YERELLEŞTİRME VE TAM GENİŞLEMELER

Rukiye ÖZTÜRK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Engin ÖZKAN
2009

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YERELLEŞTİRME VE TAM GENİŞLEMELER

Rukiye ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2009

Doç. Dr. Engin ÖZKAN danışmanlığında, Rukiye ÖZTÜRK tarafından hazırlanan bu çalışma 25/08/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr Ramazan DİKİCİ — İmza:

Üye : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN — İmza:

Üye : Doç.Dr. Engin ÖZKAN — İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

(imza)

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YERELLEŞTİRME VE TAM GENİŞLEMELER

Rukiye ÖZTÜRK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Engin ÖZKAN

Değişmeli cebir, cebirsel sayılar kuramının temel yapı taşlarından biridir. Yerelleştirme, değişmeli cebirin en önemli teknik araçlarından; tam genişlemeler de değişmeli cebirdeki hemen hemen her konu için gerekli temel bir kavramdır.

Bu çalışmada, yukarıda ifade edilen sebebten dolayı cebirsel sayılar kuramına bir giriş olarak tam genişlemeler ve birimli değişmeli halkalarda yerelleştirme ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Özellikle de bölüm cismi, yerel halka, tam kapanış, cebirsel tamsayılar halkası kavramları, yerelleştirmenin üniversal özelliği, bir halkanın asal idealleri ile yerelleştirmesinin asal idealleri arasındaki ilişki, cebirsel tamsayılar halkasının temel yapısı, Karşılaştırılamazlık teoremi, Üzerinde kalma teoremi, Açılma teoremi, yerelleştirme altında korunan ve korunmayan bazı cebirsel yapılar, tam ve cebirsel genişlemeler arasındaki ilişki ve Daralma teoremi verilmiştir.

2009, 140 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yerelleştirme, Yerel halka, Tam genişleme, Tam kapanış, Cebirsel tamsayılar halkası, Yerel özellik, Karşılaştırılamazlık teoremi, Üzerinde kalma teoremi, Açılma teoremi, Daralma teoremi.

ABSTRACT

Master Thesis

LOCALIZATION AND INTEGRAL EXTENSIONS

Rukiye OZTURK

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Engin OZKAN

Commutative algebra is one of the fundamental building stones of algebraic number theory. Localization is the most important technical tool in commutative algebra and the notion of integral extensions is a central concept prerequisite for almost everything in commutative algebra.

In this study, localizations of commutative rings with unity and integral extensions are treated in detail as an introduction to algebraic number theory because of the reason mentioned above. Especially the notions of field of fractions, local ring, integral closure, the ring of algebraic integers, universal property of a localization, the relation between prime ideals of a ring and prime ideals of a localization of the ring, the basic structure of the ring of algebraic integers, Incomparability theorem, Lying-over theorem, Going-up theorem, some algebraic structures preserved under localization and some algebraic structures which are not preserved under localization, the relation between integral extensions and algebraic extensions, and lastly Going-down theorem are given.

2009, 140 pages

Keywords: Localization, Local ring, Integral extension, Integral closure, The ring of algebraic integers, Local property, Incomparability theorem, Lying-over theorem, Going-up theorem, Going-down theorem.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen Sayın hocam Doç. Dr. Engin ÖZKAN'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ'ye, Sayın Doç. Dr. Erdal KARADUMAN'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN'e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĞLU'na ve matematik bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına,

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Rukiye ÖZTÜRK
Ağustos 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

(a)	a 'nın gerdiği ideal
(A)	A 'nın gerdiği ideal
$\|A\|$	A 'nın determinantı
A^*	A 'nın aritmetik birimlerinin kümesi
A_{ij}	A 'nın i .satır j. sütununu silmekle elde edilen matris
$\|A_{ij}\|$	A 'nın (i, j) deki minörü
$A - P$	P 'nin A daki tümleyeni
A_P	A 'nın P asal idealindeki yerelleştirmesi
$a \mid b$	a böler b
1_B	B üzerindeki birim fonksiyon
$boy\ W$	W 'nın boyutu
$c(f)$	f 'nin kapsamı
$Çek\ L$	L 'nin çekirdeği
$d(A)$	A matrisinin determinantı
$der\ (f(x))$	$f(x)$ in derecesi
$\det A$	A matrisinin determinantı
$\det(u)$	u endomorfizminin determinantı
E/F	F 'nin E cisim genişlemesi
$[E:F]$	E/F cisim genişlemesinin derecesi

E_t	E 'nin tüm torsion elemanlarının kümesi
$\lvert G \rvert$	G 'nin mertebesi
$\circ(G)$	G 'nin mertebesi
$Jac(R)$	R 'nin Jacobson radikali
I_A	A 'nın ideallerinin kümesi
$\sqrt{I}$	I 'nın radikali
I^e	I 'nın genişlemesi
$\operatorname{Im} L$	L 'nin görüntüsü
J^c	J 'nin kısıtlaması
$(0:J)$	J 'nin sıfırlayıcı ideali
IS	S 'nin I ile gerilen ideali
$K(X)$	$K \cup X$ ile gerilen altcisim
$L(V,K)$	V den K ya tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$Mat_n R$	$n \times n$ tipinden matrislerin kümesi
$\min(u,K)$	u 'nun K üzerindeki minimal polinomu
$Mor(A,B)$	A dan B ye tüm morfizmlerin kümesi
$M(R)$	R halkasının merkezi
$(0:_S M)$	M 'nin sıfırlayıcı ideali
$\mathbb{N}^*$	$\{1,2,...,...\}$
$N_{B/A}(x)$	x 'in B ve A ya bağlı olarak normu

O_K	K 'nin tamsayılar halkası
$rad\ I$	I 'nın radikali
$\mathfrak{N}(R)$	R 'nin nil radikali
$sfr(K)$	K 'nin sıfırlayıcı ideali
$sfr(x)$	x 'in sıfırlayıcı ideali
$\sup\ B$	B 'nin supremumu
$Tr_{B/A}(x)$	x 'in B ve A ya bağlı olarak izi
$Tr(u)$	u endomorfizminin izi
V^*	V 'nin dual uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Adından da anlaşılacağı gibi “yerelleştirme” kavramının çıkış noktası özel bir geometrik durumdur: Cebirsel bir $X \subseteq A_k^r$ kümesinde bir p noktası verildiğinde X ’in “ p ” civarındaki davranışını yani p ’nin Zariski topolojisindeki keyfi küçük açık komşuluklarını araştırmak isteriz. p ’nin Zariski açık komşulukları, Y X ’in p ’yi içermeyen cebirsel bir alt kümesi olmak üzere, $X - Y$ formundaki kümelerdir. Y ’nin, tek bir f fonksiyonunu sıfırlayan elemanların kümesi olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda görülür ki $A(X-Y)$ afin halkası, $A(X)$ halkasına f için bir çarpımsal ters ekleyerek $A(X)$ halkasından elde edilir. Buna “ f ’yi terslenebilir yapma” diyoruz. p de sıfırlanmayan $A(X)$ deki tüm fonksiyonları terslenebilir yaparsak, elde edilen nesne, X ’in p deki özünün (germ) iyi bir cebirsel temsilcisidir yani X ’in p deki yerel halkasıdır (Eisenbud 1995).

Yerelleştirme tekniği, değişmeli cebirdeki pek çok problemi yerel halkalarla ilgili problemlere indirgemektedir ve değişmeli cebirin başarılı olduğu problemlerin çoğu yerel duruma indirgenebilir problemlerdir. Dolayısıyla yerelleştirme, bu bakımdan oldukça kullanışlıdır (Eisenbud 1995).

Yerelleştirmenin halka teorisindeki bir diğer önemi de kesirler halkasının genelleştirmesi olmasıdır. Ayrıca yerelleştirme bir halkadan yerel halka elde etmek amacıyla halkaya çarpımsal terslerini eklemenin sistematik bir metodudur ve bir noktanın civarında olmanın cebirsel benzeri de bir halkanın bir asal idealindeki yerelleştirmesidir (Atiyah and Macdonald 1969; Dummit and Foote 2004; Napp Avelli 2008).

Cebirsel sayılar kuramı, Fermat’ın son teoremini ispatlama çabalarının sonucu ortaya çıkan bir kuramdır ve Fermat’ın son teoreminin ispatında cebirsel geometriden de faydalanılmıştır. Cebirsel geometrinin ana malzemesi cebirsel varyetelerdir (Algebraic variety) ve bir cebirsel varyetenin her bir noktasına bir halka (özellikle de bir yerel halka) karşılık getirilebilir. Bu durumda da bu noktanın bu varyete üzerinde düzgün (smooth) veya singüler nokta olup olmadığı sorusu bu halkanın (özellikle de bu yerel halkanın) cebirsel yapısını anlamaya indirgenir.

"Öz" (germ) kavramı bir topolojik uzay üzerindeki bir nesnenin yerel özellikleri hakkında bilgi verir. Bu kavram, sayılar teorisi ve cebirsel geometri üzerine olan tüm ilk çalışmalarda yer almasına rağmen genel anlamda yerelleştirme kavramının ortaya çıkması zaman almıştır. Yerelleştirme, genel bir prosedür olarak çok daha sonraları verilmiş olmasına rağmen tamlık bölgelerinin yerelleştirmesi, Noether'in bir öğrencisi olan Grell (1927) tarafından verilmiştir. Yerelleştirmenin keyfi değişmeli halkalar için verilmesi ilk kez Chevalley (1943) ve Uzkos (1948)'un çalışmalarıyla olmuştur ve bu çalışmalara kadar yerelleştirme, keyfi değişmeli halkalar için tanımlanmamıştır. Bunun sebebi, o zamanlarda ilginin sonlu gerilen cebirler ve kuvvet serileri halkaları üzerine yoğunlaşmış olması ve bu iki halka sınıfının da yerelleştirme altında kapalı olmamasından kaynaklanıyor olabilir. Böylece yerelleştirilmiş bir halkaya geçmek yerine ideal bölümleri (ideal quotients) kullanılmıştır. Örneğin R bir halka, I R'nin bir ideali, U R'nin çarpımsal bir alt kümesi ve $f \in U$ olmak üzere

$$(I : f) = \{r \in R : fr \in I\}$$

şeklindeki yapılar yerelleştirme ile elde edilen sonucun aynısını elde etmek için kullanılmıştır. 1940'lara kadar Krull ve ekolü, bir A tamlık bölgesinin A_P (P, A'nın bir asal ideali) yerel halkalarını genel ispatlarda kullanma konusunda yalnız kalmışlardır. Bu halkalar ancak 1940'larda başlayan Chevalley ve Zariski'nin çalışmalarıyla cebirsel geometride açık bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır.
(Bourbaki 1972; Eisenbud 1995).

Yerel halkaların kendi içinde çalışılmaya başlanması ise ancak Krull (1938)'un makalesiyle olmuştur ve bu makaleyle birlikte yerel halkalar değişmeli cebirde önemli bir yer tutmaya başlamıştır. Bu makalenin en önemli sonuçları ise boyut teorisi ve regüler halkalarla ilgilidir (Bourbaki 1972; Eisenbud 1995).

Yerelleştirme kavramı "Stellenringe" adı altında ilk kez Wolfgong Krull tarafından verilmiştir. Krull (1938), "Stellenringe" kavramını "tek maksimal ideale sahip Noetherian halka" anlamında kullanmıştır. "Stellenringe" kavramının seçilmesinin sebebi bu halkaların çoğu kez cebirsel ve analitik varyeteler üzerindeki noktalarla eşleniyor olmasıdır. Bir varyete üzerindeki bir noktayla eşleşen bir halka, varyetenin yerel özellikleri hakkında bilgi verdiğinden Chevalley (1943), "Stellenringe" kavramını "yerel halka" anlamına gelen "local ring" olarak yeniden adlandırmıştır (Nagata 1962).

Sally (1975), boyutu en fazla iki olan yerel halkaların bir karakterizasyonunu vermiştir.

Szeto (1976), R değişmeli bir halka ve P, R'nin bir asal ideali olmak üzere R_P'nin R/I' ya izomorf olması için gerek ve yeter şart vermiştir ve R'nin tüm asal idealleri maksimal ve I, P'nin idempotentleri ile geriliyorsa R_P'nin R/I' ya izomorf olduğunu göstermiştir.

Petechuk (1980), K değişmeli bir yerel halka, R K'nin radikali ve $2 \in R$ olmak üzere $GL_n(K)$ ve $SL_n(K)$ ($n \geq 4$) için otomorfizm gruplarını tanıtmıştır.

Feigelstock (1980), bir G torsion grubunun, bir yerel halkanın toplam grubu olması için gerek ve yeter şart vermiştir. Torsion olmayan serbest grup için de bir yerel halkanın toplam grubu olması için yeter şartları verilmiştir.

Khamdan (1988), esas ideallerin bir yerel halkası üzerindeki özel lineer grubun altgrupları üzerinde çalışmıştır.

Sancho (1994), sürekli fonksiyonlar halkalarının yerelleştirmesi üzerinde çalışmıştır.

p^5. mertebeden tüm yerel halkalar izomorfizme bağlı olarak yapılarıyla birlikte verilmiştir (Corbas and Williams 2000).

Birimli değişmeli bir sonlu yerel halka üzerinde bir M matrisini oluşturmak için bir teknik verilmiştir (De Andrade and Palazzo 2000).

Yan (2002), çarpımları bir yerel halka üzerinde bir matrisi veren elementer matrislerin sayısı üzerinde çalışmıştır.

Sharma (2002), (R,M) değişmeli bir yerel halka olmak üzere R'nin her $x \in M$ için $f(x) = x$ olacak şekildeki her f halka otomorfizminin birim dönüşüm olması için gerek ve yeter şart vermiştir.

Yerel halkalar üzerindeki köşegen matrislerin denkliği için gerek ve yeter şart verilmiştir (Amini *et al.* 2008).

Bazı sonlu yerel halkaların aritmetik birimlerinin grubu üzerinde çalışılmıştır.
(Woo 2009a, 2009b)

Denklemleri çözme problemi ve çözümlerle ilgili olarak birşeyler söylemek değişmeli cebirin bir amacıdır ve ana motivasyonlarından biridir. Bunun içinde bir değişkenli bir polinomun bir çözümünü ilave etmek önemlidir. Bir R halkası ve $p(x) \in R[x]$ polinomu verildiğinde $R[x](p)$, p'nin bir kökünün R'ye mümkün olduğunca sınırlama olmaksızın eklenmesi olarak düşünülebilir. p'nin monik olması durumu ise tam genişlemeler (integral extensions) ile ilgilidir (Eisenbud 1995).

Tam genişlemelerin diğer önemli özelliği ise cebirsel genişlemelerin bir genelleştirmesi olmasıdır.

Tamamen kapalı bölgelerin (integrally closed domains) günümüzdeki öneminin sebeblerinden biri, Zariski'nin cebirsel varyeteler üzerine olan çalışmalarıdır. Zariski, normal varyetelerin (normal variety) yani yerel halkaları tamamen kapalı bölgeler olan varyetelerin bazı özellikleriyle özellikle de eşboyutu (codimension) “1” olan hiçbir singülerliği olmaması ve benzer durumun analitik uzaylar için de doğru olması açısından diğer varyetelerden ayrıldığını fark etmiştir. Bu yüzden normalizasyon (normalization) modern cebirsel geometride önemli bir araç haline gelmiştir.

Değişmeli halkaların tam genişlemeler teorisi ilk kez 19. yy da cebirsel sayılar kuramında geliştirilmistir ve 1950’lerde ideallerin indirgenmesi (reduction of ideals) ve tam genişleme kavramlarının girişiyle Norhcott ve Rees tarafından ana hatlarıyla oluşturulmuştur (Huneke *et al.* 2006).

J bir tamlık bölgesi, F J’nin bölüm cismi ve J tamamen kapalı (integrally closed) olmak üzere $p(x) = ax^m + \ldots + a_m \in J[x]$, $F[x]$ de indirgenebilir ise $p(x)$’in, $J[x]$ de de indirgenebilir olduğu ve $J[x]$’in tamamen kapalı olduğu gösterilmiştir.
(Butts *et al.* 1954)

Bir tamlık bölgesinin tam kapanışı (integral closure) üzerinde çalışılmıştır
(Mori 1955;1956;1957a; 1957b; 1958,1959a;1959b;1961;1969)

1960’larda Zariski ve Samuel, modüller için Norhcott ve Rees tarafından oluşturulan teorinin bir versiyonunu geliştirdiler (Huneke *et al.* 2006).

Gilmer (1967), D tamamen kapalı bir bölge (integrally closed domain), K D’nin bölüm cismi, L/K ayrılabilir bir cebirsel genişleme ve D', D’nin L deki tam kapanışı olmak üzere D’nin her idealinin D' nün bir idealinin kısıtlaması (contraction of an ideal) olmasının genelde doğru olmadığını göstermiştir.

Seidenberk (1970), bir tamlık bölgesinin tam kapanışının oluşturulması üzerinde çalışmıştır.

Ishibashi (1979), D tamamen kapalı Noetherian bölge, ζ D üzerinde tam ve D' yi içeren bir cismin elemanı olmak üzere $D[\zeta]$'nin tamamen kapalı olması icin gerek ve yeter şartları vermiştir.

Ratliff (1979), $R \subseteq A$ olmak üzere R, A sonlu sayıda maksimal ideale sahip tam genişleme halkaları olmak üzere, $R[a]$ ve A aynı sayıda maksimal ideale sahip olacak şekilde bir $a \in A$ varsa A, $A[e]$ ve $R[e]$ aynı sayıda maksimal ideale sahip olacak şekilde A'nın bir $A[e]$ genişlemesi olduğunu göstermiştir ve tam genişleme bölgelerindeki (integral extension domain) asal ideallerin maksimal zincirleri üzerinde çalışmıştır.

Dobbs (2003), Daralma bölgesinin (Going-down domain) tam kapanışının yine bir Daralma bölgesi olup olmadığını araştırmıştır.

Bu tezde tam genişlemeler ve birimli değişmeli halkalarda yerelleştirme kavramları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bu amaçla ikinci bölümde, bu konular için gerekli ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde tam genişlemeler ve birimli değişmeli halkalarda yerelleştirme kavramları genel hatlarıyla verilmiştir:

“Yerelleştirme” kısmında ilk olarak çarpımsal altküme ve yerelleştirmenin tanımı verilmiştir. Beşinci bölümde modüllerin yerelleştirmesi kullanılacağı için modüllerin yerelleştirmesinden de kısaca bahsedilmiştir. Çeşitli çarpımsal altküme örnekleri verilmiştir ve bölüm cismi tanımlanmıştır. Yerel halkanın tanımı verilip yerel halkaları karakterize eden iki teorem ve ispatları, bu teoremlerin ispatı için gerekli teorem ve ispatı ile birlikte verilmiştir. Hem yerelleştirme hem de yerel halka için bir örnek oluşturan temel bir örneğe değinilmiştir ve bir halkanın bir asal idealdeki yerelleştirmesi tanımlanmıştır. Son olarak da bir halkanın idealleri ile bu halkanın yerelleştirmesinin idealleri arasındaki ilişkileri ifade eden iki teorem ve bir lemma ile ispatları verilmiştir.

"Tam Genişlemeler" kısmında ilk olarak tam elemanın (integral element) birbirine denk olan iki tanımı ve bu tanımla bağlantılı bir önerme ve ispatı verilmiştir. Tam genişleme tanımlanmış ve tam genişlemelerin sahip olduğu özellikler önermeler yoluyla verilmiştir. Tam kapanışın tanımı ve bir elemanın izinin, normunun ve minimal polinomunun ilgili halka üzerinde tam olduğunu ifade eden sonuç ispatıyla birlikte verilmiştir. Tamamen kapalı halkanın, bir cisimde tamamen kapalı halkanın, normalizasyonun tanımı verilmiştir. Tamamen kapalı bir Noetherian halkanın, bölüm cisminin sonlu ayrılabilir bir genişlemesindeki tam kapanışının, bu Noetherian halka üzerinde sonlu gerildiğini ifade eden önerme ve ispatı, bu önermenin ispatı için gerekli lemmalar, notlar, tanımlar ve teoremlerle birlikte verilmiştir. Tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölgenin tamamen kapalı olduğu ispatı ile birlikte verilmiştir. Bir esas ideal halkasının bölüm cisminin sonlu ayrılabilir bir genişlemesindeki tam kapanışının bu esas ideal halkası üzerinde sonlu gerilen bir serbest modül olduğu gösterilmiştir. Sayı cismi ve bir sayı cisminin cebirsel tamsayılar halkasının tanımları verilmiştir. Son olarak da tamlığın, tamamen kapalı olmanın ve tam kapanışın yerelleştirme altında korunduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, sırasıyla kesirler halkasının üniversal özelliği, bir halkanın yerelleştirmesinin halkanın ideallerinin sonlu toplamları ve sonlu kesişimleriyle değişme özelliği, bir halkanın asal idealleri ile kesirler halkasının asal idealleri arasındaki ilişki, yerel halka örnekleri, bir tamlık bölgesi ile asal yada maksimal idealdeki yerelleştirmeleri arasındaki ilişki, tam genişleme örnekleri, bir cebirsel tamsayılar halkası örneği, bir halkada tamamen kapalı olan bir halka örneği, cebirsel tamsayılar halkasının temel yapısı, tamamen kapalı halka örnekleri, normalliğin yerel bir özellik (local property) olduğu ve son olarak da Açılma teoremi'nin (Going-up theorem) ispatı için gerekli teorem, lemma ve önerme verildikten sonra Açılma teoremi ifade edilerek ispatı verilmiştir.

Beşinci bölümde yerelleştirme altında sağlanan bazı özellikler, yerelleştirme altında korunan ve korunmayan bazı cebirsel yapılar, tam ve cebirsel genişlemeler arasındaki ilişki, tam olmayan genişlemeler ve aşkın genişlemeler arasındaki ilişki, dördüncü bölümde verilen bazı teorem ve önermelerin sonuçları ve son olarak da Daralma teoremi'nin (Going-down theorem) ispatı için gerekli teorem, lemma ve önerme verildikten sonra Daralma teoremi ifade edilerek ispatı verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, sonraki bölümler için temel teşkil eden notlara, tanımlara, önermelere ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1: K bir küme ve β**,** K üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, β'ya denklik bağıntısı denir ve (x, y), β'nın bir elemanı ise $x\beta y$ şeklinde yazılır.

R1. Yansıma : Her $a \in X$ için $a\beta a$ dır.

R2. Simetri : Her $a,b \in X$ için $a\beta b$ ise $b\beta a$ dır.

R3. Geçişme : Her $a,b,c \in X$ için $a\beta b$ ve $b\beta c$ ise $a\beta c$ dir (Karakaş 2008).

Tanım 2.2: K bir küme ve β**,** K üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in K$ olsun. Bu taktirde

$$[x]_\beta = \{y \in K : y\beta x\}$$

kümesine x'in β bağıntısına göre denklik sınıfı ve x elemanına da bu denklik sınıfının bir temsilcisi denir (Karakaş 2008).

Tanım 2.3: K bir küme ve β, K üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β'nın yansıma, ters-simetri ve geçişme özellikleri varsa β'ya bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı bulunan bir kümeye kısmi sıralı küme denir. Kısmi sıralama bağıntısı genellikle "$\leq$" ile gösterilir ve $(K, \leq)$'ya da kısmi sıralı küme denir (Karakaş 2008; Asar vd 2009).

Tanım 2.4: K, "$\leq$" ile kısmi sıralı bir küme ve $x, y \in K$ olsun. Eğer $x \leq y$ veya $y \leq x$ den en az biri doğru ise x ve y elemanları karşılaştırılabilir elemanlardır denir.
(Karakaş 2008)

Tanım 2.5: K kısmi sıralı bir küme, $\mathcal{A} \subseteq K$ ve $u \in K$ olsun. Eğer her $x \in \mathcal{A}$ için $x \leq u$ ise u elemanı $\mathcal{A}$ 'nın üstsınırıdır denir (Karakaş 2008).

Tanım 2.6: K kısmi sıralı bir küme, $\mathcal{A} \subseteq K$ ve $m \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$ içinde $m \leq x$ olan tek eleman $x = m$ ise m elemanı $\mathcal{A}$ 'nın maksimal elemanıdır denir.
(Karakaş 2008)

Tanım 2.7 (Artan Zincir Şartı): $(V, \leq)$, boşkümeden farklı kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer

$$v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_i \leq v_{i+1} \ldots$$

olmak üzere V 'nin elemanlarının her $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ailesi için, $i \in \mathbb{N}$ (her i için) olmak üzere $v_k = v_{k+i}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa, V artan zincir şartını sağlar denir.
(Sharp 2000)

Tanım 2.8: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer A'nın herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir ise "$\leq$" bağıntısına tam sıralama bağıntısı ve $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesine de tam sıralı küme denir (Asar vd 2009).

Tanım 2.9: $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve B, A'nın boşkümeden farklı bir altkümesi olsun. Eğer $(B, \leq)$ tam sıralı ise B'ye A da bir zincir denir (Hungerford 1974).

Lemma 2.10 (Zorn Lemması): A**,** boşkümeden farklı bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer A'nın her zincirinin bir üst sınırı varsa A'nın bir maksimal elemanı vardır.
(Dummit and Foote 2004)

Not 2.11: $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. $X, Y \subset A$ olmak üzere

$$X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$$

dir (Yüksel 2006).

Not 2.12: $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. $X_1, X_2 \subset B$ olmak üzere

$$X_1 \subset X_2 \Rightarrow f^{-1}(X_1) \subset f^{-1}(X_2)$$

dir (Yüksel 2006).

Tanım 2.13: $X \subseteq Y$ olmak üzere $j(x) = x$ şeklinde tanımlanan $j : X \to Y$ fonksiyonuna X den Y ye içerme dönüşümü denir (Biggs 2002).

Tanım 2.14: A, boş olmayan bir küme olmak üzere

$$* : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}$$

dönüşümüne, A üzerinde ikili işlem denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.15: Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlı boş olmayan bir kümeye bir cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir "$*$" işlemi tanımlanmışsa bu cebirsel yapı $(A,*)$ ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.16: G**,** boş olmayan bir küme ve G üzerinde bir "$*$" ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer

i. "$*$" işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani her $a,b,c \in G$ için

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

ise;

ii. Her $a \in G$ için

$$a*e = e*a = a$$

olacak biçimde bir $e \in G$ varsa ("e" ye G 'nin birim elemanı denir);

iii. Her $a \in G$ için

$$a*a' = a'*a = e$$

olacak şekilde bir $a' \in G$ varsa (a' ye a 'nın bir ters elemanı denir) o zaman $(G,*)$ sıralı ikilisine bir grup denir (Asar vd 2009).

Tanım 2.17: $(G,*)$ bir grup olmak üzere $\forall a,b \in G$ için

$$a*b=b*a$$

oluyorsa o zaman bu gruba değişmeli (komütatif ya da abelyan) grup denir.
(Taşçı 2007)

Tanım 2.18: $(G,*)$ bir grup olsun. Eğer G kümesi sonlu ise o zaman bu gruba sonlu grup denir. Eğer G kümesi sonlu değilse bu durumda $(G,*)$ grubuna sonsuz grup denir. Sonlu bir grubun elemanlarının sayısına grubun mertebesi ya da kardinalitesi denir ve $\circ(G)$ veya $|G|$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.19: $(G,*)$ bir grup ve H, G'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer H, G grubundaki işleme göre bir grup teşkil ederse yani $(H,*)$ cebirsel yapısı bir grup ise $(H,*)$'a $(G,*)$ grubunun bir altgrubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

Önerme 2.20: G bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. H'nin G'nin altgrubu olması için gerek ve yeter şart
i. $H \neq \varnothing$
ii. Her $x,y \in H$ için $x*y^{-1} \in H$
olmasıdır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.21: G, bir grup olmak üzere $H=\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ alt grubuna G'nin a elemanı tarafından üretilen alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir. Yani

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = H$$

dır. Buradan hareketle devirli grubu şu şekilde de tanımlayabiliriz: G, bir grup olmak üzere G de $G=\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir a elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böyle bir a elemanına G'nin üreteci denir ve $G=\langle a \rangle$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

Teorem 2.22: Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir (Taşçı 2007).

Teorem 2.23: $G = \langle a \rangle$ ve $\circ(G) = n$ olsun. Buna göre G 'nin herhangi bir alt grubunun mertebesi n 'nin bir pozitif bölenidir ve n 'nin her pozitif k böleni için G kesinlikle k .mertebeden bir tek alt gruba sahiptir (Taşçı 2007).

Tanım 2.24: G bir grup, $H \leq G$ ve $a \in G$ olmak üzere

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

kümesine H 'nin G deki a 'yı kapsayan sol yan kümesi ve

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

kümesine H 'nin G deki a 'yı kapsayan sağ yan kümesi denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.25: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer $\forall a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa o taktirde H altgrubuna G 'nin normal altgrubu denir ve $H \lhd G$ şeklinde gösterilir. (Taşçı 2007)

Tanım 2.26: $(G,\cdot)$ bir grup ve $N \lhd G$ olmak üzere

$$G / N = \{aN : a \in G\}$$

kümesi üzerinde $\forall aN, bN \in G / N$ için

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

şeklinde bir ikili işlem tanımlanırsa o taktirde $(G / N,\cdot)$ cebirsel yapısı bir gruptur. Bu gruba G 'nin N normal altgrubuna göre bölüm grubu denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.27: G ve H iki grup ve $\varphi : G \to H$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $a,b \in G$ için

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

ise φ 'ye G den H ya bir grup homomorfizması denir (Asar vd 2009).

Tanım 2.28: $R \neq \varnothing$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem "$+$" ve "$\cdot$" olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına halka denir.

H1. $(R,+)$, bir değişmeli gruptur.

H2. "$\cdot$" işleminin R de birleşme özelliği vardır.

H3. "$\cdot$" işleminin "$+$" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır yani her $a,b,c \in R$ için

$$a(b+c) = ab+ac \quad \text{ve} \quad (a+b)c = ac+bc$$

dir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.29: $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun.

i. Her $a,b \in R$ için

$$ab = ba$$

oluyorsa R'ye değişmeli halka denir.

ii. $(R,\cdot)$ birimliyse $(R,+,\cdot)$ halkasına birimli halka ve $(R,\cdot)$'nin birim elemanına R halkasının birim elemanı denir. R halkasının birimi "1_R" veya sadece "1" ile gösterilir.

iii. $(R,+,\cdot)$ halkasının "$+$" işlemine göre birim elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve $(R,+,\cdot)$ halkasının sıfır elemanı "0_R" veya "0" ile gösterilir.

(Çallıalp 2001; Bayraktar 2006; Karakaş 2008)

Tanım 2.30: H, bir halka, $A \subseteq H$ olsun. Eğer H'nin ikili işlemleri A üzerinde de ikili işlem oluyor ve bu ikili işlemler ile A kendisi de bir halka oluyor ise A'ya H'nin bir althalkası denir (Karakaş 2008).

Teorem 2.31: R, bir halka ve S, R'nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olmak üzere, S'nin R'nin bir alt halkası olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

i. $\forall a,b \in S$ için $a-b \in S$ dir.

ii. $\forall a,b \in S$ için $ab \in S$ dir (Taşçı 2007).

Tanım 2.32: R**,** bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa, a 'ya sol sıfır bölen (sağ sıfır bölen) denir. a, hem sağ hem de sol sıfır bölen ise a 'ya sıfır bölen denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.33: Birimli ($1 \neq 0$), değişmeli ve hiç sıfır bölen eleman içermeyen halkaya tamlık bölgesi denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.34: R bir halka ve $x \in R$ olsun. x 'in R de çarpmaya göre tersi varsa x 'e R de aritmetik birim denir. Aksi halde x, R de aritmetik birim değildir diyeceğiz. (Bayraktar 2006)

Tanım 2.35: R bir halka ve I, R halkasının boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. I aşağıdaki şartları sağlarsa, I 'ya ideal denir.

I_1**.** Her $x, y \in I$ için $x - y \in I$

I_2**.** Her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $rx \in I$

I_3**.** Her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $xr \in I$

Özellikle I_1 ve I_2 sağlanırsa I 'ya sol ideal, I_1 ve I_3 sağlanırsa I 'ya sağ ideal denir. (Bayraktar 2006)

Tanım 2.36: R**,** bir halka ve I, R 'nin bir ideali olsun. Eğer $I \neq R$ ise I 'ya has ideal denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.37: R birimli bir halka ve U, V de R 'nin iki ideali olsun. U ve V ideallerinin çarpımı

$$U \cdot V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in U, b_i \in V, 1 \leq i \leq n \right\}$$

ile verilir ve $U \cdot V$ kümesi, R 'nin bir idealidir (Lang 1965).

Tanım 2.38: R**,** birimli bir halka olsun. Bu durumda, R'nin ideallerinin kümesi çarpımsal bir monoid oluşturur. Bu monoidin birimi halkanın kendisidir ve bu birim eleman, birim (unit) ideal olarak adlandırılır (Lang 1965).

Tanım 2.39: H, değişmeli bir halka ve K, H'nin boş kümeden farklı bir altkümesi olsun.

$$K_0 = \{a \in H : her\ x \in K\ için\ ax = 0\}$$

kümesi H'nin bir idealidir ve $K_0 = sfr(K)$ yazılır. K_0'a K'nin sıfırlayıcı ideali denir. $x \in H$ ise $\{x\}$'in sıfırlayıcı ideali $sfr(x)$ ile gösterilir (Karakaş 2008).

Tanım 2.40: R, birimli değişmeli bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$rad\ I = \{r \in R : Bir\ n \in \mathbb{Z}^+\ için\ r^n \in I\}$$

R'nin bir idealidir. Bu ideale I'nın radikali denir (Dummit and Foote 2004).[1]

Tanım 2.41: R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bir $m \in Z^+$ için $x^m = 0$ oluyorsa x'e nilpotent eleman denir (Asar vd 2009).

Tanım 2.42: R**,** birimli değişmeli bir halka olsun. R'nin tüm nilpotent elemanlarının kümesi, R'nin bir idealidir. Bu ideale R'nin nilradikali denir ve $\mathfrak{N}(R)$ ile gösterilir. (Dummit and Foote 2004)

Tanım 2.43: R, bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Bu durumda R/I bölüm grubu, aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır. Bu halkaya R'nin I ile bölüm halkası denir.

$$(r+I)+(s+I)=(r+s)+I \qquad \text{ve} \qquad (r+I)\cdot(s+I)=(rs)+I$$

(Dummit and Foote 2004)

---

[1] $rad\ I$ yerine $\sqrt{I}$ şeklinde de gösterilmektedir (Sharp 2000).

Teorem 2.44: $I_1, I_2, ..., I_n$ R halkasının n tane ideali ise,

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$$

kümesi R halkasının bir idealidir (Taşçı 2007).

Tanım 2.45: X, bir R halkasının altkümesi olsun. $\{A_i : i \in I\}$, X'i içeren R deki tüm ideallerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} A_i$, X ile gerilen ideal olarak adlandırılır ve (X) ile gösterilir. X'in elemanları (X) idealinin gerenleri olarak adlandırılır. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ise (X) ideali $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ile gösterilir ve sonlu gerilir denir. (Hungerford 1974)

Tanım 2.46: Bir tek eleman tarafından gerilen ideale esas ideal denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.47: Her ideali esas ideal olan halkaya esas ideal halkası denir.
(Hungerford 1974)

Tanım 2.48: Her ideali esas ideal olan tamlık bölgesine esas ideal bölgesi denir. (Hungerford 1974)

Teorem 2.49: R birimli, değişmeli bir halka ve A, R'nin boşkümeden farklı bir altkümesi olsun. Buna göre

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i : r_i \in R, a_i \in A, s \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le s \right\}$$

olur. $A = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise A'nın gerdiği ideal

$$(a) = aR = \{ar : r \in R\}$$

şeklindedir (Ash 2003).

Tanım 2.50: R değişmeli bir halka, I R'nin bir ideali ve $I \neq R$ olsun. Her $a,b \in R$ için $ab \in I$ olması $a \in I$ veya $b \in I$ olmasını gerektiriyorsa I'ya R'nin asal ideali denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.51: R, bir tamlık bölgesi olsun. Eğer R'nin sıfırdan farklı her asal ideali bir $0 \neq a \in R$'yi içeriyorsa R'ye Goldman halkası denir (Hungerford 1974).

Teorem 2.52: R, birimli değişmeli bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun.
i. J, $J \supseteq I$ olacak şekilde R'nin bir ideali ise J/I değişmeli grubu R/I'nın bir idealidir ve $r \in R$ için $r + I \in J/I$ olması için gerek ve yeter şart $r \in J$ olmasıdır.
ii. R/I'nın her J ideali $K \supseteq I$ olacak şekilde R'nin teklikle belirli K ideali için K/I şeklinde ifade edilebilir ve

$$K = \{a \in R : a + I \in J\}$$

dir (Sharp 2000).

Lemma 2.53: R birimli değişmeli bir halka, I R'nin bir ideali ve J, $J \supseteq I$ olacak şekilde R'nin bir ideali olsun. Bu durumda R/I'nın J/I idealinin, asal olması için gerek ve yeter şart J'nin R'nin asal ideali olmasıdır (Sharp 2000).

Tanım 2.54: $I \neq R$ olmak üzere I, R halkasının bir ideali olsun. R ve I dan başka, R'nin I'yı ihtiva eden ideali yoksa, I'ya R'nin maksimal ideali denir.
(Bayraktar 2006)

Tanım 2.55: R birimli değişmeli bir halka olsun. R'nin tüm maksimal ideallerinin kesişimine R'nin Jacobson radikali denir ve $Jac(R)$ ile gösterilir (Sharp 2000).

Teorem 2.56: R**,** birimli değişmeli bir halka olsun. Bu durumda R de her maksimal ideal, asal idealdir (Hungerford 1974).

Tanım 2.57: R**,** bir halka olsun. Katsayıları R de olan tüm $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinomlarının kümesi $R[x]$ ile gösterilir ve $R[x]$ kümesi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu halkaya R halkası üzerinde polinomlar halkası denir.

$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in R[x]$ olmak üzere $f(x), g(x) \in R[x]$ olsun.

i. $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i+b_i)x^i$

ii. $f(x).g(x)=\sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$, $c_i=\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$ (Çallıalp 2001; Taşçı 2007)

Tanım 2.58: R**,** bir halka olsun. Katsayıları R de olan ve değişkenleri $x_1, x_2, ..., x_n$ olan polinom halkası $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ şeklinde gösterilir ve tümevarımla

$$R[x_1, x_2, ..., x_n] = R[x_1, x_2, ..., x_{n-1}][x_n]$$

şeklinde tanımlanır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.59: $x_1, x_2, ..., x_n$ belirsizler olsun.

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ &\vdots \\ s_n &= x_1x_2\ldots x_n \end{aligned}$$

ile verilen $s_1, s_2, ...s_n$ 'e elementer simetrik fonksiyonlar denir (Dummit and Foote 2004).

Not 2.60: n .dereceden bir

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

polinomu verilsin. $p(x)$'in tüm kökleri $x_1, x_2, ...x_n$ ve

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
s_n &= x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} &= -s_1 \\
a_{n-2} &= s_2 \\
&\vdots \\
a_0 &= (-1)^n s_n
\end{aligned}
$$

dir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.61: S birimli, değişmeli bir halka ve R, S'nin "1_S" yi içeren bir alt halkası olsun. Bu durumda S, R'nin bir halka genişlemesidir denir.

S, R'nin bir halka genişlemesi ve X, S'nin bir alt kümesi olsun. R üzerinde X ile gerilen alt halka, $X \cup R$ yi içeren tüm alt halkaların kesişimidir ve $R[X]$ ile gösterilir. (Hungerford 1974)

Teorem 2.62: S, R'nin bir halka genişlemesi , $u, u_i \in S$ ve $X \subset S$ ise aşağıdakiler doğrudur.

i. $R[u]$ alt halkası; f katsayıları R de olan bir polinom yani $f \in R[x]$ olmak üzere $f(u)$ formundaki elemanlardan oluşur.

ii. $R[u_1,...,u_m]$ alt halkası; g katsayıları R de olan m değişkenli bir polinom yani $g \in R[x_1, x_2,..., x_m]$ olmak üzere, $g(u_1,u_2,...,u_m)$ formundaki elemanlardan oluşur.

iii. $R[X]$ alt halkası; herbir $u_i \in X$, n pozitif bir tamsayı ve h, katsayıları R de olan n değişkenli bir polinom olmak üzere $h(u_1,u_2,...,u_n)$ formundaki elemanlardan oluşur. (Hungerford 1974)

Tanım 2.63: $(R,+,\bullet)$ ve $(S,+,\bullet)$ iki halka olmak üzere $\varphi: R \to S$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa φ 'ye halka homomorfizmi denir.

i. $\forall x, y \in R$ için $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ dir

ii. $\forall x, y \in R$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ dir.

Bu şartlara ek olarak φ, birebir ve örten ise φ 'ye halka izomorfizmi denir.
(Taşçı 2007)

Tanım 2.64: $\varphi: R \to S$ bir halka homomorfizmi olmak üzere

$$\{r \in R : \varphi(r) = 0\}$$

kümesine φ 'nin çekirdeği denir ve *Çek* (φ) ile gösterilir (Taşçı 2007).

Teorem 2.65 (Halkalar İçin Birinci İzomorfizm Teoremi): $\phi: R \to R'$**,** bir halka homomorfizmi ise $R / Çek(\ \phi) \cong \phi(R)$ dir (Bayraktar 2006).

Not 2.66: $f: R \to S$, bir halka homomorfizmi olsun. I , S 'nin bir ideali ise $f^{-1}(I)$ da R 'nin bir idealidir (Çallıalp 2001).

Not 2.67: R,S,T birimli değişmeli halkalar**,** $f: R \to S$ ve $g: S \to T$; $f(1_R) = 1_S$, $g(1_S) = 1_T$ olmak üzere iki homomorfizm ve J , T 'nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$f^{-1}\left(g^{-1}(J)\right) = (g \circ f)^{-1}(J)$$

olur (Sharp 2000).

Tanım 2.68: R,S değişmeli halkalar ve $\varphi: R \to S$ bir halka homomorfizmi olsun.

a. I , R 'nin bir ideali olmak üzere I 'nın görüntüsü ile gerilen $(\varphi(I)) = \varphi(I) \cdot S$ idealine I 'nın S 'ye genişlemesi denir. Hangi halka homomorfizminin dikkate alındığı açıksa I 'nın S 'ye genişlemesi, genellikle I^e ile gösterilir.

b. J, S'nin bir ideali olmak üzere $\varphi^{-1}(J)$ idealine J'nin R deki kısıtlaması denir. Hangi halka homomorfizminin dikkate alındığı açıksa J'nin R deki kısıtlaması, genellikle J^c ile gösterilir.

Özel olarak R, S'nin bir althalkası ve φ doğal homomorfizm (yani $\varphi(r)=r$) ise $I \subseteq R$ nin genişlemesi $I \cdot S$ ideali ve $J \subseteq S$ nin kısıtlaması ise R'nin $J \cap R$ ideali olur. Ayrıca

i. $I \subseteq (I \cdot S) \cap R$ dir. Genel olarak I, S'ye genişlemesinin kısıtlamasının altkümesidir.

ii. $(J \cap R) \cdot S \subseteq J$ dir. Genel olarak J, R deki kısıtlamasının genişlemesini içerir.

(Sharp 2000; Dummit and Foote 2004)

Tanım 2.69: R**,** değişmeli bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ax = b$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa a, b yi böler denir ve $a|b$ ile gösterilir (Hungerford 1974).

Tanım 2.70: R, değişmeli bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $a|b$ ve $b|a$ ise a ve b ilgilidir denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.71: R, değişmeli bir halka ve $\varnothing \neq X \subset R$ olsun. $d \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa d'ye X'in en büyük ortak böleni denir.

i. Her $a \in X$ için $d|a$ dır.

ii. Her $a \in X$ için $c|a$ ise $c|d$ dir (Hungerford 1974).

Tanım 2.72: R birimli değişmeli bir halka ve $a_1, a_2, ..., a_n \in R$ elemanlarının en büyük ortak böleni "1_R" ise $a_1, a_2, ..., a_n$ aralarında asaldır denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.73: R, birimli değişmeli bir halka ve $c \in R$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa c indirgenemezdir denir.

i. c, sıfırdan farklı ve aritmetik birim değildir.

ii. $c = ab$ ise a veya b aritmetik birimdir (Hungerford 1974).

Tanım 2.74: R, birimli değişmeli bir halka ve $p \in R$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa p asaldır denir.

i. p, sıfırdan farklı ve aritmetik birim değildir.

ii. $p \mid ab$ ise $p \mid a$ veya $p \mid b$ dir (Hungerford 1974).

Tanım 2.75: R**,** bir tamlık bölgesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa R, tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölgedir denir.

i. R 'nin her sıfırdan farklı aritmetik birim olmayan a elemanı $c_1, c_2, ..., c_n$ indirgenemez olmak üzere $a = c_1 c_2 ... c_n$ olarak yazılabilir.

ii. $a = c_1 c_2 ... c_n$ ve $a = d_1 d_2 ... d_n$ (c_i, d_i indirgenemez) ise $n = m$ ve σ, $\{1, 2, ... n\}$ nin bir permütasyonu olmak üzere c_i ve $d_{\sigma(i)}$, her i için ilgilidir (Hungerford 1974).

Tanım 2.76: R tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölge ve $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in R[x]$ olsun. $f(x)$ polinomunun katsayılarının en büyük ortak bölenine f 'nin kapsamı denir ve $c(f)$ ile gösterilir. Eğer $c(f) = 1$ ise yani $f(x)$ polinomunun katsayıları aralarında asal iseler f 'ye ilkel polinom denir.

(Çallıalp 2001)

Teorem 2.77 (Gauss Teoremi): R tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölge ve $f, g \in R[x]$ olsun. f ve g ilkel polinomlar iseler $f \cdot g$ de ilkel polinomdur.

(Çallıalp 2001)

Teorem 2.78: D tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölgeyse $D[x]$ de tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölgedir (Hungerford 1974).

Teorem 2.79: Her esas ideal bölgesi tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölgedir. (Dummit and Foote 2004)

Önerme 2.80: Tek Türlü Asal Çarpanlara Ayrılabilen Bölgede sıfırdan farklı bir elemanın asal olması için gerek ve yeter şart indirgenemez olmasıdır.
(Dummit and Foote 2004)

Tanım 2.81: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise o zaman bu halkaya cisim denir (Bayraktar 2006).

Teorem 2.82: R**,** birim elemanlı değişmeli bir halka ve I, R'nin bir has ideali olsun. I'nın maksimal olması için gerek ve yeter şart R/I'nın cisim olmasıdır.
(Bayraktar 2006)

Tanım 2.83: V bir küme ve F, bir cisim olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V'ye $F-$vektör uzayı (veya F üzerinde vektör uzayı) denir:

VU1. V üzerinde bir toplama işlemi, +, vardır ve $(V,+)$ bir değişmeli gruptur.

VU2. Her $a \in F$ ve $u \in V$ için V'nin au ile gösterilen, tek türlü belirli bir elemanı vardır ve her $a,b \in F$; $u,v \in V$ için

i. $a(u+v) = au + av$

ii. $(a+b)v = av + bv$

iii. $a(bv) = (ab)v$

iv. $1_F v = v$

dir. V'nin elemanlarına vektörler, F'nin elemanlarına skalerler, $a \in F$ ve $u \in V$ için au'ya u vektörünün a skaleri ile çarpımı denir (Karakaş 2008).

Tanım 2.84: V, bir $F-$vektör uzayı ve $U \subseteq V$ olsun. Eğer U altkümesi, V için sözkonusu olan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile bir $F-$vektör uzayı ise, U 'ya V 'nin bir altvektör uzayı ya da kısaca altuzayı denir (Karakaş 2008).

Tanım 2.85: V **,** F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, V 'nin bir altkümesi olsun. Eğer

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ varsa, o taktirde G kümesine F cismi üzerinde lineer bağımlıdır denir.

Eğer

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0$$

olması her i ($i = 1, 2, ..., m$) için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa, o zaman G kümesine F cismi üzerinde lineer bağımsızdır denir (Taşçı 2005).

Tanım 2.86: V **,** bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $G = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, V 'nin bir altkümesi olsun.

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i : \alpha_i \in F \right\}$$

altuzayına G kümesi tarafından gerilen (veya üretilen) altuzay denir. Bunu $U = \langle G \rangle$ ya da $\langle v_1, v_2, ..., v_m \rangle$ ile göstereceğiz. G 'nin elemanlarına da gerenler ya da üreteçler denir. (Taşçı 2005)

Tanım 2.87: V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve U, V 'nin bir altkümesi olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, o zaman $U \subseteq V$ altkümesine V 'nin bir bazı (veya tabanı) denir:

i. U altkümesi lineer bağımsızdır.

ii. U altkümesi V 'yi gerer (Taşçı 2005).

Tanım 2.88: V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun. Bu takdirde V'nin boyutu V'nin bazındaki eleman sayısı olarak tanımlanır. V vektör uzayı sonlu bir baza sahipse V'ye sonlu boyutlu denir. V vektör uzayının boyutu $boy\, V$ ile gösterilir (Taşçı 2005).

Teorem 2.89: V sonlu n boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bu durumda V de $n+1$ vektör lineer bağımlıdır (Hacısalihoğlu 1991).

Tanım 2.90: $(F,+,\bullet)$ bir cisim olsun. F'nin boş kümeden farklı bir S alt kümesi $(F,+,\bullet)$ deki işlemlere göre bir cisim olursa S'ye F'nin alt cismi denir.
(Taşçı 2007)

Tanım 2.91: E bir cisim F, E'nin bir altcismi olsun. O zaman E'ye F'nin bir cisim genişlemesi denir ve E/F veya $E \leq F$ ile gösterilir.
(Dummit and Foote 2004; Karakaş 2008).

Tanım 2.92: K/F, bir cisim genişlemesi olsun. F üzerinde bir vektör uzayı olarak K'nin boyutuna, K/F cisim genişlemesinin derecesi denir ve $[K:F]$ ile gösterilir.
(Dummit and Foote 2004)

Tanım 2.93: K/F cisim genişlemesi olsun. Eğer $[K:F]$ sonlu ise K/F sonlu genişlemedir aksi takdirde sonsuz genişlemedir denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.94: $F \leq E$ ve $\alpha \in E$ olsun. Eğer $f(\alpha)=0$ olacak şekilde bir $f \in F[x]-\{0\}$ varsa α elemanı F üzerinde cebirsel (veya $F-$cebirsel) dir denir. Eğer α elemanı F üzerinde cebirsel değilse α elemanı F üzerinde aşkın (veya $F-$aşkın) dır denir. E'nin her elemanı $F-$cebirsel ise E cismi F'nin bir cebirsel genişlemesidir denir.

F 'nin cebirsel olmayan bir genişlemesine ise F 'nin aşkın genişlemesi denir. (Karakaş 2008)

Teorem 2.95: K/F sonlu bir cisim genişlemesi olsun. Bu durumda K/F cebirseldir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.96: F, bir cisim ve $X \subset F$ ise X'i içeren F'nin tüm altcisimlerinin arakesitine X ile gerilen altcisim denir.

F ve K bir cisim olmak üzere F, K'nin bir cisim genişlemesi ve $X \subset F$ ise $K \cup X$ ile gerilen altcisme K üzerinde X ile gerilen alt cisim denir ve $K(X)$ ile gösterilir. (Hungerford 1974)

Teorem 2.97: F ve K birer cisim, F K'nin bir cisim genişlemesi, $u, u_i \in F$ ve $X \subset F$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i. $K(u)$ altcismi; $f, g \in K[x]$ ve $g(u) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f(u)}{g(u)} = f(u)g(u)^{-1}$$

formundaki elemanlardan oluşur.

ii. $K(u_1, u_2, ..., u_m)$ altcismi; $h, k \in K(x_1, x_2, ..., x_m)$ ve $k(u_1, u_2, ..., u_m) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{h(u_1, u_2, ..., u_m)}{k(u_1, u_2, ..., u_m)} = h(u_1, u_2, ..., u_m)k(u_1, u_2, ..., u_m)^{-1}$$

formundaki elemanlardan oluşur.

iii. $K(X)$ altcismi; $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$, $u_1, u_2, ..., u_n \in X$ ve $g(u_1, u_2, ..., u_n) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f(u_1, ..., u_n)}{g(u_1, ..., u_n)} = f(u_1, ..., u_n)g(u_1, ..., u_n)^{-1}$$

formundaki elemanlardan oluşur (Hungerford 1974).

Teorem 2.98: F bir cisimse $F[x]$ tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölgedir. (Dummit and Foote 2004)

Teorem 2.99: F bir cisim, $f(x)$ sıfırdan farklı bir polinom ve $f(x), g(x) \in F[x]$ ise bu durumda ya $r(x) = 0$ ya da $der(r(x)) < der(f(x))$ olmak üzere

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$$

olacak şekilde $F[x]$ de bir tek $q(x)$ ve $r(x)$ polinom çifti vardır (Taşçı 2007).

Tanım 2.100: F, bir cisim olsun. $f(x) \in F[x]$ pozitif dereceli bir polinom olmak üzere $F[x]$ deki pozitif dereceli $g(x)$ ve $h(x)$ polinomları için $f(x)$ polinomu

$$f(x) = g(x)h(x)$$

olarak yazılamıyorsa $f(x) \in F[x]$ polinomuna F üzerinde indirgenemezdir (asaldır) denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.101: F, K'nin bir cisim genişlemesi ve $u \in F$, K üzerinde cebirsel olsun. $f \in K[x]$, derecesi $n \geq 1$ olan indirgenemez monik bir polinom olmak üzere

$$f(u) = 0 \text{ ve } g(u) = 0 \ (g \in K[x]) \Leftrightarrow f | g$$

oluyorsa f'ye u'nun minimal (indirgenemez, minimum) polinomu denir ve $\min(u, K)$ şeklinde gösterilir (Hungerford 1974; Karakaş 2008).

Teorem 2.102: E/F bir cisim genişlemesi, $\alpha \in E$, F üzerinde cebirsel ve $\min(\alpha, F)$ nin derecesi sonlu ise $F(\alpha) = F[\alpha]$ olur (Ash 2003).

Teorem 2.103: E/F bir cisim genişlemesi, $\alpha \in E$, F üzerinde cebirsel ve $\min(\alpha, F)$ nin derecesi sonlu ve n ise $[F(\alpha) : F] = n$ dir (Ash 2003).

Tanım 2.104: E ve K, F'nin cebirsel genişlemeleri, $\alpha \in E$ ve $\beta \in K$ olsun. Eğer $\min(\alpha, F) = \min(\beta, F)$ ise α ve β elemanları F üzerinde eşlenik elemanlardır denir.

İki elemanın F üzerinde eşlenik olmaları demek F üzerinde aynı indirgenemez polinomun kökleri olmaları demektir (Karakaş 2008).

Tanım 2.105: F ve K cisim olsun. $\varphi : F \to K$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa φ'ye cisim homomorfizmi denir.

i. $\forall a, b \in F$ için $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

ii. $\forall a, b \in F$ için $\varphi(ab) = \varphi(a)\phi(b)$

iii. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$

Eğer bu şartlara ek olarak ψ, birebir ve örten ise ψ'ye cisim izomorfizmi denir.
(Robledo 2007)

Tanım 2.106: K, L, M birer cisim ve K ve L, M'nin cisim genişlemeleri olsun.

i. $\sigma : K \to L$ bir homomorfizm olmak üzere her $a \in M$ için $\sigma(a) = a$ ise σ'ya $M-$homomorfizm denir.

ii. $\sigma : K \to L$ bir monomorfizm olmak üzere her $a \in M$ için $\sigma(a) = a$ ise σ'ya $M-$monomorfizm denir.

iii. $\sigma : K \to L$ bir izomorfizm olmak üzere her $a \in M$ için $\sigma(a) = a$ ise σ'ya $M-$izomorfizm denir (Ash 2003).

Teorem 2.107: E ve F, K'nin cisim genişlemeleri ve $u \in E$, $v \in F$ K üzerinde cebirsel olsun. Bu durumda u ve v nin aynı indirgenemez $f \in K[x]$ polinomunun kökleri olması için gerek ve yeter şart u yu v ye götüren ve K'yi sabit bırakan bir $K(u) \cong K(v)$ cisim izomorfizmi olmasıdır (Hungerford 1974).

Tanım 2.108: F , bir cisim ve $f \in F[x]$ pozitif dereceli bir polinom olsun. Eğer f , $F[x]$ deki lineer çarpanların bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa yani $u_i \in F$ olmak üzere

$$f(x) = u_0(x-u_1)(x-u_2)...(x-u_n)$$

ise f , F üzerinde (veya $F[x]$ de) parçalanışa sahiptir denir (Hungerford 1974).

Not 2.109: K bir cisim, x bir belirsiz, $g \in K[x]$ sabit olmayan bir polinom olsun. Bu durumda g , $K'[x]$ de lineer çarpanlarına ayrılabilecek şekilde K ’nin bir K' cisim genişlemesi vardır (Sharp 2000).

Tanım 2.110: K bir cisim, F K ’nin bir cisim genişlemesi ve $f \in K[x]$ pozitif dereceli bir polinom olsun. Eğer f , $F[x]$ de parçalanışa sahipse ve $u_1, u_2, ..., u_n$ f ’nin F deki kökleri olmak üzere $F = K(u_1, u_2, ..., u_n)$ ise F ’ye, f polinomunun K üzerindeki parçalanış cismi denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.111: D bir tamlık bölgesi, $f(x) \in D[x]$ sabit olmayan bir polinom ve $c \in D$ olmak üzere $f(c) = 0$ olsun. Eğer $(x-c)^s \mid f(x)$ fakat $(x-c)^{s+1} \nmid f(x)$ ise c ’ye $f(x)$ ’in s katlı bir kökü denir. $s = 1$ ise c ’ye basit kök ve $s > 1$ ise c ’ye çokkatlı kök denir (Asar vd 2009).

Tanım 2.112: K bir cisim ve $f \in K[x]$ indirgenemez bir polinom olsun. f ’nin K üzerindeki bir parçalanış cisminde f ’nin her kökü basit kök ise f ayrılabilirdir denir. (Hungerford 1974)

Tanım 2.113: K bir cisim ve f , $K[x]$ de bir polinom olsun. Eğer f ’nin her indirgenemez çarpanı ayrılabilir ise f ayrılabilirdir denir (Ash 2003).

Tanım 2.114: E**,** F'nin bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in E$ olsun. α, F üzerinde cebirsel ve $\min(\alpha, F)$ ayrılabilir bir polinom ise α, F üzerinde ayrılabilirdir denir. Eğer E'nin her elemanı F üzerinde ayrılabilir ise E, F'nin ayrılabilir bir genişlemesidir denir (Ash 2003).

Tanım 2.115: $\mathbb{Q}$'nun her sonlu genişlemesi ayrılabilirdir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.116: E/F**,** cebirsel bir genişleme olsun. Eğer $\alpha \in E$ iken $\min(\alpha, F)$'nin tüm kökleri E de oluyorsa E/F normaldir veya E, F üzerinde normaldir denir.
(Ash 2003)

Tanım 2.117: C**,** bir cisim olmak üzere her indirgenemez $f \in C[x]$ polinomu lineer ise C**,** cebirsel kapalıdır denir (Ash 2003).

Tanım 2.118: C/F, bir cisim genişlemesi olsun. Eğer C, F üzerinde cebirsel ve C**,** cebirsel kapalı ise C'ye F'nin cebirsel kapanışı denir (Ash 2003).

Tanım 2.119: V ve V', K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Eğer $L: V \to V'$ dönüşümü aşağıdaki LD 1 ve LD 2 şartlarını sağlarsa L'ye $K-$lineer veya lineer dönüşüm denir.

LD 1. Her $u, v \in V$ için $L(u+v) = L(u) + L(v)$

LD 2. Her $c \in K$ ve her $v \in V$ için $L(cv) = cL(v)$ (Lang 1987)

Tanım 2.120: U, V aynı F cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı ve

$$L: U \to V$$

bir lineer dönüşüm olsun. L lineer dönüşümünün görüntüsü $u \in U$ için $L(u) = v$ olacak şekildeki $v \in V$ elemanlarının kümesi olarak tanımlanır ve $\text{Im } L$ olarak gösterilir.[2] Yani

$$\text{Im } L = \{v : L(u) = v,\ u \in U \ için\}$$

dir (Taşçı 2005).

Tanım 2.121: U ve V aynı F cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı ve

$$L : U \to V$$

bir lineer dönüşüm olsun. O taktirde $L(u) = 0$ olacak şekildeki $u \in U$ elemanlarının kümesine L lineer dönüşümünün çekirdeği denir ve $Çek\ L$ olarak gösterilir. Yani

$$Çek\ L = \{u \in U : L(u) = 0\}$$

dir (Taşçı 2005).

Teorem 2.122: U, V aynı F cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı ve

$$L : U \to V$$

bir lineer dönüşüm olsun.

i. L lineer dönüşümünün görüntüsü, V 'nin alt vektör uzayıdır.

ii. L lineer dönüşümünün çekirdeği, U 'nun alt vektör uzayıdır (Taşçı 2005).

Teorem 2.123: Bir $L : V \to W$ lineer dönüşümünün birebir olması için gerek ve yeter şart $Çek\ L = \{0\}$ olmasıdır (Taşçı 2005).

Teorem 2.124: U ve V aynı F cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $L : U \to V$ içine bir lineer dönüşüm olsun. Ayrıca U 'nun boyutu n, $Çek\ L$'nin boyutu q ve $\text{Im } L$'nin boyutu s olsun. Bu taktirde $n = q + s$ dir. Diğer bir deyimle

$$boy\ U = boy\ Çek\ L + boy\ \text{Im } L$$

dir (Taşçı 2005).

---

[2] $\text{Im } L$ yerine $L(V)$ de kullanılmaktadır (Akın 2002).

Teorem 2.125: W, n boyutlu bir V vektör uzayının bir altuzayı olsun. Bu durumda $boy\ W \leq n$ olur. Eğer $boy\ W = n$ ise o zaman $V = W$ olur (Hacısalihoğlu 1991).

Tanım 2.126: V, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V den K ya tüm lineer dönüşümlerin kümesine V 'nin dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir. Ayrıca dual uzayın tanımından $V^* = L(V, K)$ yazılır (Lang 1987).

Tanım 2.127: V, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V 'nin dual uzayının bir elemanına fonksiyonel denir (Lang 1987).

Teorem 2.128: V, sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bu durumda $boy\ V^* = boy\ V$ dir (Lang 1987).

Teorem 2.129: V, K cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı ve $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ V 'nin K üzerinde bir bazı olsun. Bu durumda

$$\phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\ , & i = j \\ 0\ , & i \neq j \end{cases}$$

olacak şekilde V^* ın bir $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ bazı vardır (Hacısalihoğlu 1991).

Tanım 2.130: R, birimli bir halka ve A, toplamsal değişmeli bir grup olsun. Eğer $R \times A \to A$ fonksiyonu ((r, a) ikilisinin görüntüsü ra ile gösterilir), her $r, s \in R$ ve $a, b \in A$ için aşağıdaki şartları sağlarsa, bu fonksiyon ile birlikte A kümesine sol $R-$modül denir.

M1. $(r+s)a = ra + sa$

M2. $r(a+b) = ra + rb$

M3. $(rs)a = r(sa)$

M4. $1a = a$ (Lang 1965; Hungerford 1974)

Not 2.131: Tanım 2.132 den başlamak üzere bu bölümün sonuna kadar “ $A-$modül”, “sol $A-$modül” anlamına gelmektedir.

Tanım 2.132: A**,** birimli değişmeli bir halka ve M, bir $A-$modül olsun. Eğer $aM=0 \ (a\in A)$ olması $a=0$ olmasını gerektiriyorsa M’ye faithful modül denir. (Lang 1965)

Not 2.133: A birimli değişmeli bir halka olmak üzere A birimli olduğundan A’nın kendi üzerinde bir faithful modül olduğuna dikkat ediniz (Lang 1965).

Tanım 2.134: M ve N, $R-$modül olsun. Eğer her $x,y\in M$ ve her $r,s\in R$ için $f(rx+sy)=rf(x)+sf(y)$ oluyorsa f’ye $R-$modül homomorfizmi denir. Eğer $M=N$ oluyorsa, f’ye $R-$modül endomorfizmi denir. f’nin çekirdeği ve görüntüsü sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

i. f **’**nin çekirdeği $\textit{Çek}\, f=\{x\in M : f(x)=0\}$ şeklinde tanımlanır.

ii. f ’nin görüntüsü $\operatorname{Im} f=\{f(x) : x\in M\}$ şeklinde tanımlanır **(**Ash 2003).

Tanım 2.135: R, birimli bir halka ve M, bir $R-$modül olsun. Eğer her $x,y\in M$ ve her $r,s\in R$ için $rx+sy\in N$ oluyorsa N’ye M’nin altmodülü denir (Ash 2003).

Tanım 2.136: R birimli değişmeli bir halka, M R üzerinde bir modül, G M’nin bir altmodülü ve $J\neq\varnothing$ olmak üzere $J\subseteq M$ olsun.

$$\{r\in R : her\ j\in J\ için\ rj\in G\}$$

R’nin bir idealidir ve $(G :_R J)$ veya $(G:J)$ ile gösterilir. Özel olarak $G=0$ ise

$$\{r\in R : her\ j\in J\ için\ rj=0\}$$

ideali, J’nin sıfırlayıcı ideali olarak adlandırılır ve $(0:J)$, $(0:_R J)$ veya $sfr(J)$ ile gösterilir (Sharp 2000).

Önerme 2.137: $R \subseteq S$ olmak üzere R, S birimli değişmeli halkalar, M bir $R-$modül olarak düşünüldüğünde sonlu n tane eleman tarafından gerilen bir $S-$modül, $s \in S$ ve I, R'nin $sM \subseteq IM$ olacak şekildeki bir ideali olsun. Bu durumda

$$s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n \in \left(0 :_S M\right)$$

olacak şekilde $a_i \in I\left(i = 1, 2, ..., n\right)$ vardır (Sharp 2000).

Teorem 2.138: M **,** bir $R-$modül ve $H_1, H_2, ..., H_n$ M'nin n tane altmodülü ise,

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

kümesi de M'nin bir altmodülüdür (Taşçı 2007).

Tanım 2.139: M, bir $R-$modül ve X, M'nin bir altkümesi olsun. M'nin X'i içeren tüm alt modüllerinin arakesiti, X ile gerilen alt modül olarak adlandırılır. (Hungerford 1974)

Tanım 2.140: M, bir $R-$modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. N, sonlu bir altküme tarafından geriliyorsa, N, sonlu geriliyor veya N, sonlu tiptendir denir. (Dummit and Foote 2004; Samuel 2008)

Teorem 2.141: R, birimli bir halka, M, bir $R-$modül ve A, M'nin herhangi bir altkümesi olsun. A ile gerilen alt modül,

$$RA = \left\{r_1a_1 + r_2a_2 + .. + r_ma_m : r_1, r_2, ..., r_m \in R, a_1, a_2, ..., a_m \in A, m \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

olur ($A = \varnothing$ ise $RA = \left\{0_M\right\}$ dir). A sonlu bir kümeyse ve $A = \left\{a_1, a_2, ..., a_n\right\}$ ise , A ile gerilen M'nin alt modülü,

$$RA = Ra_1 + Ra_2 + ... + Ra_n$$

dir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.142: A birimli, değişmeli bir halka ve M, bir $A-$modül olsun. Eğer M'nin her altmodülü sonlu geriliyor ise M'ye Noetherian modül denir (Samuel 2008).

Tanım 2.143: A, birimli değişmeli bir halka olsun. Eğer A, bir $A-$modül olarak Noetherian modül ise A'ya Noetherian halka denir. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki tanım da verilebilir:

A'nın ideallerinin kümesi I_A olmak üzere $(I_A, \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi artan zincir şartını sağlıyorsa A'ya Noetherian halka denir (Sharp 2000; Samuel 2008).

Not 2.144: A**,** bir Noetherian halka ve E, sonlu gerilen bir $A-$modül olsun. Bu durumda E, Noetheriandır (Samuel 2008).

Tanım 2.145: R**,** birimli değişmeli bir halka olsun. Eğer

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_i \supseteq I_{i+1} \cdots$$

olmak üzere R'nin ideallerinin her $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ailesi için $i \in \mathbb{N}$ (her i için) $I_k = I_{k+1}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa R'ye Artinian halka denir (Sharp 2000).

Tanım 2.146: R birimli bir halka**,** M bir $R-$modül ve $m \in M$ olsun. Eğer $rm = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $r \in R$ varsa m'ye torsion eleman denir.
(Dummit and Foote 2004)

Tanım 2.147: R bir esas ideal bölgesi**,** E bir $R-$modül ve E_t de, E'nin tüm torsion elemanlarından oluşan alt modül olsun.[3] $E_t = \{0\}$ ise E, torsion serbest dir denir.
(Lang 1965)

---

[3] E_t'ye E'nin torsion alt modülü denir (Lang 1965).

Tanım 2.148: M, bir $R-$modül olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, M için bir serbest tabandır denir.

i. E, M için bir geren kümesidir yani M 'nin her elemanı R deki katsayılarla çarpılan E 'nin elemanlarının sonlu bir toplamıdır.

ii. E, bir serbest kümedir yani

$$r_1e_1+...+r_ne_n=0\Rightarrow r_1=r_2=.....=r_n=0$$

dır (Adamson 1972).

Tanım 2.149: M **,** bir $R-$modül ve $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, M için bir serbest taban olsun. E 'nin eleman sayısına, M 'nin rankı denir (Adamson 1972).

Tanım 2.150: Serbest tabana sahip olan modüle serbest modül denir.
(Adamson 1972)

Teorem 2.151: Bir esas ideal bölgesi üzerinde sonlu tipten bir serbest $F-$modülünün her S altmodülü de serbesttir (Mac Lane and Birkhoff 1979).

Teorem 2.152: A bir esas ideal bölgesi, M rankı n olan serbest bir $A-$modül ve M', M 'nin altmodülü olsun. Bu durumda M' nün rankı en fazla n dir (Samuel 2008).

Teorem 2.153: Bir esas ideal bölgesi üzerindeki sonlu gerilen torsion-serbest modül, serbesttir (Mac Lane and Birkhoff 1979).

Tanım 2.154: R birimli değişmeli bir halka olsun. Eğer M aynı zamanda bir halka olan $R-$modülse ve her $x,y\in M$ ve her $r\in R$ için

$$r(xy)=(rx)y=x(ry)$$

ise M 'ye R üzerinde bir cebir veya $R-$cebir denir (Ash 2003).

Tanım 2.155: R birimli bir halka olsun. $a_{ij} \in R$ olmak üzere n tane satır ve n tane sütündan oluşan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

tabloya R üzerinde $n \times m$ tipinden matris denir ve A, B, C veya a_{ij}, $i.$satır $j.$sütun elemanını göstermek üzere $\left(a_{ij}\right)$ ile gösterilir.

$n \times n$ tipinden matrise kare matris denir ve $n \times n$ tipinden tüm matrislerin kümesi $Mat_n R$ ile gösterilir (Hungerford 1974).

Tanım 2.156: $n \times 1$ tipinden bir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matrisine sütun vektörü denir (Lang 1987).

Tanım 2.157: Bir K cismi üzerinde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matrisi verilsin. A 'nın j .sütunu A^j ile gösterilir ve

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. A^j aynı zamanda sütun vektörü olarak da adlandırılır (Lang 1987).

Tanım 2.158: R birimli bir halka, M bir tabanı $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, N bir tabanı $W=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ olan serbest $R-$modüller ve f, M den N ye bir modül homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$f\left(v_j\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i,\ j=1,2,...,n$$

olacak şekilde $a_{ij}\in R$ vardır ve $m\times n$ tipinden $A=\left(a_{ij}\right)$ matrisine, V ve W tabanlarına göre f 'nin matrisi denir. Eğer $M=N$ ve $U=W$ ise bu matrise f 'nin U 'ya göre matrisi denir (Hungerford 1974; Ash 2003).

Tanım 2.159: R birimli değişmeli bir halka ve $B_1,B_2,...,B_n$ ve C R üzerinde modüller olsun. Eğer her $i=1,2,...,n$ ve her $r,s\in R$, $b_j\in B_j$ ve $b,b'\in B_i$ için

$$f\left(b_1,...,b_{i-1},rb+sb',b_{i+1},...b_n\right)=rf\left(b_1,...,b_{i-1},b,b_{i+1},...,b_n\right)+sf\left(b_1,...,b_{i-1},b',b_{i+1},...b_n\right)$$

ise $f:B_1\times B_2\times...\times B_n\to C$ fonksiyonu $R-$multilineerdir denir. Eğer $C=R$ ise f 'ye $n-$lineer veya $R-$multilineer form denir. $C=R$ ve $B_1=B_2=...=B_n=B$ olması durumunda ise f 'ye B üzerinde $R-$multilineer form denir.

B,C $R-$modüller ve $f:B^n\to C$ bir $R-$multilineer form olsun. Eğer bir $i\neq j$ için $b_i=b_j$ iken $f\left(b_1,b_2,...,b_n\right)=0$ oluyorsa f alternedir denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.160: R, birimli değişmeli bir halka olsun. $d\left(I_n\right)=1_R$ olacak şekildeki tek $d:Mat_nR\to R$ alterne $R-$multilineer formuna Mat_nR üzerinde determinant fonksiyonu denir.

$A\in Mat_nR$ olmak üzere A matrisinin determinantı $d\left(A\right)\in R$ elemanıdır ve $|A|$ veya det A ile gösterilir (Hungerford 1974; Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.161: R, birimli değişmeli bir halka ve A, R üzerinde $n \times n$ tipinden bir matris olsun. A_{ij}, A'nın i. satır ve j. sütününu silmekle elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ tipinden matris olmak üzere $\left|A_{ij}\right|$ ye A'nın (i,j) deki minörü denir (Hungerford 1974).

Önerme 2.162: $A=(a_{ij})$, birimli değişmeli bir R halkası üzerinde $n \times n$ tipinden bir matris olsun. $i=1,2,...,n$ için

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

ve her $j=1,2,...,n$ için,

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

dır (Hungerford 1974).

Not 2.163: K bir cisim ve $i \in \{1,2,...,n\}$ için

$$A^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

olmak üzere $A^1, A^2, ...A^n$, K^n nin sütun vektörleri olsun. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantı $D\left(A^1, A^2, ..., A^n\right)$ şeklinde gösterilir (Lang 1987).

Teorem 2.164: K bir cisim ve $A^1, A^2, ...A^n$, K^n nin sütun vektörleri olsun. $D\left(A^1, A^2, ..., A^n\right)=0$ olması için gerek ve yeter şart $A^1, A^2, ..., A^n$ nin K üzerinde lineer bağımlı olmasıdır (Lang 1987).

Not 2.165: R**,** birimli değişmeli bir halka ve F, bir $R-$modül, $w_1, w_2, ..., w_n \in F$ ve $A=\left(a_{ij}\right)$, R de $n \times n$ tipinden bir matris olsun.

$$\begin{matrix} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + ... + a_{1n}w_n = v_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + ... + a_{nn}w_n = v_n \end{matrix}$$

olmak üzere her $i=1,2,...,n$ için $v_i = 0$ ise her i için $|A|w_i = 0$ dır.

(Dummit and Foote 2004)

Tanım 2.166: A birimli değişmeli bir halka, E sonlu ranka sahip bir serbest A-modül ve u, E'nin bir endomorfizmi olsun. (e_i), E'nin bir tabanıysa ve $\left(a_{ij}\right)$, u'nun (e_i) tabanına göre matrisi ise u'nun izi ve determinantı sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $Tr(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

ii. $\det(u) = \det\left(a_{ij}\right)$ (Samuel 2008)

Önerme 2.167: B, birimli değişmeli bir halka ve B, sonlu n rankına sahip serbest bir $A-$modül olmak üzere A, B'nin althalkası olsun. $y \to xy$ şeklinde tanımlanan m_x fonksiyonu $A-$modül B'nin bir endomorfizmidir (Samuel 2008).

Tanım 2.168: B, birimli değişmeli bir halka ve B, sonlu n rankına sahip serbest bir $A-$modül olmak üzere A, B'nin althalkası olsun. $x \in B$ olmak üzere B ve A ya bağlı olarak x'in izi ve normu sırasıyla m_x endomorfizminin izi ve determinantı olarak tanımlanır ve sırasıyla $Tr_{B/A}(x)$ (veya $Tr(x)$) ve $N_{B/A}(x)$ (veya $N(x)$) şeklinde gösterilir (Samuel 2008).

Not 2.169: Tanım 2.166 ve Tanım 2.168 dikkate alındığında x'in izi ve normu A'nın elemanlarıdır ve $x, x' \in B$, $a \in A$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:

i. $Tr(x + x') = Tr(x) + Tr(x')$, $Tr(ax) = aTr(x)$

ii. $N(xx') = N(x)N(x')$, $N(a^n) = a^n$, $N(ax) = a^n N(x)$ (Samuel 2008)

Önerme 2.170: E/F, n**.** dereceden ayrılabilir bir genişleme ve $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ E den E'nin cebirsel kapanışına veya E'yi içeren F'nin bir L normal genişlemesine olan birbirinden farklı $F-$monomorfizmler olsun. Bu durumda

$$N_{E/F}(x) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(x) \quad , \quad Tr_{E/F}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x)$$

olur (Ash 2003).

Tanım 2.171: U, V, W bir K cismi üzerinde vektör uzayları ve $g: U \times V \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa g'ye bilineer dönüşüm denir.

i. Her bir sabit $u \in U$ için $v \to g(u,v)$ lineerse yani her $v, v_1, v_2 \in V$ ve her $c \in K$ için

$$\begin{aligned} g(u, v_1 + v_2) &= g(u, v_1) + g(u, v_2) \\ g(u, cv) &= cg(u, v) \end{aligned}$$

dir.

ii. Her bir sabit $v \in V$ için $u \to g(u,v)$ dönüşümü lineerse yani her $u, u_1, u_2 \in U$ ve her $c \in K$ için

$$\begin{aligned} g(u_1 + u_2, v) &= g(u_1, v) + g(u_2, v) \\ g(cu, v) &= cg(u, v) \end{aligned}$$

dir (Lang 1987).

Tanım 2.172: V, bir K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer $\varphi: V \times V \to K$ dönüşümü bir $K-$bilineer dönüşüm ise, φ'ye V üzerinde bir bilineer form denir (Milne 2008).

Tanım 2.173: V, bir K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun ve bir $\psi: V \times V \to K$, $K-$bilineer formu verilsin. $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$, V'nin bir tabanı olsun. ψ'nin bu tabana göre diskriminantı

$$\det\left(\psi\left(e_i,e_j\right)\right)=\begin{vmatrix}\psi\left(e_1,e_1\right) & \psi\left(e_1,e_2\right) & \cdots & \psi\left(e_1,e_m\right)\\ \psi\left(e_2,e_1\right) & \psi\left(e_2,e_2\right) & \cdots & \psi\left(e_2,e_m\right)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \psi\left(e_m,e_1\right) & \psi\left(e_m,e_2\right) & \cdots & \psi\left(e_m,e_m\right)\end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır (Milne 2008).

Tanım 2.174: V, bir K cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun ve bir $\psi : V\times V \to K$ $K-$bilineer formu verilsin. Eğer ψ, aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağlarsa ψ 'ye dejenere olmayan bilineer form denir.

i. V 'nin her tabanı için ψ 'nin diskriminantı sıfırdan farklıdır.

ii. ψ 'nin sol çekirdeği yani $\left\{v\in V \,\middle|\, Her\ x\in V\ için\ \psi\left(v,x\right)=0\right\}$ kümesi sıfırdan ibarettir.

iii. ψ 'nin sağ çekirdeği yani $\left\{v\in V \,\middle|\, Her\ x\in V\ için\ \psi\left(x,v\right)=0\right\}$ kümesi sıfırdan ibarettir (Milne 2008).

Tanım 2.175:

i. Eğer $\operatorname{Im}\alpha = Çek\beta$ ise

$$X\xrightarrow{\alpha}Y\xrightarrow{\beta}Z$$

homomorfizm çifti (Y de) tamdır denir.

ii. Homomorfizmlerin bir

$$\ldots\to X_{n-1}\to X_n\to X_{n+1}\to\ldots \tag{1}$$

dizisi verilsin. Bu dizide alınan her

$$X_i\to X_{i+1}\to X_{i+2}$$

homomorfizm çifti (X_{i+1} de) tamsa (1) ile verilen diziye tam dizi denir.

(Dummit and Foote 2004)

Önerme 2.176: A,B,C bir R halkası üzerindeki $R-$modüller olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B$ dizisinin (A da) tam olması için gerek ve yeter şart ψ 'nin birebir olmasıdır.

ii. $B \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0$ dizisinin (C de) tam olması için gerek ve yeter şart φ 'nin örten olmasıdır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.177: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0$ tam dizisine kısa tam dizi denir. (Dummit and Foote 2004)

Tanım 2.178: A, B iki nesne ve $f : A \to B$ yapıyı koruyan bir dönüşüm olsun. f dönüşümüne A dan B ye morfizm denir. A dan B ye tüm morfizmlerin kümesi $Mor(A,B)$ ile gösterilir (Ash 2003).

Not 2.179: Tanım 2.178 de, f 'nin yapıyı korumasıyla örneğin A ve B topolojik uzay ise f 'nin sürekli bir dönüşüm olması; A ve B grup ise f 'nin grup homomorfizmi veya A ve B modül ise f 'nin modül homomorfizmi olması kastedilmektedir.
(Ash 2003)

Tanım 2.180: $\mathcal{C}$; $A,B,C,...$ şeklinde gösterilen nesnelerin bir sınıfı olsun. Aşağıdakilerle birlikte $\mathcal{C}$ sınıfına kategori denir.

i. Herhangi iki $Mor(A,B)$ ve $Mor(A',B')$ kümesi için

$$Mor(A,B) = Mor(A',B') \Leftrightarrow A = A' \text{ ve } B = B'$$

olmak üzere $\{Mor(A,B) : A,B \in C\}$ kümesi.

ii. C 'nin nesnelerinin her bir (A,B,C) üçlüsü için aşağıdaki iki şartı sağlayan

$$Mor(B,C) \times Mor(A,B) \to Mor(A,C) \quad (2)$$

fonksiyonu.

I. Birleşme Özelliği: $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$; $\mathcal{C}$ 'nin morfizmleri ise

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dir.

II. Birim Eleman Özelliği: $\mathcal{C}$ ’nin her B nesnesi için

$$1_B \circ f = f \text{ ve } g \circ 1_B = g$$

olacak şekilde bir $1_B : B \to B$ morfizmi vardır (Hungerford 1974).

Not 2.181: $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfizmleri için (2) ile verilen fonksiyon $(g, f) \to g \circ f$ şeklinde verilir ve $g \circ f : A \to C$, f ve g nin bileşkesi olarak adlandırılır (Hungerford 1974).

Tanım 2.182: $\mathcal{C}$**,** bir kategori ve I, $\mathcal{C}$**’**nin bir nesnesi olsun. $\mathcal{C}$**’**nin her bir K nesnesi için tek bir $I \to K$ morfizmi varsa I ’ya üniversal nesne denir (Hungerford 1974).

Not 2.183: $\mathcal{C}$, bir kategori olsun. $\mathfrak{D}$ de nesneleri $\mathcal{C}$ ’nin morfizmleri olan yeni bir kategori olsun. $f : A \to B$ ve $f' : A' \to B'$, $\mathcal{C}$ de iki morfizm ise (ve dolayısıyla $\mathfrak{D}$ ’nin nesneleri ise) $\mathfrak{D}$ de $f \to f'$ morfizmi

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\psi"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.1. Nesneleri başka bir kategorinin morfizmleri olan bir kategoride bir $f \to f'$ morfizminin değişmeli diyagram yoluyla verilişi

diyagramı değişmeli yani

$$\psi \circ f = f' \circ \varphi$$

olacak şekilde $\mathcal{C}$ deki (φ, ψ) çifti olarak tanımlanır (Lang 1965).

Not 2.184: $\mathcal{C}$, bir kategori olsun. $\mathfrak{D}$ de nesneleri $\mathcal{C}$ ’nin morfizmleri olan yeni bir kategori olsun. $f : A \to B$ ve $f' : A \to B'$, $\mathcal{C}$ de iki morfizm ise $\mathfrak{D}$ de $f \to f'$ morfizmi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

Şekil 2.2. Nesneleri tanım kümesi sabit olan morfizmlerden oluşan bir kategorinin morfizmleri olan bir kategoride bir $f \to f'$ morfizminin değişmeli diyagram ile verilişi

diyagramı değişmeli yani $g \circ f = f'$ olacak şekilde $\mathcal{C}$ deki $g : B \to B'$ morfizmidir. (Lang 1965)

Tanım 2.185: C, bir kategori ve $f : A \to B$, C de bir morfizm olsun Eğer $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde C de bir $g : B \to A$ morfizmi varsa f 'ye denklik denir. $f : A \to B$ bir denklik ise A ve B denktir denir (Hungerford 1974).

Teorem 2.186: C, bir kategori olsun. C deki herhangi iki üniversal nesne denktir. (Hungerford 1974)

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Yerelleştirme

Bu bölüm boyunca "halka" ile "birimli değişmeli halka", "halka homomorfizmi" ile "1 i 1 e götüren halka homomorfizmi" ve "$A-$modül" ile "sol $A-$modül" anlaşılacaktır.

Tanım 3.1.1: A, bir halka ve S de A'nın bir altkümesi olsun. $1 \in S$ ve $x, y \in S$ için $xy \in S$ oluyorsa, S'ye, A'nın çarpımsal altkümesi denir (Lang 1965).

Teorem 3.1.2: $1 \neq 0$ olmak üzere A bir halka ve S de A'nın çarpımsal bir alt kümesi olsun. Bu durumda bir $S^{-1}A$ halkası ve $\pi(S)$'nin her elemanı $S^{-1}A$ da aritmetik birim olacak şekilde bir $\pi : A \to S^{-1}A$ halka homomorfizmi vardır.
(Dummit and Foote 2004)

İspat: $a \in A$, $s \in S$ olmak üzere (a, s) ikililerini düşünelim ve bu ikililerin oluşturduğu küme üzerinde

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \exists s_1 \in S : s_1 (s'a - sa') = 0 \tag{3}$$

ile verilen bir bağıntı tanımlayalım. Bu durumda (3) bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. (3) ile verilen bağıntının denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

Aşağıdaki D1, D2, D3 şartlarında sırasıyla yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin sağlandığı gösterilmiştir.

D1) $(a, s) \in A \times S$ için $1(sa - as) = 0$ ve $1 \in S$ olduğundan $(a, s) \sim (a, s)$ elde edilir.

D2)

$$(a_1,s_1)\sim(a_2,s_2)\Rightarrow \exists s\in S: s(s_2a_1-s_1a_2)=0 \quad \Rightarrow -s(s_2a_1-s_1a_2)=0$$
$$\Rightarrow ss_1a_2-ss_2a_1=0$$
$$\Rightarrow s(s_1a_2-s_2a_1)=0$$
$$\Rightarrow (a_2,s_2)\sim(a_1,s_1)$$

D3)

$$(a_1,s_1)\sim(a_2,s_2)\Rightarrow \exists s_4\in S: s_4(s_2a_1-s_1a_2)=0 \tag{4}$$

$$(a_2,s_2)\sim(a_3,s_3)\Rightarrow \exists s_5\in S: s_5(s_3a_2-s_2a_3)=0 \tag{5}$$

elde edilir. (4) ve (5) den sırasıyla

$$s_3s_5s_4s_2a_1-s_3s_5s_4s_1a_2=0 \tag{6}$$

$$s_1s_4s_5s_3a_2-s_1s_4s_5s_2a_3=0 \tag{7}$$

elde edilir. (6) ve (7) taraf tarafa toplanırsa

$$s_2s_4s_5(s_3a_1-s_1a_3)=0$$

elde edilir. Bu ise $(a_1,s_1)\sim(a_3,s_3)$ olması demektir. Böylece verilen bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir (a,s) elemanının denklik sınıfını $\frac{a}{s}$ ile gösterelim ve $S^{-1}A$ da bu bağıntıya göre tüm denklik sınıflarının kümesini göstersin. Şimdi de $S^{-1}A$ üzerinde

$$\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}=\frac{s'a+sa'}{ss'}$$

ile verilen bir toplama işlemi tanımlayalım. Öncelikle bu işlemin iyi tanımlı olup olmadığını kontrol etmeliyiz.

$$\frac{a_1}{s_1}=\frac{a}{s} \text{ ve } \frac{a_1'}{s_1'}=\frac{a'}{s'}$$

olsun.

$$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_1'}{s_1'}=\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}$$

yani

$$\frac{s_1'a_1+s_1a_1'}{s_1s_1'}=\frac{s'a+sa'}{ss'} \tag{8}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a}{s} \Rightarrow \exists s_2 : s_2\left(sa_1 - s_1 a\right) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{a_1'}{s_1'} = \frac{a'}{s'} \Rightarrow \exists s_3 \in S : s_3\left(s'a_1' - s_1'a'\right) = 0 \tag{10}$$

olup (9) ve (10) dan sırasıyla

$$s_2 s_3 s' s_1'\left(sa_1 - s_1 a\right) = 0 \tag{11}$$

$$s_2 s_3 s s_1\left(s'a_1' - s_1'a'\right) = 0 \tag{12}$$

elde edilir. (11) ve (12) taraf tarafa toplanırsa

$$s_2 s_3\left[s's_1'\left(sa_1 - s_1 a\right) + ss_1\left(s'a_1' - s_1'a'\right)\right] = 0 \tag{13}$$

eşitliğine ulaşılır. (13) den de

$$s_2 s_3\left[ss'\left(s_1'a_1 + s_1 a_1'\right) - s_1 s_1'\left(s'a + sa'\right)\right] = 0 \tag{14}$$

elde edilir. (8)'in sağlanması için

$$s_5\left[ss'\left(s_1'a_1 + s_1 a_1'\right) - s_1 s_1'\left(s'a + sa'\right)\right] = 0 \tag{15}$$

olacak şekilde bir $s_5 \in S$ olmalıdır. (14) eşitliği de (15)'in sağlandığını göstermektedir. Böylece verilen toplama işlemi iyi tanımlıdır. Ayrıca S'nin kapalılık özelliğinden, $S \subset A$ ve A'nın halka olmasından dolayı verilen toplama işlemi kapalıdır.

Şimdi de $\left(S^{-1}A,+\right)$'nın değişmeli grup olduğunu gösterelim.

Aşağıdaki G1, G2, G3, G4 şartlarında sırasıyla değişme, birleşme, birim eleman, ters eleman özelliklerinin sağlandığı gösterilmiştir.

G1) $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$ olsun. A'nın değişmeli bir halka olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{s_2 a_1 + s_1 a_2}{s_1 s_2} = \frac{s_1 a_2 + s_2 a_1}{s_2 s_1} = \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_1}{s_1}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left(S^{-1}A,+\right)$ değişmelidir.

G2) $\dfrac{a_1}{s_1},\dfrac{a_2}{s_2},\dfrac{a_3}{s_3}\in S^{-1}A$ olsun.

$$\frac{a_1}{s_1}+\left(\frac{a_2}{s_2}+\frac{a_3}{s_3}\right)=\frac{a_1}{s_1}+\left(\frac{s_3a_2+s_2a_3}{s_2s_3}\right)=\frac{\left(s_2s_3\right)a_1+s_1\left(s_3a_2+s_2a_3\right)}{s_1\left(s_2s_3\right)}$$

$$=\frac{a_1s_2s_3+a_2s_1s_3+a_3s_1s_2}{s_1s_2s_3} \tag{16}$$

$$\left(\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}\right)+\frac{a_3}{s_3}=\frac{s_2a_1+s_1a_2}{s_1s_2}+\frac{a_3}{s_3}=\frac{s_3\left(s_2a_1+s_1a_2\right)+\left(s_1s_2\right)a_3}{\left(s_1s_2\right)s_3}=\frac{a_1s_2s_3+a_2s_1s_3+a_3s_1s_2}{s_1s_2s_3} \tag{17}$$

olup (16) ve (17) den

$$\frac{a_1}{s_1}+\left(\frac{a_2}{s_2}+\frac{a_3}{s_3}\right)=\left(\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}\right)+\frac{a_3}{s_3}$$

elde edilir.

G3) $\dfrac{a}{s}\in S^{-1}A$ olsun. $0\in A$ ve $1\in S$ olup $\dfrac{0}{1}\in S^{-1}A$ olur. Ayrıca

$$\frac{a}{s}+\frac{0}{1}=\frac{1.a+s.0}{s.1}=\frac{a}{s}=\frac{0}{1}+\frac{a}{s}$$

olup $\left(S^{-1}A,+\right)$'nın birimi $\dfrac{0}{1}$ dir.

G4) $\dfrac{a}{s}\in S^{-1}A$ olsun. $\dfrac{-a}{s}\in S^{-1}A$ ve

$$\frac{a}{s}+\frac{\left(-a\right)}{s}=\frac{sa+s\left(-a\right)}{ss}=\frac{sa-sa}{ss}=\frac{0}{ss}=\frac{0}{1}=\frac{\left(-a\right)}{s}+\frac{a}{s}$$

olup $\dfrac{a}{s}$'nin tersi $\dfrac{-a}{s}$ dir.

Böylece $\left(S^{-1}A,+\right)$, değişmeli bir gruptur.

$S^{-1}A$ üzerinde bir de çarpma işlemi tanımlayalım.

$$\frac{a}{s}\bullet\frac{a'}{s'}=\frac{aa'}{ss'}$$

olsun. Bu işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$\frac{a}{s}=\frac{a'}{s'}\ ,\ \ \frac{a_1}{s_1}=\frac{a_1'}{s_1'}$$

olsun.

$$\frac{a}{s}\bullet\frac{a_1}{s_1}=\frac{a'}{s'}\bullet\frac{a_1'}{s_1'}$$

olduğunu yani

$$\frac{aa_1}{ss_1}=\frac{a'a_1'}{s's_1'} \tag{18}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\frac{a}{s}=\frac{a'}{s'}\Rightarrow \exists s_3\in S: s_3\left(s'a-sa'\right)=0$$

$$\frac{a_1}{s_1}=\frac{a_1'}{s_1'}\Rightarrow \exists s_4\in S: s_4\left(s_1'a_1-s_1a_1'\right)=0$$

olup

$$s_3\left(s'a-sa'\right)=0\Rightarrow s_3s_4s_1'a_1\left(s'a-sa'\right)=0 \tag{19}$$

$$s_4\left(s_1'a_1-s_1a_1'\right)=0\Rightarrow s_3s_4sa'\left(s_1'a_1-s_1a_1'\right)=0 \tag{20}$$

elde edilir. (19) ve (20) taraf tarafa toplanırsa

$$s_3s_4s's_1'aa_1-s_3s_4ss_1a'a_1'=s_3s_4\left(s's_1'aa_1-ss_1a'a_1'\right)=0 \tag{21}$$

elde edilir. (18)'in sağlanması için

$$s_5\left(s's_1'aa_1-ss_1a'a_1'\right)=0$$

olacak şekilde bir $s_5\in S$ olmalıdır. (21) eşitliği ise (18)'in sağlandığını göstermektedir. Ayrıca S'nin kapalılık özelliğinden, $S\subset A$ ve A'nın halka olmasından dolayı verilen çarpma işlemi kapalıdır. Geriye verilen çarpma işleminin değişme, birleşme, dağılma ve birim eleman özelliklerini sağladığını göstermek kalıyor.

Aşağıdaki H1, H2, H3, H4 şartlarında sırasıyla değişme, birleşme, dağılma ve birim eleman özelliklerinin sağlandığı gösterilmiştir.

H1) $\dfrac{a_1}{s_1}, \dfrac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$ olsun.

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} = \frac{a_2 a_1}{s_2 s_1} = \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{a_1}{s_1}$$

olup $S^{-1}A$ değişmelidir.

H2) $\dfrac{a_1}{s_1}, \dfrac{a_2}{s_2}, \dfrac{a_3}{s_3} \in S^{-1}A$ olsun.

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{a_3}{s_3} \right) = \frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{a_2 a_3}{s_2 s_3} \right) = \frac{a_1 \left(a_2 a_3 \right)}{s_1 \left(s_2 s_3 \right)} = \frac{\left(a_1 a_2 \right) a_3}{\left(s_1 s_2 \right) s_3} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} \cdot \frac{a_3}{s_3} = \left(\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} \right) \cdot \frac{a_3}{s_3}$$

olup birleşme özelliği sağlanır.

H3) $\dfrac{a_1}{s_1}, \dfrac{a_2}{s_2}, \dfrac{a_3}{s_3} \in S^{-1}A$ olsun.

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3} \right) = \frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{s_3 a_2 + s_2 a_3}{s_2 s_3} \right) = \frac{a_1 a_2 s_3 + a_1 a_3 s_2}{s_1 s_2 s_3} \qquad (22)$$

ve

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} + \frac{a_1 a_3}{s_1 s_3} = \frac{s_1 s_3 a_1 a_2 + s_1 s_2 a_1 a_3}{s_1 s_2 s_1 s_3} = \frac{s_1 \left(s_3 a_1 a_2 + s_2 a_1 a_3 \right)}{s_1 \left(s_1 s_2 s_3 \right)} = \frac{s_1}{s_1} \cdot \frac{s_3 a_1 a_2 + s_2 a_1 a_3}{s_1 s_2 s_3}$$

$$= \frac{a_1 a_2 s_3 + a_1 a_3 s_2}{s_1 s_2 s_3}$$

olup buradan da

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1 a_2 s_3 + a_1 a_3 s_2}{s_1 s_2 s_3} \qquad (23)$$

elde edilir. (22) ve (23) den

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3} \right) = \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_3}{s_3}$$

elde edilir. $S^{-1}A$, değişmeli olduğundan sağ dağılma kuralı yani

$$\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} \right) \cdot \frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_3}{s_3} + \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{a_3}{s_3}$$

eşitliği de sağlanır.

H4) $1 \in A$ ve $1 \in S$ olup $\frac{1}{1} \in S^{-1}A$ dır. Dolayısıyla $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ için

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a.1}{s.1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{s} = \frac{a}{s}$$

olup $\frac{1}{1}$, $S^{-1}A$ 'nın çarpma işlemine göre birim elemanıdır.

Şimdi $\pi(S)$ nin her elemanı $S^{-1}A$ da aritmetik birim olacak şekilde bir $\pi : A \to S^{-1}A$ halka homomorfizminin varlığını gösterelim.

$\pi : A \to S^{-1}A$ dönüşümünü $\pi(a) = \frac{a}{1}$ olarak tanımlayalım. $a \in A$ ve $1 \in S$ olup π kapalıdır. Ayrıca

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \exists s \in S : s(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1}$$

olup π iyi tanımlıdır ve

$$\pi(a_1 + a_2) = \frac{a_1 + a_2}{1} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} = \pi(a_1) + \pi(a_2)$$

$$\pi(a_1 a_2) = \frac{a_1 a_2}{1} = \frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{1} = \pi(a_1) \cdot \pi(a_2)$$

$$\pi(1) = \frac{1}{1} = 1$$

olur. Ayrıca $s \in S$ için $\pi(s) = \frac{s}{1}$, $\frac{1}{s} \in S^{-1}A$ ve

$$\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} = \frac{1}{1}$$

olup $\pi(S)$ nin her elemanı $S^{-1}A$ da aritmetik birimdir.

Not 3.1.3: $0 \in S$ ise $S^{-1}A$ 'nın sadece $\frac{0}{1}$ elemanından ibaret olduğuna dikkat ediniz. (Lang 1965)

Not 3.1.4: A**,** sıfır bölensizse ve $0 \notin S$ ise (3) ile verilen denklik bağıntısının

$$\left(a,s\right)\sim\left(a',s'\right)\Leftrightarrow\left(s'a-sa'\right)=0$$

ile verilen denklik bağıntısına indirgendiğine dikkat ediniz (Hungerford 1974).

Sonuç 3.1.5: $1\neq 0$ olmak üzere A bir halka ve S de A'nın "0" ı içermeyen çarpımsal bir alt kümesi olsun. S sıfır bölen içermiyorsa $\pi\left(a\right)=\dfrac{a}{1}$ ile verilen $\pi:A\rightarrow S^{-1}A$ dönüşümü monomorfizmdir[4] (Dummit and Foote 2004).

İspat: S **'**nin sıfır bölen içermediğini kabul edelim. π'nin bir monomorfizm olduğunu göstermeliyiz. Teorem 3.1.2'den dolayı π'nin bir homomorfizm olduğunu biliyoruz. Geriye birebir olduğunu göstermek kalıyor.

$$\pi\left(a_1\right)=\pi\left(a_2\right)\Rightarrow\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{1}\Rightarrow\exists s\in S:s\left(a_1-a_2\right)=0$$

olup S sıfır bölen içermediğinden ve $s\neq 0$ olduğundan $\left(a_1-a_2\right)=0$ ve dolayısıyla $a_1=a_2$ elde edilir. Yani π birebirdir.

Sonuç 3.1.6: $1\neq 0$ olmak üzere A bir halka ve S de $0\notin S$ olmak üzere, A'nın sıfır bölen olmayan elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda A, $S^{-1}A$'nın bir althalkasına izomorftur (Ash 2003).

İspat: Öncelikle S'nin çarpımsal bir küme olduğu gösterilmelidir.

i. Her $0\neq x\in A$ için $x\cdot 1=1\cdot x=x\neq 0$ olduğundan "1" sıfır bölen değildir.Bu yüzden $1\in S$ dir.

ii. $x,y\in S$ olsun. Böylece x ve y sıfır bölen değildir ve $x,y\neq 0$ dır.

---

[4] Bu π dönüşümüne kanonik içerme dönüşümü de denilmektedir (Lang 1994).

Her $0 \neq z \in A$ için y sıfır bölen olmadığından $y \cdot z \neq 0$ ve x sıfır bölen olmadığından $x \cdot (y \cdot z) \neq 0$ olup $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \neq 0$ elde edilir. Böylece $x \cdot y$ sıfır bölen değildir. Bu yüzden $x \cdot y \in S$ dir.

Böylece S çarpımsaldır ve S sıfır bölen içermediğinden Sonuç 3.1.5'den dolayı A, $S^{-1}A$'nın bir althalkasına izomorftur.

Tanım 3.1.7: Teorem 3.1.2 de verilen $S^{-1}A$ halkasına A'nın S'ye göre kesirler halkası veya A'nın S deki yerelleştirmesi denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 3.1.8: A bir halka, M, bir $R-$modül ve S de A'nın çarpımsal bir altkümesi olsun. $S \times M$ üzerinde

$$(d,m) \sim (e,n) \Leftrightarrow \exists x \in S : x(dn - em) = 0$$

ile verilen bir bağıntı tanımlayalım. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısına göre bir (d,m) elemanının denklik sınıfı $\frac{m}{d}$ ile denklik sınıflarının kümesi ise $S^{-1}M$ ile gösterilir. $S^{-1}M$ kümesi

$$\frac{m}{d} + \frac{n}{e} = \frac{em + dn}{de} \quad , \quad \frac{r}{d} \cdot \frac{m}{e} = \frac{rm}{de}$$

işlemleriyle birlikte bir $S^{-1}A-$modüldür ve $S^{-1}M$'ye M'nin S'ye göre kesirler modülü veya M'nin S deki yerelleştirmesi denir (Dummit and Foote 2004).

Not 3.1.9: Dikkat edilirse modüllerdeki yerelleştirmede halkalardaki yerelleştirmede olduğu gibi halkanın sıfır bölensiz olması gerekmiyor.

Önerme 3.1.10: A, bir halka ve P, A'nın bir asal ideali olsun. Bu durumda $A-P$, P'nin A daki tümleyeni olmak üzere $A-P$, A'nın çarpımsal bir altkümesidir.
(Lang 1965)

İspat: $1 \in P$ olsa $P = A$ olur. Bu ise P'nin A dan farklı olmasıyla çelişir. Böylece $1 \notin P$ ve dolayısıyla $1 \in A - P$ dir. Ayrıca

$$x, y \in A - P \Rightarrow x, y \in A \wedge x, y \notin P$$

dir. $x \cdot y \in P$ olsa P asal ideal olduğundan $x \in P$ veya $y \in P$ olur. Bu ise $x, y \notin P$ olmasıyla çelişir. O halde $x \cdot y \notin P$ ve dolayısıyla $x \cdot y \in A - P$ dir. Böylece $A - P$, A'nın çarpımsal bir altkümesidir.

Not. 3.1.11: A bir halka, P A'nın bir asal ideali ve $A - P$, P'nin A daki tümleyeni olsun. $S = A - P$ denilirse $S^{-1}A$ halkası A_p ile gösterilir (Lang 1965).

Önerme 3.1.12: A, bir halka ve S, A'nın aritmetik birimlerinin kümesi olsun. Bu durumda S çarpımsaldır (Lang 1965).

İspat:

i. "1", A'nın aritmetik birimi olduğundan $1 \in S$ dir.

ii. $x, y \in S$ yani x ve y, A'nın aritmetik birimi olsun.

$$(xy)\left(y^{-1}x^{-1}\right) = \left(y^{-1}x^{-1}\right)(xy) = 1$$

olup xy, A'nın aritmetik birimidir. Dolayısıyla $xy \in S$ dir.

Not 3.1.13: Önerme 3.1.12 de verilen S kümesi genellikle A^* ile gösterilir. A bir cisimse A^*, A'nın sıfırdan farklı elemanlarının kümesi olur ve $S^{-1}A$, A'ya izomorftur[5] (Lang 1965)

Önerme 3.1.14: A**,** bir tamlık bölgesi ve S, A'nın sıfırdan farklı elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda S, çarpımsal bir kümedir ve $S^{-1}A$ bir cisimdir (Lang 1965).

---

[5] Teorem 3.1.2 deki dönüşüm dikkate alınırsa her $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ için $\pi\left(s^{-1}a\right) = \frac{\left(s^{-1}a\right)}{1} = \frac{a}{s}$ olup π örtendir. Sonuç 3.1.5 den dolayı π izomorfizmdir.

İspat:

i. $1 \neq 0$ olup $1 \in S$ dir.

ii. $x, y \in S$ için $x, y \neq 0$ dır. A tamlık bölgesi olduğundan $xy \neq 0$ olup $xy \in S$ dir.

$S^{-1}A$'nın cisim olduğunu göstermek için $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$ olmak üzere $\frac{a}{s}$'nin aritmetik birim olduğu gösterilmelidir. Çünkü Teorem 3.1.2 de $S^{-1}A$'nın birimli değişmeli bir halka olduğu gösterildi.

$a = 0$ olsa $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$ olacağından $a \neq 0$ dır ve böylece $a \in S$ olup $\frac{s}{a} \in S^{-1}A$ dır. Buradan

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{s}{a} \cdot \frac{a}{s} = \frac{1}{1}$$

olup $\frac{a}{s}$ aritmetik birimdir.

Not 3.1.15: A ve S, Önerme 3.1.14 deki gibi olsun. Bu durumda Sonuç 3.1.5 den dolayı A'yı $S^{-1}A$'nın altkümesi olarak düşünebiliriz ve $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ olmak üzere

$$\frac{a}{s} = s^{-1}a$$

yazabiliriz (Lang 1965).

Tanım 3.1.16: A**,** bir tamlık bölgesi ve S, A'nın sıfırdan farklı elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda $S^{-1}A$ cisimdir. Bu cisme A'nın kesirler cismi veya bölüm cismi denir (Lang 1965).

Tanım 3.1.17: F bir cisim ve F üzerinde bir x belirsizinin polinom halkası $F[x]$ olsun. $F[x]$ in kesirler cismi $F(x)$ ile gösterilir ve

$$F(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in F[x] \; ve \; g(x) \neq 0 \right\}$$

olur. $F(x)$ e F üzerindeki rasyonel fonksiyonlar cismi denir (Asar vd 2009).

Teorem 3.1.18: A, bir halka olmak üzere A'nın her has ideali bir maksimal ideal tarafından kapsanır (Ash 2003).

İspat: J, A'nın bir has ideali olsun.

$$Z = \{L : L, J \text{ 'yi içeren bir has ideal }\}$$

kümesini düşünelim. Z kümesini içermeye göre yarı sıralı yapalım (Bunu yapmak mümkündür). Z kümesinde bir zincir alalım. Bu zincire K diyelim. $K \subseteq Z$ olduğundan, K'nin elemanları J'yi içerir ve dolayısıyla K'nin elemanlarının birleşimi de J'yi içerir. Bu durumda K için bir üst sınırı K'nin elemanlarının birleşimi alabiliriz. Dolayısıyla "Zorn Lemması"ndan Z'nin bir maksimal elemanı vardır. Yani her has ideal, bir maksimal idealin içindedir.

Tanım 3.1.19: A bir halka olsun. Eğer A'nın tek bir maksimal ideali varsa A halkasına yerel halka denir (Lang 1965).

Teorem 3.1.20: A**,** bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir.

i. A, bir yerel halkadır.

ii. A'nın aritmetik birim olmayan elemanları A'nın bir has ideali tarafından kapsanır.

iii. A'nın aritmetik birim olmayan elemanları bir ideal oluşturur (Hungerford 1974).

İspat:

i $\Rightarrow$ ii: A, bir yerel halka, M A'nın maksimal ideali ve $a \in A$, A'nın aritmetik birim olmayan bir elemanı olsun. A'nın tek maksimal ideali olduğundan Teorem 3.1.18 den dolayı $(a) \subset M$ olmalıdır. Dolayısıyla $a \in M$ dir. Burada $a \in A$, A'nın herhangi bir aritmetik birimi olduğundan, A'nın tüm aritmetik birim olmayan elemanları M dedir. Dikkat edilirse M maksimal olduğundan $M \neq A$ dır.

ii$\Rightarrow$iii: $a \in A$, A'nın aritmetik birim olmayan bir elemanı ve hipotezden dolayı bir $M \neq A$ ideali de A'nın aritmetik birim olmayan elemanlarını içersin. Göstereceğiz ki M, sadece A'nın aritmetik birim olmayan elemanlarından ibarettir. Gerçekten, A'nın aritmetik birim olan bir elemanı M de olsa $M = A$ olacağından A'nın aritmetik birim olan bir elemanı M de olamaz. Böylece A sadece aritmetik birim olmayan elemanlardan ibarettir.

iii$\Rightarrow$i: A'nın aritmetik birim olmayan elemanlarının kümesi bir ideal olsun. Bu ideali I ile gösterelim. Göstereceğiz ki I, A'nın tek maksimal idealidir. $I \subset J$ ve $I \neq J$ olsun. $x \in J - I$ ise x aritmetik birimdir. Dolayısıyla $J = A$ dır. Bu ise I'nın A'nın maksimal ideali olması demektir. Ayrıca K, A'nın bir has ideali olsa K da aritmetik birim olmayacağından her zaman $K \subseteq I$ olur. Böylece I, A'nın tek maksimal idealidir.

Teorem 3.1.21: A**,** bir yerel halka ve M, A'nın maksimal ideali olsun. Buna göre M, A'nın aritmetik birim olmayan elemanlarının kümesidir.
(Lang 1994)

İspat: A**,** bir yerel halka, x A'nın aritmetik birim olmayan bir elemanı olsun. $x \notin M$ olduğunu kabul edelim. x'in gerdiği ideal xA olur (A birimli ve değişmeli olduğundan x in gerdiği ideal $\langle x \rangle = xA$ dır ve eğer $\langle x \rangle = A$ olsa x aritmetik birim olacağından $\langle x \rangle = xA \neq A$ dir). "Zorn Lemması" ndan dolayı her has ideal bir maksimal idealin içinde ve $x \notin M$ olduğundan xA, M den farklı bir maksimal idealin içinde olmalıdır. Bu ise A nin M den başka maksimal idealinin olmaması ile çelişir. Dolayısıyla $x \in M$ olmalıdır yani x, A nın aritmetik birim olmayan bir elemanı ise $x \in M$ dir.

Şimdi $x \in M$ olsun. x aritmetik birim olsa $x.x^{-1} = 1 \in M$ olur ki bu ise $M = A$ olması demektir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $x \in M$ ise x aritmetik birim değildir.

Böylece M, aritmetik birim olmayan elemanlardan ibarettir.

Örnek 3.1.22: A bir tamlık bölgesi, P A'nın bir asal ideali, $S = A - P$ ve $A_P = S^{-1}A$ olmak üzere A_P**,** maksimal ideali $M_P = \left\{ \frac{x}{s} : x \in P, s \in A, s \notin P \right\}$ olan bir yerel halkadır ve $M_P \cap A = P$ dir (Lang 1994).

Çözüm: A_P'nin yerel halka olduğunu göstermek için Teorem 3.1.20 den dolayı A_p'nin aritmetik birim olmayan elemanlarının kümesinin bir ideal olduğunu göstermeliyiz.

$$A_P = \left\{ \frac{x}{s} : x \in A, s \in A - P \right\}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan A_p'nin aritmetik birimlerinin kümesi

$$T = \left\{ \frac{x}{s} : x \in A - P, s \in A - P \right\}$$

olur. Çünkü, $x \in A - P$, $s \in A - P$ olmak üzere $\frac{x}{s} \cdot \frac{s}{x} = \frac{1}{1} = \frac{s}{x} \cdot \frac{x}{s}$ ve $\frac{s}{x} \in A_P$ dir. Böylece T deki her eleman aritmetik birimdir. Tersine $\frac{x}{s} \in A_P$, aritmetik birim ve $\frac{x}{s}$ nin tersi $\frac{x_1}{s_1}$ olsa P'nin ideal olduğu da dikkate alınırsa

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{x_1}{s_1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{xx_1}{ss_1} = \frac{1}{1} \Rightarrow \exists u \in A - P : u\left(xx_1 - ss_1\right) = 0$$
$$\Rightarrow xx_1 - ss_1 = 0 \Rightarrow xx_1 = ss_1$$
$$\Rightarrow xx_1 \in A - P \Rightarrow x \in A - P \wedge x_1 \in A - P$$

olacağından $\frac{x}{s} \in T$ bulunur. Böylece T, A_P'nin aritmetik birimlerinden ibarettir. Dolayısıyla A_P'nin aritmetik birim olmayan elemanlarının kümesi

$$A_P - T = L = \left\{ \frac{x}{s} : x \in P, s \in A - P \right\}$$

olur. Geriye L'nin A_P'nin bir ideali olduğunu göstermek kalıyor.

I1. $$\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2} \in L \Rightarrow \frac{x_1}{s_1} - \frac{x_2}{s_2} = \frac{x_1 s_2 - x_2 s_1}{s_1 s_2}$$

olur. P asal ideal ve $x_1, x_2 \in P$ olduğundan $x_1 s_2 - x_2 s_1 \in P$ olur. Ayrıca $A-P$, çarpımsal altküme ve $s_1, s_2 \in A-P$ olduğundan $s_1 s_2 \in A-P$ dir. Dolayısıyla $\frac{x_1}{s_1} - \frac{x_2}{s_2} \in L$ dir.

I2. $\frac{x}{s} \in A_P$ ve $\frac{x_1}{s_1} \in L$ olsun.

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{x_1}{s_1} = \frac{xx_1}{ss_1}$$

olup P bir ideal ve $x_1 \in P$ olduğundan $xx_1 \in P$ dir. Ayrıca $A-P$, çarpımsal bir alt küme ve $s, s_1 \in A-P$ olduğundan $ss_1 \in A-P$ dir. Böylece

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{x_1}{s_1} = \frac{xx_1}{ss_1} \in L$$

elde edilir.

I3. A_P değişmeli olduğundan $\frac{x}{s} \in A_P$ ve $\frac{x_1}{s_1} \in L$ olmak üzere

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{x_1}{s_1} = \frac{xx_1}{ss_1} = \frac{x_1}{s_1} \cdot \frac{x}{s} \in L$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.1.20 ve Teorem 3.1.21 den dolayı A_p, maksimal ideali

$$L = M_P = \left\{ \frac{x}{s} : x \in P, s \in A, s \notin P \right\}$$

olan bir yerel halkadır.

Şimdi de $M_P \cap A = P$ olduğunu gösterelim: $x \in P$ ise $x = \frac{x}{1}$ olduğundan M_P'nin tanımından dolayı $x \in M_P$ dir. Ayrıca P, A'nın asal ideali olduğundan $x \in A$ dır. Böylece $x \in M_P \cap A$ olup

$$P \subseteq M_P \cap A \tag{24}$$

elde edilir. Tersine $y \in M_P \cap A$ olsun. Dolayısıyla $y \in M_P$ ve $y \in A$ dır.

$$y \in M_P \Rightarrow y = \frac{x}{s} \ \left(x \in P, s \in A - P\right) \Rightarrow x = sy \in P$$

yazılabilir. P asal olduğundan $s \in P$ veya $y \in P$ dir. Fakat $s \notin P$ olduğundan $y \in P$ olmalıdır. Böylece

$$M_P \cap A \subseteq P \tag{25}$$

elde edilir. (24) ve (25) den $M_P \cap A = P$ bulunur.

Tanım 3.1.23: A bir halka ve P, A'nın bir asal ideali olmak üzere A_P yerel halkasına A'nın P deki yerel halkası veya A'nın P deki yerelleştirmesi denir.
(Lang 1965; Dummit and Foote 2004)

Teorem 3.1.24: A bir tamlık bölgesi, S A'nın "0" ı içermeyen çarpımsal bir alt kümesi ve I, $S^{-1}A$' nın bir ideali olsun. Bu durumda,

$$I = S^{-1}\left(I \cap A\right)$$

olur (Lang 1994).

İspat: $y \in S^{-1}\left(I \cap A\right)$ ise $y = \frac{x}{s}$ $\left(x \in I \cap A, s \in S\right)$ olur. I, $S^{-1}A$'nın bir ideali ve $x \in I$, $\frac{1}{s} \in S^{-1}A$ olduğundan $x \cdot \frac{1}{s} = \frac{x}{s} \in I$ elde edilir. Böylece

$$S^{-1}\left(I \cap A\right) \subseteq I \tag{26}$$

olur. Tersine $z \in I$ olsun. I, $S^{-1}A$'nın ideali olduğundan $z = \frac{a}{s}$ $\left(a \in A, s \in S\right)$ yazılabilir. Buradan $zs = a$ yazılır. I, $S^{-1}A$'nın bir ideali, $z \in I$ ve $s \in S^{-1}A$ olduğundan $zs \in I$ elde edilir. $zs = a \in A$ olduğundan $zs \in I \cap A$ ve dolayısıyla $z \in S^{-1}\left(I \cap A\right)$ elde edilir. Böylece

$$a' \subseteq S^{-1}\left(a' \cap A\right) \tag{27}$$

bulunur. (26) ve (27) den $I = S^{-1}\left(I \cap A\right)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.25: A, bir halka ve S, A'nın "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi olsun. Bu durumda S^{-1} ile çarpma altında A'nın ideallerinin çarpımsal sistemi, $S^{-1}A$'nın ideallerinin çarpımsal sistemine homomorf olarak dönüştürülür (Lang 1965).

İspat: $J(A)$ ve $J(S^{-1}A)$ sırasıyla A ve $S^{-1}A$'nın ideallerinin kümesini göstersin. $\psi_S : J(A) \to J(S^{-1}A)$ dönüşümü $\psi_S(I) = S^{-1}I$ şeklinde tanımlansın. Öncelikle ψ_S'nin kapalı olduğunu göstermek için $S^{-1}I$'nın $S^{-1}A$'nın bir ideali olduğunu göstermeliyiz: $\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2} \in S^{-1}I$ olsun. $\frac{x_1}{s_1} - \frac{x_2}{s_2} = \frac{x_1 s_2 - x_2 s_1}{s_1 s_2}$ yazılır. $x_1, x_2 \in I$ ve I, A'nın bir ideali olduğundan $x_1 s_2 - x_2 s_1 \in I$ olur. Ayrıca $s_1, s_2 \in S$ ve S, A'nın çarpımsal bir alt kümesi olduğundan $s_1 s_2 \in S$ dir. Böylece $\frac{x_1}{s_1} - \frac{x_2}{s_2} \in S^{-1}I$ elde edilir. Şimdi de $\frac{x}{s} \in S^{-1}A$ ve $\frac{x_1}{s_1} \in S^{-1}I$ olsun. $\frac{x}{s} \cdot \frac{x_1}{s_1} \in S^{-1}I$ olduğunu gösterelim. $\frac{x}{s} \cdot \frac{x_1}{s_1} = \frac{x x_1}{s s_1}$ yazılır. $x_1 \in I$, $x \in A$ ve I, A'nın bir ideali olduğundan $x x_1 \in I$ olur. Ayrıca $s s_1 \in S$ olup $\frac{x}{s} \cdot \frac{x_1}{s_1} \in S^{-1}I$ elde edilir. A değişmeli olduğundan sağ ideal olma şartı da sağlanacağından $S^{-1}I$, $S^{-1}A$'nın bir idealidir. Böylece ψ_S kapalıdır. Ayrıca $I_1 = I_2$ ise soldan S^{-1} ile çarpma altında $S^{-1}I_1 = S^{-1}I_2$ olacağından ψ_S iyi tanımlıdır.

En son olarak I_1, I_2 A'nın herhangi iki ideali olmak üzere $\psi_S(I_1 \cdot I_2) = \psi_s(I_1) \cdot \psi_S(I_2)$ olduğunu yani $S^{-1}(I_1 \cdot I_2) = (S^{-1}I_1) \cdot (S^{-1}I_2)$ olduğunu göstermeliyiz. $\frac{x}{s} \in S^{-1}(I_1 \cdot I_2)$ olsun. $x = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$ ($a_i \in I_1, b_i \in I_2$) yazılabilir. Böylece

$$\frac{x}{s} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{s} = \frac{a_1 b_1}{s} + \frac{a_2 b_2}{s} + ... + \frac{a_n b_n}{s} = \frac{a_1}{s} \cdot \frac{b_1}{1} + \frac{a_2}{s} \cdot \frac{b_2}{1} + ... + \frac{a_n}{s} \cdot \frac{b_n}{1}$$

olup $1 \le i \le n$ olmak üzere $\frac{a_i}{s} \in S^{-1}I_1$, $\frac{b_i}{1} \in S^{-1}I_2$ olduğundan $\frac{x}{s} \in (S^{-1}I_1) \cdot (S^{-1}I_2)$ bulunur. Böylece

$$S^{-1}\left(I_1 \cdot I_2\right) \subseteq \left(S^{-1}I_1\right)\cdot\left(S^{-1}I_2\right) \tag{28}$$

elde edilir. Tersine $y \in \left(S^{-1}I_1\right)\cdot\left(S^{-1}I_2\right)$ olsun. Dolayısıyla

$$y = \frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{b_1}{t_1} + \frac{a_2}{s_2}\cdot\frac{b_2}{t_2} + \ldots + \frac{a_n}{s_n}\cdot\frac{b_n}{s_n} \quad \left(a_i \in I_1, b_i \in I_2, s_i, t_i \in S\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$y = \frac{a_1 b_1}{s_1 t_1} + \frac{a_2 b_2}{s_2 t_2} + \ldots + \frac{a_n b_n}{s_n t_n}$$

elde edilir. $1 \le i \le n$ olmak üzere $a_i b_i \in I_1 I_2$ ve $s_i t_i \in S$ olduğundan $\frac{a_i b_i}{s_i t_i} \in S^{-1}\left(I_1 I_2\right)$ dir.

$S^{-1}\left(I_1 \cdot I_2\right)$ bir ideal olduğundan $y = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{s_i t_i} \in S^{-1}\left(I_1 \cdot I_2\right)$ olur. Böylece

$$\left(S^{-1}I_1\right)\cdot\left(S^{-1}I_2\right) \subseteq S^{-1}\left(I_1 \cdot I_2\right) \tag{29}$$

dir. (28) ve (29) dan $S^{-1}\left(I_1 \cdot I_2\right) = \left(S^{-1}I_1\right)\cdot\left(S^{-1}I_2\right)$ bulunur.

Lemma 3.1.26: A bir tamlık bölgesi, S A'nın "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve I, A'nın bir ideali olsun. $S^{-1}I$'nın birim ideal olması için gerek ve yeter şart $I \cap S \neq \varnothing$ olmasıdır. Başka bir deyişle $S^{-1}I$'nın has ideal olması için gerek ve yeter şart $I \cap S = \varnothing$ olmasıdır (Lang 1994; Ash 2003).

İspat: $S^{-1}I$, birim ideal ise $S^{-1}I = S^{-1}R$ olur. Böylece $\frac{x}{s} = \frac{1}{1}$ olacak şekilde $\frac{x}{s} \in S^{-1}I$ vardır. Buradan $l\left(x - s\right) = 0$ olacak şekilde en az bir $l \in S$ vardır. A bir tamlık bölgesi ve $l \neq 0$ olduğundan $x - s = 0$ ve dolayısıyla $x = s \in S \cap I \neq \varnothing$ olur.

Tersine $I \cap S \neq \varnothing$ olsun. $s \in S \cap I$ ise $\frac{s}{s} = \frac{1}{1} \in S^{-1}I$ olup $S^{-1}I$, $S^{-1}A$'nın bir ideali olduğundan $S^{-1}A = S^{-1}I$ elde edilir. Bu ise $S^{-1}I$'nın birim ideal olması demektir.

Not 3.1.27: Lemma 3.1.26'nın A'nın bir halka olması durumunda da geçerli olduğuna dikkat ediniz.

3.2. Tam genişlemeler

Bu bölümde "$A-$modül", "sol $A-$modül" anlamına gelmektedir.

Teorem 3.2.1: A, bir tamlık bölgesi ve x, A'yı içeren bir L cisminin elemanı olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar birbirine denktir.

INT 1. $xM \subset M$ olacak şekilde sıfırdan farklı sonlu gerilen bir $A-$modül $M \subset L$ vardır.

INT 2. $a_i \in A$ ve $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, x elemanı bir

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0 \qquad (30)$$

denklemini sağlar (Lang 1994).[6]

İspat: INT 2 şartının doğru olduğu kabul edilsin. x, A'yı içeren bir L cisminin elemanı ve

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0 = 0 \ , \qquad b_i \in A, \ \text{n} \geq 1$$

olsun. Buradan,

$$x^n = -\left(b_0 + b_1 x + ... + b_{n-1}x^{n-1}\right)$$

elde edilir.

$M = \left\langle 1, x, x^2, ..., x^{n-1} \right\rangle$ olsun.

$$M = \left\{a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} : a_i \in A\right\}$$

$$\begin{aligned} xM &= \left\{a_0 x + a_1 x^2 + ... + a_{n-1}x^n : a_i \in A\right\} \\ &= \left\{a_0 x + a_1 x^2 + ... + a_{n-1}\left(-\left(b_0 + b_1 x + ... + b_{n-1}x^{n-1}\right)\right) : a_i \in A\right\} \\ &= \left\{(-a_{n-1}b_0)1 + \left(a_0 - a_{n-1}b_1\right)x + ... + \left(a_{n-2} - a_{n-1}b_{n-1}\right)x^{n-1} : a_i \in A\right\} \end{aligned}$$

---

[6] (30) denklemi tam denklem olarak adlandırılır. Bu denkleme, A üzerinde x ile sağlanan tam bağımsız denklem de denilmektedir (Zariski and Samuel 1958; Lang 1994).

olup, $xM \subset M \subset L$ dir. Böylece INT 1 şartı sağlanır. Tersine INT 1 şartının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda, $xM \subset M$ ve $M \neq 0$ olacak şekilde sonlu gerilen bir $M = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$ vardır. Dolayısıyla $a_{ij} \in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned} xv_1 &= a_{11}v_1 + ... + a_{1n}v_n \\ &\vdots \\ xv_n &= a_{n1}v_1 + .. + a_{nn}v_n \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} &(a_{11} - x)v_1 + ... + a_{1n}v_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + ... + (a_{nn} - x)v_n = 0 \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} &(x - a_{11})v_1 + ... + (-a_{1n}v_n) = 0 \\ &\vdots \\ &(-a_{n1}v_1) + ... + (x - a_{nn})v_n = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $M \neq \{0\}$ olduğundan ve Not 2.165 den dolayı,

$$\begin{vmatrix} (x - a_{11}) & \dots & (-a_{1n}) \\ \vdots & & \\ (-a_{n1}) & \dots & (x - a_{nn}) \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

olmalıdır. (31)'in sol tarafındaki determinant açılırsa, x için A üzerinde bir tam denklem elde edilir. Dolayısıyla INT 2 şartı sağlanır.

Tanım 3.2.2: A, bir tamlık bölgesi ve x, A'yı içeren bir L cisminin elemanı olsun. INT 1 veya INT 2 şartı sağlanırsa x, A üzerinde tamdır veya kısaca $A-$tam dır denir.[7] (Narkiewicz 1990; Lang 1994).

Bazı kitaplarda aşağıda olduğu gibi daha esnek bir tanım verilmektedir:

---

[7] "x, A üzerinde tamamen bağımsızdır" da denilmektedir. (Zariski and Samuel 1958)

$R \subseteq S$ olmak üzere R, S birimli değişmeli halkalar ve $s \in S$ olsun. s, $R[x]$ deki monik bir polinomun kökü ise s, R üzerinde tamdır denir (Dummit and Foote 2004).

Önerme 3.2.3: A, bir tamlık bölgesi; K, A'nın bölüm cismi ve x, K üzerinde cebirsel olsun. Bu durumda cx, A üzerinde tam olacak şekilde A'nın bir $c \neq 0$ elemanı vardır (Lang 1994).

İspat: x, K üzerinde cebirsel olduğundan $\frac{a_i}{s_i} \in K\left(a_i \in A, s_i \in A - \{0\}\right)$ ve $\frac{a_n}{s_n} \neq 0$ olmak üzere, bir

$$\frac{a_n}{s_n} x^n + \ldots + \frac{a_0}{s_0} = 0 \tag{32}$$

denklemi vardır. (32)'nin her iki tarafı $\left(s_0 s_1 \ldots s_n\right)^n$ ile çarpılırsa

$$s_n^{\,n-1}\left(s_0.s_1 \ldots s_{n-1}\right)^n x^n + s_0 s_1 \ldots s_{n-2} s_n^{\,n}\left(s_0.s_1 \ldots s_{n-1}\right)^{n-1} x^{n-1} + \ldots + s_0^{\,n-1} s_1^{\,n} \ldots s_{n-1}^{\,n} s_n^{\,n} = 0$$

elde edilir. Böylece $y = \left(s_0.s_1 \ldots s_{n-1}\right)x$ ve

$$s_n^{\,n-1} = b_n,\ s_0 s_1 \ldots s_{n-2} s_n^{\,n} = b_{n-1}, \ldots, s_0^{\,n-1} s_1^{\,n} \ldots s_{n-1}^{\,n} s_n^{\,n} = b_0$$

denilirse, $b_i \in A\left(1 \leq i \leq n\right)$ olmak üzere

$$b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + \ldots b_0 = 0 \tag{33}$$

olur. (33)'ün her iki tarafı $b_n^{\,n-1}$ ile çarpılırsa

$$\left(b_n y\right)^n + \ldots + b_0 b_n^{\,n-1} = 0$$

elde edilir. $c = b_n s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$ alınırsa cx'in A üzerinde tam olduğu görülür.

Tanım 3.2.4: $A \subseteq B$ olmak üzere A, B tamlık bölgesi olsun. Eğer B'nin her elemanı, A üzerinde tam ise B, A üzerinde tamdır denir[8] (Lang 1994).

---

[8] "B, A'nın tam genişlemesidir" de denilmektedir (Dummit and Foote 2004).

Bazı kitaplarda aşağıda olduğu gibi daha esnek bir tanım yapılmaktadır:

$R \subseteq S$ olmak üzere R, S birimli değişmeli halkalar olsun. S'nin her elemanı R üzerinde tamsa S, R üzerinde tamdır veya S, R'nin tam genişlemesidir denir. (Dummit and Foote 2004)

Not 3.2.5: $A \subseteq B \subseteq C$ olmak üzere A, B, C tamlık bölgesi olsun. B, sonlu gerilen bir $A-$modül ve C de sonlu gerilen bir $B-$modül ise C, sonlu gerilen bir $A-$modüldür (Alaca and Williams 2004)

İspat: $c \in C$ olsun. C, sonlu gerilen bir $B-$modül olduğundan

$$C = Bc_1 + Bc_2 + ... + Bc_n$$

olacak şekilde $c_1, c_2, ..., c_n \in C$ vardır. Böylece

$$c = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j$$

olacak şekilde $x_1, x_2, ..., x_n \in B$ vardır. Yine B, sonlu gerilen bir $A-$modül olduğundan

$$B = Ab_1 + Ab_2 + ... + Ab_m$$

olacak şekilde $b_1, b_2, ...b_m \in B$ vardır. Böylece $j = 1, 2, ..., n$ için

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_i$$

olacak şekilde $a_{ij} \in A$ vardır. Dolayısıyla,

$$c = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_i \right) c_j$$

elde edilir. Böylece

$$C = Ab_1c_1 + ... + Ab_mc_n$$

olup C, sonlu gerilen bir $A-$modüldür.

Önerme 3.2.6: $A \subseteq B$ olmak üzere A, B tamlık bölgesi olsun. B, A üzerinde tam ve sonlu gerilen bir $A-$cebir ise, B sonlu gerilen bir $A-$modüldür (Lang 1994).

İspat: Bu önermeyi B'nin halka gerenleri üzerine tümevarımla ispatlayabiliriz. $n=1$ olsun. $x \in B$ için $B = A[x]$ olduğunu kabul edelim.

$$B = A[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n : a_i \in A\}$$

olur. $x \in B$ ve B, A üzerinde tam olduğundan

$$x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0 = 0$$

olacak şekilde $b_i \in A$ vardır. Dolayısıyla B, bir modül olarak $1, x, ..., x^{m-1}$ ile gerilir. Sonuç olarak verilen önerme $n=1$ için doğrudur.

Şimdi de verilen önermenin $n=k$ için doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$B = A[x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}]$ olsun. $B' = A[x_1, x_2, ..., x_k]$ olmak üzere $B = B'[x_{k+1}]$ olduğunu biliyoruz. B, A üzerinde tam olduğundan B' de A üzerinde tamdır. Ayrıca B' sonlu gerilen bir $A-$cebirdir. Tümevarım kabulümüzden B', sonlu gerilen bir $A-$modüldür. Diğer taraftan $B = B'[x_{k+1}]$, verilen önermenin $n=1$ için doğruluğundan sonlu bir $B'-$modüldür (Burada B, A üzerinde tam olduğundan B'nin B' üzerinde de tam olduğuna ve B'nin $B'-$cebir olduğuna dikkat ediniz. Böylece verilen önermenin şartları sağlanır). B, sonlu gerilen bir $B'-$modül ve B', sonlu gerilen bir $A-$modül olduğundan Not 3.2.5 den dolayı B, sonlu gerilen bir $A-$modüldür.

Önerme 3.2.7: $A \subseteq B \subseteq C$ olmak üzere A, B, C tamlık bölgesi olsun. Eğer B, A üzerinde tam ve C de B üzerinde tam ise C de A üzerinde tamdır (Lang 1994).

İspat: $x \in C$ olsun. C, B üzerinde tam olduğundan

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0 = 0 \tag{34}$$

olacak şekilde $b_i \in B$ vardır. $B_1 = A[b_0, b_1, ..., b_{n-1}]$ olsun. $B_1 \subset B$ ve B, A üzerinde tam olduğundan B_1 de A üzerinde tamdır. Ayrıca B_1'in sonlu gerilen bir $A-$cebir olduğu açıktır. Böylece Önerme 3.2.6 dan dolayı B_1, sonlu gerilen bir $A-$modüldür. $1 \le i \le n-1$ olmak üzere $b_i \in B_1$ olduğundan (34) den dolayı x, B_1 üzerinde tamdır ve $B_1[x]$, sonlu gerilen bir B_1-cebir olup Önerme 3.2.6 dan dolayı $B_1[x]$ sonlu gerilen bir B_1-modüldür. $B_1[x]$ sonlu gerilen B_1-modül ve B_1, sonlu gerilen bir $A-$modül olup Not 3.2.5 den dolayı $B_1[x]$, sonlu gerilen bir $A-$modüldür. Ayrıca,

$$xB_1[x] = x\left\{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n : a_i \in B_1\right\} \subset B_1[x]$$

olup INT 1 şartı sağlanır. Böylece $x \in C$, A üzerinde tamdır. $x \in C$, keyfi olduğundan C, A üzerinde tamdır.

Önerme 3.2.8: $A \subseteq B$ olmak üzere A, B tamlık bölgesi, B A üzerinde tam ve σ da B'nin bir homomorfizmi olsun. Bu durumda $\sigma(B)$ de $\sigma(A)$ üzerinde tamdır.
(Lang 1994)

İspat: $x \in B$ olsun. B, A üzerinde tam olduğundan x bir

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0 \quad (\ a_i \in A,\ n \ge 1\ )$$

tam denklemini sağlar. Buradan,

$$\sigma\left(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0\right) = \sigma(0) = 0$$

olur. σ homomorfizm olduğundan,

$$\left[\sigma(x)\right]^n + \sigma(a_{n-1})\left[\sigma(x)\right]^{n-1} + ... + \sigma(a_0) = 0 \tag{35}$$

elde edilir. (35), $\sigma(x)$ in, $\sigma(A)$ üzerinde tam olduğunu gösterir. $x \in B$, keyfi olduğundan $\sigma(B)$, $\sigma(A)$ üzerinde tamdır.

Önerme 3.2.9: A, bir L cismi tarafından kapsanan bir tamlık bölgesi ve B, A üzerinde tam olan L'nin elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda B bir halkadır. (Lang 1994)

İspat: B **'**nin, L'nin alt halkası olduğu gösterilmelidir. $x, y \in B$ olsun. x, y A üzerinde tam olduğundan sırasıyla $xM \subset M$ ve $yN \subset N$ olacak şekilde sonlu gerilen M, N modülleri vardır. $M, N \subset L$ olduğundan $MN \subset L$ ve M, N sonlu gerilen iki modül olduğundan MN de sonlu gerilen bir modüldür. Ayrıca $xM \subset M$ ve $yN \subset N$ olduğundan $(x \mp y)MN \subset MN$ ve $(xy)MN \subset MN$ dir. Dolayısıyla $x \mp y$ ve xy, A üzerinde tamdır. "0" da A üzerinde tam olduğundan $B \neq \emptyset$ olup B, L'nin bir alt halkasıdır. Dolayısıyla bir halkadır.[9]

Tanım 3.2.10: A, bir L cismi tarafından kapsanan bir tamlık bölgesi ve B, A üzerinde tam olan L'nin elemanlarının kümesi olsun. Bu durumda B bir halka olup, B'ye A'nın L deki tam kapanışı denir (Lang 1994).

Bazı kitaplarda aşağıda olduğu gibi daha esnek bir tanım verilmektedir:

$R \subseteq S$ olmak üzere R, S birimli değişmeli haklar olsun. R üzerinde tam olan S'nin elemanlarının kümesine R'nin S deki tam kapanışı denir (Dummit and Foote 2004).

Sonuç 3.2.11: A bir tamlık bölgesi, K A'nın bölüm cismi, L K'nin sonlu ayrılabilir bir genişlemesi (finite seperable extension) ve x de A üzerinde tam olan L'nin bir elemanı olsun. Bu durumda L den K ya x'in izi ve normu, A üzerinde ve $\min(x, K)$ nın katsayıları da K üzerinde tamdır (Lang 1994; Ash 2003).

---

[9] $MN = \left\{ \sum m_i n_i : m_i \in M, n_i \in N \right\}$ (Milne 2008).

İspat: L**'**nin K'yı sabit bırakan her bir σ monomorfizmi için Önerme 3.2.8 den dolayı $\sigma(x)$, $\sigma(A)$ üzerinde tamdır. σ, K'yı ve dolayısıyla A'yı sabit bıraktığından $\sigma(A)=A$ olup $\sigma(x)$, A üzerinde tamdır. Önerme 2.170 den dolayı norm, bu şekildeki σ lar üzerinden $\sigma(x)$ lerin çarpımı ve iz de bu şekildeki σ lar üzerinden $\sigma(x)$ lerin toplamı olduğundan Önerme 3.2.9 dan dolayı x'in normu ve izi A üzerinde tamdır.

Not 2.60 dikkate alındığında $\min(x,K)$ nın katsayıları, x_i köklerinin çarpımlarının veya toplamlarının bir kombinasyonu olduğundan Önerme 3.2.9 dan dolayı x_i'lerin A üzerinde tam olduğunu göstermemiz yeterlidir. Her bir x_i, K üzerinde x'in eşleniği olduğundan Teorem 2.107 den dolayı $\tau_i(x)=x_i$ olacak şekilde bir $\tau_i : K(x)\to K(x_i)$ $K-$izomorfizmi ve x, A üzerinde tam olduğundan

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{36}$$

olacak şekilde $a_i \in A \subseteq K$ vardır. (36)'nın her iki tarafına τ_i uygulanırsa

$$x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{37}$$

elde edilir. (37) ise x_i'lerin A üzerinde tam olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.12: A, bir L cismi tarafından kapsanan bir tamlık bölgesi olsun. A üzerinde tam olan L'nin her elemanı, A da ise A, L cisminde tamamen kapalıdır (integrally closed) denir. Eğer A bölüm cisminde tamamen kapalıysa, tamamen kapalıdır veya normaldir denir. A'nın bölüm cismindeki tam kapanışına ise A'nın normalizasyonu denir (Lang 1994; Dummit and Foote 2004).

Bazı kitaplarda aşağıda olduğu gibi daha esnek bir tanım yapılmaktadır:

$R\subseteq S$ olmak üzere R,S birimli değişmeli halkalar olsun. R üzerinde tam olan S'nin her elemanı R de ise R, S de tamamen kapalıdır denir. Eğer R tamlık bölgesiyse

R'nin bölüm cismindeki tam kapanışına R'nin normalizasyonu denir. R bölüm cisminde tamamen kapalıysa R normaldir veya tamamen kapalıdır denir.
(Dummit and Foote 2004)

Not 3.2.13: Sonuç 3.2.11 de eğer A, tamamen kapalı ise $Tr_{L/K}(x)$ ve $N_{L/K}(x)$, A'nın elemanlarıdır (Samuel 2008).

İspat: Not 2.169 dan dolayı $Tr_{L/K}(x)$ ve $N_{L/K}(x)$, K'nin elemanlarıdır. A, tamamen kapalı ve Sonuç 3.2.11 den dolayı $Tr_{L/K}(x)$ ve $N_{L/K}(x)$, A üzerinde tam olduğundan $Tr_{L/K}(x)$ ve $N_{L/K}(x)$, A'nın elemanlarıdır.

Lemma 3.2.14 (Dedekind Lemması): G bir grup, C bir cisim ve $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$; G den C^* çarpımsal grubuna birbirinden farklı homomorfizmler olsun ve sıfır homomorfizmler olmasınlar.
Bu durumda σ_i ler C üzerinde lineer bağımsızdır yani her $g \in G$ için $\sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i(g) = 0$ ise $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere $u_i = 0$ dır (Samuel 2008).

İspat: σ_i'lerin C üzerinde lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $u_i \in C$ vardır yani her $g \in G$ için

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i(g) = 0 \tag{38}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $u_i \in C$ vardır.

q, sıfırdan farklı u_i lerin minumum sayısını göstersin. Böylece genelliği bozmaksızın $u_1, u_2, ..., u_q \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Buradan hareketle (38) eşitliği de dikkate alınırsa her $g \in G$ için

$$u_1\sigma_1(g) + u_2\sigma_2(g) + ... + u_q\sigma_q(g) = 0 \tag{39}$$

olduğunu kabul edebiliriz. $q = 1$ olsa her $g \in G$ için $u_1\sigma_1(g) = 0$ olur. $u_1 \neq 0$ olduğundan $\sigma_1(g) = 0$ elde edilir. Fakat σ_1, sıfır homomorfizmi olmadığından bu mümkün değildir. O halde $q \geq 2$ dir. g ve h, G 'nin herhangi iki elemanı olmak üzere

$$u_1\sigma_1(hg) + u_2\sigma_2(hg) + ... + u_q\sigma_q(hg) = 0$$

ve σ_i ler birer homomorfizm olduğundan

$$u_1\sigma_1(h)\sigma_1(g) + u_2\sigma_2(h)\sigma_2(g) + ... + u_q\sigma_q(h)\sigma_q(g) = 0 \tag{40}$$

eşitlikleri yazılabilir. Şimdi (39) eşitliği soldan $\sigma_1(h)$ ile çarpılırsa

$$\sigma_1(h)u_1\sigma_1(g) + \sigma_1(h)u_2\sigma_2(g) + ... + \sigma_1(h)u_q\sigma_q(g) = 0$$

elde edilir. C bir cisim olduğundan

$$u_1\sigma_1(h)\sigma_1(g) + u_2\sigma_1(h)\sigma_2(g) + ... + u_q\sigma_1(h)\sigma_q(g) \tag{41}$$

yazılır. (41) eşitliğinden (40) eşitliği çıkarılırsa

$$u_2\left(\sigma_1(h) - \sigma_2(h)\right)\sigma_2(g) + ... + u_q\left(\sigma_1(h) - \sigma_q(h)\right)\sigma_q(g) = 0 \tag{42}$$

elde edilir. (42) eşitliği her $g \in G$ için sağlandığından ve q 'nun minumumluğundan bir $i \in \{2, 3, ..., n\}$ için $u_2\left(\sigma_1(h) - \sigma_i(h)\right) = 0$ olur. $u_2 \neq 0$ olduğundan $\sigma_1(h) - \sigma_i(h) = 0$ elde edilir. Böylece her $h \in G$ için $\sigma_1(h) = \sigma_i(h)$ olur. Bu ise σ_i 'lerin birbirinden farklı olması ile çelişir. Bu çelişki σ_i 'lerin C üzerinde lineer bağımlı olduğunu kabul etmekten kaynaklanır. Dolayısıyla σ_i 'ler C üzerinde lineer bağımsızdır.

Tanım 3.2.15: L ve K, birer cisim olmak üzere L, K 'nin n .dereceden ayrılabilir bir genişlemesi olsun ve

$$(\alpha, \beta) \rightarrow Tr_{L/K}(\alpha\beta)$$

şeklinde tanımlanan $g : L \times L \to K$ dönüşümü verilsin. $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ L'nin elemanları olmak üzere $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ elemanlarının diskriminantı

$$D(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \det\left(Tr_{L/K}\left(\beta_i \beta_j\right)\right)$$

olarak tanımlanır (Milne 2008).

Lemma 3.2.16: L/K, n. dereceden ayrılabilir bir genişleme ve $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ L den L'nin cebirsel kapanışına birbirinden farklı $K-$monomorfizmler olsun. Bu durumda $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ olmak üzere

$$D(x_1, x_2, ..., x_n) = \left[\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right)\right]^2$$

dir (Milne 2008).

İspat: Tanım 3.2.15 den

$$D(x_1, x_2, .., x_n) = \det\left(Tr_{L/K}\left(x_i x_j\right)\right)$$

yazılır. Önerme 2.170, σ_i'lerin homomorfizm olması ve determinantın özellikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, .., x_n) = \det\left(Tr_{L/K}\left(x_i x_j\right)\right) &= \det\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k\left(x_i x_j\right)\right) \\ &= \det\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k\left(x_i\right)\sigma_k\left(x_j\right)\right) \\ &= \det\left(\sigma_k\left(x_i\right)\right).\det\left(\sigma_k\left(x_j\right)\right) \\ &= \det\left(\sigma_k\left(x_i\right)\right)\det\left(\sigma_k\left(x_i\right)\right) \\ &= \left[\det\left(\sigma_k\left(x_i\right)\right)\right]^2 \\ &= \left[\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right)\right]^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.17: L/K, n. dereceden ayrılabilir bir genişleme ve $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ L den L'nin bir C cebirsel kapanışına birbirinden farklı $K-$monomorfizmler olsun. $x_1, x_2, ..., x_n \in L$, L için K üzerinde bir tabansa

$$D(x_1, x_2, ..., x_n) = \left[\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right)\right]^2 \neq 0$$

dır (Samuel 2008).

İspat: $\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 2.164 den dolayı her $j \in \{1, 2, ..., n\}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i\left(x_j\right) = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $u_1, u_2, ..., u_n \in C$ vardır. $x_1, x_2, ..., x_n \in L$, L için K üzerinde bir taban olduğundan $x \in L$ olmak üzere

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

olacak şekilde $\alpha_i \in K$ vardır. Buradan σ_i'lerin $K-$monomorfizm olduğu da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i(x) &= \sum_{i=1}^{n} u_i \left[\alpha_1 \sigma_i(x_1) + \alpha_2 \sigma_i(x_2) + ... + \alpha_n \sigma_i(x_n)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_1 u_i \sigma_i(x_1) + \alpha_2 u_i \sigma_i(x_2) + ... + \alpha_n u_i \sigma_i(x_n)\right] \\
&= \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i(x_1) + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i(x_2) + ... + \alpha_n \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i(x_1) \\
&= \alpha_1 .0 + \alpha_2 .0 + ... + \alpha_n .0 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece hepsi birden sıfır olmayan $u_1, u_2, ...u_n \in C$ ve her $x \in L$ için

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i(x) = 0$$

dır. Bu ise Dedekind Lemması ile çelişir. Bu çelişki $\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right) = 0$ olduğunu kabul etmekten kaynaklanır. O halde $\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right) \neq 0$ ve dolayısıyla $\left[\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right)\right]^2 \neq 0$ olup

$$D\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left[\det\left(\sigma_i\left(x_j\right)\right)\right]^2 \neq 0$$

elde edilir.

Not 3.2.18: E/F **,** n**.** dereceden ayrılabilir bir genişleme ve $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ E den E'nin cebirsel kapanışına birbirinden farklı $F-$monomorfizmler olsun. Bu durumda

$$g:\left(x, y\right) \rightarrow Tr_{L/K}\left(xy\right)$$

fonksiyonu dejenere olmayan bir bilineer formdur (Lang 1965).

İspat: E'yi F cismi üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünebileceğimiz için g'nin E üzerinde dejenere olmayan bir bilineer form olduğunu gösterebiliriz.

i. İlk önce g'nin bir bilineeer form olduğunu gösterelim. Bunun için Tanım 2.171 ve Tanım 2.172 den dolayı g'nin 1. ve 2. değişkene göre lineer olduğunu göstermeliyiz.

Aşağıdaki BF1 ve BF2 şartlarında g'nin sırasıyla 1. ve 2. değişkene göre lineer olduğu gösterilmiştir.

BF1. $x \in E$ sabit olmak üzere her $y, y_1, y_2 \in E$ ve $c \in F$ için Not 2.169 daki izle ilgili özellikler dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} g\left(x, y_1 + y_2\right) = Tr_{E/F}\left(x\left(y_1 + y_2\right)\right) &= Tr_{E/F}\left(xy_1 + xy_2\right) \\ &= Tr_{E/F}\left(xy_1\right) + Tr_{E/F}\left(xy_2\right) \\ &= g\left(x, y_1\right) + g\left(x, y_2\right) \end{aligned}$$

ve

$$g\left(x, cy\right) = Tr_{E/F}\left(x\left(cy\right)\right) = Tr_{E/F}\left(c\left(xy\right)\right) = cTr_{E/F}\left(xy\right) = cg\left(x, y\right)$$

elde edilir.

BF2. $y \in E$ sabit olmak üzere her $x, x_1, x_2 \in E$ ve $c \in F$ için Not 2.169 daki izle ilgili özellikler dikkate alınırsa

$$g\left(x_1+x_2,y\right)=Tr_{E/F}\left(\left(x_1+x_2\right)y\right)=Tr_{E/F}\left(x_1y+x_2y\right)$$
$$=Tr_{E/F}\left(x_1y\right)+Tr_{E/F}\left(x_2y\right)$$
$$=g\left(x_1,y\right)+g\left(x_2,y\right)$$

ve

$$g\left(cx,y\right)=Tr_{E/F}\left(\left(cx\right)y\right)=Tr_{E/F}\left(c\left(xy\right)\right)=cTr_{E/F}\left(xy\right)=cg\left(x,y\right)$$

elde edilir.

ii. Şimdi de g 'nin dejenere olmadığını gösterelim. Tanım 2.174 den dolayı E 'nin her $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ [10] tabanı için g 'nin diskriminantının sıfırdan farklı olduğunu göstermeliyiz. Tanım 2.173 den dolayı bu, $\det\left(g\left(x_i,x_j\right)\right)\neq 0$ olduğunu göstermeye denktir yani

$$\det\left(Tr_{E/F}\left(x_ix_j\right)\right)\neq 0 \tag{43}$$

olduğunu göstermeliyiz. (43) ifadesinin doğru olduğu ise Tanım 3.2.15 dikkate alındığında, Önerme 3.2.17 den açıktır. Böylece g dejenere olmayan bir bilineer formdur.

Önerme 3.2.19: E/F, n. dereceden ayrılabilir bir genişleme ve $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ E den E 'nin cebirsel kapanışına birbirinden farklı $F-$monomorfizmler olsun. Bu durumda $Tr_{E/F}\left(x\right)\neq 0$ olacak şekilde bir $x\in L$ vardır (Ash 2003).

İspat: Her $x\in E$ için $Tr_{E/F}\left(x\right)=0$ ise Önerme 2.170 den dolayı

$$Tr_{E/F}\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\left(x\right)=0$$

olur. Bu ise Dedekind Lemması ile çelişir. Dolayısıyla bir $x\in L$ için $Tr_{E/F}\left(x\right)\neq 0$ dır.

---

[10] E/F, n. dereceden olduğundan E ' yi F üzerinde bir vektör uzayı olarak düşündüğümüzde E 'nin bir tabanındaki eleman sayısı n olur.

Not 3.2.20: E/F **,** n**.** dereceden ayrılabilir bir genişleme ve $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ E den E 'nin cebirsel kapanışına birbirinden farklı $F-$monomorfizmler olsun. Bu durumda bir $x \in L$ için $Tr_{E/F}(x) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $(x,y) \rightarrow Tr_{E/F}(xy)$ şeklinde tanımlanan dönüşümünün dejenere olmayan bir bilineer form olmasıdır (Ash 2003).

İspat: İlk önce $(x,y) \rightarrow Tr_{E/F}(xy)$ şeklinde tanımlanan dönüşümünün dejenere olmayan bir bilineer form olduğunu kabul edelim. Tanım 2.174 den dolayı her $y \in E$ için $Tr_{E/F}(xy) = 0$ ise $x = 0$ dır. Bu ise

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in E : Tr_{E/F}(xy) \neq 0 \tag{44}$$

olmasına denktir. Her $x \in E$ için $Tr_{E/F}(x) = 0$ olması (44) ile çelişeceğinden bir $x \in L$ için $Tr_{E/F}(x) \neq 0$ olmalıdır.

Tersine bir $x \in L$ için $Tr_{E/F}(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $(x,y) \rightarrow Tr_{E/F}(xy)$ şeklinde tanımlanan dönüşümünün dejenere olmayan bir bilineer form olduğunu yani her $y \in E$ için $Tr_{E/F}(xy) = 0$ ise $x = 0$ olduğunu gösterelim.

$x \neq 0$ olmak üzere her $y \in E$ için $Tr_{E/F}(xy) = 0$ olduğunu kabul edelim. x_0 da $Tr_{E/F}(x_0) \neq 0$ olacak şekilde L 'nin bir elemanı olsun[11]. Böylece $y = x^{-1}x_0$ yani $xy = x_0$ olacak şekilde bir $y \in L$ vardır. Buradan da $Tr_{E/F}(xy) = Tr_{E/F}(x_0) = 0$ elde edilir. Bu ise $Tr_{E/F}(x_0) \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $x = 0$ olmalıdır.

Teorem 3.2.21: E**,** F **'nin** sonlu ayrılabilir bir genişlemesi olsun. Bu durumda $Tr_{E/F} : E \rightarrow F$, sıfırdan farklı bir fonksiyoneldir ve

$$g : (x,y) \rightarrow Tr_{E/F}(xy)$$

[11] Bir $x \in L$ için $Tr_{E/F}(x) \neq 0$ olduğunu kabul ettiğimiz için böyle bir $x_0 \in L$ vardır.

fonksiyonu bir bilineer form olup, E 'yi dual uzayıyla belirler (Lang 1965).

İspat: Not 2.169 da yer alan izle ilgili özelliklerden dolayı $Tr_{E/k}: E \to F$ bir fonksiyoneldir. Ayrıca $Tr_{E/F}$ 'nin sıfırdan farklı olduğu, Önerme 3.2.19 da ve g 'nin bilineer form olduğu Not 3.2.18 de gösterildi. Geriye g 'nin E 'yi dual uzayıyla belirlediğini yani g 'yi kullanarak E 'nin, E 'nin dual uzayına $F-$vektör uzayı olarak izomorf olduğunu göstermek kalıyor.

Her bir sabit $x \in E$ için $Tr_x(y) = Tr_{E/F}(xy)$ şeklinde tanımlanan

$$Tr_x : E \to F$$

dönüşümü, g 'nin bilineer form olmasından dolayı bir $F-$lineer dönüşümdür ve dolayısıyla E 'nin dual uzayının bir elemanıdır.

Göstereceğiz ki

$$h : x \to Tr_x$$

dönüşümü birebir örten bir $F-$lineer dönüşümdür. Eğer bunu gösterebilirsek E 'nin, E 'nin dual uzayına $F-$vektör uzayı olarak izomorf olduğunu göstermiş oluruz.

Öncelikle h 'nin E den E 'nin dual uzayına olduğu açıktır . Ayrıca

i. Her $x, y, e \in E$ için

$$Tr_{x+y}(e) = Tr_{E/F}\big((x+y)e\big) = Tr_{E/F}(xe) + Tr_{E/F}(ye) = Tr_x(e) + Tr_y(e)$$

olup $Tr_{x+y} = Tr_x + Tr_y$ elde edilir. Bu ise her $x, y \in E$ için

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

olması demektir.

ii. Her $x, e \in E$ ve her $c \in k$ için

$$Tr_{cx}(y) = Tr_{E/F}\big((cx)y\big) = Tr_{E/F}\big(c(xy)\big) = cTr_{E/F}(xy) = cTr_x(y)$$

olup $Tr_{cx} = cTr_x$ elde edilir. Bu ise her $x \in E$ ve her $c \in k$ için

$$h(cx) = ch(x)$$

olması demektir.

Böylece "i" ve "ii" den h bir lineer dönüşümdür.

İkinci olarak h 'nin birebir olduğunu gösterelim. Bunun için ise Teorem 2.123 den dolayı *Çek* $h = \{0\}$ yani

$$Tr_x = 0 \Rightarrow x = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla her $y \in E$ için $Tr_x(y) = 0$ ise $x = 0$ yani her $y \in E$ için $Tr_{E/F}(xy) = 0$ ise $x = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bu ise Tanım 2.174 den dolayı g 'nin dejenere olmayan bir biliner form olduğunu göstermeye denktir. g 'nin dejenere olmayan bir biliner form olduğu da Not 3.2.18 de gösterildi.

Son olarak h 'nin örten olduğunu gösterelim: Teorem 2.124 den dolayı

$$boy \ \mathrm{Im} \ h = boy \ E \tag{45}$$

ve Teorem 2.128 den dolayı

$$boy \ E = boy \ \mathrm{E}^* \tag{46}$$

olduğundan (45) den ve (46) dan

$$boy \ \mathrm{Im} \ h = boy \ E^*$$

elde edilir. Teorem 2.122 den $\mathrm{Im}\, h$, E^* ın alt vektör uzayı olup Teorem 2.125 den $\mathrm{Im}\, h = E^*$ elde edilir. Bu da h 'nin örten olduğu anlamına gelir.

Sonuç 3.2.22: E/F, $n.$dereceden sonlu ayrılabilir bir genişleme ve $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$, E için F üzerinde bir taban olsun. Bu durumda

$$Tr_{E/F}\left(w_i w_j'\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , \ i = j \\ 0 \ , \ i \neq j \end{cases}$$

olacak şekilde E 'nin bir $\left\{w_1', w_2', ..., w_n'\right\}$ tabanı vardır (Milne 2008).

İspat: Teorem 2.129 dan dolayı E 'nin $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ tabanına karşılık

$$\varphi_i\left(w_j\right) = \delta_{ij} \tag{47}$$

olacak şekilde E^* ın bir $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ tabanı vardır. Teorem 3.2.21'in ispatında verilen h bir izomorfizm olduğundan tersi de bir izomorfizmdir. Böylece E^* ın $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ tabanına karşılık $h^{-1}(\varphi_1) = w_1'$, $h^{-1}(\varphi_2) = w_2'$,..., $h^{-1}(\varphi_n) = w_n'$ olacak şekilde E 'nin bir $\left\{w_1', w_2', ..., w_n'\right\}$ tabanı vardır. $h : E \to k$ izomorfizmi

$$x \to Tr_x$$

olarak verildiğinden

$$h\left(w_i'\right) = Tr_{w_i'} = \varphi_i \tag{48}$$

dir. (48) eşitliğindeki fonksiyonların w_j altındaki görüntüleri alınırsa ve (47) eşitliği de kullanılırsa

$$\delta_{ij} = \varphi_i\left(w_j\right) = Tr_{w_i'}\left(w_j\right) = Tr_{E/F}\left(w_i' w_j\right) = Tr_{E/F}\left(w_j w_i'\right) = Tr_{E/F}\left(w_i w_j'\right) \tag{49}$$

elde edilir. Böylece

$$Tr_{E/k}\left(w_i w_j'\right) = \delta_{ij}$$

olur.

Not 3.2.23: E bir cisim ve $w_i', w_j \in E$ olduğundan (49) da $w_i' w_j = w_j w_i'$ yazabildik.

Önerme 3.2.24: A, tamamen kapalı bir Noetherian halka ve L de A'nın bölüm cismi K 'nin sonlu ayrılabilir bir genişlemesi olsun. Bu durumda A'nın L deki tam kapanışı, A üzerinde sonlu gerilir (Lang 1994).

İspat: $\{w_1, w_2, ...w_n\}$, L 'nin K üzerinde bir lineer tabanı olsun. L/K sonlu olduğundan Teorem 2.95 den L/K cebirseldir. Dolayısıyla her w_i, K üzerinde cebirseldir. Böylece Önerme 3.2.3 den dolayı her i için $a_i w_i$, A üzerinde tam olacak şekilde $0 \neq c_i \in A$ vardır. $a = a_1 a_2 ... a_n$ denilirse her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için aw_i, A üzerinde tam olur. $v_i = aw_i$ olsun. Göstereceğiz ki $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, L için K üzerinde bir tabandır. Öncelikle $a \in A \subset L$ ve $w_i \in L$ olup $v_i = a_n w_i \in L$ dir. Ayrıca,

i.

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 &\Rightarrow \alpha_1 (aw_1) + \alpha_2 (aw_2) + ... + \alpha_n (aw_n) = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha_1 a) w_1 + (\alpha_2 a) w_2 + ... + (\alpha_n a) w_n = 0\end{aligned}$$

olur. $\{w_1, w_2, ... w_n\}$, lineer bağımsız olduğundan $\alpha_i a = 0$ elde edilir. $a \neq 0$ ve L bir cisim olduğundan $\alpha_i = 0$ elde edilir. Böylece $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, lineer bağımsızdır.

ii. $l \in L$ olsun.

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 &\Rightarrow \alpha_1 (aw_1) + \alpha_2 (aw_2) + ... + \alpha_n (aw_n) = l \\ &\Rightarrow (\alpha_1 a) w_1 + (\alpha_2 a) w_2 + ... + (\alpha_n a) w_n = l\end{aligned}$$

olup $\{w_1, w_2, ... w_n\}$, L ’yi gerdiğinden

$$\begin{aligned}&\alpha_1 a = c_1 \\ &\alpha_2 a = c_2 \\ &\vdots \\ &\alpha_n a = c_n\end{aligned} \qquad (50)$$

olacak şekilde $c_i \in K$ vardır. (50) deki her eşitlik sırasıyla sağdan a^{-1} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = c_1 a^{-1} \\ &\alpha_2 = c_2 a^{-1} \\ &\vdots \\ &\alpha_n = c_n a^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. $c_i \in K$ ve $a^{-1} \in K$ olup $j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $\alpha_j \in K$ dır. Böylece $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, L yi gerer.

“i” ve “ii” den $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, L için bir tabandır. Sonuç 3.2.22 den dolayı L ’nin

$$Tr_{E/k}\left(v_i v_j{}'\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \qquad (51)$$

olacak şekilde bir $\{v_1', v_2', ..., v_n'\}$ tabanı vardır.[12] $i \in \{1,2,...,n\}$ olmak üzere v_i' ler K üzerinde cebirsel olduğundan cv_i', A üzerinde tam olacak şekilde A'nın bir $c \neq 0$ elemanı vardır. z, A üzerinde tam olan L'nin bir elemanı olsun. Bu durumda Önerme 3.2.9 dan dolayı zcv_i' ve Sonuç 3.2.11 den dolayı da her i için $Tr_{L/K}\left(czv_i'\right)$, A üzerinde tamdır. $z \in L$ ve $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, L'nin bir tabanı olduğundan

$$z = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n \tag{52}$$

olacak şekilde $b_i \in K$ vardır ve Not 2.169 daki izle ilgili özellikler dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} Tr_{L/K}\left(czv_i'\right) = cTr_{L/K}\left(zv_i'\right) &= cTr_{L/K}\left(\left(b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n\right)v_i'\right) \\ &= c\left[b_1Tr_{L/K}\left(v_1v_i'\right) + ... + b_nTr_{L/K}\left(v_nv_i'\right)\right] \end{aligned}$$

olur. (51) eşitliğinden

$$Tr_{L/K}\left(czv_i'\right) = cb_i$$

elde edilir. Not 3.2.13 den dolayı $cb_i \in A$ dır. Böylece $cb_i = d_i$ olacak şekilde $d_i \in A$ vardır ve dolayısıyla $b_i = c^{-1}d_i$ dir. (52) eşitliği de dikkate alınırsa

$$z = c^{-1}d_1v_1 + c^{-1}d_2v_2 + ... + c^{-1}d_nv_n = d_1c^{-1}v_1 + d_2c^{-1}v_2 + ... + d_nc^{-1}v_n$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$z \in Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$$

olur. $z \in L$, A'nın L deki tam kapanışının keyfi bir elemanı olduğundan bu tam kapanış $Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ sonlu $A-$modülü tarafından kapsanır.

A, Noetherian halka ve $Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ sonlu $A-$modül olduğundan Not 2.144 den dolayı $Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ Noetherian modüldür yani tüm altmodülleri sonludur. Böylece A'nın L deki tam kapanışı A' ve $B = Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ olmak üzere A', B tarafından kapsandığından A' nün

---

[12] $E \cong E^*$ olduğundan E'nin $\{v_1', v_2', ..., v_n'\}$ tabanını E^*'ın bir tabanı olarak da düşünebiliriz.

B'nin altmodülü olduğunu gösterirsek A''nün sonlu gerilen bir $A-$modül olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi A' nün B'nin altmodülü olduğunu gösterelim. Önerme 2.20 ve Tanım 2.135 dikkate alınırsa

1. $x_1, x_2 \in A'$ olsun. Böylece x_1, x_2 A üzerinde tamdır. Önerme 3.2.9 dan dolayı $x_1 + x_2$, A üzerinde tam olduğundan $x_1 + x_2 \in A'$ dür.

2. $a \in A$, $x \in A'$ olsun. A'nın her elemanı ve $x \in A'$ de A üzerinde tam olduğundan yine Önerme 3.2.9 dan dolayı ax, A üzerinde tam olup $ax \in A'$ dür.

Böylece A', B'nin bir altmodülüdür.

Önerme 3.2.25: A**,** tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölgeyse, tamamen kapalıdır. (Zariski and Samuel 1958)

İspat: A'nın bölüm cismi K olsun. A üzerinde tam olan K'nın her elemanının A üzerinde tam olduğunu göstermeliyiz.

i. $x = 0 \in A \subseteq K$, A üzerinde tam olduğundan verilen önerme $x = 0 \in K$ için doğrudur.

ii. $x \neq 0, x \in K$ ve x, A üzerinde tam olsun. $x \in K$ olduğundan $a, b \in A$, $b \neq 0$ ve a ile b aralarında asal olmak üzere $x = a/b$ yazabiliriz. b aritmetik birim olsa $x = ab^{-1} \in A$ olacağından verilen önerme b nin aritmetik birim olması durumunda doğrudur. b nin aritmetik birim olmadığını kabul edelim. x, A üzerinde tam olduğundan

$$(a/b)^n + a_{n-1}(a/b)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{53}$$

olacak şekilde $a_i \in A$ vardır. (53) eşitliğinin her iki tarafı b^n ile çarpılırsa

$$a^n + b\left[a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}a_0\right] = 0$$

yazılır.

$$c = a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b^{n-1}a_0 \tag{54}$$

olsun. (54) de $i \in \{0,1,2,...,n\}$ için $a_i \in A$ ve $a,b \in A$ olduğundan $c \in A$ dır. Böylece $c \in A$ olmak üzere

$$a^n + bc = 0$$

yani

$$a^n = -bc \tag{55}$$

dir. (55) den $b|a^n$ olur. Eğer b indirgenemez ise Önerme 2.80 den dolayı b asaldır. Böylece $b|a$ elde edilir. Bu ise a ile b nin aralarında asal olmasıyla çelişir. Eğer b indirgenemez değilse A tek türlü asal çarpanlara ayrılabilir bölge olduğundan b indirgenemezlerin çarpımı olarak yazılabilir. Bu durumda b'nin indirgenemez çarpanlarından herhangi biri a^n'yi böler. Bu indirgenemez çarpan, aynı zamanda asal olduğundan a'yı da böler. Bu ise a ile b nin aralarında asal olmasıyla çelişir. Bu çelişki b'nin aritmetik birim olmamasından kaynaklanır. Dolayıyla b aritmetik birimdir ve $x = ab^{-1} \in A$ elde edilir.

Teorem 3.2.26: A, bir esas ideal bölgesi, L A'nın bölüm cisminin n. dereceden sonlu ayrılabilir bir genişlemesi ve B de A'nın L deki tam kapanışı olsun. Bu durumda B, A üzerinde rankı n olan bir serbest modüldür (Samuel 2008).

İspat: Önerme 3.2.24'ün ispatında gösterildiği gibi B, $Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ serbest $A-$modülünün bir $A-$altmodülüdür. Ayrıca $B_{tor} \neq 0$ olsa $x \neq 0$ olmak üzere $ax = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in A$ olurdu. Bu ise L'nin cisim olmasıyla çelişirdi. Dolayısıyla $B_{tor} = 0$ olup B, torsion serbesttir. Teorem 2.153 den B, bir serbest $A-$modüldür. A, bir esas ideal bölgesi; $Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ rankı $[L:K] = n$ olan bir serbest modül ve B, $Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ modülünün altmodülü olduğundan Teorem 2.152 den B'nin rankı en fazla n dir. Diğer taraftan B, A'yı ve $Ac^{-1}v_1 + Ac^{-1}v_2 + ... + Ac^{-1}v_n$ modülünün $\{c^{-1}v_1, c^{-1}v_2, ..., c^{-1}v_n\}$ serbest tabanını içerdiğinden B'nin rankı en az n dir. Böylece B'nin rankı $[L:K] = n$ dir.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, her ideali esas ideal olduğundan bir esas ideal halkasıdır. $\mathbb{Z}$'nin bölüm cismi $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}$'nun her sonlu genişlemesi ayrılabilirdir. Dolayısıyla Teorem 3.2.26, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasına uygulanabilir. Bu durumda aşağıdaki tanımlar verilebilir (Lang 1994)

Tanım 3.2.27: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin sonlu bir genişlemesine sayı cismi denir. (Lang 1994)

Tanım 3.2.28: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir K sayı cismindeki tam kapanışına K'nin cebirsel tamsayılar halkası veya kısaca K'nin tamsayılar halkası denir ve O_K ile gösterilir. O_K nın elemanlarına da cebirsel tamsayı denir.
(Lang 1994; Dummit and Foote 2004)

Önerme 3.2.29: $A \subseteq B$ olmak üzere A, B tamlık bölgeleri, B A üzerinde tam ve S, A'nın "0" ı içermeyen çarpımsal bir alt kümesi olsun. Bu durumda

i. $S^{-1}B$, $S^{-1}A$ üzerinde tamdır.

ii. A tamamen kapalıysa, $S^{-1}A$ da tamamen kapalıdır (Lang 1994).

İspat:

i. $x \in B$ ve $s \in S$ olsun. B, A üzerinde tam olduğundan $xM \subset M$ olacak şekilde sonlu gerilen bir $A-$modül M vardır. M, bir $A-$modül olduğundan Tanım 3.1.8 den dolayı $S^{-1}M$ de $S^{-1}A-$modüldür. M, sonlu gerildiğinden $S^{-1}M$ de sonlu gerilir. Dolayısıyla $S^{-1}M$, sonlu gerilen bir $S^{-1}A-$modüldür. Ayrıca $xM \subset M$ olduğundan $x/s\left(S^{-1}M\right) \subset S^{-1}M$ dir. Böylece $S^{-1}M$, $x/s\left(S^{-1}M\right) \subset S^{-1}M$ olacak şekilde sonlu gerilen bir $S^{-1}A-$modüldür. Dolayısıyla x/s, $S^{-1}A$ üzerinde tamdır. x ve s keyfi olduğundan $S^{-1}M$'nin her elemanı $S^{-1}A$ üzerinde tamdır. Böylece $S^{-1}M$, $S^{-1}A$ üzerinde tamdır.

ii. x, A'nın bölüm cisminin elemanı olmak üzere[13] x, $S^{-1}A$ üzerinde tam olsun. Bu durumda

$$x^n + \frac{b_{n-1}}{s_{n-1}} x^{n-1} + \ldots + \frac{b_0}{s_0} = 0$$

olacak şekilde $b_i \in A$ ve $s_i \in S$ vardır. Böylece $y = s_0 s_1 \ldots s_{n-1} x$, A üzerinde tamdır. $s = s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$ denilirse A tamamen kapalı olduğundan $y = sx \in A$ dır. Dolayısıyla $x \in S^{-1}A$ dır. Yani $S^{-1}A$ tamamen kapalıdır.

Sonuç 3.2.30: B, A'nın bölüm cisminin bir L cisim genişlemesindeki tam kapanışı ise $S^{-1}B$ de $S^{-1}A$ nın L deki tam kapanışıdır (Lang 1994).

İspat: $S^{-1}A$ da tam olan L'nin elemanlarının kümesi T olsun yani

$$T = \{x \in L : x,\ S^{-1}A \text{ üzerinde tam}\}$$

olsun. $S^{-1}B \subset L$ ve Önerme 3.2.29 (i) den dolayı $S^{-1}B$, $S^{-1}A$ üzerinde tam olduğundan $S^{-1}B \subset T$ dir.

Şimdi $x \in T$ olsun. Dolayısıyla x, $S^{-1}A$ üzerinde tamdır. Önerme 3.2.29 (ii) nin ispatında olduğu gibi sx A üzerinde tam olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. $s \in S \subset A \subset L$ ve $x \in L$ olup $sx \in L$ dir. B, L'nin A daki tam kapanışı olduğundan $sx \in B$ dir. Böylece $x \in S^{-1}B$ dir. Yani $T \subset S^{-1}B$ dir.

$S^{-1}B \subseteq T$ ve $T \subseteq S^{-1}B$ olup $T = S^{-1}B$ dir. Bu ise gösteriyor ki $S^{-1}B$, $S^{-1}A$'nın L deki tam kapanışıdır.

---

[13] Aslında teoremin ispatı için $S^{-1}A$'nın bölüm cisminin elemanı olarak alınması gerekiyor. Fakat A'nın bölüm cismiyle $S^{-1}A$'nın bölüm cismi aynı olduğundan ispatta $S^{-1}A$'nın bölüm cismi yerine A'nın bölüm cismi alınmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde “ $A-$modül”, “sol $A-$modül” anlamına gelmektedir.

4.1. Kesirler halkasının üniversal özelliği

Aşağıdaki teoremde “halka”, “birimli değişmeli halka” ve “halka homomorfizmi” de “1 i 1 e götüren halka homomorfizmi” anlamındadır.

Teorem 4.1.1: A**,** bir halka ve S , A’nın “0” ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi olsun. Her $s \in S$ için $f\left(s\right)$, B de terslenebilir olmak üzere C nesneleri

$$f : A \to B$$

halka homomorfizmleri olan kategori olsun. $f : A \to B$ ve $f' : A \to B'$, C’nin iki nesnesi olmak üzere C deki bir $f \to f'$ morfizmi de

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

Şekil 4.1. $f \to f'$ morfizminin değişmeli diyagram ile verilişi

diyagramı değişmeli yani $g \circ f = f'$ olacak şekilde $g : B \to B'$ homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\pi\left(a\right) = \frac{a}{1}$$

ile verilen $\pi : A \to S^{-1}A$, C kategorisinde bir üniversal nesnedir. (Lang 1965; Dummit and Foote 2004)

İspat: $\dfrac{a}{s} = \dfrac{a'}{s'}$ başka bir deyişle $\left(a,s\right) \sim \left(a',s'\right)$ olsun. Buna göre

$$s_1\left(s'a - sa'\right) = 0 \tag{56}$$

olacak şekilde bir $s_1 \in S$ vardır. $f : A \to B$, C 'nin bir nesnesi olsun. (56) eşitliğinin her iki tarafının f altındaki görüntüsü alınırsa

$$f\left(s_1\right)\left[f\left(s'\right)f\left(a\right) - f\left(s\right)f\left(a'\right)\right] = 0 \tag{57}$$

olur. (57) eşitliğinin her iki tarafı $f\left(s_1\right)^{-1}$ ile çarpılırsa

$$f\left(s'\right)f\left(a\right) = f\left(s\right)f\left(a'\right) \tag{58}$$

elde edilir ve son olarak (58) eşitliğinin her iki tarafı önce $f\left(s'\right)^{-1}$ ile ve daha sonra da $f\left(s\right)^{-1}$ ile çarpılırsa

$$f\left(a\right)f\left(s\right)^{-1} = f\left(a'\right)f\left(s'\right)^{-1} \tag{59}$$

eşitliğine ulaşılır.

Şimdi $\psi\left(\dfrac{a}{s}\right) = f\left(a\right)f\left(s\right)^{-1}$ olacak şekilde bir

$$\psi : S^{-1}A \to B$$

dönüşümü tanımlayalım. Öncelikle bu dönüşümün iyi tanımlı olduğu yani

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Rightarrow f\left(a\right)f\left(s\right)^{-1} = f\left(a'\right)f\left(s'\right)^{-1} \tag{60}$$

olduğu gösterilmelidir. (59) eşitliği ise (60)'ın sağlandığını göstermektedir. Böylece ψ iyi tanımlıdır.

ψ dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur.

1. i)

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) = \psi\left(\frac{s_2a_1 + s_1a_2}{s_1s_2}\right) &= f\left(s_2a_1 + s_1a_2\right)f\left(s_1s_2\right)^{-1} \\
&= \left[f\left(s_2a_1\right) + f\left(s_1a_2\right)\right]\left[f\left(s_1\right)f\left(s_2\right)\right]^{-1} \\
&= f\left(a_1\right)f\left(s_1\right)^{-1} + f\left(a_2\right)f\left(s_2\right)^{-1} \\
&= \psi\left(\frac{a_1}{s_1}\right) + \psi\left(\frac{a_2}{s_2}\right)
\end{aligned}$$

ii)

$$\psi\left(\frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{a_2}{s_2}\right)=\psi\left(\frac{a_1a_2}{s_1s_2}\right)=f\left(a_1a_2\right)f\left(s_1s_2\right)^{-1}$$
$$=f\left(a_1\right)f\left(a_2\right)f\left(s_1\right)^{-1}f\left(s_2\right)^{-1}$$
$$=f\left(a_1\right)f\left(s_1\right)^{-1}f\left(a_2\right)f\left(s_2\right)^{-1}$$
$$=\psi\left(\frac{a_1}{s_1}\right)\cdot\psi\left(\frac{a_2}{s_2}\right)$$

iii) $\psi\left(\frac{1}{1}\right)=f\left(1\right)f\left(1\right)^{-1}=1$

olup ψ halka homomorfizmidir.

2. $a\in A$ olsun.

$$\psi\circ\pi\left(a\right)=\psi\left(\frac{a}{1}\right)=f\left(a\right)f\left(1\right)^{-1}=f\left(a\right)$$

olup $\psi\circ\pi=f$ dir yani

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & S^{-1}A \arrow[dl, "\psi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Şekil 4.2. ψ ’nin değişmeli diyagram ile verilişi

diyagramı değişmelidir. Böylece ψ, C de bir morfizmdir başka bir deyişle C kategorisinin bir nesnesidir.

3.

$$\varphi\left(\frac{a}{s}\right)=\varphi\left(\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\right)=\varphi\left(\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right)=\varphi\left(\frac{a}{1}\right)\varphi\left(\left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right)$$
$$=\varphi\left(\pi(a)\right)\cdot\varphi\left(\pi(s)^{-1}\right)$$
$$=\left[\varphi\circ\pi(a)\right]\cdot\left[\varphi\circ\pi\left(s^{-1}\right)\right]$$
$$=\left[\varphi\circ\pi(a)\right]\left[\varphi\circ\pi(s)\right]^{-1}$$
$$=f(a)\,f(s)^{-1}$$

olduğundan ψ, $\psi\circ\pi=f$ olacak şekildeki tek homomorfizmdir.

Sonuç olarak C 'nin her bir morfizmi için $\psi\circ\pi=f$ yani

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & S^{-1}A \arrow[dl, "\psi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Şekil 4.3. π 'nin üniversal nesne olmasının değişmeli diyagramı

diyagramı değişmeli olacak şekilde tek bir $\psi: S^{-1}A\rightarrow B$ halka homomorfizmi (başka bir deyişle $\pi\rightarrow f$ morfizmi) vardır. Dolayısıyla π, C de üniversal nesnedir.

Not 4.1.2: Teorem 4.1.1, kesirler halkasının tanımı olarak da kullanılabilir. Çünkü $S^{-1}A$ halkası bu teoremden dolayı izomorfizma farkı ile tektir.

C, Teorem 4.1.1 de belirtilen kategori olsun. $f_1: A\rightarrow B$ ve $f_2: A\rightarrow B'$, C 'nin iki nesnesi ise $f_1\rightarrow f_2$ morfizminin yani $g\circ f_1=f_2$ olacak şekilde bir $g: B\rightarrow B'$ halka homomorfizminin denklik olması için $g\circ f=1_{B'}$ ve $f\circ g=1_B$ olacak şekilde $f: B'\rightarrow B$ halka homomorfizmi olmalıdır. Böylece $g: B\rightarrow B'$ bir izomorfizmdir. Teorem 2.186 dan dolayı bir kategorideki herhangi iki üniversal nesne denk olduğundan birbirine izomorf olan iki halka elde edilir (Hungerford 1974).

4.2. Bir halkanın yerelleştirmesinin halkanın ideallerinin sonlu toplamları ve sonlu kesişimleriyle değişme özelliği

Aşağıdaki Lemma, Teorem 3.1.25'in ispatında verilen ψ_S dönüşümü altında çarpmanın yanı sıra toplama ve kesişimin de korunduğunu göstermektedir.

Lemma 4.2.1: R birimli değişmeli bir halka S, A 'nın "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve I ve J, R'nin idealleri olsun. Bu durumda

i. $S^{-1}\left(I+J\right)=S^{-1}I+S^{-1}J$

ii. $S^{-1}\left(I\cap J\right)=\left(S^{-1}I\right)\cap\left(S^{-1}J\right)$

olur (Ash 2003).

İspat: i. $x\in I+J$, $s\in S$ olsun. $x\in I+J$ olduğundan

$$x=i+j \quad (i\in I,\, j\in J)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\frac{x}{s}=\frac{i+j}{s}=\frac{i}{s}+\frac{j}{s}\in S^{-1}I+S^{-1}J$$

olup

$$S^{-1}\left(I+J\right)\subseteq S^{-1}I+S^{-1}J \tag{61}$$

elde edilir.

$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}\in S^{-1}I+S^{-1}J$ olsun. Böylece $a_1\in I$, $a_2\in J$ ve $s_1,s_2\in S$ dir. Ayrıca

$$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}=\frac{s_2a_1+s_1a_2}{s_1s_2}$$

olup I ve J nin ideal olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}\in S^{-1}\left(I+J\right)$$

dir. Buradan

$$S^{-1}I+S^{-1}J\subseteq S^{-1}\left(I+J\right) \tag{62}$$

elde edilir. (61) ve (62) den

$$S^{-1}I + S^{-1}J = S^{-1}\left(I + J\right)$$

eşitliğine ulaşılır.

ii. $x \in I \cap J$ ve $s \in S$ olsun. $x \in I \cap J$ olduğundan $x \in I$ ve $x \in J$ dir. Böylece

$$\frac{x}{s} \in \left(S^{-1}I\right) \cap \left(S^{-1}J\right)$$

olup

$$S^{-1}\left(I \cap J\right) \subseteq \left(S^{-1}I\right) \cap \left(S^{-1}J\right) \tag{63}$$

dir.

$a \in I$, $b \in J$ ve $s,t \in S$ olmak üzere $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ olsun. Bu durumda

$$u\left(at - bs\right) = 0$$

olacak şekilde bir $u \in S$ vardır. Böylece

$$\frac{a}{s} = \frac{uat}{ust} = \frac{ubs}{ust} \in S^{-1}\left(I \cap J\right)$$

olup

$$\left(S^{-1}I\right) \cap \left(S^{-1}J\right) \subseteq S^{-1}\left(I \cap J\right) \tag{64}$$

dir. (63) ve (64) den

$$\left(S^{-1}I\right) \cap \left(S^{-1}J\right) = S^{-1}\left(I \cap J\right)$$

elde edilir.

4.3. Bir halkanın asal idealleri ile kesirler halkasının asal idealleri arasındaki ilişki

Bu kısımda, bir halkanın asal idealleri ile bu halkanın kesirler halkasının asal idealleri arasındaki ilişkiyi ifade eden teoremin ispatı için gerekli lemmalar ve ispatları; ardından da bu teorem ve ispatı ile bu teoremin, bir asal idealde yerelleştirmesiyle alakalı kısa bir sonucu verilmiştir. Son olarak da A_P'nin yerel halka olduğu Örnek 3.1.22 de gösterilenden farklı bir şekilde ispatlanmıştır.

Lemma 4.3.1: R, birimli değişmeli bir halka, S R'nin "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve h, R den $S^{-1}R$ ye doğal homomorfizm olsun. J, $S^{-1}R$'nin bir idealiyse ve $I=h^{-1}(J)$ ise, I R'nin bir idealidir ve $S^{-1}I=J$ dir. Başka bir deyişle $S^{-1}R$ deki her J ideali $S^{-1}\left(h^{-1}(J)\right)$ formunda yazılabilir (Ash 2003).

İspat:

i. Aşağıdaki İ1 ve İ2 şartlarında I 'nın R'nin bir ideali olduğu gösterilmiştir.[14]

İ1. $r_1, r_2 \in I$ olsun. $h(r_1+r_2)=h(r_1)+h(r_2)$ ve $h(r_1), h(r_2) \in J$ olduğundan $h(r_1+r_2)\in J$ elde edilir. Böylece $r_1+r_2 \in I$ dır.

İ2. $r \in R, r_1 \in I$ olsun. $h(rr_1)=h(r)h(r_1)$ ve $h(r_1)\in J$ olduğundan $h(rr_1)\in J$ elde edilir. Böylece $rr_1 \in I$ dır.

ii. $a \in I, s \in S$ olmak üzere $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$ olsun. $a \in I$ olduğundan $h(a)=\frac{a}{1}\in J$ dir. Buradan

$$\frac{a}{s}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s}\in J$$

olup

$$S^{-1}I \subseteq J \tag{65}$$

dir.

$\frac{a}{s}\in J$ olsun. $h(a)=\frac{a}{1}=\frac{a}{s}\cdot\frac{s}{1}\in J$ olup $a\in I$ elde edilir. Böylece $\frac{a}{s}\in S^{-1}I$ dır. Bu yüzden

$$J \subseteq S^{-1}I \tag{66}$$

olur. (65) ve (66) dan $S^{-1}I=J$ elde edilir.

Lemma 4.3.2: R, birimli değişmeli bir halka, S R'nin "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve h, R den $S^{-1}R$ ye doğal homomorfizm olsun.

i. I, R'nin bir idealiyse $I \subseteq h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ olur.

---

[14] R değişmeli olduğundan İ2 şartının gösterilmesi yeterlidir yani İ3 şartını göstermeye gerek yoktur.

ii. I asal ve $I \cap S = \varnothing$ ise $I = h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ olur. Başka bir deyişle I asal ve $I \cap S = \varnothing$ olmak üzere R 'nin her I ideali $h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ formunda yazılabilir (Ash 2003).

İspat:

i. $x \in I$ olsun. $h(x) = \dfrac{x}{1} \in S^{-1}I$ olduğundan $x \in h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ dır. Böylece $I \subseteq h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ elde edilir.

ii. I asal ve $S \cap I = \varnothing$ olsun. $I = h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ olduğunu göstermeliyiz. “i” den dolayı $I \subseteq h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ dır. Geriye $h^{-1}\left(S^{-1}I\right) \subseteq I$ olduğunu göstermek kalıyor. $a \in h^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ ise $h(a) = \dfrac{a}{1} \in S^{-1}I$ olur. Böylece

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{s} \quad \left(x \in I, s \in S\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla $u(as - x) = 0$ olacak şekilde bir $u \in S$ vardır. Buradan $aus = ux \in I$ elde edilir. $us \in S$ ve $S \cap I = \varnothing$ olduğundan $us \notin I$ elde edilir. $aus \in I$ ve I asal olduğu için de $a \in I$ olmalıdır. Bu ise $h^{-1}\left(S^{-1}I\right) \subseteq I$ olması demektir.

Lemma 4.3.3: R, birimli değişmeli bir halka, S R 'nin “0” ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi olsun. I, R 'nin asal ideali ve $I \cap S = \varnothing$ ise $S^{-1}I$, $S^{-1}R$ 'nin asal idealidir. (Ash 2003)

İspat: Lemma 3.1.26 den dolayı $S^{-1}I$ birim ideal değildir yani $S^{-1}I \neq S^{-1}R$ dır. Böylece $S^{-1}I$ has idealdir.

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \in S^{-1}I \qquad \left(a, b \in R \text{ ve } s, t \in S\right)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{ab}{st} = \frac{c}{u} \quad \left(c \in I, u \in S\right)$$

yazılabilir. Böylece

$$v\left(abu - cst\right) = 0$$

olacak şekilde bir $v \in S$ vardır. Buradan

$$abuv = cstv \in I$$

elde edilir. $uv \in S$ ve $S \cap I = \varnothing$ olduğundan $uv \notin I$ dır. I asal olduğundan $ab \in I$ olmalıdır. Yine I 'nın asal olduğu kullanılırsa $a \in I$ veya $b \in I$ elde edilir. $a \in I$ veya $b \in I$ ise $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$ veya $\frac{b}{t} \in S^{-1}I$ olup $S^{-1}I$, $S^{-1}R$ 'nin asal idealidir.

Teorem 4.3.4: R birimli değişmeli bir halka, S R 'nin "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve h, R den $S^{-1}R$ ye doğal homomorfizm olsun. $P \cap S = \varnothing$ olmak üzere R 'nin asal idealleri ile $S^{-1}R$ 'nin asal idealleri arasında

$$P \to S^{-1}P \quad \text{ve} \quad Q \to h^{-1}\left(Q\right)$$

ile verilen birebir bir eşleme vardır (Ash 2003).

İspat: Lemma 4.3.3 den dolayı $S^{-1}P$, $S^{-1}R$ 'nin asal ideali ve Lemma 4.3.1 den dolayı $h^{-1}\left(Q\right)$, R 'nin bir idealidir. Ayrıca

$$h^{-1}\left(Q\right) = \left\{r \in R : h\left(r\right) \in Q\right\}$$

olup $r_1.r_2 \in h^{-1}\left(Q\right)$ ise $h\left(r_1r_2\right) = h\left(r_1\right)h\left(r_2\right) \in Q$ olacağından Q 'nun asallığı da dikkate alınırsa $h\left(r_1\right) \in Q$ veya $h\left(r_2\right) \in Q$ elde edilir. Böylece $r_1 \in h^{-1}\left(Q\right)$ veya $r_2 \in h^{-1}\left(Q\right)$ olup $h^{-1}\left(Q\right)$, R 'nin bir asal idealidir. Ve son olarak $h^{-1}\left(Q\right) \cap S \neq \varnothing$ olsa Lemma 4.3.1 ve Lemma 3.1.26 dan dolayı $S^{-1}\left(h^{-1}\left(Q\right)\right) = Q = S^{-1}R$ olacağından Q 'nun asal ve dolayısıyla has ideal olmasıyla çelişen bir sonuç elde edilir. Böylece $h^{-1}\left(Q\right) \cap S = \varnothing$ dir.

$$\varphi_1 : P \to S^{-1}P \quad \text{ve} \quad \varphi_2 : Q \to h^{-1}\left(Q\right)$$

şeklinde tanımlansın. Q, $S^{-1}R$ 'nin bir ideali olmak üzere

$$\varphi_1 \circ \varphi_2\left(Q\right) = \varphi_1\left(h^{-1}\left(Q\right)\right) = S^{-1}\left(h^{-1}\left(Q\right)\right)$$

olup Lemma 4.3.1 den dolayı $S^{-1}\left(h^{-1}\left(Q\right)\right) = Q$ olur ve

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = I_{S^{-1}R} \tag{67}$$

elde edilir.

P, R'nin $P \cap S = \varnothing$ olacak şekilde bir asal ideali olsun.

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 (P) = \varphi_2 \left(S^{-1}P\right) = h^{-1}\left(S^{-1}P\right)$$

olup Lemma 4.3.2 den dolayı $h^{-1}\left(S^{-1}P\right) = P$ olur ve

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 = I_R \tag{68}$$

elde edilir. (67) ve (68) den φ_1 ve φ_2 birbirinin tersidir.

Sonuç 4.3.5 : R birimli değişmeli bir halka, h R den R_P ye doğal homomorfizm, P R'nin bir asal ideali ve $S = R - P$ olsun. Buna göre R'nin P de kapsanan asal ideallerinin kümesi ile R_P'nin asal idealleri arasında

$$A \to S^{-1}A \text{ ve } Q \to h^{-1}(Q)$$

ile verilen birebir bir eşleme vardır (Hungerford 1974).

Teorem 4.3.6: A birimli değişmeli bir halka, P A'nın bir asal ideali olmak üzere A_P yerel halkadır (Ash 2003).

İspat: Q, A_P **'nin bir maksimal ideali olsun.** Teorem 2.56 dan dolayı Q asaldır. Teorem 4.3.4 den R'nin $I \cap S = \varnothing \left(S = A - P\right)$ olmak üzere bir I asal ideali için $Q = S^{-1}I$ yazılabilir. $I \cap S = \varnothing$ olduğundan $I \subseteq P$ dir. Böylece $Q = S^{-1}I \subseteq S^{-1}P$ elde edilir.

$S^{-1}P = A_P = S^{-1}A$ olsa Lemma 3.1.26 dan dolayı $P \cap S \neq \varnothing$ olmalıdır. Bu ise mümkün değildir. Bu yüzden $S^{-1}P$, her Q maksimal idealini içeren bir has idealdir. Dolayısıyla tek maksimal idealdir.

4.4. Yerel halka örnekleri

Örnek 4.4.1: $R=\mathbb{Z}$ ve p asal sayı olmak üzere $P=(p)$ alınırsa $\mathbb{Z}$'nin P deki yerelleştirmesi

$$\mathbb{Z}_P=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}:(p,b)=1\right\}$$

olup $\mathbb{Z}_P$ yerel halkadır ve p ile bölünemeyen her b tamsayısı $\mathbb{Z}_P$ de aritmetik birimdir (Dummit and Foote 2004).

Örnek 4.4.2: p asal ve n pozitif bir tamsayı olsun. $\mathbb{Z}_{p^n}$ halkasının her toplamsal altgrubu devirlidir ve p asal sayısının bir kuvvetinin katlarını içerirler. Böylece $\mathbb{Z}_{p^n}$'nin her ideali (p) ideali tarafından kapsanır. Dolayısıyla (p), $\mathbb{Z}_{p^n}$'nin tek maksimal ideali olup $\mathbb{Z}_{p^n}$ yerel halkadır (Ash 2003).

Örnek 4.4.3: $R=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}:b\ tek\ sayı\right\}$ halkasının terslenebilir olmayan elemanlarının kümesi

$$I=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}:a\ çift\ sayı\ ve\ b\ tek\ sayı\right\}=(2)$$

olur. I'nın bir ideal olduğu açıktır. Teorem 3.1.20 den R yerel halkadır. Teorem 3.1.21 den I, R'nin tek maksimal idealidir (Dummit and Foote 2004).

Örnek 4.4.4: $V\neq\varnothing$ olmak üzere V herhangi bir küme, K bir cisim ve R, V üzerinde sabit fonksiyonları da içeren herhangi bir $K-$değerli fonksiyonlar halkası olsun. Herhangi bir $a\in V$ için M_a, a da sıfır değerini alan fonksiyonların oluşturduğu ideal yani

$$M_a=\{f\in R: f(a)=0\}$$

olsun. Bu durumda M_a, $f\to f(a)$ ile verilen halka homomorfizminin çekirdeğidir. R, sabit fonksiyonları da içerdiğinden bu dönüşüm örtendir. Böylece Birinci

İzomorfizm Teoreminden $R / M_a \cong K$ elde edilir. Teorem 2.82 den dolayı M_a maksimal ve Teorem 2.56 dan dolayı M_a asaldır. R'nin M_a maksimal idealindeki yerelleştirmesi

$$R_{M_a} = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in R, g(a) \neq 0 \right\}$$

olup R_{M_a} yerel halkadır.

R_{M_a} daki her fonksiyonun a daki değeri $\frac{f}{g}(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$ ile hesaplanabilir ve bu değer $\frac{f}{g}$ için temsilci seçimine bağlı değildir. Çünkü $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2}$; $\frac{f}{g}$ için iki temsilci ise

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$$

olup

$$g_3 \left(f_1 g_2 - g_1 f_2 \right) = 0 \tag{69}$$

olacak şekilde $g_3 \in R - M_a$ vardır. (69) eşitliğinin a altındaki görüntüsü alınırsa

$$g_3(a)\left[f_1(a) g_2(a) - f_2(a) g_1(a) \right] = 0$$

olup K cisim olduğundan

$$f_1(a) g_2(a) - f_2(a) g_1(a) = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{f_1(a)}{f_2(a)} = \frac{f_2(a)}{g_2(a)}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece R_{M_a}, a da tanımlı rasyonel fonksiyonlar halkasıdır.

(Dummit and Foote 2004)

4.5. Bir tamlık bölgesi ile bir asal yada maksimal idealdeki yerelleştirmeleri arasındaki ilişki

Aşağıdaki önerme, verilen bir tamlık bölgesinin, asal yada maksimal idealdeki yerelleştirmelerinin kesişimine eşit olduğunu ifade etmektedir.

Önerme 4.5.1: R, bir tamlık bölgesi, P R'nin herhangi bir asal ideali ve M de R'nin herhangi bir maksimal ideali olsun. Bu durumda

$$R = \bigcap_{M} R_M \quad \text{ve} \quad R = \bigcap_{P} R_P$$

dir (Dummit and Foote 2004).

İspat : Her bir M maksimal ideali (R tamlık bölgesi olduğundan M aynı zamanda asaldır) için $R \subseteq R_M$ olduğundan

$$R \subseteq \bigcap_{M} R_M \tag{70}$$

dir.

$a \in \bigcap_{M} R_M$ olsun.

$$I_a = \{d \in R : da \in R\}$$

kümesini düşünelim. I_a, R'nin bir idealidir ve

i. $a \in R$ ise $1 \cdot a = a \in R$ olacağından $1 \in I_a$ ve dolayısıyla $I_a = R$ dir.

ii. $I_a = R$ olsun. Böylece $1 \in I_a$ dır. I_a'nın tanımından $a \in R$ elde edilir.

“i” ve “ii” den

$$a \in R \Leftrightarrow I_a = R$$

olur. $I_a \neq R$ olsa I_a idealini içeren R'nin bir M maksimal ideali vardır. Kabulümüzden dolayı $a \in R_M$ olduğundan $r \in R$ ve $d \in R - M$ olmak üzere $a = \frac{r}{d}$ yazılabilir. Buradan da $da = r \in R$ elde edileceğinden $d \in I_a$ olur. $I_a \subseteq M$ ve $d \notin M$ olduğundan bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla $I_a = R$ olup $a \in R$ dir. Böylece

$$\bigcap_{M} R_M \subseteq R \tag{71}$$

dir. (70) ve (71) den

$$R = \bigcap_{M} R_M$$

olur. Ayrıca

$$\bigcap_P R_P \subseteq \bigcap_M R_M = R$$

olduğundan ve

$$R \subseteq \bigcap_P R_P$$

olduğu da bilindiğinden

$$R = \bigcap_P R_P$$

elde edilir.

4.6. Tam genişleme örnekleri

Örnek 4.6.1: F , bir K cisminin cebirsel genişlemesi olsun. Bu durumda $x \in F$ olmak üzere

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

olacak şekilde $a_i \in K$ vardır. Buradan

$$x^n + \left(a_n{}^{-1} a_{n-1}\right) x^{n-1} + ... + a_n{}^{-1} a_0$$

olup x , K üzerinde tamdır. Böylece F , K ’nin tam genişlemesidir.
(Hungerford 1974)

Örnek 4.6.2: S **,** R **’**nin tam genişlemesi ve I **,** S ’nin bir ideali olsun. S , R ’nin tam genişlemesi olduğundan her $s \in S$ için

$$s^n + r_{n-1} s^{n-1} + ... + r_0 = 0$$

olacak şekilde $r_i \in R$ vardır. Buradan

$$s^n + r_{n-1} s^{n-1} + ... + r_0 + I = I$$

olup

$$\left(s + I\right)^n + \left(r_{n-1} + I\right)\left(s + I\right)^{n-1} + ... + \left(r_0 + I\right) = I \qquad (72)$$

elde edilir.

$\varphi\left(r + R \cap I\right) = r + I$ ile verilen $\varphi : R / R \cap I \to S / I$ dönüşümünü düşünelim.

i.

$$\begin{aligned} r_1 + R\cap I = r_2 + R\cap I &\Rightarrow r_1 - r_2 \in R\cap I \\ &\Rightarrow \varphi(r_1 - r_2) = I \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 + I = I \\ &\Rightarrow r_1 + I = r_2 + I \end{aligned}$$

olup φ iyi tanımlıdır. Ayrıca φ'nin kapalı olduğu açıktır.

ii.

$$\begin{aligned} \varphi\left(\left(r_1 + R\cap I\right) + \left(r_2 + R\cap I\right)\right) &= \varphi\left(r_1 + r_2 + R\cap I\right) \\ &= r_1 + r_2 + I \\ &= \left(r_1 + I\right) + \left(r_2 + I\right) \\ &= \varphi\left(r_1 + R\cap I\right) + \varphi\left(r_2 + R\cap I\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(\left(r_1 + R\cap I\right)\left(r_2 + R\cap I\right)\right) &= \varphi\left(r_1 r_2 + R\cap I\right) \\ &= r_1 r_2 + I \\ &= \left(r_1 + I\right)\left(r_2 + I\right) \\ &= \varphi\left(r_1 + R\cap I\right)\varphi\left(r_2 + R\cap I\right) \end{aligned}$$

olup φ bir halka homomorfizmidir.

iii.

$$\begin{aligned} \varphi\left(r_1 + R\cap I\right) = \varphi\left(r_2 + R\cap I\right) &\Rightarrow r_1 + I = r_2 + I \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 \in I \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 \in R\cap I \\ &\Rightarrow r_1 + R\cap I = r_2 + R\cap I \end{aligned}$$

olup φ birebirdir. Böylece φ bir monomorfizmdir. Dolayısıyla $R/R\cap I$ yı S/I nın bir altkümesi olarak düşünebiliriz. Bundan dolayı (72) ifadesinde $0 \le i \le n-1$ olmak üzere $r_i + I$'yı $R/R\cap I$ nın elemanları olarak görebiliriz. Böylece (72) den dolayı $s+I$, $R/R\cap I$ üzerinde tam olur. $s\in S$ keyfi olduğundan S/I, $R/R\cap I$'nın tam genişlemesidir (Dummit and Foote 2004).

4.7. Cebirsel tamsayılar halkası için bir örnek

Bu kısımda $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Q}(i)$ deki tam kapanışının $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ ye eşit olduğunu ifade eden teorem ve bu teoremden faydalanarak cebirsel tamsayılar halkası için bir örnek verilmiştir.

Teorem 4.7.1: $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Q}(i)$ daki tam kapanışı $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ dir (Alaca and Williams 2004).

İspat: $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Q}(i)$ deki tam kapanışı B olsun. $B=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ olduğunu göstermeliyiz.

1. $\alpha \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ olsun. Bu durumda $m,n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha = m+ni$ yazılabilir. Böylece α, ikinci dereceden

$$x^2 - 2mx + \left(m^2+n^2\right) \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomunun bir köküdür. Ayrıca $\alpha \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ olduğundan $\alpha \in \mathbb{Q}(i)$ olduğu açıktır. Böylece α, $\mathbb{Q}(i)$'nin $\mathbb{Z}$ üzerinde tam olan bir elemanı olup $\alpha \in B$ dir yani

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i \subseteq B \tag{73}$$

dir.

2. $\alpha \in B$ olsun. Böylece α, $\mathbb{Z}$ üzerinde tamdır. $\alpha \in \mathbb{Q}(i)$ olduğundan $r,s \in \mathbb{Q}$ için $\alpha = r+si$ yazılabilir.

i. $s \neq 0$ olsun. α, $g(x) = x^2 - 2rx + \left(r^2+s^2\right) \in \mathbb{Q}(x)$ polinomunun bir köküdür. α, $\mathbb{Z}$ üzerinde tam olduğundan $f(\alpha)=0$ olacak şekilde $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ monik polinomu vardır. $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}(x)$ olduğundan bölme algoritmasından

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad \deg\, r(x) < \deg\, g(x)$$

olacak şekilde $q(x), r(x) \in \mathbb{Q}(x)$ vardır. $\deg\, g(x) = 2$ olduğundan $r_0, r_1 \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $r(x) = r_0 + r_1 x$ yazılabilir. Böylece

$$f(x) = q(x)g(x) + r_0 + r_1 x$$

elde edilir. $x=\alpha$ alınırsa $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ olacağından $r_0+r_1\alpha=0$ olur. $\alpha=r+si$ yazılırsa $(r_0+r_1r)+ir_1s=0$ bulunur. Bu eşitlikte reel ve imajiner kısımlar eşitlenirse

$$r_0+r_1r=r_1s=0$$

olur. $s\neq 0$ olduğundan $r_1=0$ ve dolayısıyla $r_0=0$ elde edilir. Böylece $q(x),r(x)\in\mathbb{Q}(x)$ olmak üzere

$$f(x)=q(x)g(x)$$

olur. a, $q(x)$'in katsayılarının paydalarının en küçük ortak katı ve b, $g(x)$'in katsayılarının paydalarının en küçük ortak katı olsun. Bu durumda $aq(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ve $bg(x)\in\mathbb{Z}[x]$ olmak üzere

$$abf(x)=aq(x)bg(x) \tag{74}$$

elde edilir. c, $aq(x)$'in kapsamı ve d, $bg(x)$'in kapsamı olsun. Bu durumda $q_1(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ve $g_1(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ilkel polinomlar olmak üzere

$$aq(x)=cq_1(x) \text{ ve } bg(x)=dg_1(x) \tag{75}$$

yazılabilir. (74) ve (75) den

$$abf(x)=cq_1(x)dg_1(x) \tag{76}$$

elde edilir. $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ monik olduğundan $abf(x)$'in kapsamı, ab dir. Gauss Teoreminden , iki ilkel polinomun çarpımı yine ilkeldir. Böylece $q_1(x)g_1(x)$ ilkeldir ve $cq_1(x)dg_1(x)$'in kapsamı, cd dir. (76) dan $ab=cd$ ve $q_1(x)=\frac{a}{c}q(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $g_1(x)=\frac{b}{d}g(x)\in\mathbb{Z}[x]$ olmak üzere $f(x)=q_1(x)g_1(x)$ olur.

$a_0,a_1,...,a_{n-1},b_0,b_1,...,b_{n-2},c_0,c_1,c_2\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$
$$q_1(x)=b_{n-2}x^{n-2}+...+b_0$$
$$g_1(x)=c_2x^2+c_1x+...+c_0$$

olduğu kabul edilebilir. $f(x)=q_1(x)g_1(x)$ eşitliğinde x^n'nin katsayıları eşitlenirse $b_{n-2}c_2=1$ elde edilir. $b_{n-2},c_2\in\mathbb{Z}$ olduğundan $b_{n-2}=c_2=\pm1$ olur. $g_1(x)=(b/d)g(x)$, $g(x)$ monik ve $c_2=\pm1$ olduğundan işlem kolaylığı açısından $b=d$ olduğu kabul edilebilir. Dolayısıyla $g(x)=x^2-2rx+\left(r^2+s^2\right)=g_1(x)\in\mathbb{Z}[x]$ olur ($b=-d$ olması durumunda da $g(x)$, -1 ile çarpılır). Böylece $2r\in\mathbb{Z}$ ve $r^2+s^2\in\mathbb{Z}$ dir. $2r\in2\mathbb{Z}+1$ olsa $2s\in2\mathbb{Z}+1$ ve dolayısıyla $4r^2+4s^2\in4\mathbb{Z}+2$ elde edilir. Bu ise $4r^2+4s^2\in4\mathbb{Z}$ olmasıyla çelişir.Böylece $2r\in2\mathbb{Z}$ olup $r\in\mathbb{Z}$ dir. Ayrıca $x^2-2rx+\left(r^2+s^2\right)\in\mathbb{Z}[x]$ olduğundan $s\in\mathbb{Z}$ olmalıdır. $r,s\in\mathbb{Z}$ olduğundan $\alpha=r+si\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ dir. Böylece

$$B\subseteq\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i \tag{77}$$

olur. (73) ve (77) den $B=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ elde edilir.

ii. $s=0$ olsun. Bu durumda α, $g(x)=x-r\in\mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir köküdür ve kabulümüzden dolayı α, $\mathbb{Z}$ üzerinde tam olduğundan $f(\alpha)=0$ olacak şekilde $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ monik polinomu vardır. Bölme algoritması kullanılırsa $q(x)\in\mathbb{Q}[x]$ olmak üzere

$$f(x)=q(x)g(x)+r_0\ ,\ r_0\in\mathbb{Q}$$

yazılabilir. Buradan $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ olduğu da dikkate alınırsa $r_0=0$ elde edilir. Böylece $f(x)=q(x)g(x)$ olur. Bundan sonraki işlemler 1. dekine benzer şekilde yapılır ve bunun sonucunda da $B\subseteq\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ elde edilir.

Not 4.7.2: $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$'nun bir cisim genişlemesidir ve i'nin $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomu x^2+1 olduğundan Teorem 2.102 den dolayı $\mathbb{Q}(i)=\mathbb{Q}[i]$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 4.7.3: Teorem 2.103 den $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}$ nun sonlu bir genişlemesidir. $\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{Q}(i)$ deki tam kapanışı $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ olduğundan Tanım 3.2.28 den $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$, $\mathbb{Q}(i)$ nin tamsayılar halkasıdır yani $O_{\mathbb{Q}(i)}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ dir.

4.8. Bir halkada tamamen kapalı olan bir halka örneği

Aşağıdaki örnek bir halkada tamamen kapalı olan bir halka örneğidir. Bu örnek ayrıca bir halkada tamamen kapalı olmanın kesişim altında korunduğunu göstermektedir.

Örnek 4.8.1: T, birimli değişmeli bir halka, her i için T S_i'nin ve S_i de R_i'nin halka genişlemesi olmak üzere $\{S_i : i \in I\}$ ve $\{R_i : i \in I\}$ althalka aileleri olsun. Her i için R_i'nin S_i de tamamen kapalı olduğunu kabul edelim. $x \in \bigcap_i S_i$ ve x, $\bigcap_i R_i$ üzerinde tam olsun. $x \in \bigcap_i S_i$ ise her i için $x \in S_i$ dir ve x, $\bigcap_i R_i$ üzerinde tam olduğundan her i için x, R_i üzerinde de tamdır. R_i, S_i de tamamen kapalı olduğundan $x \in R_i$ ve dolayısıyla $x \in \bigcap_i R_i$ olup $\bigcap_i R_i$, $\bigcap_i S_i$ de tamamen kapalıdır (Hungerford 1974).

4.9. Cebirsel tamsayılar halkasının temel yapısı

Teorem 4.9.1: K, $\mathbb{Q}$ üzerinde n. dereceden bir sayı cismi olsun.

i. O_K, Noetherian halkadır ve rankı n olan serbest bir $\mathbb{Z}-$modüldür.

ii. Her $\beta \in K$ için $d\beta$, cebirsel tamsayı olacak şekilde bir $0 \neq d \in \mathbb{Z}$ vardır. Özellikle de K, O_K'nın kesirler cismidir.

iii. $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, K'nın herhangi bir $\mathbb{Q}-$tabanı ise $d\beta_1, d\beta_2, ..., d\beta_n$, O_K'nın rankı n olan serbest bir $\mathbb{Z}-$altmodülü için taban olacak şekilde sıfırdan farklı bir d tamsayısı vardır. Ayrıca $\mathbb{Z}-$modül O_K'nın herhangi bir tabanı $\mathbb{Q}$ üzerinde bir vektör uzayı olan O_K'nın da tabanıdır (Dummit and Foote 2004).

İspat: Teorem 3.2.26 dan O_K, rankı n olan bir serbest $\mathbb{Z}-$modüldür. Böylece "i" nin ikinci kısmını göstermiş olduk.

β, K'nin herhangi bir elemanı ve $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0$, β'nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomu olsun. d, bu polinomun katsayılarının paydalarının en küçük ortak katı ise $d^k a_0, d^{k-1}a_1, ..., da_{k-1} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$(d\beta)^k + da_{k-1}(d\beta)^{k-1} + ... + d^{k-1}a_1(d\beta) + d^k a_0 = 0$$

elde edilir. Böylece $d\beta$, $\mathbb{Z}$ üzerinde tam olup cebirsel bir tamsayıdır. Böylece $d\beta \in O_K$ dır. Bu ise O_K'nın kesirler cismi F olmak üzere $\beta \in F$ olması demektir. Dolayısıyla $K \subseteq F$ dir. $F \subseteq K$ olduğundan O_K'nın kesirler cismi, K dır. Böylece "ii" yi de göstermiş olduk.

$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ K için $\mathbb{Q}$ üzerinde bir $\mathbb{Q}-$taban olsun. Bu durumda $d\beta_1, d\beta_2, ..., d\beta_n \in O_K$ olacak şekilde $0 \neq d \in \mathbb{Z}$ vardır ve $\{d\beta_1, d\beta_2, ..., d\beta_n\}$, K için bir tabandır. Böylece bu elemanlar $\mathbb{Q}$ üzerinde ve dolayısıyla $\mathbb{Z}$ üzerinde lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\{d\beta_1, d\beta_2, ..., d\beta_n\}$, O_K'nın rankı n olan serbest bir $\mathbb{Z}-$altmodülünü gerer ve böylece $\{d\beta_1, d\beta_2, ..., d\beta_n\}$, bu alt modül için bir tabandır. Kabul edelim ki $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, O_K için bir taban olsun (O_K, $\mathbb{Z}-$modül olarak düşünülüyor) Dolayısıyla bu küme lineer bağımsızdır. Hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{Q}$ için

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + ... + \alpha_n k_n = 0 \quad (\alpha_i \notin \mathbb{Z})$$

olsa; d, α_i lerin paydalarının en küçük ortak katı olmak üzere

$$(d\alpha_1)k_1 + (d\alpha_2)k_2 + ... + (d\alpha_n)k_n = 0 \quad (d\alpha_i \in \mathbb{Z})$$

elde edilir. $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde lineer bağımsız olduğundan genelliği bozmaksızın $\alpha_i \neq 0$ için

$$d\alpha_i = 0 \Rightarrow d = 0$$

elde edilir ki bu mümkün değildir. Böylece $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde de lineer bağımsızdır. $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, $\mathbb{Z}-$modül O_K için bir geren kümesi olduğundan $\mathbb{Q}$

üzerinde de O_K için bir geren kümesidir. Dolayısıyla $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir vektör uzayı olan O_K için de bir tabandır. Böylece "iii" üde göstermiş olduk.

I, O_K'nın bir ideali olsun.[15] O_K, rankı n olan serbest bir $\mathbb{Z}-$modül olduğundan I da O_K nın $\mathbb{Z}-$altmodülüdür. Teorem 2.152 den dolayı I'nın rankı en fazla n dir ve Teorem 2.153 den serbest $\mathbb{Z}-$modüldür. $\mathbb{Z} \subseteq O_K$ olduğundan I, O_K-modül olarak sonlu gerilir. Dolayısıyla O_K, Noetherian halkadır. Böylece "i" nin birinci kısmını da göstermiş olduk.

4.10. Tamamen kapalı halka örnekleri

Örnek 4.10.1: $\mathbb{Z}$ tek türlü asal çarpanlara ayrılabilen bölge olduğundan Önerme 3.2.25 den $\mathbb{Z}$ tamamen kapalıdır (Fesenko 2007).

Örnek 4.10.2: K, bir sayı cismi olmak üzere O_K tamsayılar halkasını düşünelim. Teorem 4.9.1 "ii" den K, O_K'nın kesirler cismidir. O_K'nın tamamen kapalı olduğunu göstermek için O_K üzerinde tam olan K'nin elemanlarının aslında O_K'nın elemanı olduğu gösterilmelidir. O_K üzerinde tam olan K'nin elemanlarının kümesine B diyelim. O_K'nın tanımından dolayı O_K, $\mathbb{Z}$ üzerinde ve B'nin tanımından dolayı B, O_K üzerinde tamdır. Önerme 3.2.7 den B de $\mathbb{Z}$ üzerinde tam olur. Dolayısıyla $B \subseteq O_K$ olup O_K, tamamen kapalıdır (Fesenko 2007).

4.11. Normalliğin yerel bir özellik olması

Bir A halkası verilsin ve A, bir M özelliğine sahip olsun. Eğer aşağıdaki önerme doğruysa M'ye yerel özellik denir:

---

[15] O_K nın O_K- altmodüllerinin idealler olduğuna dikkat ediniz.

“A, M özelliğine sahiptir$\Leftrightarrow$ A’nın her P asal ideali için A_P de M özelliğine sahiptir.” (Atiyah and Macdonald 1969)

Aşağıdaki teorem “normalliğin” başka bir deyişle “tamamen kapalı olma” özelliğinin yerel bir özellik olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 4.11.1: R, bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1. R, normaldir yani tamamen kapalıdır.

2. R’nin tüm P asal idealleri için R_P normaldir.

3. R’nin tüm M maksimal idealleri için R_M normaldir (Dummit and Foote 2004).

İspat:

$1 \Rightarrow 2$: F, R’nin kesirler cismi olsun. R’nin tamamen kapalı olduğunu kabul edelim ve $y \in F$, R_P üzerinde tam olsun. Bu durumda y, $a_i \in R, d_i \notin P$ olmak üzere katsayıları $\dfrac{a_i}{d_i}$ formunda olan n. dereceden monik bir polinomun bir köküdür. Böylece $y' = y\left(d_0 d_1 ... d_{n-1}\right)$, katsayıları R de olan n. dereceden monik bir polinomun kökü olup y', R üzerinde tamdır. R normal olduğundan $y' \in R$ ve böylece $y = y' / \left(d_0 d_1 ... d_{n-1}\right) \in R_P$ olur. Dolayısıyla R_P normaldir.

$2 \Rightarrow 3$: $y \in F$, R_M üzerinde tam olsun. M maksimal ve dolayısıyla asal olduğundan kabulümüzden dolayı $y \in R_M$ olup her M maksimal ideali için R_M normaldir.

$3 \Rightarrow 1$: R’nin her M maksimal ideali için R_M’nin normal olduğunu kabul edelim ve $y \in F$, R üzerinde tam olsun. $R \subseteq R_M$ olduğundan y, R_M üzerinde de tamdır. Kabulümüzden dolayı $y \in R_M$ olur. Önerme 4.5.1 den dolayı da $y \in R$ elde edilir. Böylece R, normaldir (Dummit and Foote 2004).

Not 4.11.2: Teorem 4.11.1’in ispatında R’nin bölüm cismi olan F ile R_M ve R_P nin bölüm cisimlerinin birbirine eşit olduğuna dikkat ediniz.

4.12. Açılma teoremi (Going-up theorem)

Bu bölümde önce "Açılma Teoremi" ni ispatlamak için gerekli teorem, önerme ve sonuçlar ile bunların ispatları ve ardından da bu teorem ve ispatı verilmiştir.

Bu kısım boyunca "halka", "birimli değişmeli halka" anlamında kullanılmıştır.

Önerme 4.12.1: $A \subseteq B$ olmak üzere A, B tamlık bölgeleri ve B, A üzerinde tam olsun. Bu durumda B'nin cisim olması için gerek ve yeter şart A'nın cisim olmasıdır.
(Atiyah and Macdonald 1969)

İspat: A**,** bir cisim ve y, B'nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. B, A üzerinde tam olduğundan

$$y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_n = 0$$

olacak şekilde $a_i \in A$ vardır. B tamlık bölgesi olduğundan $a_n \neq 0$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda

$$y\left(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + ... + a_{n-1}\right) = -a_n$$

olur. $0 \neq a_n \in A$ ve A, bir cisim olduğundan $-1/a_n \in A$ dır. Bu ise

$$-1/a_n\left(y^{n-1} + a_{n-1} y^{n-2} + ... + a_{n-1}\right)$$

nin y'nin tersi olduğunu ifade eder. Böylece B bir cisimdir.

Tersine B bir cisim ve x, A'nın sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Bu durumda $x^{-1} \in B$ dir. Böylece x^{-1}, A üzerinde tamdır. Dolayısıyla

$$x^{-m} + a_1' x^{-m+1} + ... + a_m' = 0 \qquad (78)$$

olacak şekilde $a_i' \in A$ vardır. (78) eşitliğinin her iki tarafı x^{m-1} ile çarpılırsa

$$x^{-1} = -\left(a_1' + a_2' x + ... + a_m' x^{m-1}\right) \in A$$

olur. Böylece A bir cisimdir.

Sonuç 4.12.2: $A \subseteq B$ olmak üzere A, B halkalar, B A üzerinde tam, Q B'nin bir asal ideali ve $P = Q \cap A$ olsun. Bu durumda P'nin maksimal olması için gerek ve yeter şart Q'nun maksimal olmasıdır (Atiyah and Macdonald 1969).

İspat: Örnek 4.6.2 den dolayı B/Q, A/P üzerinde tamdır.

$$\begin{aligned}(b_1+Q)(b_2+Q)=Q &\Rightarrow (b_1 \cdot b_2)+Q=Q\\ &\Rightarrow b_1 \cdot b_2 \in Q\\ &\Rightarrow b_1 \in Q \ veya \ b_2 \in Q\end{aligned}$$

olduğundan B/Q tamlık bölgesidir. Önerme 4.12.1 den dolayı B/Q'nun cisim olması için gerek ve yeter şart A/P'nin cisim olmasıdır. Böylece P'nin maksimal olması için gerek ve yeter şart Q'nun maksimal olmasıdır.

Not 4.12.3:

i. R, bir halka; S, R'nin "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve h, R den $S^{-1}R$ ye doğal homomorfizm olsun. I, R'nin bir ideali olmak üzere

$$\left(I^e\right)^c = \{x \in R : Bir \ s \in S \ için \ xs \in I\}$$

olur. Eğer J, $S^{-1}R$'nin bir ideali ise $\left(J^c\right)^e = J$ dir.

ii. R, bir halka, P R'nin bir asal ideali ve h, R den R_P ye doğal homomorfizm olsun. Bu durumda $\left(P^e\right)^c = P$ dir (Dummit and Foote 2004).

İspat: i. $I^e = h(I)S^{-1}R = (h(I)) = \{r/s : r \in I, s \in S\}$ dir.

$$
\begin{aligned}
\left(I^e\right)^c = h^{-1}\left(I^e\right) &= \left\{x \in R : h(x) \in I^e\right\} \\
&= \left\{x \in R : x/1 \in I^e\right\} \\
&= \left\{x \in R : x/1 = r/s, r/s \in I^e\right\} \\
&= \left\{x \in R : \exists u \in S \text{ } için \text{ } u(xs - r) = 0, r/s \in I^e\right\} \\
&= \left\{x \in R : \exists u \in S \text{ } için \text{ } uxs - ur = 0, r/s \in I^e\right\} \\
&= \left\{x \in R : xus = ur, r/s \in I^e\right\} \\
&= \left\{x \in R : Bir \text{ } s \in S \text{ } için \text{ } xs \in I\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise istenen sonuçtur. Ayrıca Lemma 4.3.1 göz önüne alınırsa $h^{-1}(J) = J^c$ olduğundan

$$S^{-1}\left(h^{-1}(J)\right) = \left(J^c\right)^e = J$$

elde edilir.

ii. "i" den dolayı

$$\left(P^e\right)^c = h^{-1}\left(S^{-1}P\right)$$

olur. P asal ve $s \in R - P$ olduğundan $x \in P$ olmalıdır. Bu ise

$$\left(P^e\right)^c \subset P \tag{79}$$

olması demektir. Ayrıca Tanım 2.68 den dolayı

$$P \subset \left(P^e\right)^c \tag{80}$$

dir. (79) ve (80) den $\left(P^e\right)^c = P$ elde edilir.

Sonuç 4.12.4 (Karşılaştırılamazlık Teoremi): $A \subseteq B$ olmak üzere A, B halkalar, B A üzerinde tam, Q ve Q', $Q \subseteq Q'$ ve $Q \cap A = Q' \cap A = P$ olacak şekilde B'nin asal idealleri olsun. Bu durumda $Q = Q'$ olur (Sharp 2000).

İspat: $U = A - P$ ve $\tau : A \to B$, içerme homomorfizmi; $\sigma : U^{-1}A \to U^{-1}B$, indirgenmiş birebir halka homomorfizmi[16] ve $\theta : A \to A_P$ ile $\phi : B \to B_P$, kanonik homomorfizmler[17] olsun. Bu durumda $\phi \circ \tau = \sigma \circ \theta$ olduğu açıktır.

$Q \cap A = Q' \cap A = P$ olduğundan $Q \cap U = Q' \cap U = \varnothing$ dir. Böylece Teorem 4.3.4 den $U^{-1}Q$, $U^{-1}Q'$ $U^{-1}B$ 'nin asal idealleridir ve $Q \subset Q'$ olduğundan $U^{-1}Q \subset U^{-1}Q'$ olur.

Ayrıca, Not 4.12.3 "ii" den $\phi^{-1}\left(U^{-1}Q\right) = Q$ ve $\phi^{-1}\left(U^{-1}Q'\right) = Q'$ olup

$$\tau^{-1}\left(\phi^{-1}\left(U^{-1}Q\right)\right) = \tau^{-1}\left(Q\right) = Q \cap A = P = Q' \cap A = \tau^{-1}\left(\phi^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)\right) \qquad (81)$$

elde edilir.

$U^{-1}Q$, $U^{-1}B$ 'nin asal ideali olduğundan Not 2.66 dan $\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right)$, $U^{-1}A$ 'nın bir idealidir ve

$$\begin{aligned} xy \in \sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right) &\Rightarrow \sigma\left(xy\right) \in U^{-1}Q \\ &\Rightarrow \sigma\left(x\right)\sigma\left(y\right) \in U^{-1}Q \\ &\Rightarrow \sigma\left(x\right) \in U^{-1}Q \text{ veya } \sigma\left(y\right) \in U^{-1}Q \\ &\Rightarrow x \in \sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right) \text{ veya } y \in \sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right) \end{aligned}$$

olup $U^{-1}Q$ asaldır. Benzer şekilde $\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)$ de $U^{-1}A$ 'nın asal idealidir. Not 2.67 ve $\phi \circ \tau = \sigma \circ \theta$ olduğu dikkate alınırsa

$$\theta^{-1}\left(\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right)\right) = \left(\sigma \circ \theta\right)^{-1}\left(U^{-1}Q\right) = \left(\phi \circ \tau\right)^{-1}\left(U^{-1}Q\right) = \tau^{-1}\left(\phi^{-1}\left(U^{-1}Q\right)\right)$$

elde edilir. (81) de dikkate alınırsa

$$\theta^{-1}\left(\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right)\right) = P$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde

$$\theta^{-1}\left(\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)\right) = P$$

---

[16] $r/u \in U^{-1}A$ olmak üzere $h\left(r/u\right) = r/u$ ile verilen dönüşümdür. Bu dönüşüm bir monomorfizmdir.

[17] θ ve ϕ, sırasıyla $a \in A$ olmak üzere $\theta\left(a\right) = a/1$ ve $b \in B$ olmak üzere $\phi\left(b\right) = b/1$ şeklinde tanımlanır.

dir. Sonuç 4.3.5 den dolayı

$$\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right)=\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)$$

olmalıdır. Not 4.12.3 "i" nin ikinci kısmından dolayı

$$\left(\theta^{-1}\left(\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right)\right)\right)^{e}=\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right)=U^{-1}P=\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)=\left(\theta^{-1}\left(\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)\right)\right)^{e}=\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)$$

olur. Böylece

$$\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q\right)=\left(U^{-1}Q\right)\cap\left(U^{-1}A\right)=U^{-1}P=\left(U^{-1}Q'\right)\cap\left(U^{-1}A\right)=\sigma^{-1}\left(U^{-1}Q'\right)=\left(U^{-1}Q'\right)\cap\left(U^{-1}A\right)$$

elde edilir. $U^{-1}P$, R_P'nin tek maksimal ideali olduğundan Sonuç 4.12.2 den $U^{-1}Q$ ve $U^{-1}Q'$ maksimal ideallerdir. $U^{-1}Q\subset U^{-1}Q'$ olduğundan, $U^{-1}Q$ ve $U^{-1}Q'$ nün maksimal ideal olması $U^{-1}Q=U^{-1}Q'$ olmasını gerektirir. $U^{-1}Q$ ve $U^{-1}Q'$ $U^{-1}B$'nin asal idealleri olduğundan, Teorem 4.3.4 den $Q=Q'$ elde edilir.

Not 4.12.6: Bu teoremi aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz. Teoremin aşağıdaki yeni ifadesi, teoremin isminin nereden geldiğini de açıklamaktadır.

"$A\subset B$ olmak üzere A,B halkalar; B A üzerinde tam, Q ve Q' B'nin A daki kısıtlaması aynı olan iki farklı asal ideali olsun. Bu durumda Q ve Q', birinin diğerini kapsamaması anlamında karşılaştırılamazdır."(Sharp 2000)

Teorem 4.12.7 (Üzerinde kalma teoremi) (Lying-over theorem): $A\subseteq B$ olmak üzere A,B halkalar, B A üzerinde tam ve P, A'nın bir asal ideali olsun. Bu durumda $Q\cap A=P$ olacak şekilde B'nin bir Q asal ideali vardır[18] (Sharp 2000).

İspat: Önerme 3.2.29 "i" den B_P, A_P üzerinde tamdır ve i_1 ve i_2, içerme dönüşümünü; π_1,π_2, kanonik homomorfizmleri göstermek üzere

---

[18] Üzerinde kalma teoreminin hipotezini sağlayan Q ve P için Q, P'nin üzerinde kalır denir (Lang 1984)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "\pi_2"] \\ A_P \arrow[r, "i_2"'] & B_P \end{tikzcd}$$

Şekil 4.4. Halkaların değişmeli diyagramı

diyagramı değişmelidir. N , B_P 'nin herhangi bir maksimal ideali olsun. Bu durumda Sonuç 4.12.2 den $N \cap A_P = M$, A_P 'nin maksimal idealidir. Dolayısıyla tek maksimal idealdir. $\pi_2 \circ i_1 = i_2 \circ \pi_1$ olduğundan

$$\left(\pi_2 \circ i_1\right)^{-1}\left(N\right) = \left(i_2 \circ \pi_1\right)^{-1}\left(N\right)$$

dir. Not 2.67 den dolayı

$$i_1^{-1}\left(\pi_2^{-1}\left(N\right)\right) = \pi_1^{-1}\left(i_2^{-1}\left(N\right)\right) \tag{82}$$

olur. $\pi_2^{-1}\left(N\right) = Q$ ise Sonuç 4.3.5 den Q asaldır ve $i_1^{-1}\left(Q\right) = Q \cap A$ dır. Böylece

$$i_1^{-1}\left(\pi_2^{-1}\left(N\right)\right) = Q \cap A$$

olur. (82) den dolayı

$$\pi_1^{-1}\left(i_2^{-1}\left(N\right)\right) = Q \cap A$$

dır.

$$i_2^{-1}\left(N\right) = N \cap A_P = M = P^e$$

ve Not 4.12.3 “ii” göz önüne alındığında

$$\pi_1^{-1}\left(P^e\right) = \left(P^e\right)^c = P$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $Q \cap A = P$ dir.

Teorem 4.12.8 (Açılma teoremi): $A \subseteq B$ olmak üzere A, B halkalar, B A üzerinde tam $P_1 \subseteq P_2 \subseteq ... \subseteq P_n$, A 'nın bir asal idealler zinciri ve $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq ... \subseteq Q_m \left(m < n\right)$, $1 \le i \le m$ olmak üzere $Q_i \cap A = P_i$ olacak şekilde B 'nin bir asal idealler zinciri olsun.

Bu durumda $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq ... \subseteq Q_m$ zinciri, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $Q_i \cap A = P_i$ olacak şekilde bir $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq ... \subseteq Q_n$ zincirine genişletilebilir (Atiyah and Macdonald 1969).

İspat: $P_1 \subseteq P_2$ ve Q_1, $Q_1 \cap A = P_1$ olacak şekilde B'nin bir asal ideali ise $Q_2 \cap A = P_2$ ve $Q_1 \subseteq Q_2$ olacak şekilde B'nin bir Q_2 asal idealinin olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$\tau : A \to B$ içerme homomorfizmi, $\rho : A/P_1 \to B/Q_1$ indirgenmiş birebir halka homomorfizmi[19] ve $\alpha : A \to A/P_1$ [20], $\beta : B \to B/Q_1$ [21] kanonik homomorfizmler olsun. Bu durumda $\beta \circ \tau = \rho \circ \alpha$ olduğu açıktır.

$P_1 \subseteq P_2$ olduğundan Teorem 2.52 "i" den P_2/P_1, A/P_1 in bir idealidir. P_2 asal olduğu için Lemma 2.53 den P_2/P_1 de asaldır. Örnek 4.6.2 den dolayı B/Q_1, A/P_1 üzerinde tamdır. $\overline{B} = B/Q_1$ ve $\overline{A} = A/P_1$ olmak üzere A/P_1 in P_2/P_1 asal ideali için Teorem 4.12.7 den $\overline{Q}_2 \cap \overline{A} = P_2/P_1$ olacak şekilde $\overline{B}$'nin bir $\overline{Q}_2$ asal ideali vardır. Teorem 2.52 "ii" den $Q_1 \subseteq Q_2$ olmak üzere $\overline{Q}_2 = Q_2/Q_1$ olacak şekilde B'nin bir Q_2 ideali vardır. $\overline{Q}_2$ asal olduğundan Lemma 2.53 den Q_2 de asaldır.

$\tau^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\overline{Q}_2\right)\right) = \tau^{-1}\left(Q_2\right) = Q_2 \cap A$, $\alpha^{-1}\left(P_2/P_1\right) = P_2$, $\beta \circ \tau = \rho \circ \alpha$ eşitliği ve Not 2.67 dikkate alınırsa

$$Q_2 \cap A = \tau^{-1}\left(\beta^{-1}\left(\overline{Q}_2\right)\right) = \alpha^{-1}\left(\rho^{-1}\left(\overline{Q}_2\right)\right) = \alpha^{-1}\left(P_2/P_1\right) = P_2$$

elde edilir.

---

[19] ρ, $a \in A$ olmak üzere $\rho\left(a + P_1\right) = a + Q_1$ şeklinde tanımlanır. (Sharp 2000)

[20] α, $a \in A$ olmak üzere $\alpha\left(a\right) = a + P_1$ şeklinde tanımlıdır.

[21] β, $b \in B$ olmak üzere $\beta\left(b\right) = b + Q_1$ şeklinde tanımlıdır.

5. SONUÇLAR

Bu bölümde “ $A-$modül”, “sol $A-$modül” anlamına gelmektedir.

5.1. Yerelleştirmenin tamlığı

Sonuç 5.1.1: R birimli değişmeli bir halka, D R ’nin “ 0 ” ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve L, M, N de $R-$modül olsun. Eğer

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$$

dizisi kısa tam dizi ise $D^{-1}R-$modüllerin

$$0 \longrightarrow D^{-1}L \xrightarrow{\psi'} D^{-1}M \xrightarrow{\varphi'} D^{-1}N \longrightarrow 0 \tag{83}$$

indirgenmiş dizisi de tamdır (Dummit and Foote 2004).

İspat: $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ dizisinin $R-$modüllerin bir dizisi olduğunu kabul edelim. $D^{-1}N$ ’nin her elemanının $n \in N$ ve $d \in D$ formunda olduğunu biliyoruz. φ örten olduğundan bir $m \in M$ için $\varphi(m) = n$ yazılabilir. Böylece

$$\varphi'(m/d) = \varphi(m)/d = n/d$$

olup φ' örtendir. $m/d \in Çek\ \varphi'$ ise

$$\varphi'(m/d) = \varphi(m)/d = 0$$

olup $d_1\varphi(m) = 0$ olacak şekilde bir $d_1 \in D$ vardır. φ homomorfizm olduğundan $\varphi(d_1 m) = 0$ olduğu dikkate alınırsa $Çek\ \varphi = \operatorname{Im}\ \psi$ eşitliğinden $d_1 m = \psi(l)$ olacak şekilde bir $l \in L$ vardır. Böylece

$$m/d = d_1 m/d_1 d = \psi(l)/d_1 d = \psi'(l/d_1 d)$$

olup

$$Çek\ \varphi' \subseteq \operatorname{Im}\ \psi' \tag{84}$$

elde edilir. Tersine $\psi(l)/d \in \operatorname{Im}\ \psi'$ ise

$$\varphi'\left(\psi(l)/d\right)=\varphi\left(\psi(l)\right)/d=0$$

olup

$$\text{Im }\ \psi' \subseteq Çek\ \ \varphi' \tag{85}$$

elde edilir. (84) ve (85) den $\text{Im }\ \psi' = Çek\ \ \varphi'$ eşitliğine ulaşılır. Son olarak (83) dizisinin tam olduğunu göstermek için ψ' nün birebir olduğu gösterilmelidir: $\psi'(l/d)=0$ olsun. Bu durumda

$$d_2\psi(l)=\psi(d_2 l)=0$$

olacak şekilde bir $d_2 \in D$ vardır. ψ birebir olduğundan $d_2 l = 0$ dır. Böylece

$$l/d = d_2 l/d_2 d = 0$$

olup ψ' birebirdir.

5.2. Yerelleştirmenin bölümlerle değişme özelliği

Sonuç 5.2.1: R birimli değişmeli bir halka, D R'nin "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve I da R'nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$D^{-1}R / D^{-1}I \cong D^{-1}\left(R/I\right)$$

olur (Dummit and Foote 2004).

İspat: i içerme dönüşümünü ve π de kanonik homomorfizmi göstermek üzere

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ i\ } R \xrightarrow{\ \pi\ } R/I \longrightarrow 0$$

dizisi kısa tam dizidir. Sonuç 5.1.1 den dolayı

$$0 \longrightarrow D^{-1}I \xrightarrow{\ i'\ } D^{-1}R \xrightarrow{\ \pi'\ } D^{-1}\left(R/I\right) \longrightarrow 0$$

indirgenmiş dizisi de tamdır. π' için Birinci İzomorfizm Teoremi uygulanırsa

$$D^{-1}R/Çek\ \ \pi' \cong \mathrm{D}^{-1}\left(R/I\right)$$

elde edilir. $Çek\ \ \pi' = \text{Im }\ i' = D^{-1}I$ olduğundan

$$D^{-1}R/D^{-1}I \cong \mathrm{D}^{-1}\left(R/I\right)$$

sonucu elde edilir.

Not 5.2.2: I ideali, R ve R/I halkaları, R halkasındaki işlemler dikkate alındığında birer $R-$modül olarak düşünülebilirler Bundan dolayı Sonuç 5.2.1 de Sonuç 5.1.1 kullanılabilir.

5.3. Yerelleştirmenin bir idealin radikali ile değişme özelliği

Sonuç 5.3.1: R birimli değişmeli bir halka, D R'nin "0" ı içermeyen çarpımsal bir alt kümesi ve I R'nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$rad\left(D^{-1}I\right)=D^{-1}\left(rad\ I\right) \tag{86}$$

dır (Dummit and Foote 2004).

İspat: $a\in rad\ I$ ise $a^n\in I$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $d\in D$ olmak üzere $\left(a/d\right)^n\in D^{-1}I$ olup $a/d\in rad\left(D^{-1}I\right)$ elde edilir. Yani

$$D^{-1}\left(rad\ I\right)\subseteq rad\ \left(\mathrm{D}^{-1}I\right)$$

olur.

Tersine $a/d\in rad\left(D^{-1}I\right)$ ise $a^n/d^n\in D^{-1}I$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla $x\in I$ ve $d_1\in D$ için

$$\frac{a^n}{d^n}=\frac{x}{d_1}$$

yazılabilir. Buradan bir $u\in D$ için

$$ua^nd_1=uxd^n$$

olup bir $v\in D$ için $va^n\in I$ elde edilir. Böylece

$$\left(va\right)^n=v^{n-1}\left(va^n\right)\in I$$

ve dolayısıyla $va\in rad\ I$ olur. Bundan dolayı

$$\frac{a}{d}=\frac{va}{vd}\in D^{-1}\left(rad\ I\right)$$

olup

$$rad\left(D^{-1}I\right) \subseteq D^{-1}\left(rad\ I\right) \tag{87}$$

dır. (86) ve (87) den $rad\left(D^{-1}I\right) = D^{-1}\left(rad\ I\right)$ eşitliğine ulaşılır.

5.4. “Esas ideal halkası olma” özelliğinin yerelleştirme altında korunması

Sonuç 5.4.1: A birimli değişmeli bir esas ideal halkası ve S A’nın “ 0 ” ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi olsun. Bu durumda $S^{-1}A$ birimli değişmeli bir esas ideal halkasıdır (Lang 1965).

İspat: $S^{-1}A$’nın birimli değişmeli bir halka olduğu Teorem 3.1.2 den biliniyor. Geriye $S^{-1}A$’nın esas ideal halkası olduğunu göstermek kalıyor. Lemma 4.3.1 den dolayı J, $S^{-1}A$’nın bir idealiyse $I = h^{-1}\left(J\right)$’nin A’nın bir ideali olduğunu ve J’nin de $S^{-1}\left(h^{-1}\left(J\right)\right) = S^{-1}I$ formunda yazılabileceğini biliyoruz. A esas ideal halkası olduğundan bir $x \in A$ için

$$I = \langle x \rangle = \{xa : a \in A\}$$

yazılabilir. Böylece $S^{-1}I$’nın elemanları $a \in A$ ve $s \in S$ olmak üzere xa/s formunda olur. Bu ise $S^{-1}I$’nın $x/1$ tarafından gerilmesi demektir yani $S^{-1}I$ esas idealdir. Dolayısıyla $S^{-1}A$ bir esas ideal halkasıdır.

Sonuç 5.4.2: Sonuç 5.4.1 den dolayı “esas ideal halkası olma” özelliği yerel bir özelliktir.

5.5. “Noetherian ve Artinian halka olma” özelliğinin yerelleştirme altında korunması

Sonuç 5.5.1: R birimli değişmeli bir halka ve D R’nin “ 0 ” ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi olsun. Bu durumda

i. R Noetherian ise $D^{-1}R$ de Noetheriandır.

ii. R Artinian ise $D^{-1}R$ de Artiniandır (Dummit and Foote 2004).

İspat:

i. $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq ... \subseteq Q_m \subseteq ...$ $D^{-1}R$ 'nin artan bir ideal zinciri olsun. Bu durumda h R den $D^{-1}R$ ye doğal homomorfizm olmak üzere R 'nin bir

$$h^{-1}(Q_1) \subseteq h^{-1}(Q_2) \subseteq ... \subseteq h^{-1}(Q_m) \subseteq ...$$

zinciri elde edilir. R Noetherian olduğundan bir n pozitif tamsayısı için $i \geq n$ olmak üzere $h^{-1}(Q_n) = h^{-1}(Q_i)$ olur. Lemma 4.3.1 den $Q_n = Q_i$ elde edilir. Dolayısıyla $D^{-1}R$ Noetheriandır.

ii. $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq ... Q_m \supseteq ...$ $D^{-1}R$ 'nin azalan bir ideal zinciri olsun. Bu durumda h R den $D^{-1}R$ ye doğal homomorfizm olmak üzere R 'nin bir

$$h^{-1}(Q_1) \supseteq h^{-1}(Q_2) \supseteq ... \supseteq h^{-1}(Q_m) \supseteq ...$$

azalan ideal zinciri elde edilir. R Artinian olduğundan bir n pozitif tamsayısı için $j \geq n$ olmak üzere $h^{-1}(Q_m) = h^{-1}(Q_j)$ dir. Lemma 4.3.1 den $Q_m = Q_j$ dir. Dolayısıyla $D^{-1}R$ Artiniandır.

Sonuç 5.5.2: 5.5.1. Sonuç'tan dolayı "Noetherian ve Artinian Halka Olma" özelliği yerel bir özelliktir.

5.6. "Goldman halkası olma" özelliğinin yerelleştirme altında korunması

Sonuç 5.6.1: R bir tamlık bölgesi ve S R 'nin "0" ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi olsun. R Goldman halkası ise $S^{-1}R$ de Goldman halkasıdır.

İspat: J $S^{-1}R$ 'nin sıfırdan farklı bir asal ideali olsun. Teorem 4.3.4 den dolayı $h^{-1}(J)$ R 'nin sıfırdan farklı bir asal idealidir. R Goldman halkası olduğundan $a \in h^{-1}(J)$ olacak şekilde bir $0 \neq a \in R$ vardır. Böylece $0 \neq h(a) \in J$ olup $S^{-1}R$ Goldman halkasıdır.

Sonuç 5.6.2: Sonuç 5.6.1 den dolayı “Goldman Halkası Olma” özelliği yerel bir özelliktir.

5.7. “Bir halkanın nilradikali olma” özelliğinin yerelleştirme altında korunması

Sonuç 5.7.1: R birimli değişmeli bir halka, D R’nin “0” ı içermeyen çarpımsal bir altkümesi ve N R’nin nilradikali olsun. Bu durumda $D^{-1}N$ de $D^{-1}R$’nin nilradikalidir (Dummit and Foote 2004).

İspat: $r/d \in \mathfrak{N}\left(D^{-1}R\right)$ olsun. Bu durumda $r^n/d^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece bir $u \in D$ için $ur^n = 0$ olur. Buradan

$$\left(ur\right)^n = u^{n-1}\left(ur^n\right) = 0$$

olacağından $ur \in N$ bulunur. Böylece

$$r/d = ur/du \in D^{-1}N$$

elde edilir. Yani

$$\mathfrak{N}\left(D^{-1}R\right) \subseteq D^{-1}N \tag{88}$$

elde edilir. Tersine $a \in N, d \in D$ olsun. Bu durumda $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla

$$\left(a/d\right)^n = a^n/d^n = 0$$

olup $\dfrac{a}{d} \in \mathfrak{N}\left(D^{-1}R\right)$ elde edilir. Yani

$$D^{-1}N \subseteq \mathfrak{N}\left(D^{-1}R\right) \tag{89}$$

olur. (88) ve (89) den $D^{-1}N = \mathfrak{N}\left(D^{-1}R\right)$ eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 5.7.2: Sonuç 5.7.1 den “Nilradikal Olma” özelliği yerel bir özelliktir.

5.8. Yerelleştirme ve nilpotent eleman arasındaki ilişki

Sonuç 5.8.1: R birimli değişmeli bir halka ve D R'nin çarpımsal bir alt kümesi olsun. Bu durumda $D^{-1}R=0$ olması için gerek ve yeter şart D'nin nilpotent eleman içermesidir (Dummit and Foote 2004).

İspat: $D^{-1}R=0$ ise $1/1=0/1$ olur. Bu ise bir $x \in D$ için $x=0$ olması demektir. Böylece $x=0 \in D$ nilpotent elemandır. Tersine D nilpotent eleman içeriyorsa yani bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m=0\left(x \in D\right)$ ise $0 \in D$ dir. Bu ise $r \in R$ ve $d \in D$ olmak üzere $r/d=0/0$ olması demektir. Yani $D^{-1}R=0$ dır.

Sonuç 5.8.2: R birimli değişmeli bir halka ve R'nin her P asal ideali için R_P sıfırdan farklı bir nilpotent eleman içermesin. Bu durumda R de sıfırdan farklı bir nilpotent eleman içermez (Atiyah and Macdonald 1969).

İspat: R'nin sıfırdan farklı bir nilpotent eleman içerdiğini kabul edelim. Böylece $m \geq 2$ olmak üzere $x^m=0$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. $x \neq 0$ olduğundan $sfr\left(x\right) \neq R$ dir. Böylece $sfr\left(x\right)$ R'nin bir P maksimal ideali tarafından kapsanır. (P aynı zamanda asaldır) $x^m=0$ olduğundan $x^m \in P$ ve dolayısıyla $x \in P$ dir. x R'nin bir nilpotent elemanı olduğu için $x/1 \in R_P$ de R_p'nin nilpotent elemanı olur.

$$x/1=0/1 \Rightarrow \exists u \in S : ux=0 \quad \left(S=R-P\right)$$

olup $u \in sfr\left(x\right)$ ve dolayısıyla $u \in P$ olur ki bu $S \cap P=\varnothing$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle $x/1 \neq 0/1$ dir.

5.9. “Maksimal ideal olma” ve “Asal ideal olma” özelliklerinin yerelleştirme altında korunmayabilirliği

Sonuç 5.9.1: “Maksimal ideal olma” yerelleştirme altında korunmayabilir.

İspat: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasını ve $\mathbb{Z}$'nin bölüm cismi $\mathbb{Q}$'yu düşünelim. $2\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$'nin maksimal idealidir. Ancak Q'nun idealleri sadece 0 ve kendisi olduğundan yerelleştirme altında elde edilen ideal $\mathbb{Q}$ ya eşittir yani maksimal değildir.

Sonuç 5.9.2: "Asal ideal olma" yerelleştirme altında korunmayabilir.

İspat: Birimli değişmeli bir halkada her maksimal ideal asal ideal olduğundan Sonuç 5.9.1 den dolayı "Asal ideal olma" yerelleştirme altında korunmayabilir.

5.10. Birimli değişmeli halkanın her asal idealindeki yerelleştirmesi tamlık bölgesi iken halkanın kendisinin tamlık bölgesi olmayabilirliği

Sonuç 5.10.1: R aşikar olmayan (yani $R \neq 0$) birimli değişmeli bir halka ve R'nin her P asal ideali için R_P tamlık bölgesi ise R'nin tamlık bölgesi olması gerekmez. (Sharp 2000)

İspat: $\mathbb{Z}_4$ halkasını düşünelim. $\mathbb{Z}_4$'ün althalkaları $\{\overline{0}\}, \{\overline{0}, \overline{2}\}$ ve $\mathbb{Z}_4$'ün kendisidir. Bu althalkalar içinde sadece $\{\overline{0}, \overline{2}\}$, $\mathbb{Z}_4$'ün asal idealidir. $\mathbb{Z}_4$'ün $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ asal idealindeki yerelleştirmesi

$$\{\overline{0}/\overline{1}, \overline{1}/\overline{1}, \overline{1}/\overline{3}, \overline{2}/\overline{1}\}$$

olur ve bu halka bir tamlık bölgesidir. Ancak $\mathbb{Z}_4$ bir tamlık bölgesi değildir.

5.11. Birimli değişmeli bir halkanın yerel halka olup olmadığını belirlemek için kriterler

Aşağıdaki sonuç, sonucun hipotez kısmını sağlayan bir halkanın yerel halka olduğunu garanti etmektedir.

Sonuç 5.11.1: R birimli değişmeli bir halka, M R'nin bir maksimali ideali ve her $x \in M$ için $1+x$ aritmetik birim olsun. Bu durumda R tek maksimal ideali M olan bir yerel halkadır (Ash 2003).

İspat: Teorem 3.1.20 den dolayı x aritmetik birim değilse $x \in M$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için $x \notin M$ ise x'in aritmetik birim olduğunu göstereceğiz.

$x \notin M$ olsun. M maksimal olduğundan $\langle M, x \rangle = R$ olur. Böylece $y + zx = 1$ olacak şekilde $y \in M$ ve $z \in R$ vardır. $zx = 1 - y = 1 + (-y)$ olduğundan hipotezden zx aritmetik birimdir. Dolayısıyla x de aritmetik birimdir.

Aşağıdaki sonuçta bir halkanın yerel halka olup olmadığını belirlemek için bir kriter verilmiştir.

Sonuç 5.11.2: R birimli değişmeli bir halka olsun. R'nin yerel halka olması için gerek ve yeter şart her $r, s \in R$ için $r + s = 1_R$ ise r veya s'nin aritmetik birim olmasıdır (Hungerford 1974).

İspat: R'nin yerel halka olduğunu kabul edelim ve M R'nin bir maksimal ideali olsun. r'nin aritmetik birim olmadığını kabul edersek Teorem 3.1.21 den $r \in M$ olur. $s \in M$ olsa $r + s = 1_R \in M$ olacağından bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla $s \notin M$ dir. Böylece s aritmetik birimdir.

Tersine her $r, s \in R$ için $r + s = 1_R$ ise r veya s aritmetik birim olsun. Bu durumda R'nin yerel halka olduğunu gösterelim. Bunun için R'nin aritmetik birim olmayan elemanlarının bir ideal oluşturduğu gösterilmelidir. x ve y aritmetik birim olmasın. $x - y$ aritmetik birim olsa

$$(x-y)t_1 = x$$
$$(x-y)t_2 = y$$

olacak şekilde $t_1, t_2 \in R$ vardır. Buradan

$$(x-y)(t_1 - t_2) = x - y$$

olup $t_1 - t_2 = 1_R$ dir. Bu ise kabulden dolayı t_1 veya $-t_2$ 'nin aritmetik birim olması demektir. Yani x veya y aritmetik birimdir. Bu ise başlangıçtaki kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $x-y$ aritmetik birim değildir.

Şimdi de $r \in R$ olduğunu ve x 'in aritmetik birim olmadığını kabul edelim. rx aritmetik birim olsa

$$(rx)t = t(rx) = 1_R$$

olacak şekilde $t \in R$ olurdu. Bu ise

$$x(rt) = rt(x) = 1_R$$

olması yani x 'in aritmetik birim olması demektir. Fakat başlangıçta x 'in aritmetik birim olmadığı kabul edilmişti. Dolayısıyla rx aritmetik birim değildir.

Aşağıdaki sonuçta "Yerel Halka Olma" özelliğinin örten bir homomorfizm altında korunduğu ifade edilmiştir.

Sonuç 5.11.3: A, A' birimli değişmeli halkalar ve $f: A \to A'$ örten bir halka homomorfizmi olsun. Eğer A yerel ise A' de yereldir (Lang 1965).

İspat: Öncelikle bir maksimal idealin ters görüntüsünün de maksimal olduğu gösterilmelidir.

M', A' nün bir maksimal ideali olsun. $f^{-1}(M')$ nün A'nın maksimal ideali olduğunu göstereceğiz. M A'nın bir has ideali olmak üzere

$$f^{-1}(M') \subseteq M$$

ise, f 'nin örten olduğu da kullanılırsa $M' \subseteq f(M)$ elde edilir. M 'nin ideal ve f 'nin örten bir homomorfizm olduğu dikkate alınırsa $f(M)$ A' nün bir idealidir. Ayrıca $M \neq R$ olduğundan $f(M) \neq A'$ olup M', A' nün maksimal ideali olduğundan $M' = f(M)$ ve dolayısıyla $f^{-1}(M') = M$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(M')$ A'nın maksimal idealidir.

M_1' ve M_2' A' nün iki maksimal ideali olsun. Bu durumda $f^{-1}\left(M_1'\right)$ ve $f^{-1}\left(M_2'\right)$ A'nın maksimal idealleridir. A yerel halka olduğundan $f^{-1}\left(M_1'\right) = f^{-1}\left(M_2'\right)$ elde edilir. f 'nin örten olduğu da dikkate alınırsa $M_1' = M_2'$ eşitliğine ulaşılır.

5.12. Tam genişlemeler ve cebirsel genişlemeler arasındaki ilişki

Aşağıdaki sonuçta bir cisim üzerinde tam ve cebirsel genişlemelerin birbirine denk olduğu ifade edilmiştir.

Sonuç 5.12.1: R, S birer cisim olmak üzere S'nin R üzerinde tam olması için gerek ve yeter şart S'nin R üzerinde cebirsel olmasıdır (Samuel 2008).

İspat: S, R üzerinde tam ve $s \in S$ olsun. Bu durumda

$$s + r^{n-1}s^{n-1} + \ldots + r_0 = 0$$

olacak şekilde $r_i \in R$ vardır.

Dolayısıyla s,

$$x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_0$$

polinomunun bir kökü olup R üzerinde cebirseldir. Bu ise S'nin R üzerinde cebirsel olması demektir.

Tersine S, R üzerinde cebirsel ve $s \in S$ olsun. Bu durumda

$$r_n s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \ldots + r_0 = 0 \tag{90}$$

olacak şekilde

$$f(x) = r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \ldots + r_0 \in R[x]$$

polinomu vardır. (90)'nın her iki tarafı r_n^{-1} ile çarpılrsa $n.$dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu ise s'nin R üzerinde ve dolayısıyla S'nin R üzerinde tam olması demektir.

5.13. Aşkın genişlemeler ile tam olmayan genişlemeler arasındaki ilişki

Sonuç 5.12.1 den bir cisim üzerindeki aşkın genişlemeler ile tam olmayan genişlemelerin birbirine denk olduğunu ifade eden aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.13.1: R, S birer cisim olmak üzere S'nin R üzerinde aşkın olması için gerek ve yeter şart S'nin R üzerinde tam olmamasıdır.

Not 5.13.2: S'nin R üzerinde tam olmaması S'nin R üzerinde tam olmayan en az bir elemanının olmasıdır.

5.14. Önerme 3.2.25'in sonuçları

Sonuç 5.14.1. Her esas ideal bölgesi tamamen kapalıdır (Milne 2008)

İspat: Her esas ideal bölgesi tek türlü asal çarpanlara ayrılabilir bölge olduğundan Önerme 3.2.25 den dolayı tamamen kapalıdır.

Sonuç 5.14.2: K bir cisim olmak üzere $K[x, y]$ polinom halkası tamamen kapalıdır. (Dummit and Foote 2004)

İspat: Tanım 2.58, Teorem 2.78, Teorem 2.98 ve Önerme 3.2.25 gözönüne alındığında $K[x, y]$ polinom halkasının tamamen kapalı olduğu görülür.

5.15. Önerme 4.12.1'in sonuçları

Sonuç 5.15.1: R bir tamlık bölgesi, F R'nin bölüm cismi ve F R üzerinde tam olsun. Bu durumda R bir cisimdir (Hungerford 1974).

İspat: $R \subseteq F$ olmak üzere R, F tamlık bölgeleri ve F, R üzerinde tam olup F'nin bir cisim olduğu dikkate alınırsa Önerme 4.12.1 den R de cisimdir.

Sonuç 5.15.2: K bir cisim ve $K \subset E$ olmak üzere E, bir tamlık bölgesi olsun. Eğer E, K üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ise E bir cisimdir.

İspat: $\alpha \in E$ olsun. Teorem 2.89 dan $1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^n$, K üzerinde lineer bağımlıdır. Böylece

$$\omega_1.1 + \omega_2.\alpha + ... + \omega_{n+1}.\alpha^n = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\omega_i \in K$ vardır. Buradan da

$$\left(\omega_{n+1}{}^{-1}\omega_1\right).1 + \left(\omega_{n+1}{}^{-1}\omega_2\right).\alpha + ... + \alpha^n = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla α,

$$f(x) = x^n + ... + \left(\omega_{n+1}{}^{-1}\omega_1\right) \in K[x]$$

monik polinomunun bir köküdür yani α, K üzerinde tamdır. $\alpha \in E$ keyfi olduğundan E, K üzerinde tamdır.

$K \subset E$ olmak üzere K, E tamlık bölgeleri, E K üzerinde tam ve K bir cisim olduğundan Önerme 4.12.1 den E de cisimdir.

5.16. Sonuç 4.12.2'nin ve Üzerinde kalma Teoremi'nin Sonuçları

Sonuç 5.16.1: $R \subseteq S$ olmak üzere R, S birimli değişmeli halkalar ve S, R üzerinde tam olsun. Bu durumda

$$Jac(R) = Jac(S) \bigcap R$$

dir (Sharp 2000).

İspat: $x \in Jac(R)$ ve Q, S 'nin herhangi bir maksimal ideali olsun. $Q \cap R = P$ olduğunu kabul edelim. 4.12.2. Sonuçtan P maksimaldir. Böylece $x \in P$ ve dolayısıyla $x \in Q$ olup $x \in Jac(S) \cap R$ elde edilir. Yani

$$Jac(R) \subseteq Jac(S) \cap R \tag{91}$$

dir.

$x \in Jac(S) \cap R$ ve M , R 'nin herhangi bir maksimal ideali olsun. Üzerinde kalma teoremi'nden $M = R \cap N$ olacak şekilde S 'nin bir N asal ideali vardır. Sonuç 4.12.2 den N maksimaldir. $x \in Jac(S)$ olduğu için $x \in N$ ve dolayısıyla $x \in M$ bulunur. Böylece $x \in Jac(R)$ olup

$$Jac(S) \cap R \subseteq Jac(R) \tag{92}$$

dir. (91) ve (92) den $Jac(S) \cap R = Jac(R)$ eşitliğine ulaşılır.

Sonuç 5.16.2: $R \subset S$ olmak üzere R, S birimli değişmeli halkalar, S R üzerinde tam ve S , R üzerinde bir halka olarak sonlu gerilsin. Eğer P , R 'nin bir maksimal idealiyse $Q \cap R = P$ olacak şekilde S 'nin sonlu sayıda maksimal ideali vardır ve bu sayı sıfırdan farklıdır (Dummit and Foote 2004).

İspat: Üzerinde kalma teoremi'nden dolayı $Q \cap R = P$ olacak şekilde S 'nin bir Q asal ideali vardır. P , R 'nin maksimal ideali olduğundan Sonuç 4.12.2 den Q da maksimaldir. Böylece S 'nin $Q \cap R = P$ olacak şekilde en az bir maksimal idealinin olduğu gösterilmiş oldu.

S, R üzerinde bir halka olarak sonlu gerildiğinden $1 \leq i \leq n$ için $s_i \in S$ olmak üzere $S = R[s_1, s_2, ..., s_n]$ yazılabilir. Böylece Q, R'nin bir maksimal ideali ve $1 \leq i \leq n$ için $\overline{s}_i = s_i + Q$ olmak üzere $S/Q = (R/P)[\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_n]$ elde edilir. Örnek 4.6.2 den S/Q, R/P üzerinde tamdır. Dolayısıyla $1 \leq i \leq n$ için $\overline{s}_i$ de R/P üzerinde tamdır. Bu sebebten $1 \leq i \leq n$ için $\overline{p}_i(s_i) = 0$ olacak şekilde katsayıları R/P de olan bir $\overline{p}_i(x)$ monik polinomu vardır. $\overline{p}_i(x)$ nin kökleri sonlu sayıda olduğundan sonlu sayıda $(R/P)[\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_n]$ cisim genişlemesi ve dolayısıyla sonlu sayıda S/Q cisim genişlemesi vardır. Bu ise sonlu sayıda Q maksimal ideali olması demektir.

5.17. Daralma teoremi (Going-down theorem)

Bu kısımda sırasıyla Daralma teoreminin ispatı için gerekli teorem, lemma, önerme ve ispatları ile Daralma teoremi ve ispatı verilmiştir.

Teorem 5.17.1: R birimli değişmeli halka, I R'nin bir ideali ve $I \cap S = \varnothing$ olmak üzere S de R'nin çarpımsal bir alt kümesi olsun. Bu durumda R'nin ideallerinin

$$\psi := \{ J \in I_R : J \supseteq I \ ve \ J \cap S = \varnothing \}$$

kümesi en az bir maksimal elemana sahiptir ve ψ' nin her maksimal elemanı, R'nin bir asal idealidir (Sharp 2000).

İspat: Öncelikle $I \in \psi$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\psi \neq \varnothing$ dir. Δ, ψ'nin tam sıralı bir altkümesi olsun. Bu durumda

$$Q := \bigcup_{J \in \Delta} J$$

olmak üzere $Q \supseteq I$, $Q \cap S = \varnothing$ ve Q, R'nin bir idealidir. Böylece Q, ψ de Δ için bir üst sınırdır. Dolayısıyla Zorn Lemmasından ψ'nin en az bir maksimal elemanı vardır.

P, ψ'nin keyfi bir maksimal ideali olsun. $P \cap S = \varnothing$ ve $1 \in S$ olduğundan $1 \notin P$ dir. Ayrıca P, R'nin bir ideali olduğundan $P \subset R$ dir. P'nin asal olduğunu göstermek için $aa' \in P$ iken $a \in P$ veya $a' \in P$ olduğu veya denk olarak $a \notin P$ ve $a' \notin P$ ise $aa' \notin P$ olduğu gösterilmelidir. $a, a' \in R - P$ olsun. $a \notin P$ olduğundan

$$I \subseteq P \subseteq P + Ra$$

elde edilir. P'nin ψ deki maksimalliğinden $(P + Ra) \cap S \neq \varnothing$ olmalıdır. Böylece

$$s = u + ra$$

olacak şekilde $s \in S, r \in R$ ve $u \in P$ vardır. Benzer şekilde

$$s' = u' + r'a'$$

olacak şekilde $s' \in S, r' \in R$ ve $u \in P$ vardır. Buradan

$$ss' = (u + ra)(u' + r'a') = (uu' + rau' + r'a'u) + rr'aa'$$

elde edilir. $P \cap S = \varnothing$ ve S çarpımsal olduğundan $ss' \notin P$ dir. $(uu' + rau' + r'a'u) \in P$ ve $ss' \notin P$ olduğundan $rr'aa' \notin P$ olmalıdır. Bu ise $aa' \notin P$ olmasını gerektirir.

Lemma 5.17.2: $R \subseteq S$ olmak üzere R, S birimli değişmeli halkalar, S R üzerinde tam ve I R'nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$\sqrt{IS} = \left\{ s \in S : bir\ n \in \mathbb{N}\ ve\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in I\ için\ s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \right\}$$

dır (Sharp 2000).

İspat: $s \in \sqrt{IS}$ olsun. Bu durumda bir $h \in \mathbb{N}$ için $s^h \in IS$ dir. Dolayısıyla

$$s^h = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$$

olacak şekilde $a_i \in I$, $s_i \in S$ vardır. Önerme 3.2.6 dan dolayı $T := R[s, s_1, \ldots, s_n]$ sonlu gerilen bir $R-$modüldür ve $s^h T \subseteq IT$ dir. T faithful $T-$modül olduğundan Önerme 2.137 den

$$\left(s^h\right)^m + b_{m-1}\left(s^h\right)^{m-1} + \ldots + b_1 s^h + b_0 = 0$$

olacak şekilde $b_i \in I$ ve $m \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$s^{hm} + b_{m-1}s^{h(m-1)} + \ldots + b_1 s^h + b_0 = 0$$

dır.

Tersine $s \in S$, bir $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in I$ için

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

olsun. Bu durumda

$$s^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \in IS$$

olup $s \in \sqrt{IS}$ elde edilir.

Önerme 5.17.3: $R \subseteq S$ olmak üzere R, S tamlık bölgeleri, S R üzerinde tam, R tamamen kapalı, K , R 'nin kesirler cismi, I R 'nin bir ideali ve $s \in IS$ olsun. Bu durumda s , K üzerinde cebirseldir ve s 'nin K üzerindeki minimal polinomu $a_0, a_1, \ldots, a_{h-1} \in \sqrt{I}$ olmak üzere

$$x^h + a_{h-1}x^{h-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

formundadır (Sharp 2000).

İspat: s , R üzerinde tam olduğundan s , K üzerinde cebirseldir. s 'nin K üzerindeki minimal polinomu

$$f = x^h + a_{h-1}x^{h-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x] \tag{93}$$

olsun. $a_i \in \sqrt{I}$ olduğunu göstermeliyiz. Not 2.109 dan dolayı f , $L[x]$ de lineer çarpanlarına ayrılabilecek şekilde K 'nin bir L cisim genişlemesi vardır. $s_1, s_2, \ldots, s_h \in L$ olmak üzere

$$f(x) = (x - s_1)(x - s_2)\ldots(x - s_h) \tag{94}$$

olsun. (93) ve (94) ün birbirine eşit olduğu dikkate alınırsa Not 2.60 dan dolayı $a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}$, $s_1, s_2, \ldots s_h$ 'nin çarpımlarının veya toplamlarının bir kombinasyonu olur. Böylece $a_0, a_1, \ldots, a_{h-1} \in R[s_1, s_2, \ldots, s_h]$ dir. $s \in IS$ olduğundan Lemma 5.17.2 den

$$s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 = 0 \tag{95}$$

olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ ve $b_i \in I$ vardır.. Herbir s_i $(i = 1,2,...,h)$ K üzerinde cebirsel ve minimal polinomları f olduğundan Teorem 2.107 den $\sigma_i(s) = s_i$ ve her $a \in K$ için $\sigma_i(a) = a$ olacak şekilde $\sigma_i : K(s) \to K(s_i)$ cisim izomorfizmi vardır. Böylece (95)'in σ_i 'ler altındaki görüntüsü alınırsa her $i = 1,2,...,h$ için

$$s_i^m + b_{m-1} s_i^{m-1} + ... + b_i s_i + b_0 = 0$$

elde edilir. Böylece s_i 'ler R üzerinde tamdır. Önerme 3.2.6 dan $R[s_1, s_2, ..., s_h]$ sonlu gerilen $R-$modüldür. $a_0, a_1, ..., a_{h-1} \in R[s_1, s_2, ..., s_{h-1}]$ olduğu dikkate alınırsa Teorem 3.2.2 den $a_0, a_1, ..., a_{h-1}$ R üzerinde tamdır. $a_0, a_1, ..., a_{h-1} \in K$ ve R tamamen kapalı olduğundan $a_0, a_1, ..., a_{h-1} \in R$ dir.

$T := R[s_1, s_2, ..., s_h]$ olsun. Lemma 5.17.2 den $s_1, s_2, ..., s_h \in \sqrt{IT}$ dir. $a_0, a_1, ..., a_{h-1}$, s_i lerin çarpımlarının veya toplamlarının bir kombinasyonu olduğundan $a_0, a_1, ..., a_{h-1} \in \sqrt{IT}$ ve dolayısıyla Lemma 5.17.2 den, her bir a_i katsayıları I da olan monik bir polinomun köküdür. $a_0, a_1, ..., a_{h-1} \in R$ olduğundan yine Lemma 5.17.2 den dolayı $a_0, a_1, ..., a_{h-1} \in \sqrt{IR} = \sqrt{I}$ elde edilir.

Teorem 5.17.4 (Daralma teoremi): $R \subseteq S$ olmak üzere R, S tamlık bölgeleri, S R üzerinde tam, R tamamen kapalı, $P_1 \supseteq P_2 \supseteq ... \supseteq P_n$ R'nin asal ideallerinin bir zinciri ve $Q_i \cap R = P_i$ $(1 \le i \le m)$ olmak üzere $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq ... \supseteq Q_m$ $(m < n)$ S'nin asal ideallerinin bir zinciri olsun. Bu durumda $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq ... \supseteq Q_m$ zinciri $Q_i \cap R = P_i$ $(1 \le i \le n)$ olmak üzere bir $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq ... \supseteq Q_n$ zincirine genişletilebilir. (Sharp 2000)

İspat: $P_1 \supseteq P_2$ ve Q_1, $Q_1 \cap R = P_1$ olacak şekilde S'nin bir asal ideali ise $Q_1 \supseteq Q_2$ olacak şekilde S'nin bir Q_2 asal idealinin olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $U := S - Q_1$ ve $V := R - P_2$ olsun. Teorem 3.1.10 dan dolayı U ve V sırasıyla S ve R nin çarpımsal altkümeleridir. Bu durumda

$$W := UV = \{uv : u \in U, v \in V\}$$

kümesinin S 'nin çarpımsal bir altkümesi olduğu açıktır. Amacımız

$$P_2^e \cap W = \varnothing \tag{96}$$

olduğunu göstermek. (96)'nın doğru olduğunu göstermek için $P_2^e \cap W \neq \varnothing$ olduğunu kabul edeceğiz. Böylece $s \in P_2^e \cap W$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

K, R 'nin bölüm cismi olsun. Bu durumda K 'yı S 'nin bölüm cisminin bir altkümesi olarak görebiliriz. Önerme 5.17.3 den dolayı s, K üzerinde cebirseldir ve K üzerindeki minimal polinomu $h \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, ..., a_{h-1} \in \sqrt{P_2} = P_2$ olmak üzere

$$f(x) = x^h + a_{h-1}x^{h-1} + ... + a_1 x + a_0 \tag{97}$$

formundadır. $s \in W$ olduğundan bir $u \in U$ ve $v \in V$ için $s = uv$ yazılabilir. $V = R - P_2$ olduğundan $v \neq 0$ dır ve (97) dikkate alınırsa

$$u^h v^h + a_{h-1}u^{h-1}v^{h-1} + ...a_1 uv + a_0 = 0$$

dır. Buradan

$$u^h + \frac{a_{h-1}}{v}u^{h-1} + ... + \frac{a_1 u}{v^{h-1}} + \frac{a_0}{v^h} = 0$$

olup $u = s/v$,

$$g = x^h + \frac{a_{h-1}}{v}x^{h-1} + ... + \frac{a_1}{v^{h-1}}x + \frac{a_0}{v^h} \in K[x] \tag{98}$$

polinomunun bir köküdür.

$K[x]$ de

$$g(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{l} \beta_j x^J\right) \tag{99}$$

olduğunu kabul edelim. (97), (98) ve (99) dikkate alınırsa

$$f(x)=\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{\alpha_i}{v^i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{l}\beta_j v^{h-j}x^J\right)$$

elde edilir. Bu ise f ’nin minimal olmasıyla çelişir. Dolayısıyla g, u ’nun minimal polinomudur. Önerme 5.17.3 te $I=R$ alınırsa g ’nin katsayılarının R de olduğu görülür. Böylece her bir $i=0,...,h-1$ için $a_i=v^{h-i}\rho_i$ olcak şekilde $\rho_i\in R$ vardır. $a_0,a_1,...,a_{h-1}\in P_2$ ve $v\in R-P_2$ olduğundan her $i=0,...,h-1$ için $\rho_i\in P_2$ dir. Dolayısıyla

$$g=x^h+\rho_{h-1}x^{h-1}+...+\rho_1x+\rho_0$$

u ’nun K üzerindeki minimal polinomudur. Lemma 5.17.2 den dolayı

$$u\in\sqrt{P_2S}\subseteq\sqrt{P_1S}\subseteq Q_1$$

elde edilir. Ancak $u\in U=S-Q_1$ olduğundan bu mümkün değildir. Böylece $P_2^e\cap W=\varnothing$ olur.

Teorem 5.17.1 den $Q_2\cap W=\varnothing$ ve $P_2^e\subseteq Q_2$ olacak şekilde S ’nin bir Q_2 asal ideali vardır. Böylece

$$P_2\subseteq P_2^e\cap R\subseteq Q_2\cap R \tag{100}$$

olur. Eğer $x\in Q_2\cap R$ ise $x\in Q_2$ dir. $Q_2\cap W=\varnothing$ olduğundan $x\notin W$ olur. $V=R-P_2\subseteq W$ olduğundan $x\in P_2$ dir. (100) de dikkate alınırsa $P_2=Q_2\cap R$ elde edilir. Şimdi de $x\in Q_2$ olsun. Yine $Q_2\cap W=\varnothing$ olduğundan $x\notin W$ olur. $U=S-Q_1\subseteq W$ olduğundan $x\in Q_1$ dir. Böylece $Q_2\subseteq Q_1$ elde edilir.

KAYNAKLAR

Akın, Ömer., 2002. Uygulamalı Lineer Cebir. Palme Yayıncılık. 565 s, Ankara.
Amini, Babak., Amini, Afshin and Facchini, Alberto., 2008. Equivalence of diagonal matrices over local rings. Journal of Algebra, 320 (3), 1288-1310.
Asar, Ali Osman., Arıkan, Ahmet ve Arıkan, Aynur., 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi. 373 s, Ankara.
Ash, Robert B., 2003. Abstract Algebra: Basic Graduaute Year. http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Algebra.html
Ash, Robert B., 2003. A Course In Algebraic Number Theory. http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/ANT.html
Atiyah, M.F., and MacDonald, I.G., 1969. Introduction To Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing Company. 128 p, Great Britain.
Bayraktar, Mustafa., 2006. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Gazi Kitabevi. 275 s, Ankara.
Biggs, Norman. L., 2002. Discrete Mathematics. Oxford University Press. 425 p, USA.
Butts, Hubert., Hall, Marshall., and Mann, H.B., 1954. On Integral Closure. Canad. J. Math., 6, 471-473.
Chevalley, C., 1943. On the theory of local rings. Annals Of Math, 44 (4), 690-708.
Corbas, B. and Williams, G.D., 2000. Rings of order p^5 Part II. Local rings. Journal of Algebra, 231 (2), 691-704.
Çallıalp, Fethi., 2001. Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Yayınevi. 300 s, İstanbul.
De Andrade, Antonio A. and Palazzo, Reginaldo., 2000. A note on units of finite local rings. Rev. Mat. Estatist., 18, 213-222.
Dobbs, David E., 2003. On the integral closure of going-down rings. Commutative Ring Theory and Applications, Lecture Notes In Pure and Appl. Math., 231, 131-141.
Dummit, D.S and Foote, R.S., 2004. Abstract Algebra. Wiley. 932 p, USA.
Eisenbud, David., 1995. Commutative Algebra With A Toward Algebraic Geometry. Springer-Verlag. 785 p , USA.
Feigelstock, Shalom., 1980. The additive groups of local rings. Ark. Mat, 18 (1), 49-51.
Gilmer, Robert W., 1967. Contracted ideals with respect to integral extensions. Duke Math. J., 34, 561-571.
Grell, H., 1927. Beziehunhen zwischen den Idealen verschiedener Rınge. Math. Ann., 97 (1), 490-593.
Fesenko, Ivan B., 2007. Introduction To Algebraic Number Theory. 48 p, www.maths.nott.ac.uk/personal/ibf/aln/aln.pdf
Hacısalihoğlu, H.Hilmi., 1991. Lineer Cebir. Nobel Yayın Dağıtım. 453 s, Ankara.
Huneke, Craig., 2006. Integral Closure Of Ideals, Rings And Modules. Cambridge University Press. 431 p , Cambridge.
Hungerford, Thomas W., 1974. Algebra. Springer. 502 p, USA.
Ishibashi, Yasunori., On simple integral extensions of normal domains. Bull.Fukuoka Univ. Ed. III, 29, 1-8.
Karakaş, H.İbrahim., 2008. Cebir Dersleri. TÜBA. 402 s, Ankara.
Khamdan, I., 1988. Subgroups of the special linear group over a local ring of principal ideals. Rings And Linear Groups, 119-126.

Krull, W., 1938. Dimensionstheorie in stellenringen. The Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 179, 204-226.
Lang, S., 1965. Algebra. Addison-Wesley Publishing Company. 508 p, USA.
Lang, S., 1987. Linear Algebra. Springer. 285 p, USA.
Lang, S., 1994. Algebraic Number Theory. Springer. 357 p, USA.
Mac Lane, Saunders and Birkhoff, Garrett., 1979. Algebra. Chelsea Publishing Company. 626 p, USA.
Milne, J.S., 2008. Algebraic Number Theory. http://www.jmilne.org/math/
Mori, Yoshiro., 1955. On the integral closure of an integral domain. II. Bull. Kyoto. Gakugei Univ. Ser. B., 7, 19-30.
Mori, Yoshiro., 1956. On the integral closure of an integral domain. III. On the integral closure of a Noetherian ring of finite dimension. Bull. Kyoto. Gakugei Univ. Ser. B., (9), 1-5.
Mori, Yoshiro., 1957a. On the integral closure of an integral domain. IV. On the theory of Noetherian rings. Bull. Kyoto. Gakugei Univ. Ser. B., (10), 1-5.
Mori, Yoshiro., 1957b. On the integral closure of an integral domain. V. On the theory of Noetherian rings. Bull. Kyoto Gakugei Univ. Ser B., (11), 1-7.
Mori, Yoshiro., 1958. On the integral closure of an integral domain.VI. On the integral closure of an integral domain.VI., Bull. Kyoto Gakugei Univ. Ser B. 13, 1-3.
Mori, Yoshiro., 1959a. On the integral closure of an integral domain.VI. On the Artin's symbols. II. Bull. Kyoto Gakugei Univ. Ser. B., 14, 1-3.
Mori, Yoshiro., 1959b. On the integral closure of an integral domain.VI. On the notion of Artin's symbols III. Bull. Kyoto Gakugei Univ. Ser. B., 15, 14-16.
Mori, Yoshiro., 1961. On the integral closure of an integral domain. VI. On the notion of Artin's symbols.V. Bull.Kyoto Gakugei Univ. Ser. B., 19, 1-3.
Mori, Yoshiro., 1969. On the integral closure of an integral domain. IX. Bull. Kyoto Univ. Education Ser. B., 34,5-22.
Napp Avelli, Diego., 2008. An Algebraic Approach To Multidimensional Behaviors. PHD Thesis, De Wiskunde En Natuurwetenscchappen, Groningen, Netherlands.
Nagata, Masayoshi., 1962. Local Rings. Interscience Publishers. 234 p, USA.
Narkiewicz, Wladyslaw., 1990. Elementary And Analytic Theory Of Algebraic Numbers. Springer-Verlag. 746 p, Poland.
Petechuk, V.M., 1980. Automorphisms of the groups SL_n, GL_n over certain local rings. Mat. Zametki, 28 (2), 187-204.
Ratliff, L.J., 1979a. On maximal ideals and simple integral extension rings. Comm. Algebra, 7 (18), 1977-2005.
Ratliff, L.J., 1979b. Maximal chains of prime ideals in integral extension domains. III. Illinois J. Math., 23 (3), 469-475.
Robledo, Alvaro., 2007. Field Homomorphism. http://planetmath.org/encyclopedia/FieldHomomorphism.html
Sally, Judith D., 1975. A characterization of local rings of dimension at most two. Conference On Commutative Algebra, 260-261.
Samuel, P., 2008. Algebraic Theory Of Numbers. Dover Publications, Inc. 109 p, New York.
Sancho, J.B., 1994. Localization in the rings of continuous functions. Topology Appl, 57 (1), 87-93.

Seidenberg, Abraham., 1970. Construction of the integral closure of a finite integral domain. Rend. Sem. Mat. Fis., 40, 100-120.

Sharma, P.K.,2002. A note on automorphisms of local rings. Communications In Algebra, 20 (8), 3743-3747.

Sharp, R.Y., 2000. Steps in Commutative Algebra. Cambridge University Press. 355 p, United Kingdom.

Szeto, G., 1976. The localization of zero-dimensional rings. Bull. Soc. Math. Belg. 28 (3), 193-196.

Szeto, George., 1976. The localization of zero-dimensional rings. Bull. Soc. Math. Belg., 28 (3), 193-196.

Taşcı, Dursun., 2005. Lineer Cebir. Gazi Kitabevi. 585 s , Ankara.

Taşçı, Dursun., 2007. Soyut Cebir. Alp Yayınevi. 671 s, Ankara.

Uzkov, A.I., 1948. On rings of quotients of commutative rings. Mat. Sbornik (N.S), 22 (64) (3), 439-443.

Williams, K.S. and Alaca S., 2004. Introductory Algebraic Number Theory. Cambridge University Press, 448 p, USA.

Yan, Zhen Biao., 2002. The number of elementary matrices whose product represents a matrix over a local ring. J.Ningxia Univ. Nat. Sci. Edu., 23 (4), 308-311.

Yüksel, Şaziye., 2006. Genel Topoloji. Eğitim Kitabevi. 487 s, Konya.

Zariski, S. and Samuel, P., 1958. Commutative Algebra. Volume I Springer. 329 p, USA

Woo, Sung S., 2009a. The group of units of some finite local rings. I. J. Korean Math. Soc., 46 (2), 295-311.

Woo, Sung S., 2009b. The group of units of some finite local rings. II. J. Korean Math. Soc., 46 (3) 475-491.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Antalya'nın Finike ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Finike'de tamamladı. 2000 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2007 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Fen Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.