ÜNİVALENT FONKSİYONLAR
ve
ALT SINIFLARI

Ender HANCI

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Muhammet KAMALİ

2009

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜNİVALENT FONKSİYONLAR ve ALT SINIFLARI

Ender HANCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2009

Prof. Dr. Muhammet KAMALİ danışmanlığında, Ender HANCI tarafından hazırlanan bu çalışma 28.08.2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Muhammet KAMALİ *İmza:*

Üye : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU *İmza:*

Üye : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN *İmza:*

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ömer AKBULUT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜNİVALENT FONKSİYONLAR ve ALT SINIFLARI

Ender HANCI

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Muhammet KAMALİ

Bu tezde, birim diskte analitik, ünivalent ve normalize edilmiş fonksiyonların sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı ve bükülme (distortion) sınırları incelenmiştir. Ayrıca, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfı tanıtılarak bu sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili bazı bağıntılar verilmiştir.

2009, 65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, ünivalent fonksiyon, yıldızıl (starlike) fonksiyon, konveks fonksiyon, subordination, k-fold simetrik fonksiyon, bükülme (distortion) sınırları.

ABSTRACT

Master Thesis

UNIVALENT FUNCTIONS and SOME SUBCLASSES OF IT

Ender HANCI

Atatürk University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Muhammet KAMALİ

In this thesis, we examine the coefficient and distortion bounds for a function which belongs to class of analytic, univalent and normalized functions in the open unit disc. Also, by introducing the class of starlike and convex functions, we gave some relation for functions in these classes.

2009, 65 pages

Keywords: Analytic function, univalent function, starlike function, convex function, subordination, k-fold symmetric function, distortion bounds.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Muhammet KAMALİ'ye en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Halit ORHAN'a ve Sayın Arş. Gör. Fatma ALTINTAŞ'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman desteklerini esirgemeyen ve bana güvenlerinden ötürü sevgili eşim Sibel HANCI'ya ve anne babama sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim

Ender HANCI
Ağustos, 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER 3
3. MATERYAL ve YÖNTEM 12
3.1. Ünivalent Fonksiyonların Özellikleri 12
3.2. Alan Teoremi 21
3.3. S Sınıfındaki Distortion Sonuçları 26
3.4. Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar 33
3.5. Starlike ve Konveks Fonksiyonlar 40
4. ARAŞTIRMA BULGULARI 51
5. SONUÇ 64
KAYNAKLAR 65
ÖZGEÇMİŞ 66

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
K	Normalize Edilmiş Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
P	U Birim Diskinde Holomorf olan Fonksiyonların Sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel Eksen
S	Normalleştirilmiş Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı
S^*	Normalize Edilmiş Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar Sınıfı
U	Birim Disk
V	Schwarz Fonksiyonlar Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Koebe Fonksiyonu 19

Şekil 3.2. Koebe Fonksiyonu 20

Şekil 3.3. Subordination 35

Şekil 3.4. ∂U_r nin görüntüsü 39

Şekil 3.5. Eğri Üzerinde Konvekslik 42

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından birisi ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir has altkümesini birim diske konform tasvir eden bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çok kez kolaylık sağlar. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, S sınıfına ait fonksiyonlar altında U birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve U birim diskinin $f \in S$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(U)$ nun orijine olan uzaklığının $1/4$ den küçük olamayacağını ispatlamıştır.

1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z \in U$ olmak üzere $f \in S$ fonksiyonu $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $k = 2,3,...$ için $|a_k| \le k$ dır tahmini uzun yıllar matematikçileri devamlı meşgul eden bir problem olarak güncelliğini korumuş ve 1985 yılında Branges tarafından ispatlanmıştır.

Bieberbach teoreminin çok önemli sonuçlarından birisi de S sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ sonucu kullanılarak Koebe tarafından verilen ve bükülme (distortion) teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Bieberbach tahmininin Branges tarafından çözülmesine kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler S sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili ilginç bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlilerinden ikisi yıldızıl (starlike) ve konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir. Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilginç bağıntı ilk kez Alexander tarafından verilmiştir.

Sunulan bu tezde birim diskte analitik, ünivalent ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu S sınıfının ve onun yıldızıl ve konveks alt sınıflarının bazı önemli özellikleri incelenmiştir.

Tezin kuramsal temeller bölümü tezin diğer bölümlerinde kullanılacak bazı önemli tanım ve teoremlerden oluşturulmuştur.

Materyal ve yöntem olarak verilen üçüncü bölümde ünivalent fonksiyonlar tanıtılarak S sınıfına ait fonksiyonlara ait önemli teoremler ispatlarıyla verilmiştir. Ayrıca bu bölümde pozitif reel kısımlı fonksiyonlar ve subordination kavramı üzerinde durulmuştur. Ayrıca S sınıfının S^* ve K ile gösterilen iki alt sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili önemli özellikler kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde k-fold simetrik fonksiyon kavramı verilmiş ve bazı katsayı bağıntıları sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu

Tanım 2.1. (ε-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $B(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının $\varepsilon -$komşuluğu denir.

Tanım 2.2. (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $B(z_0,\varepsilon) \subset S$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.3. (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.4. (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.5. (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \phi$, $S \cap S_2 \neq \phi$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \phi$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.6. (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.7. (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0,\varepsilon) > 0$ sayısı varsa

f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.8. (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri(çevre) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.9. (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.10. (Basit Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ye bir eğri ve $t_1, t_2 \in [a,b]$ olsun. $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ ya basit eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer γ, basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğri denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ diferansiyellenebilir eğri denir. Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ ya düzgün eğri adı verilir.

Tanım 2.11. (Dizi): $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlanmış bir f fonksiyonuna X kümesinde bir dizi denir.

Tanım 2.12 (Yakınsaklık): Kompleks sayıların bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. $\{z_n\}$ dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ olarak gösterilir.

Tanım 2.13. (Seri):

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

ifadesine seri denir. $a_1, a_2, ...$ sayılarına da serinin terimleri adı verilir.

Böyle bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

yazılır.

Tanım 2.14. (Yakınsak Seri): Her bir $a_k, \mathbb{C}$ nin bir öğesi olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

karmaşık sayılar serisini göz önüne alalım. Bu serinin $(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$ olarak tanımlanan S_n kısmi toplamlar dizisi bir s_0 değerine yakınsıyorsa (1) serisi de s_0 değerine yakınsıyor denir. Bu yakınsama $s_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yazılarak belirtilir ve s_0 a serinin toplamı denir.

Tanım 2.15. (Fonksiyon): S, kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere S nin her bir elemanına bir kompleks sayı karşılık getiren kurala kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.16. (Tek Değerli Fonksiyon): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ ye kompleks fonksiyonu verilsin. A daki her bir elemana bir tek kompleks sayı eşleyen kurala (fonksiyona) tek değerli fonksiyon denir.

Tanım 2.17. (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Verilen bir noktada, kompleks değişkenli fonksiyonun türevi ile reel değişkenli fonksiyonun türevi formül olarak aynıdır. Türev formülü aynı olsa bile kompleks değişkenli fonksiyonların türevi ile reel değişkenli fonksiyonların türevi arasında bazı temel farklılıklar vardır. Kompleks fonksiyonların türev tanımı çok zengin ve çok güzel sonuçlar verir. Örneğin, reel değerli bir fonksiyonun “0”noktasındaki türevinin varlığından söz ederken “0” noktasına sadece sağdan ve soldan yaklaşılabilir, ancak kompleks değişkenli fonksiyonlarda “0” noktasına sonsuz yönden yaklaşmak mümkündür. Mesela “0” noktasına seçtiğimiz keyfi bir eğri boyunca da yaklaşabiliriz. Ayrıca kompleks değişkenli analitik bir f fonksiyonunun f' türevi varsa bu f fonksiyonunun her mertebeden türevi vardır diyebiliriz. Fakat bu durum reel değişkenli fonksiyonlarda geçerli değildir. Yani reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada I. mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin,

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, \quad x=0 \end{cases}$$

reel değişkenli fonksiyonunun $x=0$ noktasında

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

şeklinde birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun x=0 noktasında

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

olacağından ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.18. (Holomorf): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $B(z_0,\varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında holomorf (analitiktir) denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S\subset\mathbb{C}$ kümesinin bütün noktalarında analitikse f ye S kümesinde holomorf (analitik) denir.

Tanım 2.19. (Tam Fonksiyon): Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Tanım 2.20. (Ayrık Tekil nokta): Bir $w=f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $B(z_0,r)-\{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 2.21. (Laurent Teoremi): C_0 ve C_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere C_0, r_0 yarıçaplı ve C_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu C_0 ile C_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad (2)$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 2.22. (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.23. (Meromorf fonksiyon): Bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.24. (Maksimum Modül Teoremi): f fonksiyonu A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülü maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.25. (Cauchy-Goursat Teoremi): f fonksiyonu, basit kapalı bir γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ise,

$$\int_{\gamma} f(z)dz=0$$

olur.

Teorem 2.26. (Cauchy İntegral Formülü): f, pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı γ çevresinin üzerinde ve içinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer z_0, γ nın içinde bulunan herhangi bir nokta ise, bu durumda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

dır.

Teorem 2.27. (Cauchy Türev Formülü): $w = f(z)$ fonksiyonu bir γ kapalı çevresinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer z_0, γ nın içinde bir nokta ise,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0,1,2,....)$$

dır.

Teorem 2.28. (Schwarz Lemması): $f : D = \{z : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ analitik, $z \in D$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda, $z \in D$ noktaları için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Üstelik $z_0 \in D$ $(z_0 \neq 0)$ için $|f(z_0)| \leq |z_0|$ ise, $|c| = 1$ özelliğinde bir c sabiti için $f(z) = cz$ şeklindedir. $[$*Başkan*,1996$]$

Tanım 2.29. (Konform Dönüşüm): $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in S$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in S$ noktasında f konform ise f ye S de konformdur denir.

Teorem 2.30. (Konform Dönüşüm): f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 noktasında bir konform dönüşümdür.

Teorem 2.31. (Taylor Teoremi): Eğer f fonksiyonu z_0 merkezli ve R yarıçaplı bir γ çemberinin içinde analitik ise, bu durumda γ eğrisinin içinde bulunan her z noktasında

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

dır.

Teorem 2.32. (Liouville): Eğer kompleks düzlemde bulunan tüm z değerleri için f sınırlı bir tam fonksiyon ise, bu durumda düzlemin tamamında $f(z)$ sabittir.

Teorem 2.33.: Bir D bölgesinde analitik ve ünivalent olan f_n fonksiyonlarının bir dizisini göz önüne alalım. Kabul edelim ki D nin her bir kompakt alt kümesi üzerinde $f_n(z) \to f(z)$ düzgün yakınsamaktadır. Bu durumda f ya ünivalenttir ve ya sabittir. [Duren, 1983]

Teorem 2.34. (Schwarz-Pick): $z \in U$ olmak üzere $|f(z)| < 1$ olacak şekilde $f : U \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu verilsin. Bu durumda $z \in U$ için

$$|f'(z)| \leq \left(1 - |f(z)|^2\right) / \left(1 - |z|^2\right)$$

dir. [Graham ve Varolin, 1996]

Teorem 2.35. (Helly Seçme Teoremi): $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n(a) = 0$ ve $\alpha_n(b) = 1$ olacak şekilde $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde azalmayan fonksiyonların bir dizisi olsun. Buna göre bazı

$\{\alpha_{n_k}\}$ alt dizisi $[a,b]$ kapalı aralığındaki her yerde azalmayan bir α fonksiyonunun yakınsar ve $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli her bir φ fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b \varphi(t)d\alpha_{n_k}(t)=\int_a^b \varphi(t)d\alpha(t)$$

dir. [Duren, 1983]

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Ünivalent Fonksiyonlar ve S Sınıfının Tanıtılması

Tanım 3.1.1. (Kompleks Düzlemde Ünivalentlik): $\mathbb{C}$ kompleks düzlem olsun. $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ifadesi z_o merkezli, r yarıçaplı açık disk olarak adlandırılır. $\overline{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$ nin kapanışı, $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı gösterilecektir. Orijin merkezli r yarıçaplı açık disk $U(0, r)$ ile ve orijin merkezli birim disk de U ile gösterilecektir.

G ,$\mathbb{C}$ nin açık bir alt kümesi olmak üzere, G üzerinde tanımlanan kompleks değerli holomorf (analitik) fonksiyonların kümesi $H(G)$ ile gösterilir.

D, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. $f \in H(D)$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu birebir ise f ye ünivalent denir. D bölgesinde univalent olan fonksiyonların sınıfını da $H_u(D)$ ile göstereceğiz. $H_u(\mathbb{C})$ sınıfı, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere sadece $f(z) = az + b$ biçimindeki fonksiyonları ihtiva eder. Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi için $H_u(D)$ birçok farklı fonksiyon bulundurur.

Her bir $z \in D$ noktası için $f|_v$ ünivalent olacak şekilde $z \in D$ nin bir V komşuluğu varsa $f \in H(D)$ fonksiyonuna lokal ünivalent denir. f holomorf olduğunda lokal ünivalentlik $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ olması şartına denktir.

$z \in D$ olmak üzere $f \in H(D)$ lokal univalent ise, $f'(z)$ türevi f fonksiyonunun z noktasındaki lokal geometrik davranışını tanımlar. $|f'(z)|$ ifadesi uzunluk için lokal büyüme çarpanı ve $\arg f'(z)$ ise lokal dönme çarpanıdır. Ayrıca f dönüşümü; $D \subset \mathbb{R}^2$

bölgesinden $\mathbb{R}^2$ ye bir dönüşüm olarak düşünülüyorsa, bu dönüşümün Jakobiyen determinantı $|f'(z)|^2$ ile verilir.

Lokal univalent bir fonksiyon açıları ve yönleri korur. Bu sebeple; univalent fonksiyona bir konform dönüşüm gözü ile bakılabilir.

Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $f'(z) \neq 0$ olması şartı f fonksiyonunun D bölgesindeki univalentliği için gereklidir fakat yeterli değildir. Örneğin; $f(z) = e^{kz}$ bütün $k \in \mathbb{C}$ ler için U üzerinde lokal ünivalenttir fakat U birim diskinin tamamında ünivalent değildir ($|k| > \pi$ ise). $\mathbb{C}$ nin tamamında geçerli olan univalentlik şartlarını vermek, lokal univalentlik şartlarını vermekten çok daha zordur. Ünivalentlikle ilgili kriterlerden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff' un kriteridir:

- 'f fonksiyonu bir konveks $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde holomorf ve $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.'

Tek değişkenli univalent fonksiyonlar teorisindeki en temel sonuçlardan biri Riemann dönüşüm teoremidir. Riemann dönüşüm teoreminin çok değişkenli fonksiyonlardaki yetersizliği, tek değişkenli ve çok değişkenli kompleks analiz arasındaki kilit farklardan biridir.

Teorem 3.1.2. (Riemann Dönüşüm Teoremi): $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin her basit bağlantılı D has alt kümesi birim disk üzerine konform olarak dönüştürülebilir. Ayrıca $z_0 \in D$, $f(z_o) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olmak şartıyla D den U ya bir tek konform dönüşüm vardır.

$\mathbb{C}$ ve U homeomorf olmasına rağmen Liouville teoreminin bir sonucu olarak $\mathbb{C}$ nin tamamı U birim diskine konform denk olamaz.

D nin sınırı bir kapalı Jordan eğrisi olması durumunda Carathéodory tarafından verilen Riemann dönüşüm teoreminin daha kuvvetli bir versiyonu aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.1.3. (Carathéodory Teoremi): $D \subset \mathbb{C}$ kapalı bir Jordon eğrisi ile sınırlandırılmış basit bağlantılı bölge olsun. O zaman D bölgesinden U üzerine herhangi bir konform dönüşüm, $\overline{D}$ den $\overline{U}$ ye bir homeomorfizme genişletilebilir.

Tanım 3.1.4. (Normalleştirilmiş Analitik Fonksiyonların Sınıfı): Riemann dönüşüm teoremi ile basit bağlantılı bölgelerde çalışmak yerine U birim diski üzerinde çalışmak daha uygundur. $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartını sağlayan U üzerindeki herhangi bir f holomorf fonksiyonuna normalize edilmiştir denir. Bu amaçla, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartı ile normalleştirilen $f \in H_u(U)$ fonksiyonlarının S sınıfını tanımlayabiliriz. g, U üzerinde ünivalent bir fonksiyon ve $h(z) = (g(z) - g(0))/g'(0)$ ise, o zaman $h \in S$ dir. Bu nedenle S sınıfını çalışmak U üzerindeki univalent fonksiyonlar hakkında bilgi verir. Benzer bir şekilde, bazen $0 < r < 1$ olmak üzere, normalize edilmiş $f \in H_u(U_r)$ fonksiyonlarının $S(U_r)$ ile gösterilen sınıfını göz önüne alacağız.

S sınıfındaki bir f fonksiyonu $z \in U$ olmak üzere,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \tag{3}$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir.

$\Delta = \{\zeta \in C : |\zeta| > 1\}$ üzerinde univalent olan ve ∞ da basit kutba sahip normalleştirilmiş φ fonksiyonlarının sınıfını Σ ile göstereceğiz. Bu sınıftaki bir φ fonksiyonu,

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\zeta^n} + \ldots, \qquad |\zeta| > 1 \tag{4}$$

şeklinde bir Laurent açılımına sahiptir.

Böyle bir $\varphi \in \Sigma$ fonksiyonu Δ bölgesini bir bağlantılı kompakt kümenin tümleyeni üzerine dönüştürür.

S ve Σ sınıfları arasında bir bağlantı vardır.

- $f \in S$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ ise $\varphi(\varsigma) = \dfrac{1}{f(1/\varsigma)} + \beta$ şeklinde tanımlanan $\varphi(\varsigma)$ fonksiyonu için

$\varphi \in \Sigma$ dır.

Gerçekten f sadece z=0 noktasında sıfır olduğundan φ nin Δ bölgesinde holomorf ve φ, (4) biçiminde ∞ noktasında bir Laurent açılımına sahip olacağı açıktır. Üstelik f nin ünivalentliği φ nin ünivalentliğini ifade eder.

Tersine

- $\varphi \in \Sigma$ ve $\beta \in \mathbb{C} \setminus \varphi(\Delta)$ ise $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(1/z) - \beta}$ olmak üzere $f \in S$ dir.

Gerçekten $\beta \notin \varphi(\Delta)$ olduğundan f fonksiyonu U üzerinde holomorftur. Ayrıca f ünivalent ve φ nin normalize edilmiş olması f nin normalize edilmiş olduğunu ifade eder. Bu bağıntılar kullanılarak Σ sınıfı için elde edilen özelliklerden S sınıfının özelliklerini çıkarabiliriz.

Bazı elementer dönüşümler altında S sınıfına ait fonksiyonlar yine S sınıfına ait fonksiyonlara dönüştürülür. Bununla ilgili teorem aşağıdadır.

Teorem 3.1.5.: $f \in S$ ve $z \in U$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $\theta \in \mathbb{R}$ ise $z \in U$ olmak üzere,

$$e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k e^{i(k-1)\theta} z^k$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon da S sınıfına aittir ve f fonksiyonunun dönmesi (rotation) olarak adlandırılır.

ii) $r \in (0,1)$ ise $z \in U$ olmak üzere,

$$\frac{1}{r} f(rz) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k r^{k-1} z^k$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon da S sınıfına aittir ve f fonksiyonunun genişlemesi (dilation) olarak adlandırılır.

iii) $w \notin f(U)$ ve $z \in U$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - \dfrac{f(z)}{w}}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda $g \in S$ dir ve g dönüşümü f nin atılmış değer dönüşümü (omitted value transform) olarak adlandırılır.

iv) $z_0, z \in U$ olmak üzere,

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z_0+z}{1+\bar{z}_0 z}\right)-f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)}$$

şeklinde tanımlanan bir g fonksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde $g \in S$ dir ve f nin Koebe dönüşümü olarak adlandırılır.

v) Eğer $n = 2,3,...,$ ise $z \in U$ iken,

$$h(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z\left(\frac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}$$

ile tanımlanan bir h fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda $h \in S$ dir ve f fonksiyonunun n. dereceden kök dönüşümü olarak adlandırılır. Burada

$$\left.\left(\frac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}\right|_{z=0}=1$$

olacak şekilde kuvvet fonksiyonunun dalını seçmeliyiz.

İspat: Biz burada (iii), (iv) ve (v) ifadelerinin ispatını vereceğiz.

iii) $w \notin f(U)$ olduğundan g fonksiyonu U üzerinde holomorfdur ve f fonksiyonunun normalize edilmiş olması g fonksiyonunun da normalize edilmiş olduğunu gösterir. g fonksiyonunun univalentliği f nin ünivalentliğinin bir sonucudur.

iv) $q(z)=\dfrac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ Möbius dönüşümü, U'dan U'ya bir konform dönüşümdür ve bu yüzden foq U' da univalenttir. g fonksiyonunun tanımı g nin normalize edilmiş olduğunu ifade ettiğinden $g \in S$ dir.

v) $f \in S$ olduğundan h fonksiyonu birim disk üzerinde holomorf ve iyi tanımlıdır. Ayrıca β 1'in n. kökü ise $z \in U$ olmak üzere $h(\beta z)=\beta h(z)$ dir. h nin univalent olduğunu gösterelim. $z_1, z_2 \in U$ olmak üzere $h(z_1)=h(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $h^n(z_1)=h^n(z_2)$ ve böylece $f(z_1^n)=f(z_2^n)$ yazılır. f, U üzerinde univalent olduğundan $z_2=\beta z_1$ ve $\beta^n=1$ olacak şekilde bir $\beta \in \mathbb{C}$ vardır. $h(\beta z_1)=\beta h(z_1)$ olduğundan

$$h(z_2)=h(\beta z_1)=\beta h(z_1)=\beta h(z_2)$$

olmalıdır. Bu son eşitlik $\beta=1$ veya $h(z_2)=0$ olmasını gerektirir. Eğer $\beta=1$ ise $z_2=z_1$ dir. Eğer $h(z_2)=0$ ise $z_2=z_1=0$ olmalıdır. Bu da ispatı tamamlar.

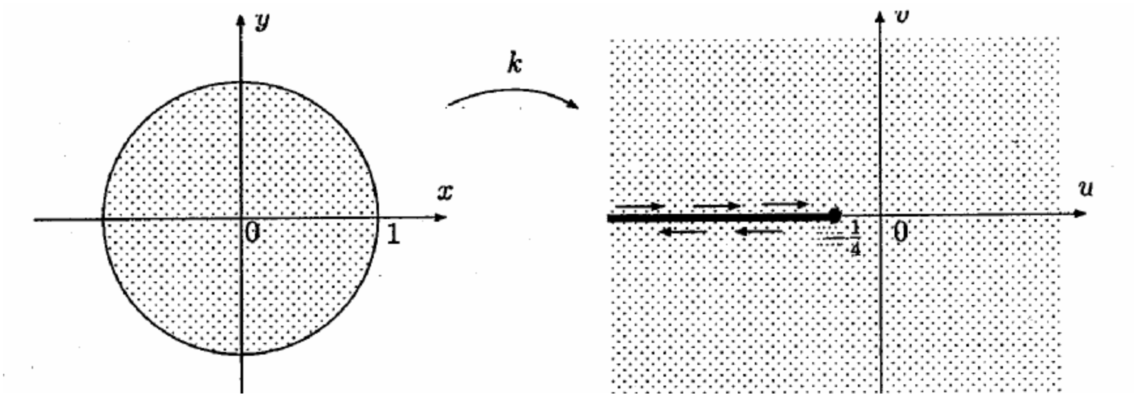
Örnek 3.1.6. (Koebe Fonksiyonu): S sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in U$ olmak üzere,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. $w=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ denirse $wz^2-(2w+1)z+w=0$ yazılır. z ye göre ikinci dereceden bu ifadenin köklerinin varlığı,

$$\Delta = 1+4w \geq 0\,, \qquad (w \in \mathbb{R} \text{ için})$$

olmasıyla mümkün olacağından $w < -\frac{1}{4}$ olamaz. O halde $k(z)$ dönüşümü U birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürür ve ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli bir rol oynar.

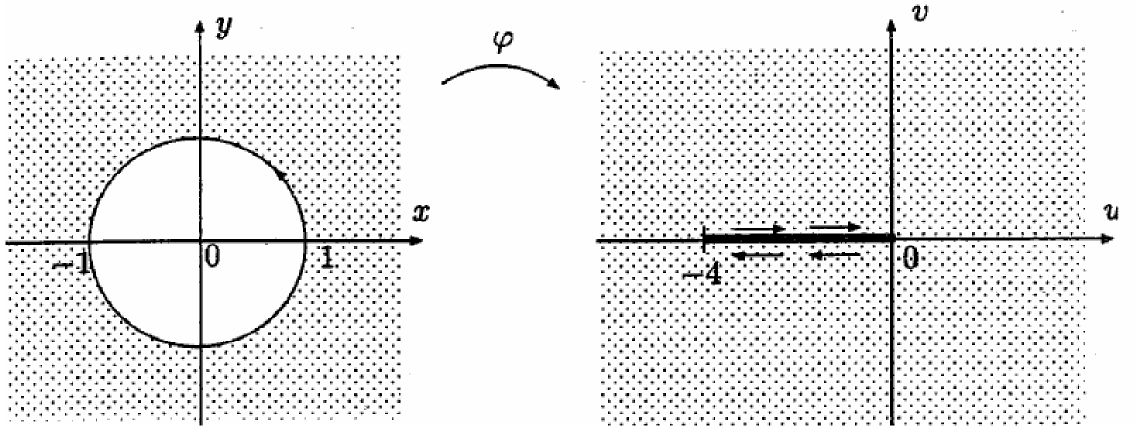


Şekil 3.1.: Koebe Fonksiyonu

Koebe fonksiyonunun bir başka şekli $\varphi(\zeta) = 1/k(1/\zeta)$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon,

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{k\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{\zeta}}{\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^2}} = \frac{\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^2}{\frac{1}{\zeta}} = \zeta\left[1-\frac{2}{\zeta}+\frac{1}{\zeta^2}\right] = \zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}$$

şeklinde yazılabileceğinden $\varphi(\zeta) \in \Sigma$ dır. Bu fonksiyon Δ yı reel eksen boyunca [-4,0] kapalı aralığı çıkarılmış kompleks düzlemin tamamı üzerine dönüştürür. [Graham and Varolin, 1996]



Şekil 3.2.: Koebe Fonksiyonu

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $\theta \in \mathbb{R}$ ve $z \in U$ için,

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları S sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur.

$\alpha \in (0,2]$ ve $z \in U$ olmak üzere $f(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]$ fonksiyonu, "genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu" olarak adlandırılır ve S sınıfına aittir.

$f(z) = \frac{z}{1-z}$ dönüşümünü göz önüne alalım, $w = \frac{z}{1-z}$ denirse $z = \frac{w}{1+w}$ olup $|z| < 1$ için $\left|\frac{w}{1+w}\right| < 1$ yani

$$|w|^2 < |1+w|^2 \Rightarrow w.\overline{w} < (1+w)\left(\overline{1+w}\right) \Rightarrow$$
$$w\overline{w} < 1 + w + \overline{w} + w\overline{w} \Rightarrow w + \overline{w} > -1 \Rightarrow$$

$$2\,\mathrm{Re}\,w > -1 \Rightarrow \mathrm{Re}\,w > -\frac{1}{2}$$

elde edilir. O halde $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu, birim diski $\mathrm{Re}\,w > -1/2$ yarı düzlemi üzerine dönüştüren bir lineer dönüşümdür. Bu dönüşüm için $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ olduğundan normalize edilmiş bir fonksiyon olup S sınıfına aittir.

3.2. Alan Teoremi

Burada alan teoremi olarak bilinen birisi S sınıfına ait diğeri de Σ sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili olan iki teorem ispatsız verilecektir.

İlk teorem f nin Taylor açılımındaki a_n katsayıları ile ilgili olarak $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \in S$ ünivalent fonksiyonu altında birim diskin görüntüsünün alanını ifade eder.

Teorem 3.2.1. (Alan Teoremi): $f : U \to f(U)$ ya $f(0)=0$ ve $f'(0)>0$ olacak şekilde bir konform dönüşüm olsun. Ayrıca $z \in U$, $a_1 \in \mathbb{R}$ ve $a_1 > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(U)$ nun alanı $A(f(U))$ ile gösterilirse,

$$A(f(U)) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \qquad (5)$$

dir.

Örnek 3.2.2.: $f \in S$ olmak üzere $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu $f \in S$ dönüşümü ile U diski bir kardoid eğrisinin içerisine dönüşür. Bu kardoid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanı Teorem 3.2.1. kullanılarak,

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 = \pi\left(1.1 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3\pi}{2} \tag{6}$$

olarak bulunur.

Aynı alanı şu şekilde de hesaplayabiliriz:

$$A(f(U)) = \iint_{f(U)} dxdy = \iint_{U} |f'(z)|dxdy$$

formülü ile

$$f(z) = z - \frac{1}{2}z^2, \; f'(z) = 1 - z \quad \text{ve} \quad |f'(z)|^2 = (1-z)\overline{(1-z)} = 1 - z - \bar{z} + |z|^2$$

olduğu düşünülürse,

$$A(f(U)) = \iint_{U} |f'(z)|^2 dxdy = \iint_{U} \left[1 - (x+iy) - (x-iy) + x^2 + y^2\right]dxdy$$

$$= \iint_{U} \left(1 - 2x + x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right).r.drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\cos\theta \right) d\theta$$

$$= \left(\frac{3}{4}\theta - \frac{2}{3}\sin\theta \right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{4}.2\pi = \frac{3}{2}\pi$$

bulunur.

Teorem 3.2.3. (Alan Teoremi): $\varphi \in \Sigma$ olmak üzere φ, (4) şeklinde bir Laurent açılımına sahipse,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1$$

dir.

Teorem 3.2.4.: φ, (4) ile verilen Σ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. O zaman $|\alpha_1| \leq 1$ dir. $|\alpha_1| = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\theta \in R$ olmak üzere $\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + e^{i\theta}\zeta^{-1}$ biçiminde olmasıdır. Ayrıca $\varphi(\zeta) \neq 0$ ve $|\varsigma| > 1$ ise $|\alpha_0| \leq 2$ dir. $|\alpha_0| = 2$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma \in R$ olmak üzere $\varphi(\zeta) = \zeta + 2e^{i\sigma} + e^{2i\sigma}\zeta^{-1}$ biçiminde olmasıdır.

İspat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa $|\alpha_1| \leq 1$ olacağı açıktır. $|\alpha_1| = 1$ ise bu eşitsizlik $k \geq 2$ iken $\alpha_k = 0$ olmasını gerektirir.

$|\zeta|>1$ için $\varphi(\zeta)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. $|z|<1$ için $f(z)=\dfrac{1}{\varphi\left(1/z\right)}$ fonksiyonu S sınıfına aittir. Ayrıca $g(z)=\sqrt{f(z^2)}$ ile tanımlanan g fonksiyonu da Teorem 3.1.5. den dolayı S sınıfına aittir. Böylece $|\varsigma|>1$ olmak üzere,

$$\psi(\varsigma)=\frac{1}{g(1/\varsigma)}=\varsigma\left(\frac{\varphi(\varsigma^2)}{\varsigma^2}\right)^{1/2}$$

ile tanımlanan ψ fonksiyonu Σ sınıfına aittir. Üstelik $|\varsigma|>1$ iken $[\psi(\varsigma)]^2=\varphi(\varsigma^2)$ dir. $|\varsigma|>1$ iken ψ nin,

$$\psi(\varsigma)=\varsigma+\beta_0+\frac{\beta_1}{\zeta}+\dots \qquad (7)$$

şeklinde bir Laurent açılımına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda (7) eşitliğinin her iki yanının karesi alınarak $|\varsigma|>1$ için,

$$[\psi(\varsigma)]^2=\varsigma^2+2\beta_0\varsigma+(\beta_0^2+2\beta_1)+\dots \qquad (8)$$

ve (4) eşitliğinde ς yerine ς^2 yazılarak

$$\varphi(\varsigma^2)=\varsigma^2+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\varsigma^2}+\dots \qquad (9)$$

elde edilir. $[\psi(\varsigma)]^2=\varphi(\varsigma^2)$ eşitliği göz önüne alınırsa katsayıların mukayesesinden $2\beta_0=0\Rightarrow\beta_0=0$ ve $\alpha_0=\beta_0^2+2\beta_1$ ifadesinden $\alpha_0=2\beta_1$ dir. $\psi\in\Sigma$ olduğundan $\dfrac{1}{\varsigma}$

nin katsayısı olan α_1 için $|\alpha_1| \leq 1$ olmasını gerektirir ki buradan $|\beta_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_0 / 2| \leq 1$ veya $|\alpha_0| \leq 2$ elde edilir.

$\sigma \in R$ olmak üzere $|\alpha_0| = 2$ veya $|\beta_1| = 1$ eşitliğinin gerçekleşmesi için gerekli ve yeterli şart $\psi(\varsigma) = \varsigma + \dfrac{e^{i\sigma}}{\varsigma}$ olmasıdır. Bu durumda $\varphi(\varsigma^2) = [\psi(\varsigma)]^2 = \varsigma^2 + \dfrac{e^{2i\sigma}}{\varsigma^2} + 2e^{i\sigma}$ ve böylece $\varphi(\varsigma) = \varsigma + \dfrac{e^{2i\sigma}}{\varsigma} + 2e^{i\sigma}$ dır. Bu durum teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.5.: $z \in U$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ile verilen $f \in S$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ dir.

Eşitlik hali $z \in U$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun dönmeleri için yani $k_\theta(z) = \dfrac{z}{\left(1 - e^{i\theta} z\right)^2}$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerlidir.

İspat: $f \in S$ olduğundan $|\varsigma| > 1$ olmak üzere $\varphi(\varsigma) = 1/f(1/\varsigma)$ ile tanımlanan φ fonksiyonu Σ sınıfına aittir. Ayrıca $|\varsigma| > 1$ için $\varphi(\varsigma) \neq 0$ dır. φ fonksiyonu $|\varsigma| > 1$ için

$$\varphi(\varsigma) = \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varsigma} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(\dfrac{1}{\varsigma}\right)^k} = \frac{\varsigma}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \dfrac{1}{\varsigma^{k-1}}} = \frac{\varsigma}{1 + \dfrac{a_2}{\varsigma} + \dfrac{a_3}{\varsigma^2} + \dots} = \varsigma - a_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{\varsigma^k}$$

şeklinde bir Laurent açılımına sahiptir. Teorem 3.2.4. den $|a_2| \leq 2$ olup $\sigma \in R$ için $\varphi(\varsigma) = \varsigma - 2e^{i\sigma} + \dfrac{e^{2i\sigma}}{\varsigma}$ olması halinde eşitlik vardır. Bu durumda $z \in U$ için

$$f(z)=\frac{1}{\varphi(1/z)}=\frac{1}{\frac{1}{z}-2e^{i\sigma}+ze^{2i\sigma}}$$

$$=\frac{z}{1-2ze^{i\sigma}+z^2e^{2i\sigma}}=\frac{z}{\left(1-ze^{i\sigma}\right)^2} \tag{10}$$

bulunur.

Tersine, eğer f Koebe fonksiyonunun bir dönmesi ise o zaman a_2 katsayısının $|a_2|=2$ şartını sağlayacağı açıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.6. (Bieberbach Tahmini): $z\in U$ olmak üzere $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ biçiminde S sınıfına ait bir $f\in S$ fonksiyonu için k=2,3,…, iken $|a_k|\le k$ eşitsizliği vardır. $k\ge 2$ iken $|a_k|=k$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmeleri olmasıdır.

3.3. S Sınıfındaki Bükülme (Distortion) Sonuçları

S sınıfına ait fonksiyonlar için Teorem 3.2.5. de verilen $|a_2|\le 2$ tahmini, bu sınıftaki fonksiyonlar hakkındaki bazı önemli teoremlerin esasını oluşturur. Burada ilk olarak Koebe ¼ teoremini ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 3.3.1.: U birim disk olmak üzere $f\in S$ iken $f(U)\supseteq U_{1/4}$ dür. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun dönmeleri için kesindir. Üstelik $\bigcap_{f\in S} f(U)=U_{1/4}$ dür.

İspat : $w_0 \notin f(U)$ olacak şekilde $w_0 \in \mathbb{C}$ sayısının varlığı kabul edelim. İspatlamalıyız ki $|w_0| \geq 1/4$ dir. Ayrıca $|w_0| = 1/4$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart f nin Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmasıdır. Bunun için $z \in U$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)}$$

şeklinde tanımlanan $g : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 3.1.5. in (iii). kısmından dolayı $g \in S$ dir ve g fonksiyonu $z \in U$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)} &= \frac{w_0\left[z + a_2 z^2 + \ldots\right]}{w_0 - \left[z + a_2 z^2 + \ldots\right]} \\ &= w_0\left\{\frac{z}{w_0} + \frac{1}{w_0}\left(a_2 + \frac{1}{w_0}\right)z^2 + \ldots\right\} \\ &= z + \left(a_2 + \frac{1}{w_0}\right)z^2 + \ldots \end{aligned}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. $g \in S$ olduğundan z^2 li terimin katsayısının modülünün 2 den büyük olamayacağı düşünülürse $\left|a_2 + \frac{1}{w_0}\right| \leq 2$ yazılır. Böylece,

$$\left|a_2 + \frac{1}{w_0}\right| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{w_0}\right| - |a_2| \leq 2$$

yazılabileceğinden,

$$\left|\frac{1}{w_0}\right| \leq |a_2| + 2$$

elde edilir. Böylece $|a_2| \leq 2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left|\frac{1}{w_0}\right| \leq 4 \Rightarrow |w_0| \geq \frac{1}{4} \tag{11}$$

olur.

Diğer yandan $|w_0| = 1/4$ olması için gerek ve yeter şart $|a_2| = 2$ ve $\left|a_2 + \frac{1}{w_0}\right| = 2$ olmasıdır. Bu durumda f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmalıdır.

$\bigcap\limits_{f \in S} f(U) = U_{1/4}$ olduğunu göstermek için $\theta \in \mathbb{R}$ ve $z \in U$ olmak üzere,

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$$

ile verilen Koebe fonksiyonunun dönmelerini göz önüne alalım. $\partial U_{1/4}$ çemberinin her bir noktası $k_\theta(U)$ bölgelerinin her birinin sınır noktasıdır ve böylece $\bigcap\limits_{\theta \in \mathbb{R}} k_\theta(U) = U_{1/4}$ olur. Bu nedenle $\bigcap\limits_{f \in S} f(U) = U_{1/4}$ olmak zorundadır. O halde $U_{1/4}$ diski S sınıfındaki her bir fonksiyonun görüntüsünde ihtiva edilen orijin merkezli en geniş disktir.

Bieberbach teoreminin çok önemli bir başka sonucu S sınıfındaki bir fonksiyonun a_2 katsayısı ile bağlantılı olan ve Koebe bükülme (distortion) teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremdir.

Teorem 3.3.2.: $f \in S$ olsun. Bu durumda bütün $z \in U$ lar için

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \tag{12}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{13}$$

ve

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{14}$$

eşitsizlikleri kesindir.

$z \neq 0$ olmak üzere bu tahminlerin her birindeki eşitlik halinin olması için gerek ve yeter şart f nin Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi olmasıdır.

Biz burada sadece (13) eşitsizliğinin ispatını vereceğiz.

İspat: z sabit ve $r \in (0,1)$ olmak üzere $|z| = r$ olsun $\varsigma \in U$ olmak üzere,

$$g(\varsigma) = \frac{f\left(\dfrac{\varsigma + z}{1+\bar{z}\varsigma}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \varsigma + b_2\varsigma^2 + \ldots \tag{15}$$

ile verilen f nin g Koebe dönüşümünü göz önüne alalım. Bu fonksiyon S sınıfına aittir. Ayrıca (15) den türev alarak

$$g'(\varsigma)=\frac{1}{\left(1-|z|^2\right)f'(z)}\left\{f'\left(\frac{\varsigma+z}{1+\bar{z}\varsigma}\right).\frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}\varsigma)^2}\right\}=\frac{1}{f'(z)}f'\left(\frac{\varsigma+z}{1+\bar{z}\varsigma}\right).\frac{1}{(1+\bar{z}\varsigma)^2}$$

ve

$$g''(\varsigma)=\frac{1}{f'(z)}\left\{f''\left(\frac{\varsigma+z}{1+\bar{z}\varsigma}\right).\frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}\varsigma)^4}-\frac{2\bar{z}}{(1+\bar{z}\varsigma)^3}.f'\left(\frac{\varsigma+z}{1+\bar{z}\varsigma}\right)\right\}$$

yazılır ve $g''(0)$ hesaplanırsa,

$$g''(0)=\frac{1}{f'(z)}\left\{f''(z).\left(1-|z|^2\right)-2\bar{z}.f'(z)\right\}\Rightarrow$$

$$g''(0)=\left\{\frac{f''(z)}{f'(z)}.\left(1-|z|^2\right)-2\bar{z}\right\} \tag{16}$$

elde edilir. $g(\varsigma)=\varsigma+b_2\varsigma^2+\ldots$ ifadesinin ikinci türevinin $\varsigma=0$ da ki değeri,

$$g''(0)=2b_2 \tag{17}$$

olur (16) ve (17) ifadelerinin eşitliğinden,

$$2b_2=\left\{\frac{f''(z)}{f'(z)}.\left(1-|z|^2\right)-2\bar{z}\right\}\Rightarrow$$
$$b_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{f''(z)}{f'(z)}.\left(1-|z|^2\right)-2\bar{z}\right\}$$

bulunur. S sınıfına ait fonksiyonlar için $|b_2|\leq 2$ olması gerektiğinden,

$$\left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\bar{z}\right|\leq 4$$

elde edilir.

Bu son eşitsizliğin her iki yanı $|z|$ ile çarpılır ve $|z|=r$ olduğu düşünülürse

$$\left|\left(1-r^2\right).\frac{zf''(z)}{f'(z)}-2\bar{z}z\right|\leq 4|z|$$

ve buradan da,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}$$

sonucu bulunur. $z\in\mathbb{C}$ iken $|\operatorname{Re} z|\leq|z|$ eşitsizliği vardır. Buna göre,

$$\left|\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right)\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}\Rightarrow$$

$$-\frac{4r}{1-r^2}\leq\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right)\leq\frac{4r}{1-r^2}\Rightarrow$$

$$\frac{2r^2}{1-r^2}-\frac{4r}{1-r^2}\leq\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{4r}{1-r^2}+\frac{2r^2}{1-r^2}\Rightarrow$$

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\leq\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{4r+2r^2}{1-r^2}\qquad(18)$$

elde edilir.

Diğer yandan $f'(z)\neq 0$ ve $f'(0)=1$ olduğundan, $\log f'(z)\big|_{z=0}=0$ olacak şekilde $\log f'(z)$ nin bir analitik dalı vardır. $z=re^{i\theta}$ için,

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f'(z)\right| = \frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\{\log f'(z)\} = \frac{1}{r}\operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \qquad (19)$$

yazabiliriz. (18) ve (19)' u kullanarak,

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log\left|f'(re^{i\theta})\right| \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \qquad (20)$$

eşitsizliğini elde ederiz. θ sabit tutulur ve $f'(0)=1$ olduğu göz önüne alınırsa (20) eşitsizliğinin her üç yanının integralinden,

$$\log\left[\frac{1-r}{(1+r)^3}\right] \leq \log\left|f'(re^{i\theta})\right| \leq \log\left[\frac{1+r}{(1-r)^3}\right] \qquad (21)$$

bulunur. Böylece bu son eşitsizlikten de,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \left|f'(re^{i\theta})\right| \leq \left[\frac{1+r}{(1-r)^3}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq \left|f'(z)\right| \leq \left[\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\right] \qquad (22)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sınırlar kesindir.

Teorem 3.3.3.: H(U) nun bir alt sınıfı olarak S sınıfı kompaktır.

İspat: (12) deki üst sınırdan S sınıfının lokal uniform sınırlı bir aile olduğu ve bu nedenle de S nin bir normal aile olduğu söylenebilir. S nin kompakt olduğunu göstermek için S nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $k \to \infty$ iken $f_k \to f$ (U da lokal üniform) olacak şekilde S de $\{f_k\}_{k \in N}$ dizisini göz önüne alalım. Teorem 2.33. göz önüne alındığında, f ya ünivalent ya da sabit olmalıdır. $f(0) = 0$ ve $f'(0) = \lim_{k \to \infty} f_k'(0) = 1$ olduğundan f ünivalent olmalıdır. Yani $f \in S$ dir. S kapalı ve sınırlı olduğundan kompaktır.

3.4. Pozitif Reel Kısıma Sahip Fonksiyonlar

Tanım 3.4.1. (Carathéodory Sınıfı ve Subordination): $z \in U$ olmak üzere $p(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ olacak şekilde U birim diskinde holomorf olan fonksiyonların sınıfı P ile gösterilsin. Bu sınıf genellikle Carathéodory sınıfı olarak adlandırılır.

$z \in U$ olmak üzere $p(z) = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonu P sınıfına aittir. Bu fonksiyon U birim diskinden sağ yarı düzleme konform bir dönüşümdür ve dolayısıyla bu fonksiyon P sınıfında temel bir rol oynar. Bu rol S sınıfında Koebe fonksiyonunun rolüne benzerdir. Ayrıca P sınıfı konveks bir kümedir ve H(U) sınıfının kompakt bir alt kümesidir.

V Schwarz fonksiyonlarının sınıfını göstersin, yani $\varphi \in V$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi \in H(U)$, $\varphi(0) = 0$ ve U birim diskinde $|\varphi(z)| < 1$ olmasıdır. Diğer bir değişle V, Schwarz lemmasındaki hipotezleri sağlayan U birim diskinde holomorf olan fonksiyonlardan oluşur.

Açık bir şekilde P ve V sınıfları arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$p \in \mathrm{P}$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi \in V$ olmak üzere $p = \dfrac{1+\varphi}{1-\varphi}$ şeklinde olmasıdır. Bu ilişkiden dolayı P sınıfının belirli özellikleri V sınıfının sahip olduğu özelliklerden çıkartılabilir ve bu ifadenin tersi de geçerlidir.

$f, g \in H(U)$ fonksiyonları verilsin, $f = g \circ \varphi$ olacak şekilde bir $\varphi \in V$ fonksiyonu varsa f fonksiyonu, g fonksiyonuna 'subordinate'dir denir ve $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

Buna göre, $f \prec g$ ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ dur. Schwarz lemmasından, $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ ve her $r \in (0,1)$ için $f(U_r) \subseteq g(U_r)$ olduğu anlaşılır.

Özel olarak $f \prec g$ ise $r \in (0,1)$ olmak üzere,

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|$$

eşitsizliğini elde ederiz.

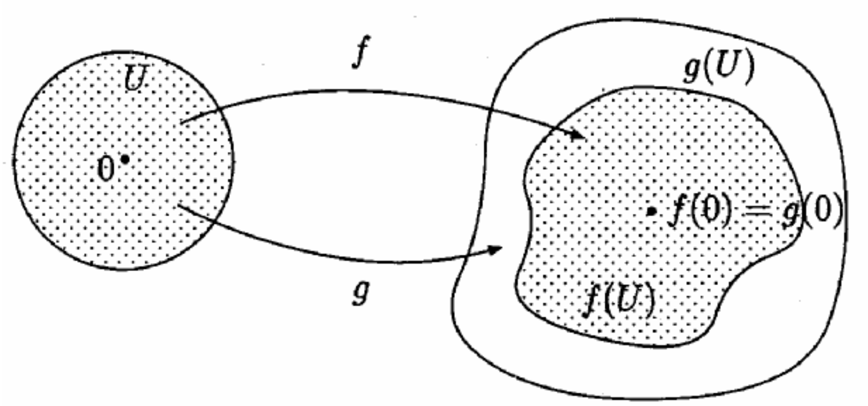
Ayrıca Schwarz-Pick lemmasını kullanarak, $f \prec g$ ise $0 \leq r < 1$ olmak üzere

$$\max_{|z| \leq r} \left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r} \left(1 - |z|^2\right) |g'(z)|$$

olduğu sonucuna varırız.

g fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şartın $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ olduğu açıktır. Bu şartlar altında, her $r \in (0,1)$ için $f(U_r) \subseteq g(U_r)$ olması subordination prensibi olarak bilinir.

Özel olarak, $p(0)=1$ olmak üzere U birim diskinde holomorf bir p fonksiyonunun P sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart U birim diskinde $p(z)\prec\frac{1+z}{1-z}$ olmasıdır. Ayrıca $\varphi\in H(U)$, $\varphi(0)=0$ ise, φ fonksiyonunun V sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart U birim diskinde $\varphi(z)\prec z$ olmasıdır.



Şekil 3.3.: Subordination

Teorem 3.4.2.: $f\in H(U)$ olsun. U birim diskinde $\mathrm{Re}(f(z))\geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mu(2\pi)-\mu(0)=\mathrm{Re}\,f(0)$ ve $z\in U$ olmak üzere,

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t)+i\,\mathrm{Im}\,f(0) \tag{23}$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonu olmasıdır.

İspat: İlk olarak f fonksiyonunun (23) eşitliğini sağladığını kabul edelim. μ, $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon ve integral pozitif reel kısma sahip oluğundan

$$\mathrm{Re}\,f(z)=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t)\geq 0 \tag{24}$$

olduğu açıktır.

Tersine, U birim diskinde $\operatorname{Re} f(z) > 0$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmaksızın U birim diskinde $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $b_n = \operatorname{Re} a_n$, $c_n = \operatorname{Im} a_n$, $n = 0,1,....$ olsun. $0 < r < 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere $\mu(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) d\theta$ ise $\mu(r,t)$ fonksiyonu $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyondur ve $\mu(r,2\pi) = b_0$ dır. Ayrıca hesaplamalar sonucunda,

$$\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} d\mu(r,t) = \begin{cases} a_n \dfrac{r^n}{2}, & n = 1,2,... \\ b_0, & n = 0 \end{cases}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$f(z) = \int_0^{2\pi} d\mu(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} d\mu(r,t) z^n + ic_0 \tag{25}$$

dir. Son integraldeki seri t de düzgün yakınsadığından $|z| < r$ için

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-it} z}{r} \right)^n \right] d\mu(r,t) + ic_0 \tag{26}$$

şeklinde yazılabilir.

Seri toplamı

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,d\mu(r,t)+ic_0 \tag{27}$$

eşitliğini verir.

$\{\rho_n\}_{n\in N}$ dizisi $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=1$ olacak şekilde $(0,1)$ aralığında artan bir dizi ve $t\in[0,2\pi]$ olmak üzere $\mu_n(t)=\mu(\rho_n,t)$ olsun. Buna göre $\{\mu_{nk}\}_{k\in N}$, $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan fonksiyonların bir dizisidir ve Helly seçme teoreminden $\{\mu_n\}_{n\in N}$ alt dizisi ve $k\to\infty$ iken $\mu_{nk}\to\mu$ ve $[0,2\pi]$ aralığındaki her bir sürekli h fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}h(t)d\mu_{nk}(t)=\int_0^{2\pi}h(t)d\mu(t)$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonu bulunabilir.

$k\to\infty$ iken sabit bir z noktası için t de

$$\frac{\rho_{nk}e^{it}+z}{\rho_{nk}e^{it}-z}\to\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$$

yakınsamasının düzgün olmasından dolayı

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_{nk}e^{it}+z}{\rho_{nk}e^{it}-z}\,d\mu_{nk}(t)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t)$$

olduğu görülür.

(27) ve yukarıdaki eşitlikten (23) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4.3.: $p \in H(U)$ fonksiyonu $p(0)=1$ eşitliğini sağlasın. Buna göre $p \in \mathrm{P}$ olması için gerek ve yeter şart U birim diskinde

$$p(z)=\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, d\mu(t) \tag{28}$$

olacak şekilde ve $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ olmak üzere $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonunun olmasıdır. [Herglotz, 1911]

Herglotz formülü, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar için aşağıdaki bükülme (distortion) sonuçlarını verir.

Teorem 3.4.4.: $p \in \mathrm{P}$ ve $|z| = r < 1$ ise

$$\frac{1-r}{1+r} \le |p(z)| \le \frac{1+r}{1-r}, \tag{29}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \le \operatorname{Re} p(z) \le \frac{1+r}{1-r}, \tag{30}$$

$$|p'(z)| \le \frac{2\operatorname{Re} p(z)}{1-r^2} \le \frac{2}{(1-r)^2} \tag{31}$$

eşitsizlikleri vardır. Bu tahminler kesindir.

İspat: Birinci ve ikinci eşitsizlikler (28) bağıntısının basit sonuçlarıdır. (31) ispatlamak için (28)' ün her iki tarafının z ye göre diferansiyellenmesi yeterlidir. Buna göre

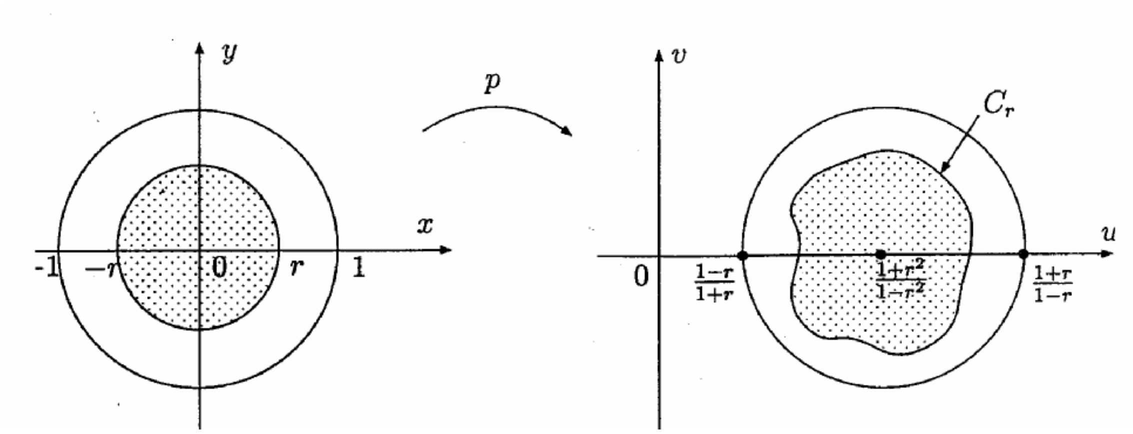
$$|p'(z)| \leq \int_0^{2\pi} \frac{2d\mu(t)}{\left|1 - ze^{-it}\right|^2} = \frac{2}{1-r^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} d\mu(t) = \frac{2\,\mathrm{Re}\, p(z)}{1-r^2}$$

elde edilir. Son olarak bu eşitliğin bir $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ olacak şekilde $p(z) = \dfrac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, $z \in U$ için bu bağıntıların her biri için doğru olduğu görülür.

Uyarı 3.4.5.: (28) formülünü kullanarak $|z| = r < 1$ olmak üzere her bir sabit z noktası ve $p \in \mathrm{P}$ için $p(z)$ lerin $\dfrac{1+r^2}{1-r^2}$ merkezli ve $\dfrac{2r}{1-r^2}$ yarıçaplı kapalı disk içerisinde kaldığı kolayca görülür. Buna göre $p \in \mathrm{P}$ ise $|z| = r$ olmak üzere

$$\left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2},$$

dir.



Şekil 3.4.: ∂U_r nin Görüntüsü

Ayrıca Herglotz formülü P sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için aşağıdaki sınırları verir. Bu sonuç Carathéodory tarafından elde edilmiştir.

Teorem 3.4.6.: $z \in U$ olmak üzere $p \in \mathrm{P}$ fonksiyonu, $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ şeklinde bir kuvvet seri açılımına sahipse her $n = 1,2,....$ için $|p_n| \leq 2$ dir. Bu tahminler kesindir. [Carathéodory, 1907]

İspat: $p \in \mathrm{P}$ olduğundan, $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ ve

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} d\mu(t)$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonu vardır. İntegralin binomial açılımı her $n = 1,2,....$ için

$$p_n = 2\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} d\mu(t)$$

eşitliğini verir. Buna göre, iddia edildiği gibi $|p_n| \leq 2$ dir. Açık bir şekilde $|\lambda| = 1$ olmak üzere $p(z) = \dfrac{1 + \lambda z}{1 - \lambda z}$ için $|p_n| = 2$, $n = 1,2,....$ dir.

Sonuç 3.4.7.: P kompakt bir kümedir.

3.5. Starlike ve Konveks Fonksiyonlar:

Bu bölümde starlike ve konveks fonksiyonlar olarak bilinen S sınıfının çok önemli iki alt sınıfını inceleyeceğiz. Bunun için ilk olarak starlike ve konveks fonksiyonları tanımlayalım.

Tanım 3.5.1.: Ω**,** $\mathbb{C}$ de bir küme olsun. $w_0 \in \Omega$ olmak üzere Ω ya ait her w noktasını w_0 noktasına birleştiren doğru tamamen Ω nın içerisinde kalıyorsa Ω ya w_0 sabit noktasına göre yıldızıldır (starlike) denir.

$w_1, w_2 \in \Omega$ olmak üzere Ω ya ait bütün w_1, w_2 noktalarını birleştiren doğrular tamamen Ω da kalıyorsa, Ω ya konvekstir denir.

Bu tanımlardan sonra şunu söyleyebiliriz: $\Omega \subset \mathbb{C}$ konveks olması için gerek ve yeter şart Ω nın bütün noktalarına göre yıldızıl (starlike) olmasıdır.

$r \in (0,1]$, $f \in H(U_r)$ ve $z_0 \in U_r$ olsun. Eğer f, U_r de ünivalent ve $f(U_r)$, $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl (starlike) bir bölge ise f fonksiyonuna z_0 noktasına göre U_r de yıldızıldır (starlike) denir. f fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasına göre yıldızıllığından (starlike) bahsedilirken f fonksiyonuna yıldızıldır (starlike) deyimi kullanılacaktır. Eğer f fonksiyonu U_r de ünivalent ve $f(U_r)$, $\mathbb{C}$ de bir konveks bölge ise f fonksiyonuna U_r de konveksdir denir. $S^*(U_r)$ ile U_r de normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı, $K(U_r)$ ile U_r de normalize edilmiş konveks fonksiyonlar sınıfı gösterilir. U birim diskinde normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*(U)$ ile ve normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı da $K(U)$ ile gösterilir. $S^*(U)$ ve $K(U)$ yerine sadece S^* ve K kullanacağız.

Tanım 3.5.2. (Bir Eğri Üzerinde Yıldızıllık ve Konvekslik): Γ_z üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu altında Γ_z nin görüntüsünü göz önüne alalım. Γ_z bir çember, bir doğru parçası veya bir başka eğri olabilir. Kabul edelim ki $a \le t \le b$ olmak üzere Γ_z,

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

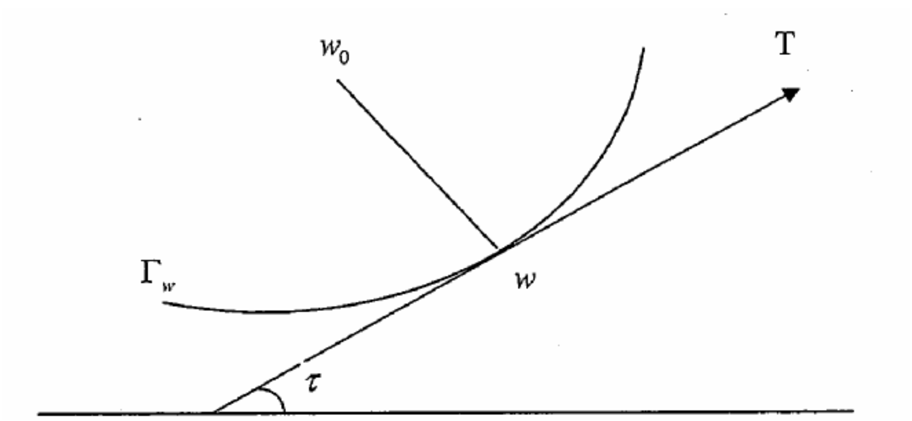
şeklinde parametrelenmiş bir düzgün eğri olsun. Yani,

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0 \qquad a \leq t \leq b$$

olduğunu kabul edelim. Burada $x(t)$ ve $y(t)$ reel değerli fonksiyonlardır. Γ_z yönlü bir eğridir ve yönü t artarken belirlenir. Γ_z üzerinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu altında Γ_z nin görüntüsü Γ_w olsun ve $w_0 \notin \Gamma_w$ olarak alınsın.(Şekil(3.5.)) Eğer $\arg(w - w_0)$ fonksiyonu t nin azalmayan bir fonksiyonu ise, yani

$$\frac{d}{dt}\arg(w - w_0) \geq 0, \quad t \in [a,b] \tag{32}$$

oluyorsa Γ_w eğrisine w_0 noktasına göre yıldızıldır denir.



Şekil 3.5.: Eğri Üzerinde Konvekslik

Bu (32) eşitsizliğini şu şekilde yazabiliriz. Yani (32) eşitsizliğinin sol tarafı,

$$\frac{d}{dt}\arg(w - w_0) = \frac{d}{dt}\operatorname{Im}\ln(w - w_0) = \operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dt}\ln(w - w_0)\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{d}{dz}\ln(w-w_0)\frac{dz}{dt}\right) = \mathrm{Im}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\frac{dz}{dt}\right\}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece $\Gamma(z): z = z(t)$ eğrisinin $f(z)$ altındaki görüntüsünün w_0 noktasına göre yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}z'(t)\right\} \geq 0, \quad t \in [a,b]$$

olmasıdır diyebiliriz.

Eğer Γ_w yayının teğetinin argümanı t nin azalmayan bir fonksiyonu ise Γ_w yayına konvekstir denir. Γ_z nin teğetinin yönü $\arg z'(t)$ dir ve dönüşüm bu teğet vektörünü bir $\arg f'(z)$ açısı boyunca döndürür. Böylece Γ_w eğrisinin bir konveks eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\{\arg(z'(t).f'(z))\} \geq 0, \quad t \in [a,b]$$

olmasıdır. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki ifade

$$\frac{d}{dt}[\arg(z'(t).f'(z))] = \frac{d}{dt}\mathrm{Im}[\ln z'(t) + \ln f'(z)]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{d}{dz}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\frac{dz}{dt}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right]$$

şeklinde yazabiliriz. O halde $\Gamma_z : z = z(t)$ üzerinde $f'(z) \neq 0$ olmak üzere Γ_z eğrisinin $f(z)$ altındaki görüntüsünün konveks eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)}+\frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)\right]\geq 0, \qquad t\in[a,b]$$

olmasıdır.

Sonuç 3.5.3.: Tanım 3.5.2. deki Γ_z eğrisini $C_R:|z|=R$ çemberi olarak seçelim. Bu durumda $0\leq t\leq 2\pi$ olmak üzere $z=\mathrm{Re}^{it}$ olarak alınırsa $z'(t)=i.\mathrm{Re}^{it}=iz$ ve $z''(t)=-\mathrm{Re}^{it}=-z$ olacağından,

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{izf'(z)}{f(z)-w_0}\right\}=\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)-w_0}\right]\geq 0$$

ve

$$\operatorname{Im}\left[\frac{-z}{iz}+\frac{f''(z)}{f'(z)}iz\right]=\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\geq 0$$

elde edilir.

Aşağıdaki iki teorem yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için analitik karakterizasyon olarak bilinir.

Teorem 3.5.4.: $f:U\to C$ bir holomorf fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0)\neq 0$ ve $z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$$

olmasıdır. [Graham and Kohr, 2003]

Teorem 3.5.5.: $f : U \to \mathbb{C}$ bir holomorf fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve $z \in U$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

olmasıdır. [Graham and Kohr, 2003]

Teorem 3.5.4. ve 3.5.5. in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem S^* ve K sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 3.5.6.: f, U üzerinde normalize edilmiş bir holomorfik fonksiyon ve $z \in U$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır.

İspat : $f \in K$ olsun. İspatlamalıyız ki $g \in S^*$ dır. $f \in K$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

yazılır. $g(z) = zf'(z)$ ise $g'(z) = f'(z) + zf''(z)$ yazılabileceğinden,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = z\frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)} = \frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

elde edilir.

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)>0$$

olup, $g \in S^*$ dır.

Şimdi de $g \in S^*$ olduğunu kabul ederek $f \in K$ olduğunu gösterelim. $g \in S^*$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)>0$$

yazılır. $g(z)$ nin tanımı kullanılırsa

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)+zf''(z)}{zf'(z)}\right)>0$$

yazılabileceğinden

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

elde edilir. O halde $g \in S^*$ iken $f \in K$ dır.

Koebe fonksiyonu ve onun dönmeleri S^* sınıfına ait olduğundan S sınıfındaki fonksiyonlar için elde edilmiş ve bükülme (distortion) teoremi olarak bilinen teorem S^* sınıfına ait fonksiyonlar içinde doğrudur.

Teorem 3.5.7. : $f \in S^*$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu taktirde,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{33}$$

ve

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{34}$$

bağıntıları vardır.

Bu tahminlerin hepsi kesindir. Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi için bu bağıntıların her biri eşitlik hali için doğru olur.

Bu teoremin direkt sonucu şudur: S^* kümesi $H(U)$ nun kompakt alt kümesidir. Ayrıca S sınıfı içinde geçerli olan $1/4$ Koebe sabiti S^* sınıfı içinde geçerlidir.

Normalize edilmiş konveks fonksiyonlar için aşağıdaki bükülme (distortion) teoremi verilebilir.

Teorem 3.5.8.: $f \in K$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu taktirde,

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r} \tag{35}$$

ve

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2} \tag{36}$$

bağıntıları vardır.

Bu tahminlerin hepsi kesindir. Eşitlik $|\lambda| = 1$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{z}{1-\lambda z}$ fonksiyonu için sıfırdan farklı verilen bir noktada doğrulanır.

İspat : f, U da normalize edilmiş holomorf fonksiyon ve $g(z) = zf'(z)$ iken $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır. Bu teorem ve

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa, $g \in S^*$ olduğundan

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |g(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

ve buradan da

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |zf'(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

yazılır. Böylece $|z| = r$ iken

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

elde edilir

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$$

eşitsizliğinin alt sınırını elde etmek için z sabit olmak üzere $|z| = r < 1$ alalım. $f \in K$ olduğundan, 0 ve $f(z)$ arasındaki kapalı Γ doğru parçası $f(U)$ da ihtiva edilir. γ, Γ eğrisinin ters görüntüsü ise γ, 0 noktasını z noktasına birleştiren bir basit eğridir. O halde,

$$|f(z)| = \int_{\Gamma} |dw| = \int_{\gamma} |f'(\varsigma)|.|d\varsigma| \geq \int_{0}^{r} \left|f'\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| d\rho \geq \int_{0}^{r} \frac{1}{(1+\rho)^2} d\rho$$

$$= \left(-\frac{1}{1+\rho}\right)\Bigg|_{0}^{r} = \frac{r}{1+r}$$

elde edilir.

Teorem 3.5.9.: $f \in K$ ise U birim diskinin f altındaki görüntüsü olan $f(U)$, $U_{\frac{1}{2}}$ diskini ihtiva eder. Bu sonuç kesindir.

İspat: $f \in K$ olduğundan 3.5.8. Teoremi kullanılır ve $\frac{r}{1+r} < |f(z)|$ eşitsizliğinden $r \to 1$ için limit alınırsa alt sınır olarak $|f(z)| \geq 1/2$ elde edilir.

Bu teoremin bir başka ilginç ispatı 1964 yılında MacGregor tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

$c \notin f(U)$ olduğunu kabul ederek $|c| \geq 1/2$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $f \in K$ ve $f(z) \neq c$ olsun. $z \in U$ olmak üzere $g(z) = (f(z) - c)^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. g fonksiyonu ünivalenttir. Çünkü $z_1,\ z_2 \in U$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ iken $g(z_1) = g(z_2)$ olduğu kabul edildiğinde,

$$\begin{aligned}
&(f(z_1) - c)^2 = (f(z_2) - c)^2 \Rightarrow \\
&f^2(z_1) - 2cf(z_1) + c^2 = f^2(z_2) - 2cf(z_2) + c^2 \Rightarrow \\
&f^2(z_1) - f^2(z_2) = 2c[f(z_1) - f(z_2)] \Rightarrow \\
&[f(z_1) - f(z_2)][f(z_1) + f(z_2) - 2c] = 0
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$f(z_1) = f(z_2) \qquad \text{veya} \qquad f(z_1) + f(z_2) = 2c$$

elde edilir. f fonksiyonu U da ünivalent olduğundan $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) = f(z_2)$ olamaz. f konveks olduğundan $\dfrac{f(z_1) + f(z_2)}{2} = c \in f(U)$ olmalıdır. Halbuki $c \notin f(U)$ dır. O halde g fonksiyonu $|z| < 1$ de ünivalenttir. Diğer yandan $z \in U$ olmak üzere

$$h(z) = \frac{c^2 - g(z)}{2c}$$

fonksiyonu da $|z| < 1$ de ünivalenttir. Ayrıca $g(0) = c^2$ ve $g'(0) = -2c$ olduğundan $h(0) = 0,\ h'(0) = 1$ şartları da sağlanmaktadır. Yani $h \in S$ dir. $f(z) \neq c$ iken $g(z) \neq 0$ olacağından $h(z) \neq c/2$ olup

$$\left|\frac{c}{2}\right| \geq \frac{1}{4} \Rightarrow |c| \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

S sınıfına ait bir f fonksiyonunun k-fold simetrik olması durumunda U birim diskinin f altındaki görüntüsünün nasıl bir disk içerdiği incelenecektir. Ayrıca f fonksiyonunun Taylor açılımındaki katsayılardan bazılarının sıfır olması durumunda konveks ve yıldızıl fonksiyonlara ait bükülme (distortion) teoremleri verilecek ve S sınıfına ait konveks ve yıldızıl fonksiyonlar için Bieberbach tahmini incelenecektir. Ayrıca P sınıfına ait bir katsayı eşitsizliği sunulacaktır.

İlk inceleme aşağıdaki gibi tanımlanan k-fold simetrik fonksiyonlarla ilgilidir.

Tanım 4.1.: $k \in Z^{+}$ ve $z \in U$ için

$$f(z) = e^{\frac{-2\pi i}{k}} f\left(e^{\frac{2\pi i}{k}} z\right)$$

oluyorsa $f \in H(U)$ fonksiyonuna k-fold simetrik denir. [Graham and Kohr, 2003]

Teorem 4.2.: i) $f \in S$ olmak üzere f, k-fold simetrik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$\rho_k = \frac{1}{4^{1/k}}$$

olmak üzere

$$f(U) \supseteq U_{\rho_k}$$

dır.

ii) f fonksiyonu i) deki şartlara sahip ve $f \in K$ ise $r_k = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^k\right)^{2/k}} dt$ olmak üzere

$f(U) \supseteq U_{r_k}$ dır.

Her iki sonuçta kesindir.

İspat: i) $z \in U$ olmak üzere

$$g(z) = \sqrt[k]{f\left(z^k\right)}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu $g(z)$ fonksiyonu S sınıfına ait olup S sınıfındaki fonksiyonlar için verilmiş (12) eşitsizliği kullanılabilir. Böylece,

$$\frac{|z|}{\left(1+|z|\right)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{\left(1-|z|\right)^2} \qquad (37)$$

eşitsizliğinde z yerine z^k yazılır ve $\frac{1}{k}$. kuvvet alınırsa $z \in U$ için

$$\frac{|z|}{\left(1+|z|^k\right)^{2/k}} \le \left|\sqrt[k]{f\left(z^k\right)}\right| \le \frac{|z|}{\left(1-|z|^k\right)^{2/k}}$$

olup

$$\frac{|z|}{\left(1+|z|^k\right)^{2/k}} \le |g(z)| \le \frac{|z|}{\left(1-|z|^k\right)^{2/k}} \qquad (38)$$

bulunur.

$0 < r < 1$ olmak üzere U_r diskini göz önüne alalım. U_r nin görüntüsü bir açık küme ve sınırı da ∂U_r nin görüntüsüdür. Buna göre (38) eşitsizliği göz önüne alınırsa ∂U_r nin görüntüsü orijinden en az

$$\frac{r}{\left(1+r^k\right)^{2/k}}$$

uzaklıkta olur ki $r \to 1$ için limit alınarak,

$$\rho(k) = \frac{1}{(2)^{2/k}} = \frac{1}{4^{1/k}}$$

elde edilir.

ii) $f \in K$ olsun. Bu durumda $zf' \in S^*$ dır. (38) eşitsizliğinde z yerine zf' yazılarak,

$$\int_0^r \frac{1}{\left(1+t^k\right)^{2/k}}\,dt \le |f(z)| \le \int_0^r \frac{1}{\left(1-t^k\right)^{2/k}}\,dt, \qquad |z| = r < 1$$

bulunur. $r \to 1$ için alt sınırdan,

$$r_k = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^k\right)^{2/k}}\,dt$$

elde edilir.

Her iki sonuçta her bir k için kesindir. i) için Koebe fonksiyonunun k. kök dönüşümü ve ii) içinde aşağıdaki konveks fonksiyonlar seçilebilir,

$$g_k(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{1-z}; & k=1\\ \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right); & k=2\\ \displaystyle\int_0^z \dfrac{dt}{\left(1-t^k\right)^{2/k}}; & k\geq 3\end{cases} \tag{40}$$

$k\geq 3$ için $g_k(z)$ ler birim diski k mertebeli düzgün poligon üzerine konform olarak dönüştürür. [Nehari, 1952]

Konveks fonksiyonlar için özellikle $a_2=a_3=...=a_k=0$ olmak üzere k-fold simetriklikten daha zayıf bir şart kullanılarak aynı bağıntılar elde edilebilir.

Teorem 4.3.: $f(z)=z+a_{k+1}z^{k+1}+a_{k+2}z^{k+2}+...$ biçiminde U da konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $z\in U$ iken,

$$\frac{1}{\left(1+|z|^k\right)^{2/k}}\leq |f'(z)|\leq \frac{1}{\left(1-|z|^k\right)^{2/k}} \tag{41}$$

eşitsizliği vardır. Bu tahminler kesindir ve eşitlik (40) ifadesindeki g_k fonksiyonları için sağlanır.

İspat: f konveks olmak üzere $z\in U$ için $g(z)=\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ ve $G(z)=\dfrac{2z}{1-z}$ olarak alınırsa f nin konveksliği $g\prec G$ olduğunu ifade eder.

$$g(0)=0 \qquad \text{ve} \qquad g(z)=\frac{k(k+1)a_{k+1}z^k+...}{1+(k+1)a_{k+1}z^k+...}=k(k+1)a_{k+1}z^k+...$$

yazılabileceğinden $g'(0)=g''(0)=...=g^{(k-1)}(0)=0$ dır. Genelleştirilmiş Schwarz Lemması ve Subordination prensibi kullanılırsa $r\in(0,1)$ için,

$$g(U_r)\subseteq G(U_{r^k})$$

yazılır.

$$G(z)=\frac{2z}{1-z}$$

dönüşümü ile

$$U_{r^k}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r^k,\quad 0<r<1,\quad k\in\mathbb{Z}^+\}$$

dairesel bölgesinin görüntüsünü bulalım.

$G(z)=w=\dfrac{2z}{1-z}$ denirse $z=\dfrac{w}{w+2}$ olup $|z|<r^k$ iken $\left|\dfrac{w}{w+2}\right|<r^k$ ve $|w|^2<r^{2k}|w+2|^2$ bulunur. Böylece

$$w.\overline{w}<r^{2k}(w+2)\left(\overline{w+2}\right)\Rightarrow$$

$$w.\overline{w}<r^{2k}\left(w.\overline{w}+4\operatorname{Re}w+4\right)$$

yazılabileceğinden $w=u+iv$ denirse

$$u^2+v^2<r^{2k}\left(u^2+v^2+4u+4\right)\Rightarrow$$

$$\left(1-r^{2k}\right)u^2+\left(1-r^{2k}\right)v^2-4r^{2k}u<4r^{2k}\Rightarrow$$

$$u^2+v^2-\frac{4r^{2k}}{1-r^{2k}}u<\frac{4r^{2k}}{1-r^{2k}}\Rightarrow$$

$$\left(u-\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}\right)^2+v^2<\frac{4r^{2k}}{1-r^{2k}}+\left(\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\left|w-\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}\right|<\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}$$

elde edilir.

$$G(z)=\frac{2z}{1-z}$$

dönüşümü ile U_{r^k} dairesel bölgesi merkezi reel eksen üzerindeki,

$$\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}$$

noktasında ve yarıçapı $\dfrac{2r^k}{1-r^{2k}}$ olan bir bölgeye dönüşür. Buna göre,

$$\left|g(z)-\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}\right|\leq\frac{2r^k}{1-r^{2k}}\ ;\qquad |z|=r$$

veya

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^{2k}}{1-r^{2k}}\right|\leq\frac{2r^{k}}{1-r^{2k}}$$

yazılır. Böylece,

$$\left|z\bar{z}\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2\bar{z}r^{2k}}{1-r^{2k}}\right|\leq\frac{2r^{k}}{1-r^{2k}}|\bar{z}|$$

ve buradan da

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2\bar{z}r^{2k-2}}{1-r^{2k}}\right|\leq\frac{2r^{k-1}}{1-r^{2k}}$$

elde edilir. $z=r$ için tahminimizi elde etmek yeterlidir. Aksi halde f nin rotasyonları da kullanılabilir. Buna göre,

$$\left|\frac{f''(r)}{f'(r)}-\frac{2r^{2k-1}}{1-r^{2k}}\right|\leq\frac{2r^{k-1}}{1-r^{2k}}$$

yazarız. Her iki yanın integralinden,

$$\int_0^r\left|\frac{f''(t)}{f'(t)}-\frac{2t^{2k-1}}{1-t^{2k}}\right|dt\leq\int_0^r\frac{2t^{k-1}}{1-t^{2k}}dt\Rightarrow$$

$$\left|\int_0^r\left(\frac{f''(t)}{f'(t)}-\frac{2t^{2k-1}}{1-t^{2k}}\right)dt\right|\leq\int_0^r\frac{2t^{k-1}}{1-t^{2k}}dt$$

$$\left|\log f'(r)+\frac{1}{k}\log\left(1-r^{2k}\right)\right|\leq\frac{1}{k}\log\left(\frac{1+r^{k}}{1-r^{k}}\right)$$

bulunur. Böylece

$$-\frac{1}{k}\log\left[\frac{1+r^k}{1-r^k}\right] \le \log\left|f'(r)\right| + \frac{1}{k}\log\left(1-r^{2k}\right) \le \frac{1}{k}\log\left[\frac{1+r^k}{1-r^k}\right]$$

veya

$$\frac{1}{k}\log\frac{1}{\left(1+r^k\right)^2} \le \log\left|f'(r)\right| \le \frac{1}{k}\log\frac{1}{\left(1-r^k\right)^2}$$

elde edilir.

f nin $a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$ özelliğine sahip bir yıldızıl fonksiyon olması durumunda Alexander's teoremi kullanılarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.4.: $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + \ldots$ şeklinde U da bir yıldızıl fonksiyon olsun. Bu taktirde $z \in U$ için

$$\frac{|z|}{\left(1+|z|^k\right)^{\frac{2}{k}}} \le \left|f(z)\right| \le \frac{|z|}{\left(1-|z|^k\right)^{\frac{2}{k}}}$$

dır.

Bu tahminler kesindir ve eşitlik $f_k(z) = zg'_k(z)$ fonksiyonları için sağlanır. Burada g_k lar (40) ile verilmiştir.

Teorem 4.5.: $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ fonksiyonu U birim diskinde yıldızıl (starlike) ise bütün $n\geq 2$ ler için $|a_n|\leq n$ dir. $n\geq 2$ iken eşitlik hali $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmesi olarak alınması durumunda geçerlidir.

İspat: $f\in S^*$ olduğundan $z\in U$ olmak üzere,

$$p(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)} \tag{42}$$

ile tanımlanan p fonksiyonu P sınıfına aittir. Çünkü,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\sum_{k=1}^{\infty}p_k z^k$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. P sınıfına ait $p(z)=1+p_1 z+p_2 z^2+...$ şeklinde bir fonksiyon için $k\geq 1$ iken $|p_k|\leq 2$ dir. f ve onun f' türevi

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k \Rightarrow f'(z)=1+\sum_{k=2}^{\infty}ka_k z^{k-1}$$

şeklinde olup

$$zf'(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}ka_k z^k$$

dır. Böylece $z.f'(z)=p(z).f(z)$ eşitliğinden,

$$z+\sum_{k=2}^{\infty} k a_k z^k = \left(z+\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikte z^n nin katsayılarının eşitliğinden

$$n a_n = p_{n-1} + a_2 p_{n-2} + \ldots + p_2 a_{n-2} + p_1 a_{n-1} + a_n, \qquad n = 2,3,\ldots$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanının mutlak değerleri alınır ve $n = 2,3,\ldots$ için $|p_n| \le 2$ ve Bieberbach tahmini kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&(n-1)|a_n| \le |p_{n-1}| + |a_2||p_{n-2}| + \ldots + |a_{n-2}||p_2| + |a_{n-1}||p_1| \Rightarrow \\
&(n-1)|a_n| \le 2 + 2|a_2| + \ldots + 2|a_{n-2}| + 2|a_{n-1}| \Rightarrow \\
&(n-1)|a_n| \le 2(1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)) \Rightarrow \\
&(n-1)|a_n| \le 2\frac{(n-1).(n)}{2} \Rightarrow \\
&|a_n| \le n
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.6.: Eğer $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ fonksiyonu U birim diskinde konveks ise bütün $n \ge 2$ ler için $|a_n| \le 1$ dir. Bütün $n \ge 2$ ler için $|a_n| = 1$ olması $f(z)$ nin

$$\frac{z}{1-z}$$

fonksiyonu ve onun dönmeleri biçiminde olmasıdır.

İspat: $f \in K$ iken $zf' \in S^*$ olacağından

$$zf' = z + \sum_{k=2}^{\infty} k.a_k z^k$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa ve Teorem 4.4. kullanılırsa

$$n|a_n| \leq n \Rightarrow |a_n| \leq 1$$

bulunur.

Teorem 4.7.: $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$ fonksiyonu U birim diskinde holomorf ve $z \in U$ için $|f(z)| < 1$ ise $n = 1,2,3,\ldots.$ için

$$|a_n| \leq 1 - |a_0|^2$$

dır.

İspat : $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ve $g(z) = \frac{1}{n}\left[f(wz) + f(w^2 z) + \ldots + f(w^n z)\right]$ olmak üzere $h(z) = g(\sqrt[n]{z})$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $z \in U$ olmak üzere $|f(z)| < 1$ olacak şekilde $f : U \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonu için

$$|f'(z)| \leq \left(1 - |f(z)|^2\right) / \left(1 - |z|^2\right) \tag{43}$$

eşitsizliği vardır. U üzerinde sınırlı holomorf olan bu fonksiyon için bu eşitsizliği uygulayalım. g fonksiyonunun tanımından

$$g(z)=\frac{1}{n}\left\{\left(a_0+a_1w+a_2w^2z^2+\ldots\right)+\left(a_0+a_1w^2z+a_2w^4z^2+\ldots\right)+\left(a_0+a_1w^nz+a_2w^{2n}z^2+\ldots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{n.a_0+a_1\left(w+w^2+\ldots+w^n\right)z+a_2\left(w^2+w^4+\ldots+w^{2n}\right)z^2+\ldots+a_n\left(w^n+w^{2n}+\ldots+w^{nn}\right)z^n+\ldots.\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{na_0+a_1e^{\frac{2\pi i}{n}}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)^n}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}}\right)+\ldots.\right\}$$

$$=a_0+a_nz^n+a_{2n}z^{2n}+\ldots.$$

yazılır. Böylece $h(z)=g\left(z^{\frac{1}{n}}\right)$ ifadesinin her iki yanının türevinden,

$$h'(z)=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.g'\left(z^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$h'(z)=\frac{1}{n}z^{\frac{1-n}{n}}\left\{a_n.n.z^{\frac{n-1}{n}}+a_{2n}.2n.z^{\frac{2n-1}{n}}+\ldots.\right\}$$

$$=a_n+a_{2n}.2z+\ldots..$$

elde edilir. (43) eşitsizliği $z=0$ iken $h(z)$ fonksiyonuna uygulanırsa,

$$|h'(0)|\leq 1-|h(0)|^2$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir. Böylece,

$$|a_n|\leq 1-|a_0|^2$$

bulunur.

Teorem 4.8.: $z \in U$ olmak üzere

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + ... + p_n z^n + ... \in \mathrm{P}$$

olsun. Bu durumda,

$$\left| p_2 - \frac{1}{2} p_1^2 \right| \leq 2 - \frac{1}{2} |p_1|^2$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $z \in U$ olmak üzere

$$q(z) = \frac{p(z) - 1}{z(p(z) + 1)}$$

fonksiyonuna Teorem 4.6. uygulayalım. $p(z)$ nin tanımından,

$$q(z) = \frac{p(z) - 1}{z.(p(z) + 1)} = \frac{p_1 z + p_2 z^2 + ...}{z(2 + p_1 z + p_2 z^2 + ...)}$$

$$= \frac{p_1 + p_2 z + p_3 z^2 + ...}{2 + p_1 z + p_2 z^2 + ...}$$

$$= \frac{p_1}{2} + \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) z + ...$$

elde edilir. $n = 1$ iken Teorem 4.6. den elde edilecek eşitsizlik kullanılırsa

$$|a_1| \leq 1 - |a_0|^2 \Rightarrow \left| p_2 - \frac{1}{2} p_1^2 \right| \leq 1 - \left| \frac{p_1}{2} \right|^2$$

bulunur.

5. SONUÇ

Ünivalent fonksiyonlar kavramı verilerek U birim diskinde analitik, ünivalent ve normalize edilmiş fonksiyonların S ile gösterilen sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili bazı özellikler incelendi. Pozitif reel kısımlı fonksiyonlar ve Subordination kavramı tanıtıldı. S sınıfının S^* ile gösterilen ve yıldızıl fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılan sınıfına ilaveten K ile gösterilen ve konveks fonksiyonlar sınıfı olarak bilinen iki alt sınıfı sunuldu. Bu sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili bükülme (distortion) sınırları ve katsayı tahminleri araştırıldı. Bieberbach tahmininin S^* ve K sınıflarındaki durumu incelendi. Ayrıca bazı ilginç bağıntılar ispatlarıyla birlikte verildi.

KAYNAKLAR

Alexander, J.W., 1915-1916, Functions Which Map The İnterior of The Unit Circle Upon Simple Regions. Ann. Of Math., 17, 12-22.

Başkan, T., 1996, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. İkinci Baskı, Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Bieberbach, L., 1916, Über die Koeffizienten Derjenigen Potenzreihen, Welche Eine Schlichte Abbildung des Einheitskreiss Vermitteln. S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 940-955.

Carathéodory, C., 1907, Über den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die Gegebene Werte Nicht Annehmen, Math. Ann., 64, 95-115.

de Branges, L.,1985, A Proof of The Bieberbach Conjecture., Acta Math., 154, 137-152.

Dönmez, A., 1985, Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı. Dicle Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:10, Diyarbakır.

Duren, P. L., 1983, Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

Graham, I. and Kohr, G., 2003, Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions, Marcel Dekker. Inc. New York. Basel, 3-52

Graham, I. and Varolin, D., 1996, Bloch Constants in One and Several Variables, Pacif. J. Math., 174, 347-357.

Gronwall, T. H., 1914\15, Some Remaks on Conformal Representation, Ann. Math., 16, 72-76.

Herglotz, G., 1911, Über Potenzreihen Mit Pozitivem, Reelen Teil im Einheitskreis, S. – B., Sachs. Akad. Wiss. Leibzig. Math. –Natur. KI., 63, 501-511.

Koebe, P., 1907, Uber die Uniformisierung beliebiger analytischer kurven. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. K1.,191–210.

MacGregor, T. H., 1964, A Covering Theorem for Convex Functions, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 310.

Nehari, Z., 1952, Conformal Mapping. McGraw-Hill, New York.

Noshiro, K., 1934\35, On The Theory of Schlicht Functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 2, 129-155.

Özkın, İ. K., 1989, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

Warschawski, S.E., 1935, On The Higher Derivatives at The Boundary in Conformal Mapping, Trans. Amer Math. Soc., 38, 310-348.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Erzurum'un Tortum ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1997 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı ve 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl M.E.B. da Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen M.E.B. da ki görevine devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.