sp\left\{\vec{v}\right\}\right)^{\perp}=Sp\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\right\}$$

alt uzayı space-like olur.

Tersine, $\left.\langle,\rangle\right|_{\left(Sp\left\{\vec{v}\right\}\right)^{\perp}}$ metriğinin pozitif olduğu durumda, $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\right\}$, $\left(Sp\left\{\vec{v}\right\}\right)^{\perp}$ nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{v}\right\}$ bazı için $g_{11}=g_{22}=1$ olduğundan $g_{33}<0$ dır. Yani $\vec{v}$, time-like vektördür.

(2) U, bir time-like alt uzay ise $\vec{v} \in U$ bir time-like vektördür. Bu durumda $U^{\perp} \subset \left(Sp\{\vec{v}\}\right)^{\perp}$ olur. $\left(Sp\{\vec{v}\}\right)^{\perp}$ space-like olduğundan $U^{\perp}$ de space-like olur. Teoremin tersinin ispatı, $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$ olduğundan benzer şekilde yapılır.

(3) Bu özellik, yukarıdaki iki özelliğin bir sonucu olarak ispatlanır.

Teorem 4.1.3:

(1) İki $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ null vektörünün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ olmasıdır.

(2) $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi iki time-like vektör birbirine dik olamaz.

(3) U, bir null alt uzay ise bu durumda $boy\left(U \cap U^{\perp}\right) = 1$ olur (Lopez 2008).

Teorem 4.1.4: $U \subset E_1^3$, iki boyutlu bir alt uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) U, bir time-like alt uzaydır.

(2) U, iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.

(3) U, bir time-like vektör içerir (Lopez 2008).

Teorem 4.1.5: U, E_1^3 in bir alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) U, bir null alt uzaydır.

(2) U, null vektör içerir ama bir time-like vektör içermez.

(3) $U \cap C = L - \{0\}$ ve $boyL = 1$ dir (Lopez 2008).

Teorem 4.1.6: Π, E_1^3 in bir düzlemi ve $\vec{n}$, Öklid metriğine göre bu düzleme dik bir vektör olsun. Bu durumda, Π nin bir space-like (veya sırasıyla time-like, null) düzlem olması için gerek ve yeter şart, $\vec{n}$ nin bir time-like (veya sırasıyla space-like, null) vektör olmasıdır (Lopez 2008).

İspat: Π düzlemi,

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; ax+by+cz=0\right\}$$

şeklinde tanımlanırsa bu durumda $\vec{n}$ vektörü, (a,b,c) vektörüne diktir. Bu düzlemi,

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; ax+by-(-c)z=0\right\} = \left(Sp\left\{(a,b,-c)\right\}\right)^{\perp}$$

biçiminde de yazabileceğimiz için $(a,b,-c)$ vektörünün karakterinin $\vec{n}$ ile aynı olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 4.1.3: $u,v \in E_1^3$ olmak üzere, $u \times v$ ile tanımlanan tek bir vektöre, u ve v nin Lorentz vektör çarpımı denir. $u \times v$ vektörü,

$$\langle u \times v, w\rangle_L = \det(u,v,w)$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla w vektörü yerine genel baz vektörlerinden biri alınarak $u \times v$ vektör çarpımı,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Lopez 2008).

Teorem 4.1.7: Yukarda bahsi geçen vektör çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $u \times v = -v \times u$

(2) $u \times v$, u ve v ye diktir.

(3) $u \times v = 0$ olması için gerek ve yeter şart u ve v vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

(4) $u \times v \neq 0$ vektörünün $\Pi = span\{u,v\}$ düzleminde yatması için gerek ve yeter şart Π düzleminin null olmasıdır.

4.2. E_1^3 Minkowski Uzayında Eğriler

Öklid uzayında olduğu gibi Minkowski uzayında da eğrinin tanımı,

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$$

şeklinde tanımlanan difeferensiyellenebilir dönüşüm olarak verilir.

Tanım 4.2.1: α , E_1^3 de bir eğri olsun. Eğer herhangi bir $t \in I$ parametresi için, $\alpha'(t)$ hız vektörü space-like (sırasıyla time-like, null) ise, α eğrisine space-like (sırasıyla time-like, null) eğri denir.

$\alpha : I \to E_1^3$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile tanımlanan α eğrisi, I açık aralığının tamamında sadece space-like, time-like veya null olmayabilir. Örneğin;

$$\alpha(t) = \left(\cosh(t), t^2, \sinh(t)\right)$$

olarak tanımlanan α eğrisi için

$$\alpha'(t) = \left(\sinh(t), 2t, \cosh(t)\right)$$

olup $\left\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \right\rangle = 4t^2 - 1$ olur. Böylece bu eğri, $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ aralığında space-like, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aralığında time-like ve $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ noktalarında null olur.

Tanım 4.2.2: $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisini alalım. Eğer $\forall\ t \in I$ parametresi için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa α eğrisine regüler eğri denir.

E_1^3 de tanımlanan bazı düzlemsel eğri örnekleri verelim.

Örnek 4.2.1: $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerini ve $r > 0$ reel sayısını alalım.

(1) $\alpha(t) = \vec{p} + t\vec{v}$ doğrusu v ile aynı karaktere sahiptir.

(2) $\alpha(t) = \vec{p} + r(\cos t, \sin t, 0)$ çemberi space-like bir düzlemde, space-like bir eğridir.

(3) $\alpha(t) = \vec{p} + r(0, \sinh t, \cosh t)$ hiperbolü time-like bir düzlemde, space-like bir eğridir.

(4) $\alpha(t) = \vec{p} + r(0, \cosh t, \sinh t)$ hiperbolü null bir düzlemde, time-like bir eğridir.

(5) $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$ parabolü null bir düzlemde, space-like bir eğridir.

Şimdi de düzlemsel olmayan eğri örneklerine bakalım:

(1) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, at), \quad a \neq 0$ helis eğrisi bir Öklid helisidir.

(2) $\alpha(t) = (at, \sinh t, \cosh t), \quad a \neq 0$.

(3) $\alpha(t) = (at, \cosh t, \sinh t), \quad a \neq 0$.

Teorem 4.2.1: Herhangi bir time-like veya null eğri, regülerdir.

İspat: α, time-like eğrisini alalım. x, y ve z fonksiyonları t ‘ye bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere bu eğriyi,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

şeklinde gösterebiliriz. Bu durumda

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 - (z'(t))^2 < 0$$

ve $z'(t) \neq 0$ dır. Yani α eğrisi regülerdir.

Eğer α eğrisi null olursa, yine $z'(t) \neq 0$ olur. Aksi takdirde $x'(t) = y'(t) = 0$ ve $\alpha'(t) = 0$ olur. Bu ise α ’nın t noktasında space-like olması demektir.

Teorem 4.2.2: E_1^3 deki bir Π düzleminde, kapalı bir α eğrisi alalım.

(1) Eğer α eğrisi space-like ise Π düzlemi de space-like olur.

(2) Bu kapalı α eğrisi, time-like veya null olamaz (Lopez 2008).

4.3. E_1^3 Minkowski Uzayında Yüzeyler

Üçüncü bölümde E^3 Öklid uzayında yüzeyler genel olarak ele alındı. Dördüncü bölümde de E_1^3 Minkowski uzayı ve bu uzayın bazı özellikleri tanıtıldıktan sonra E_1^3 uzayındaki eğriler hakkında kısa bir bilgi verildi. Şimdi E_1^3 de yüzeylerden bahsedebiliriz.

E_1^3 de yüzeyler aynı E^3 de olduğu gibi $U \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\vec{r} : U \to E_1^3$ şeklinde bir immersiyon olarak tanımlanır.

E_1^3 de farklı tipten vektörler (space-like, time-like ve null) olduğundan, düzlemler de farklı isimlerle (space-like, time-like ve null) adlandırılırlar. Dolayısıyla yüzeylerin teğet düzlemleri de bu düzlemlerden biri olacaktır.

Birinci esas form, E^3 deki yüzeylerde olduğu gibi tanımlanır. Ancak bu form E_1^3 Minkowski uzayındaki yüzeylerde pozitif tanımlı veya maksimal ranka sahip olmak zorunda değildir. En azından rank sıfır da olamaz. Çünkü E_1^3 de sadece null vektörlerden oluşan iki boyutlu bir düzlem yoktur. Bu durum, E_1^3 deki yüzeylerin aşağıdaki gibi farklı sınıflandırılmasına yol açar.

Tanım 4.3.1: $\vec{r} : U \to E_1^3$ şeklinde tanımlanan yüzeyin,

(1) Birinci esas formu pozitif tanımlı ise bu yüzeye space-like,

(2) Birinci esas formu indefinit ise bu yüzeye time-like,

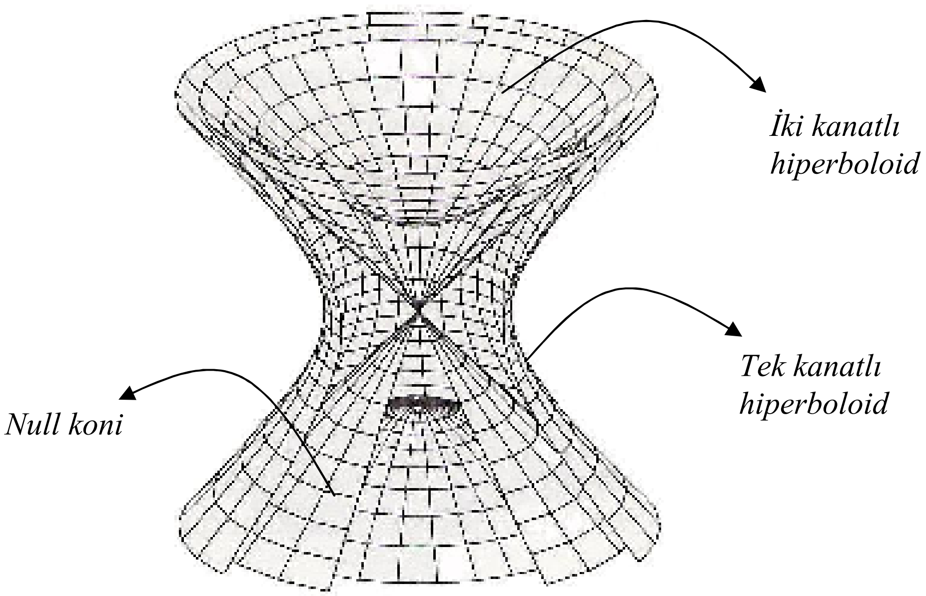
(3) Birinci esas formunun rankı 1 ise bu yüzeye null yüzey denir (Kühnel 2005).

Örnek 4.3.1: E_1^3 deki $u = (x_1, x_2, x_3)$ ve $v = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için, $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ olsun.

1) $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$ iki kanatlı hiperboloidi her yerde space-like yüzeydir. Bu yüzey x_2x_3 düzlemindeki $-x_2^2 + x_3^2 = 1$ space-like hiperbol eğrisinin x_3 ekseni etrafında dönmesiyle oluşur.

2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ tek kanatlı hiperboloidi her yerde time-like yüzeydir. Bu yüzey x_1x_3 düzlemindeki $x_1^2 - x_3^2 = 1$ time-like hiperbol eğrisinin x_3 ekseni etrafında dönmesiyle oluşur.

3) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ null konisinden orijini çıkaralım. Bu yüzey null yüzey olur. Orijin noktasında null koni regüler bir yüzey olmayacağı için bu nokta çıkarıldı.



Şekil 4.2. Tek kanatlı ve iki kanatlı hiperboloid ile birlikte null koni

Teorem 4.3.1: $\vec{r} : U \to E_1^3$ dönüşümü ile verilen yüzeyin space-like (veya sırasıyla time-like, null) yüzey olması için gerek ve yeter şart, $\langle \, , \, \rangle_L$ skalar çarpımına göre, yüzeyin her $p = \vec{r}(u)$ noktasındaki $T_u\vec{r}$ tanjant düzlemine dik olan bir $X \neq 0$ time-like vektörünün olmasıdır (Kühnel 2005).

İspat: İlk olarak tanjant düzlemle başlayacak ve X vektörünü arayacağız. Tanjant düzlemin space-like olduğunu düşünerek o düzlemde bir $\{v_1, v_2\}$ ortonormal baz seçelim ve buna X vektörünü de ekleyerek üç boyutlu uzayın bazına tamamlayalım. X vektörü tanjant düzleme diktir. Bu durumda X time-like olur, aksi takdirde E_1^3 deki iç çarpım pozitif (semi) definit olacaktır.

İkinci durum da, v_1 vektörü space-like, v_2 vektörü time-like seçilerek benzer şekilde verilir. Bu durumda X space-like olur. Aksi takdirde E_1^3 deki iç çarpım, iki boyutlu bir düzlem üzerinde pozitif tanımlı olmayacaktır.

Son durumda, v_1 in null ve v_2 nin space-like veya time-like ama v_1 e dik olduğu bir tanjant düzlemin bazını seçebiliriz. Sonra da $X = v_1$ alırız.

Tersine, bir space-like vektörün dik tümleyen uzayının bir time-like düzlem ve time-like vektörün dik tümleyen uzayının da bir space-like düzlem olduğunu biliyoruz. Bir X null vektörü için dik tümleyen uzayı bildiğimiz klasik anlamdaki gibi değildir. Çünkü X kendi kendine diktir. Eğer X e dik olan düzlem varsa o düzlem aynı zamanda X i içerir ve bu yüzden düzlem null olur. Bunu görmek için, X e dik olan ve aynı zamanda X i içermeyen hiçbir düzlemin olamayacağını görmeliyiz. Eğer böyle olsaydı, ya düzlemin space-like olduğu durumda iç çarpım pozitif semi-definit olacaktı, ya da eğer X e dik bir düzlem null vektör içeriyorsa, sadece null vektörlerden oluşan bir düzlem olacaktı ki bu imkansızdır.

Sonuç olarak, bir space-like yüzeyin, işaretine bağlı olarak, bir tek birim normali vardır ve o da time-like'dır. Benzer şekilde, bir time-like yüzeyin, işaretine bağlı olarak, bir tek birim normali vardır ve o da space-like'dır. Null yüzeyin bir tek 1-boyutlu normal uzayı vardır ve bu uzay tanjant düzlemde yatar. Null yüzeyin normal uzayı ve tanjant uzayı aynı düzlemde yattığı için E_1^3 uzayını geremezler.

Örnek 4.3.2: Bir önceki örnekte verdiğimiz iki kanatlı hiperboloidin birim normali time-like olduğu için bu yüzey space-like olur. Benzer şekilde, tek kanatlı hiperboloidin birim normali space-like olduğundan bu yüzey time-like olur. Null konide ise koni üzerindeki bir noktadaki her bir yer vektörünün, kendi kendine normal bir vektör olduğunu görüyoruz.

Tanım 4.3.2: Bir yüzey üzerinde alınan herhangi bir tanjant düzlem space-like (veya sırasıyla time-like, null) ise yüzeye space-like yüzey (veya sırasıyla time-like, null) denir (Lopez 2008).

Teorem 4.3.2: Herhangi bir space-like yüzey, lokal olarak $z=0$ düzleminde tanımlanan bir fonksiyonun grafiğidir (Lopez 2008).

İspat: $\vec{r}:U\to E_1^3$ şeklinde verilen bir yüzeyin

$$\vec{r}=\vec{r}\left(u,v\right)=\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)$$

şeklinde verilen bir parametrizasyonunu düşünelim. $\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ vektörü, $\vec{r}_u$ ve $\vec{r}_v$ ye dik olduğu için bir time-like vektördür. Böylece onun üçüncü bileşeni sıfır olmaz. Bu koordinat

$$-\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Yüzeyin bir noktası civarında

$$\phi:\left(u,v\right)\to\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)$$

dönüşümünün bir diffeomorfizm olduğunu savunmak için kapalı fonksiyon teoremini kullanacağız. $\vec{r}$ immersiyonunu $\vec{r}\circ\phi^{-1}$ dönüşümü ile yeniden parametrelendirelim. Bu durumda $\vec{r}$, $z\circ\phi^{-1}$ fonksiyonunun grafiği ile uyuşur.

Tanım 4.3.3: $\vec{r}: U \to E_1^3$ yüzeyini ve

$H^2 = \{P \in E_1^3 : \ \langle P, P \rangle = -1, \ z > 0\}$ şeklinde tanımlanan hiperboloidi ele alalım.

$$N(u,v) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

şeklinde tanımlanan

$$N : U \to H^2$$

dönüşümüne yüzeyin Gauss dönüşümü denir.

N nin seçimi bize yüzey için bir yönlendirme verir. Herhangi bir yüzeyin bir P noktasındaki tanjant düzleminin bir $\{u, v\}$ bazıyla verildiğini kabul edersek, $\{u, v, N(P)\}$ E_1^3 için bir baz olur. Bu baz pozitif yönlü ise yani, $\det(u, v, N(P)) > 0$ ise, yüzey pozitif yönlendirilmiştir denir.

Teorem 4.3.3: $\vec{r}: U \to E_1^3$ bir space-like yüzeyi verilsin. Bu durumda U, yönlendirilebilir bir yüzeydir (Lopez 2008).

İspat: Yüzey space-like olduğundan her bir tanjant düzlemi space-like olacaktır. Lorentz iç çarpımıyla bu tanjant düzleme dik olan bir N birim vektörü tanımlayabiliriz.

Yüzeyin $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ şeklinde verildiğini dikkate alarak $\vec{r}_u$ ve $\vec{r}_v$ teğet vektörlerini düşünelim. Bu vektörler space-like olduğu için $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ vektörü time-like olur. N vektörünü

$$N(u,v) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

olarak tanımlayabiliriz. Böylece her bir noktanın bir komşuluğunda, yüzey üzerinde diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanı vardır. Örneğin, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ vektörünü alalım. Bu vektör aynı zamanda time-like olduğu için,

$$|\langle N(P), \vec{e}_3 \rangle| \geq 1$$

olur. Böylece bir koordinat komşuluğunda her P için,

$$\left\langle N\left(P\right),\vec{e}_3\right\rangle \geq 1 \quad \text{veya} \quad \left\langle N\left(P\right),\vec{e}_3\right\rangle \leq -1$$

olur. Örneğin negatif işaretli bir vektör seçtiğimizde bu vektör, yüzeye normal bir vektör alanı tanımlamamıza imkân sağlar. Yani yüzey yönlendirilebilir olur.

4.4. E_1^3 Minkowski Uzayındaki Yüzeylerin Eğrilikleri

Bu bölümde, öncelikle E_1^3 Minkowski uzayındaki herhangi bir yüzey için *I.* ve *II.* esas form tanımlanacak ve bunlara bağlı olarak yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliklerinin tanımı verilecektir. Daha sonra bu eğrilikler, space-like ve time-like yüzeyler için ayrı ayrı incelenecektir.

Tanım 4.4.1: E_1^3 Minkowski uzayındaki bir yüzeyin birinci esas formu lokal koordinatlarda,

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} \right\rangle_L$$

şeklinde tanımlanır.

Öklid uzayında ikinci esas formu

$$II\left(X,Y\right) = I\left(SX,Y\right)$$

olarak tanımlamış ve bunun bir skalar değere karşılık geldiğini söylemiştik. E_1^3 Minkowski uzayında ise, yüzeyin birim normalinin farklı tipleri nedeniyle, ikinci esas form vektör değerli olarak göz önüne alınır ve

$$\left\langle II\left(X,Y\right),N\right\rangle_L = \left\langle SX,Y\right\rangle_L$$

eşitliğini sağlayan $II\left(X,Y\right)$ vektörü olarak tanımlanır.

Bu eşitlik koordinatlarla ifade edilecek olursa, N yardımıyla tanımlanan işaret $\varepsilon = \left\langle N,N\right\rangle_L$ olmak üzere,

$$II\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i},\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j}\right)=h_{ij}N=\varepsilon\left\langle \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j},N\right\rangle_L N$$

ifadesi elde edilir.

Bu durumda Gauss eğriliği,

$$K=\frac{\left\langle II(X,X),II(Y,Y)\right\rangle_L-\left\langle II(X,Y),II(Y,X)\right\rangle_L}{I(X,X).I(Y,Y)-I(X,Y)I(Y,X)}=\frac{Det(h_{ij})}{Det(g_{ij})}\varepsilon$$

olarak tanımlanır. Burada $\{X,Y\}$, tanjant düzlemin herhangi bir bazıdır. Yani $X=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}$ ve $Y=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}$ de olabilir (Kühnel 2005).

Eğer, $\langle \vec{e}_i,\vec{e}_i\rangle_L=\varepsilon_i$ olmak üzere, bir $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ ortonormal bazını alırsak bu durumda

$$K=\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\left\langle II(\vec{e}_1,\vec{e}_1),II(\vec{e}_2,\vec{e}_2)\right\rangle_L-\left\langle II(\vec{e}_1,\vec{e}_2),II(\vec{e}_2,\vec{e}_1)\right\rangle_L\right)$$

ifadesi elde edilir (Kühnel 2005).

Benzer şekilde ortalama eğrilik de, ikinci esas formun izi ile bilinen vektörel formda tanımlanabilir. Bu durumda $\vec{\mathrm{H}}$ ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{\mathrm{H}}=HN=\frac{\varepsilon_1 II(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+\varepsilon_2 II(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}{2}$$

şeklindedir (Kühnel 2005).

4.4.1. Space-like yüzeylerin eğrilikleri

M, bir space-like yüzey ve N, bu yüzeyin Gauss dönüşümü olsun. E_1^3 ve *M* nin Levi-Civita konneksiyonlarını sırasıyla ∇^0 ve ∇ ile gösterelim. Bu durumda X ve Y, *M* de iki vektör alanı olmak üzere,

$$\nabla_X Y=\left(\nabla_X^o Y\right)^T$$

olur. Burada $\left(\nabla^o_X Y\right)^T$ ile $\nabla^o_X Y$ vektör alanının teğet kısmı gösterilmektedir. Yüzeyin ikinci esas formu ise

$$II(X,Y)=\left(\nabla^0_X Y\right)^{\perp}$$

şeklinde tanımlanan $II:\aleph(M)\times\aleph(M)\to\aleph(M)^{\perp}$ simetrik dönüşümdür. X ve Y, M nin teğet vektör alanları olmak üzere Gauss formülü

$$\nabla^0_X Y=\nabla_X Y+II(X,Y)$$

olur. Z, yüzeye normal bir vektör alanı olmak üzere, $-\nabla^0_X Z$ nin teğet bileşeni $A_Z(X)$ ile gösterilsin. Yani $A_Z(X)=-\left(\nabla^0_X Z\right)^T$ olsun. Bu durumda

$$\left\langle A_Z(X),Y\right\rangle=\left\langle II(X,Y),Z\right\rangle$$

elde edilir. Burada

$$A_Z:\aleph(M)\to\aleph(M)$$

dönüşümüne Z ye göre Weingarten dönüşümü denir. Ayrıca A_Z dönüşümü, M nin metriğine göre lineer ve self-adjointdir (Lopez 2008).

Eğer $Z=N$ olarak alınırsa $\left\langle\nabla^0_X N,N\right\rangle=0$ olacağından,

$$A_N(X)=-\nabla^0_X N$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $S=A_N$ dönüşümüne yüzeyin Weingarten dönüşümü denir. Bu dönüşüm self-adjoint olduğundan

$$\left\langle SX,Y\right\rangle=\left\langle X,SY\right\rangle$$

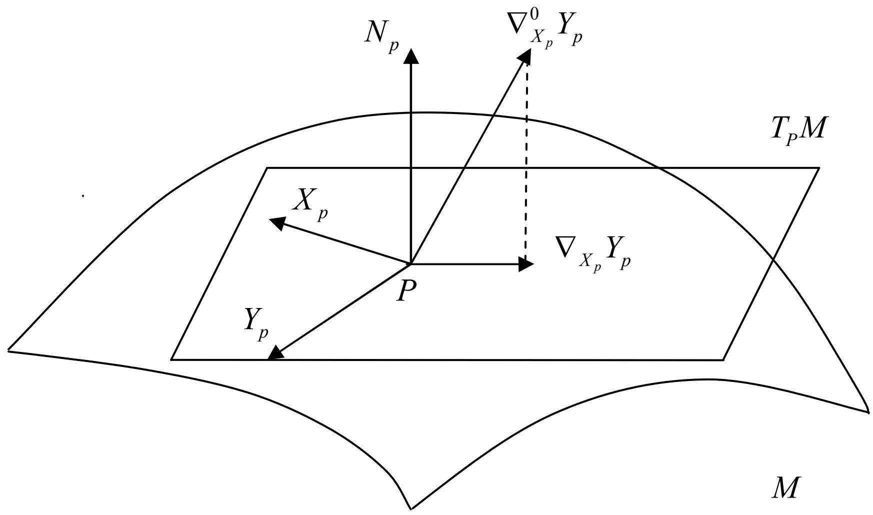
eşitliği vardır. $X,Y\in\aleph(M)$ vektör alanları için,

$$II(X,Y)=-\left\langle II(X,Y),N\right\rangle N=-\left\langle SX,Y\right\rangle N$$

ve böylece

$$\nabla^0_X Y=\nabla_X Y-\left\langle SX,Y\right\rangle N$$

elde edilir. Son ifadenin gerçekliğini görmek için aşağıdaki şekli ve bundan istifade ile de yapılan ara işlemleri verelim:



Şekil 4.3. Yüzey üzerindeki kovaryant türev

Şekil 4.3'ten de görüldüğü gibi

$$\nabla^0_{X_p} Y_p = \nabla_{X_p} Y_p + \lambda N_p$$

dir. Bu eşitlikteki λ fonksiyonunu bulmak için eşitliğin her iki tarafını N_p ile skalar çarpalım. Bu durumda,

$$\left\langle \nabla^0_{X_p} Y_p, N_p \right\rangle = \underbrace{\left\langle \nabla_{X_p} Y_p, N_p \right\rangle}_{0} + \lambda \underbrace{\left\langle N_p, N_p \right\rangle}_{1}$$

ve böylece

$$\lambda = \left\langle \nabla^0_{X_p} Y_p, N_p \right\rangle$$

elde edilir. Diğer taraftan $\left\langle Y_p, N_p \right\rangle = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin X_p yönündeki türevi alınırsa,

$$X_p \left[\left\langle Y_p, N_p \right\rangle \right] = X_p [0]$$

$$\left\langle \nabla^0_{X_p} Y_p, N_p \right\rangle + \left\langle Y_p, \nabla^0_{X_p} N_p \right\rangle = 0$$

olur. Burada

$$\nabla^0_{X_p} N_p = S\left(X_p \right)$$

olduğundan,

$$\left\langle \nabla^0_{X_p} Y_p, N_p \right\rangle = -\left\langle Y_p, S\left(X_p\right) \right\rangle$$

yani,

$$\lambda = -\left\langle Y_p, S\left(X_p\right) \right\rangle$$

olduğu görülür. Bu değer

$$\nabla^0_{X_p} Y_p = \nabla_{X_p} Y_p + \lambda N_p$$

ifadesinde yerine yazılırsa gerçekten de,

$$\nabla^0_{X_p} Y_p = \nabla_{X_p} Y_p - \left\langle S\left(X_p\right), Y_p \right\rangle N_p$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Sonuç olarak space-like yüzeyler için Weingarten dönüşümünün matrisi diagonalleştirilebilir. Yani, $P \in M$ ve $X \in T_p M$ olmak üzere,

$$S_P\left(X\right) = \left(SX\right)_P$$

olarak tanımlanan

$$S_P : T_P M \to T_P M$$

dönüşümü diagonalleştirilebilir. S_p nin karakteristik değerlerine asli eğrilikler denir ve $k_i\left(p\right)$ ile gösterilir.

Yüzeyin ortalama eğrilik vektör alanını

$$\vec{\mathrm{H}} = \frac{1}{2} \dot{I}z\left(II\right)$$

şeklinde tanımlıyoruz. $\left\{E_1, E_2\right\}$ ortonormal vektör alanlarını alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{H}} &= \frac{1}{2} \dot{I}z\left(II\right) = \frac{1}{2}\left(II\left(E_1, E_1\right) + II\left(E_2, E_2\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\left\langle S\left(E_1\right), E_1 \right\rangle + \left\langle S\left(E_2\right), E_2 \right\rangle\right) N \\ &= \left(-\frac{1}{2} \dot{I}z\left(S\right)\right) N \end{aligned}$$

olur.

$\vec{\mathrm{H}} = HN$ eşitliğini elde etmek için yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = -\frac{1}{2}\dot{I}z(S)$$

olur. Eğer $\vec{\mathrm{H}} \neq 0$ ise bu durumda $\langle \vec{\mathrm{H}}, \vec{\mathrm{H}} \rangle = -\mathrm{H}^2 < 0$ olacağından $\vec{\mathrm{H}}$, future-directed olur.

M space-like yüzeyinin eğrilik tensörü, E_1^3 in R^0 eğriliği sıfır olduğu için Gauss denklemi yardımıyla

$$R(X,Y)Z = -\langle SX, Z \rangle SY + \langle SY, Z \rangle SX$$

şeklinde ifade edilir. Ricci eğriliği

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{2} \langle R(X,E_i)Y, E_i \rangle = \langle SX, SY \rangle + 2H \langle SX, Y \rangle$$

ve skalar eğrilik

$$\rho = \dot{I}z(Ric) = -4H^2 + \dot{I}z(S^2)$$

olur. K, Gauss eğriliği olmak üzere $\rho = 2K$ olduğu için yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = -2H^2 + \frac{\dot{I}z(S^2)}{2}$$

şeklindedir.

4.4.2. Time-like yüzeylerin eğrilikleri

M bir time-like yüzey yani, M üzerindeki indirgenmiş metrik, indeksi 1 olan non-dejenere bir metrik olsun. Yüzey lokal olarak yönlendirilebilirdir. Bu yüzeylerde birim normal vektör alanı olan N artık space-like olur ve $S_1^2 = \{ p \in E_1^3 : \langle p, p \rangle = 1 \}$ tek kanatlı hiperboloid olmak üzere,

$$N : U \subset M \to S_1^2$$

şeklinde tanımlanır. En azından lokal olarak N yi tanımlamak mümkün olduğu için space-like yüzeylerde verilen ifadelere benzer yorumlar yapılabilir. Bu durumda $X, Y \in \aleph(M)$ ve S, bu yüzeyin Weingarten dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla^0_X Y &= \nabla_X Y + II\left(X,Y\right) = \nabla_X Y + \left\langle II\left(X,Y\right),N\right\rangle N \\ &= \nabla_X Y + \left\langle SX,Y\right\rangle N\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada da S, Weingarten dönüşümü self-adjointtir. Yani, $X,Y \in \aleph\left(M\right)$ için

$$\left\langle SX,Y\right\rangle = \left\langle X,SY\right\rangle$$

dir. Time-like yüzeylerin space-like yüzeylerden farkı şekil operatörünün matrisinin diagonalleştirilememesidir. Çünkü pozitif definit olmayan bir metriğe göre self-adjoint bir dönüşüm diagonalleştirilemez. Yani time-like yüzeyler için, bir ortonormal baza göre şekil operatörünün matrisi simetrik olamaz.

Ancak ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği space-like yüzeylerde tanımlandığı gibidir. Yani,

$$H = \frac{1}{2}\dot{I}z\left(II\right) \quad \text{ve} \quad K = Det\left(II\right)$$

şeklindedir. Örneğin, E_2 time-like vektör olacak şekilde $\left\{E_1,E_2\right\}$ ortonormal vektör sistemini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$H = \frac{1}{2}\left(II\left(E_1,E_1\right) - II\left(E_2,E_2\right)\right)$$

ve

$$K = II\left(E_1,E_1\right)II\left(E_2,E_2\right) - II\left(E_1,E_2\right)^2$$

olarak bulunur.

Örnek 4.4.1: Time-like yüzeye bir örnek olarak,

$$S_1^2\left(r\right) = \left\{p \in E_1^3 : \ \left\langle p,p\right\rangle = r\right\}$$

şeklinde tanımlanan $S_1^2\left(r\right)$ uzayını verebiliriz. Bu yüzeyin ortalama ve Gauss eğriliklerini hesaplamak için

$$N : U \subset M \to S_1^2$$

Gauss dönüşümünü ve

$$\left(N_p\right)_* : T_p\left(M\right) \to T_{N(p)}\left(S_1^2\left(r\right)\right)$$

diferensiyel dönüşümünü ele alalım. Burada $N(p)=\dfrac{p}{r}$ olduğundan, $v \in T_p(M)$ olmak üzere,

$$\left(N_p\right)_*(v)=\frac{v}{r}$$

olur. Bu ise, $u,v \in \aleph(M)$ olmak üzere,

$$II_p(u,v)=\frac{1}{r}\langle u,v\rangle$$

olduğu anlamına gelir. Böylece ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği,

$$H=\frac{1}{r}, \qquad K=\frac{1}{r^2}$$

olarak bulunur.

4.5. Eğriliklerin Lokal Hesaplamaları

$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^2 \to E_1^3$ immersiyonu ile verilen space-like yüzeyi göz önüne alalım. Bu yüzeyin parametrik olarak ifadesi $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ olmak üzere, $\{\vec{r}_u,\vec{r}_v\}$ yüzeyin tanjant düzleminin bir bazı olsun. Yüzeyler için *I.* esas formun T_pM üzerindeki metrik olduğunu yani,

$$I_p=\langle\ ,\ \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$
$$I_p(u,v)=\langle u,v\rangle_p$$

şeklinde olduğunu hatırlayalım.

$B=\{\vec{r}_u,\vec{r}_v\}$ bazına göre *I.* esas formun matrisi, $E=\langle\vec{r}_u,\vec{r}_u\rangle$, $F=\langle\vec{r}_u,\vec{r}_v\rangle$, $G=\langle\vec{r}_v,\vec{r}_v\rangle$ olmak üzere, $\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ olur. Metriğin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart,

$$\det(I)=EG-F^2>0$$

olmasıdır. Yüzeyin time-like olması durumunda bu şart,

$$\det(I) = EG - F^2 < 0$$

olur.

$N = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right|}$ şeklinde tanımlanan normal vektör alanını göz önüne alalım. Yüzeyin bir p noktasındaki *II.* esas formu,

$$II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

$$II_p(u,v) = -\left\langle (N_*)_p(u), v\right\rangle = \left\langle S_p(u), v\right\rangle$$

şeklindedir.

$B = \{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ bazına göre *II.* esas formun matrisi,

$$\begin{aligned} e &= -\langle \vec{r}_u, N_u\rangle = \langle N, \vec{r}_{uu}\rangle \\ f &= -\langle \vec{r}_u, N_v\rangle = -\langle \vec{r}_v, N_u\rangle = \langle N, \vec{r}_{uv}\rangle \\ g &= -\langle \vec{r}_v, N_v\rangle = \langle N, \vec{r}_{vv}\rangle \end{aligned}$$

olmak üzere, $\left(h_{ij}\right) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ olur.

Yüzeyin S şekil operatörünün matrisi,

$$(h^i_j) = \left(g_{ik}\right)^{-1}\left(h_{kj}\right) = \left(g^{ik}\right)\left(h_{kj}\right) = \left(g^{ik}h_{kj}\right)$$

yani,

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Şeklindedir. Buradan $K = \det S$ ve $H = \frac{1}{2}\dot{I}zS$ olduğundan space-like yüzey için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği,

$$H = -\frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

$$K = -\frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

şeklinde olur. Yüzeyin time-like olması durumunda verilen formüllerin sadece işareti değişir.

Yüzeyin space-like ve time-like olma durumları arasındaki farkı göstermek için, şekil operatörü diagonal olmayan bir time-like yüzeyi ele alacağız.

Örnek 4.5.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ null eğrisini ele alalım ve bu eğrinin Frenet üçlüsünü $\{\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}\}$ ile gösterelim. Bu eğrinin binormal vektörü birim space-like vektör olacaktır. Ayrıca,

$$X(s,t) = \alpha(s) + t\mathrm{B}(s)$$

şeklinde tanımlanan

$$X : I \times \mathbb{R} \to E_1^3$$

dönüşümünü düşünelim ve $\{X_s, X_t\}$ bazına göre X yüzeyinin şekil operatörünün matrisini hesaplayalım. Bundan önce *I.* ve *II.* esas formun katsayıları verilecektir.

$X_s = \mathrm{T} + t\mathrm{B}' = \mathrm{T} - t\tau\mathrm{N}$ ve $X_t = \mathrm{B}$ olduğu için *I.* esas formun katsayıları,

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} t^2\tau^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin determinantı negatif olduğu için yüzey time-like bir yüzeydir. *II.* esas formun katsayılarını hesaplamak için,

$$X_{ss} = \left(1 - t\tau^2\right)\mathrm{T} + \left(1 - t\tau'\right)\mathrm{N} + t\tau\mathrm{B}, \quad X_{st} = -\tau\mathrm{N}, \quad X_{tt} = 0$$

eşitliklerini kullanacağız. Bu durumda *II.* esas formun katsayıları,

$$\left(h_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 + t\left(-\tau + \tau' + t^2\tau^3\right) & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bu sonuçlardan sonra Weingarten dönüşümünün matrisi ise,

$$S = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ -1 + t\tau\left(-1 + \left(-1 + t\right)t\tau^2\right) + t\tau' & \tau \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matris diagonalleştirilemez. Diğer taraftan bu yüzeyin ortalama eğriliği $H = \tau$ ve Gauss eğriliği $K = \tau^2$ olacaktır.

5. SONUÇ

Bu tezde, E_1^3 Minkowski uzayında yüzeyler teorisine geçmeden önce bazı kavramların tanımları hatırlatılmıştır. İlk olarak indefinit metriğin ve bu metrik yardımıyla semi-Riemann manifoldlarının tanımı ifade edilmiş, semi-Riemann manifolduna bir hazırlık olarak manifoldlar ve Riemann manifoldu hakkında genel bilgilere yer verilmiştir. İndefinit metriğe bir örnek olan Lorentz metriğinin tanımı verildikten sonra bu metrik vasıtasıyla Minkowski uzayının tanımı verilerek bu uzaydaki yüzeyler incelenmiştir.

Minkowski uzayında Öklid uzayından farklı olarak, indefinit metriğin varlığından dolayı önce vektörler, eğriler ve düzlemler, sonra da yüzeyler, time-like, space-like ve null olmak üzere üç farklı gruba ayrılmıştır. Dolayısıyla Minkowski uzayında yüzeyler teorisi incelenirken, yüzeylerle ilgili özellikler bu üç farklı grup altında incelenmiştir. Bu tezde daha çok time-like ve space-like yüzeylerin özellikleri arasındaki bazı farklılıklar ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR

Bishop, R. L., Goldberg, S. I., 1968. Tensör Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, 280, Newyork.

Cengiz, N., 2002. Cebirsel Poliafinor Yapılar ve Liftler. Doktora tezi, Atatürk Üniv. Fen Bilimleri Ens., Erzurum.

Garcia-Rio, E., Kupeli, D. N., 1999. Semi-Riemannian Maps and Their Applications. Kluwer Academic Publishers, 198, Netherlands.

Gezer, A., 2008. Tensör Demetde Lift Teorisinin Bazı Problemleri. Doktora tezi, Atatürk Üni. Fen Bilimleri Ens., Erzurum.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen Ed. Fak. Yayınları, 340, Ankara.

Hicks, N. J., 1971. Nots on Differential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company, 183, London.

İşcan, M., 2008. B-Manifoldların Geometrisi. Doktora tezi, Atatürk Üni. Fen Bilimleri Ens., Erzurum.

Juan, A. A., Jose, M. E., Jose, A. G., 2005. Timelike Surfaces in The Lorentz-Minkowski Space With Prescribed Gaussian Curvature and Gauss Map. Journal of Geometry and Physics, 56(2006).

Kasap, E., Aydemir, İ., Kuroğlu, N., 2006. Ruled Surfaces with Timelike Rulings. Applied Mathematics and Computation, 147(2004).

Kühnel, W., 2005. Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds. American Mathematical Society, 380, USA.

Lee, S., 2006. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature ± 1 in Anti-De Sitter 3-Space $H_1^3(-1)$. Ann. Glob. Anal. Geom., 361-407(2006).

Lopez, R., 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. 67, Brazil.

O’ Neill, B., 1983. Semi Riemann Geometry. Academic Pres, 468, Newyork, London.

Salimov, A., Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi, 326, Erzurum.

Tarakçı, Ö., 2002. Sabit Sırt Uzaklıklı Hiperyüzeyler. Doktora tezi, Ankara Üniv. Fen Bilimleri Ens., Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Semra KAYA 1985 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini yine bu ilde tamamladı. 2002 yılında Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazanıp 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl lisansüstü eğitim almaya hak kazandı ve 2007 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.