SABİT NOKTA İTERASYONLARININ YAKINSAMA HIZLARI

Süheyla ELMAS

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR

2010

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SABİT NOKTA İTERASYONLARININ YAKINSAMA HIZLARI

Süheyla ELMAS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2010

Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR danışmanlığında, Süheyla ELMAS tarafından hazırlanan bu çalışma 20.01.2010 tarihinde aşağıdaki jüriler tarafından Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi bilim dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR *imza :*

Üye : Doç. Dr. Sezgin AKBULUT *imza :*

Üye : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN *imza :*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SABİT NOKTA İTERASYONLARININ YAKINSAMA HIZLARI

Süheyla ELMAS

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR

Bu tezde, Zamfirescu operatörlerinin sınıfında çeşitli sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kuvvetli yakınsaması araştırılmıştır. Ayrıca bu iterasyonların sabit noktaya yakınsama hızları karşılaştırılmıştır.

2010, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Picard, Krasnoselkji, Mann, Ishikawa, İki adım Mann iterasyonları, Zamfirescu operatörü, Yakınsama hızı.

ABSTRACT

MS Thesis

THE CONVERGENCE SPEEDS OF FIXED POINT ITERATIONS

Süheyla ELMAS

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

In this thesis, strong convergence of several fixed point iteration methods are investigated for the class of Zamfirescu operators. Moreover, strong convergence of this iteration methods are compared.

2010, 57 pages

Keywords: Picard, Mann, Ishikawa, Krasnoselskij and two-step Mann iterations, Zamfirescu operator, Convergence speed

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusuna beni yönlendiren, çalışmalarımda yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Sayın Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR'e tezimin hazırlık aşamasında bana destek veren Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hükmü KIZLTUNÇ'a ve Arş. Gör. İsa YILDIRIM'a, en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Süheyla ELMAS
Ocak 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

cardF_T	F_T nin eleman sayısı
$d(A)$	A kümesinin çapı
c_o	0 a yakınsayan dizilerin uzayı
$D(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{D}(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
E^*	E nin duali
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$I(u_0,\alpha_n,\beta_n,T)$	Ishikawa iterasyonu
$K(k_0,\lambda,T)$	Krasnoselskij iterasyonu
$M(x_0,\alpha_n,T)$	Mann iterasyonu
$P(\mathrm{p}_0,T)$	Picard iterasyonu
$\mathrm{S}(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Tarihsel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki ana dalda gelişmektedir. Birincisi, normlu lineer uzayların kompakt, konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli operatörler için sabit nokta teorisidir. Diğeri ise, tam metrik uzaylar üzerinde büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında L.E.J Brouwer ile başlamıştır. Bilinen en basit sabit nokta teoremi: ”$[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm ise, bu durumda f nin $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır.” şeklindedir. Brouwer bu teoremi, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genişletmiştir: “B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f: B \to B$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.”

1922 de Banach, Banach sabit nokta teoremi veya büzülme ilkesi olarak bilinen “f, bir (X, d) tam metrik uzayından yine kendisi üzerine tanımlanan bir büzülme dönüşümü ise, f nin X de bir tek sabit noktası vardır ve herhangi bir $x \in X$ için $\left(f^n(x)\right)$ Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar” teoremini verdi.

Banach’ın bu çalışması bundan sonra ki yapılan çalışmaların genelleştirilmesinde temel teşkil eder. 1930 yılında I. Schauder, X Banach uzayının boştan farklı bir konveks alt kümesinden, bu konveks alt kümenin bir kompakt alt kümesine tanımlı, sürekli herhangi bir dönüşümün sabit noktası olduğunu ispatladı. 1950 de F.E. Browder, 1965 de W.A. Kirk, 1968 de R. Kanan, 1972 de Zamfirescu ve daha pek çok kişi bu temel sonuçları genelleştirmiş ve bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Aslında bu teori, bir integral denklemin çözümünün varlığını göstermek amacıyla kurulmuştur. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini göstermektedir. Yine, Banach sabit nokta teoremi belirli dönüşümlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremi olup, ayrıca (uygulamaya yönelik problemlerin çözümünde) sabit noktaya en iyi yaklaşımı elde etmek için inşa esasına dayanan bir işlem yöntemini verir. Bu işleme “iterasyon” adı verilir.

İterasyon yöntemleri, uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm dallarında kullanılır. Yakınsaklık ispatları ve hata tahminleri, büyük bir çoğunlukla Banach sabit nokta teoreminin bir uygulaması yardımıyla elde edilir.

İterasyonla ilgili kısa bir tarihçe vermek gerekirse; Yaklaşık iki bin yıldan fazla tarihe sahip olan Ardışık Yaklaşımlar İterasyonunu ilk kez bir İtalyan matematikçisi olan Picard kullanarak adi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin tahmini çözümünü araştırmıştır. Bu sahada ilk teorik sonuç Polonyalı matematikçi S.Banach’a ait olan “Daralma Dönüşüm Prensibi” veya “Banach Sabit Nokta Teoremi” dir.

Son kırk yılda, operatörlerin bazı sınıfları için iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsaması ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bazı operatör sınıfları için birden fazla iterasyon sabit noktaya yakınsayabilir. Bu durumda hangi iterasyonun kullanılması gerektiğini karar vermek çok önemlidir. Bunun için son yıllarda bazı operatörlerin sınıfı için, iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsama hızları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde, Zamfirescu operatörlerinin sınıfında Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa ve iki adım Mann iterasyon metotlarının yakınsama hızları karşılaştırıldı.

Sunulan bu tezde metrik uzayda ve Banach uzayında sabit nokta teorisi incelenmiştir. Kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak, Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa ve iki adım Mann gibi önemli iterasyon yöntemleri tanıtılmıştır. Daha sonra, iterasyonların yakınsama hızı kavramı verilmiştir. Ayrıca Zamfirescu operatörlerinin sınıfında, bahsedilen iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsamaları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Zamfirescu operatörleri sınıfında Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa ve iki adım Mann iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızları mukayese edilmiştir.

Beşinci bölümde ise iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızları, bir bilgisayar programı yardımı ile örnekler üzerinde nümerik olarak karşılaştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramlarla ilgili tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve $X = (X, d)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 (Yakınsak Dizi): (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine X de yakınsak ve x e de dizinin limiti denir. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ve limiti x ise, bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 (Cauchy Dizisi): (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4 (Tam Metrik Uzay): (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.5 (Kompakt Metrik Uzay): (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse, (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.6 (Sürekli Dönüşüm): $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \rho)$ iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ veya denk bir ifade ile,

$$f\big(D(x_0; \delta)\big) \subseteq D(f(x_0); \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise, f ye X üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.1.7 (Açık ve Kapalı Küme): X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x; r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ sayısı varsa, A ya X in açık alt kümesi denir. X in herhangi bir B alt kümesinin X deki tümleyeni olan $B^t = X - B$, X de açık ise B ye kapalı küme denir.

Tanım 2.1.8 (Topolojik Uzay): X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer, aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, τ ya X için bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

i. $X, \emptyset \in \tau$ dur,

ii. τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi τ ya aittir,

iii. τ ya ait sonsuz sayıda kümenin birleşimi τ ya aittir.

Tanım 2.1.9 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $\cdot: F \times L \to L$ işlemleri aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) $(L, +)$ değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.

L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

L3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

L4. $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

L5. $1.x = x$ dir (burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay uzay adı verilir.

Tanım 2.1.10 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: \ z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.1.11 (Normlu Uzay): N bir lineer uzay olsun. $\| \ \|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, (\alpha \in F)$

N3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\| \quad \|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm ve $(N, \| \quad \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.12 (Banach Uzayı): N normlu lineer uzay olsun. N, $d(x,y) = \|x-y\|$ norm metriğine göre tam ise, N ye Banach uzayı denir.

N nin reel ve kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.13 (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \quad \rangle: L \times L \to F$ fonksiyonu,

I1. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

I2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$, $(\alpha \in F)$

I3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

I4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(L, \langle \quad \rangle)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.14 (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \quad \|$, iç çarpım normu olsun. $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ olarak tanımlanırsa, (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X e Hilbert uzayı denir.

Bu tanımdan Hilbert uzaylarının, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzayları olduğu görülür.

Tanım 2.1.15 (Sınırlı Lineer Operatör): N ve N' iki normlu uzay ve $T: N \to N'$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|Tx\| \quad \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa, T ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.1.16 (Cebirsel Dual): X bir reel lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesi $L(X, \mathbb{R})$ yani $L(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R}\text{ lineer}\}$ olsun. $T_1, T_2 \in L(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ \quad (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $L(X, \mathbb{R})$ bir reel lineer uzay olur. Bu $L(X, \mathbb{R})$ uzayına X in cebirsel duali denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.1.17 (Topolojik Dual): X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesi $C(X, \mathbb{R})$ yani $C(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R}\text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. $T_1, T_2 \in C(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ \quad (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $C(X, \mathbb{R})$ bir lineer uzay olur. Bu $C(X, \mathbb{R})$ uzayına X in topolojik duali denir ve X^* ile gösterilir.

Burada X^*, $\|T\| = \sup\{|T(x)|: \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu lineer uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzaydır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı da verilir.

Yukarıdaki tanımlardan da anlaşılacağı gibi X^* topolojik duali, X' cebirsel dualinin bir alt uzayıdır. Sonlu boyutlu uzayların topolojik dualleri ile cebirsel dualleri aynıdır.

Tanım 2.1.18 (Kuvvetli Yakınsaklık): X, bir normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti denir.

Tanım 2.1.20 (Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer, her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \xrightarrow{z} x$ ya da $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Teorem 2.1.21 (Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki üç önerme sağlanır.

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.

(b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.

(c) $\dim(X) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1 (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x noktasına T nin sabit noktası denir.

Yani $Tx = x$ denkleminin çözümü, T nin bir sabit noktasıdır. T nin sabit noktalarının kümesi F_T veya $Fix(T)$ ile gösterilir. X herhangi bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^{n+1}(x) = T\big(T^n(x)\big)$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$, T altında x in n. iterasyonu olarak adlandırılır.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_T \subset F_{T^n}$ dir.

2. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_{T^n} = \{x\}$ ise, $F_T = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $T: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ bir dönüşüm ve $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ olarak tanımlanırsa, $F_{T^2} = \{1,2,3\}$ olur. Ancak $F_T = \{2\}$ dir.

Örnek 2.2.1.1: $X = [0,2]$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = 4 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $x = 2$ dir.

Örnek 2.2.1.2: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ şeklindeki özdeş dönüşümü için X in her bir noktası sabit noktadır.

Örnek 2.2.1.3: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $T(x, y) = (x, 0)$ dönüşümünün sabit noktaları, $(x, 0)$ şeklindeki noktalardır.

Örnek 2.2.1.4: $T: (0,1] \to (0,1]$, $Tx = \frac{4x}{3}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Böyle bir dönüşüm için $x = 0$ sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dır.

Tanım 2.2.2 (Lipschitzian Dönüşüm): (X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. eşitsizliğine, Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Bu tanıma göre her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta$ ve $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ olduğunda

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Yani T düzgün süreklidir.

Örnek 2.2.3.1: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *Tx= 4x* olsun. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = |4x - 4y| = 4|x - y| = 4d(x, y),$$

olur. $k \geq 4$ için T fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 2.2.4 (Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktalara sahip olması gerekmez. Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm, düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm olamaz. Buna karşın, T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n bir daraltan dönüşüm olabilir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde görebiliriz.

Örnek 2.2.4.2: $T: [0,2] \to [0,2]$ olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \sqrt{2}] \\ 1, x \in (\sqrt{2}, 2] \end{cases}$$

olarak tanımlansın. T fonksiyonu $x = \sqrt{2}$ de süreksiz olduğundan daraltan bir dönüşüm olamaz. Diğer taraftan, $T^2: \{0,1\} \to \{0,1\}$, $T^2(x) = 0$ olup T^2 daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T^2 nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 2.2.5 (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Örnek 2.2.5.1: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = \ln(1 + e^x) - \frac{1}{2}$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü ;

$$T'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} < 1 \text{ ve } 0 < T'(x) < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoremi'nden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

Tanım 2.2.6 (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

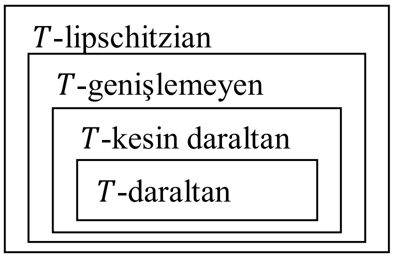
ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Banach uzaylarında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için ya uzay ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulması gereklidir.

2.2.1. Dönüşümler arasındaki bağlantı

Yukarıdaki dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

$$T - \text{daraltan} \Rightarrow T - \text{kesin daraltan} \Rightarrow T - \text{genişlemeyen} \Rightarrow T - \text{Lipschitzian}$$



Çizelge 2.2.1.1 Dönüşümler arasındaki bağlantı

Örnek 2.2.1.1: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x + 6$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |x + 6 - y - 6| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolaysıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat T ne daraltan ne de kesin daraltan dönüşümdür.

Tanım 2.2.7 (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm): X bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, T ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 2.2.8 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa, X e düzgün (uniformly) konveks Banach uzayı adı verilir (Aksoy 1990; Khamsi 1990).

Örnek 2.2.8.1: $\mathbb{R}^n$ uzayı Euclidean normuna göre düzgün konveks bir Banach uzayı olduğu halde, $\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ normuna göre düzgün konveks değildir.

Örnek 2.2.8.2: Her Hilbert uzayı düzgün konveks bir uzaydır. Gerçekten H bir Hilbert uzayı olmak üzere her $x, y \in H$ için paralelkenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

yazılabilir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in \overline{D}(\theta; 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ seçilirse,

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde, H düzgün konveks bir uzaydır.

2.3. Sabit Nokta Teoremleri

Bazı dönüşümlerin sabit noktası olmadığı halde bazılarının var olduğunu hatta bu sabit noktaların sayısının birden fazla olabileceği bilinir. O halde "Hangi tür dönüşümlerin sabit noktaları var ve bu sabit noktalar hangi koşullar altında tek olur?" sorusu ile karşılaşılır. Bu soruyu daha detaylı olarak cevaplamak için aşağıdaki teorem ve örnekleri verebiliriz.

Teorem 2.3.1: $[a,b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f:[a,b] \to [a,b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c)=c$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında bir c sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a,b]$ için, $T(x)=x-f(x)$ olacak şekilde bir $T:[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda, T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise, $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremine göre $T(c)=0$ olacağından, $f(c)=c$ olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ vardır.

Teorem 2.3.2 (Banach Daralma İlkesi): (X,d) tam metrik uzay ve $T:X \to X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T, bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0,\, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu, dolayısıyla $x \in X$ e yakınsadığını ve x in $Tx=x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\
&\leq kd(x_{n+p-1}, x_{n-1}) = kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \leq .. \\
&\leq k^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n d(x_p, x_0) \\
&\leq k^n \left(d(x_p, x\ \ ) + d(x_{p-1}, x_0) \right) \\
&\leq k^n \left(kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0) \right) \\
&= k^n \left(d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + kd(x_{p-1}, x_{p-2}) \right) \\
&\leq k^n \left[d(x_{p-2}, x_0) + kd(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2 d(x_{p-2}, x_{p-3}) \right]
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\leq k^n(d(x_1,x_0) + kd(x_1,x_0) + k^2d(x_1,x_0)+\ldots)$$

$$= k^n d(x_1,x_0)(1 + k + k^2 + k^3+\ldots)$$

$$= k^n d(x_1,x_0)\left(\frac{1}{1-k}\right)$$

bulunur. Yani,

$$d\big(x_{n+p},x_n\big) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0)$$

elde edilir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d\big(x_{n+p},x_n\big) \to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x \in X$ ve dolayısıyla $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir. Yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminden $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y, T nin başka bir sabit noktası yani $Ty = y$ olsun. Buna göre,

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

olur. Bu da $d(x,y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü,

$$d(x,y) \leq kd(x,y) \Rightarrow d(x,y) - kd(x,y) \leq 0$$

yani

$$d(x,y)[1-k] \leq 0$$

olur. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. O halde hem $1 - k > 0$ hem de $d(x,y) \geq 0$ olduğundan $d(x,y)[1-k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x,y) = 0$ olması gerekir. O halde $x = y$ dir.

Örnek 2.3.3: $X = \mathbb{R}$, $K = [0,1] \subset X$, $T: K \to K$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{3}$ olarak seçelim. Daraltan dönüşümden,

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{6},$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{12},$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{24},$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0$$

şeklinde bir dizi elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alınırsa, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ dir. Sabit nokta tanımından da

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.3.4 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): D, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompak ve konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda, $T: D \to D$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Brouwer Teoremi herhangi bir Banach uzayı (sonsuz boyutlu uzay) için genişletilemez. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.3.4.1: $\boldsymbol{D}$, c_0 Banach uzayında bir kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) \in \boldsymbol{D}$ için

$$T: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D},\ T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

şeklinde tanımlansın. Her $x, y \in \boldsymbol{D}$ için

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin $\boldsymbol{D}$ de bir çözümü yoktur.

Teorem 2.3.5 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Teorem 2.3.6: (X, d) tam metrik uzay, $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kırk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla,

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0, T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu ise $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.3.7: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için, $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$ dir (Khamsi and Kırk 2001).

Teorem 2.3.8: (X, d) bir tam metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $T: D(x_0, r) \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(Tx_0, x_0) < (1 - k)r$$

ise, bu durumda T dönüşümü $D(x_0, r)$ diskinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal, Meehan and O'Regan 2001).

İspat: $d(Tx_0, x_0) < (1 - k)r_0$ olmak üzere $0 \leq r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 sayısı vardır. Göstereceğiz ki $T: \overline{D(x_0, r_0)} \to \overline{D(x_0, r_0)}$ dir. Eğer $x \in \overline{D(x_0, r_0)}$ ise,

$$d(Tx, x_0) \leq d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0)$$

$$\leq kd(x, x_0) + (1 - k)r_0 \leq r_0$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden dolayı T nin $\overline{D(x_0, r_0)} \subset D(x_0, r)$ da bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 2.3.8.1: $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için,

$$|T'x| \leq k < 1$$

ise, T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (x, y)$ olmak üzere,

$$|Tx - Ty| = |T'(c)(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach daralma ilkesi gereği, T nin bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 2.3.8.2: $X = (0,2]$ ve $T: X \to X$, $Tx = \frac{x}{5}$ dönüşümü verilsin. Ayrıca X kümesi üzerinde alışılmış metrik tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = \left|\frac{x}{5} - \frac{y}{5}\right| = \frac{1}{5}|x - y| = \frac{1}{5}d(x, y)$$

olduğundan, T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin X de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımı gereği $Tx = x$ den $\frac{x}{5} = x \Rightarrow 5x = x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0,2] = X$ olduğundan T nin X de bir sabit noktası yoktur. Bu örnekte de görüldüğü gibi tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmez.

Örnek 2.3.8.3: $X = [1, \infty)$ kümesi üzerinde $d(x, y) = |x - y|$ metriği ve $T: X \to X$, $Tx = x + \frac{1}{x^2}$ dönüşümü verilsin. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty|$$

$$= \left| x + \frac{1}{x^2} - y - \frac{1}{y^2} \right|$$

$$= \left| \frac{x^3y^2 - x^2 - x^2y^3 + y^2}{x^2y^2} \right|$$

$$\leq \frac{|x-y||x^2y^2 - (x+y)|}{x^2y^2}$$

olur. Burada her $x, y \in X = [1, \infty)$ için $\frac{|x^2y^2-(x+y)|}{x^2y^2} \leq 1$ olacağından

$$\frac{|x-y||x^2y^2 - (x+y)|}{x^2y^2} < |x-y|$$

olur ki bu da $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ şartının sağlandığını gösterir. O halde T bir daraltan dönüşüm değildir fakat kesin daraltan bir dönüşümdür. Dikkat edilirse burada T nin bir sabit noktası yoktur.

Örnek 2.3.8.4: $X = [0,1]$ kümesi ve bu küme üzerinde $d(x, y) = |x - y|$ metriği verilsin. $T: X \to X$, $T(x) = \sqrt{x+1}$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartını sağlar. Çünkü

$$d\big(T(x), T(y)\big) = |T(x) - T(y)|$$

$$= \left|\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}\right|$$

$$= \left|\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}\right)\right|$$

$$= \frac{|x-y|}{\left|\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}\right|}$$

$$= \frac{|x-y|}{\left|\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}\right|}$$

$$= \frac{1}{\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right|}|x-y|$$

dir. Burada her $x, y \in \mathbb{R}$ $(x \geq 0$ ve $y \geq 0)$ için

$$\frac{1}{\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right|} < 1$$

olacağından

$$d\big(T(x), T(y)\big) = \frac{1}{\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right|}|x-y|$$

$$\leq |x-y| = d(x, y)$$

olur ki bu da $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartının sağlandığını yani T nin genişlemeyen dönüşüm olduğunu gösterir. Ayrıca her $x \in X$ için, $T(x) = \sqrt{x+1} \neq x$ olduğundan T nin sabit noktası yoktur. Bu örnekte de tam metrik uzay üzerine tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları vardır. Bunlardan bazıları Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, Noor ve iki adım Mann iterasyon metotlarıdır. Şimdi bu iterasyon metotlarından bazılarını verelim.

3.1.1. Picard iterasyon metodu :$(X,\|\quad\|)$ reel normlu uzay ve $T\colon X\to X$ bir dönüşüm olsun. Picard iterasyonu, $p_0\in X$ olmak üzere

$$p_{n+1}=T^n p_0, n=0,1,2,\dots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1980). $P(p_0,T)$ ile gösterilen Picard iterasyonu, ardışık yaklaşıklıkların dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

3.1.2 Krasnoselskij iterasyon metodu :$(X,\|\quad\|)$ reel normlu uzay ve $T\colon X\to X$ bir dönüşüm olsun. Krasnoselskij iterasyonu, $k_0\in X$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$k_{n+1}=(1-\lambda)k_n+\lambda Tk_n, n=0,1,2,\dots \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır (Krasnoselskij 1955). $\{k_n\}$ Krasnoselskij itersayonunu kısaca $K(k_0,\lambda,T)$ ile gösterilir. Ayrıca bu iterasyon $\lambda=1$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

3.1.3 Mann iterasyon metodu : $(X,\|\quad\|)$ reel normlu uzay, $T\colon X\to X$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ keyfi bir nokta olmak üzere, Mann iterasyonu

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Tx_n, n=0,1,2,\dots \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır (Mann1953). Burada her $n\in\mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}\in[0,1]$ dir. Mann iterasyonu kısaca $M(x_0,\alpha_n,T)$ ile gösterilir. (3.3) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon, Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

3.1.4 Ishikawa iterasyon metodu :$(X, \| \quad \|)$ reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $u_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n \\ \quad v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n T u_n, n = 0,1,2, \ldots \end{cases} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır (Ishikawa 1974). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ dir. İshikawa iterasyonu kısaca $\mathrm{I}(u_0, \alpha_n, \beta_n, T)$ ile gösterilir. Ayrıca (3.4) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınması durumunda bu iterasyonun, Mann iterasyonuna indirgenir.

3.1.5 Noor iterasyon metodu :$(X, \| \quad \|)$ reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n \\ v_n \quad = (1-\beta_n)u_n + \beta_n T w_n \\ w_n \quad = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n, n = 0,1,2, \ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır (Noor 2000). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için (α_n), (β_n) ve $(\gamma_n) \in [0,1]$ dir.

3.1.6 n-adım iterasyon metodu (multistep iteration) :$(X, \| \quad \|)$ reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $k_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere n-adım iterasyonu, $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} t_n^{p-1} = \left(1-\beta_n^{p-1}\right)k_n + \beta_n^{p-1} T k_n, \\ t_n^i \quad = \left(1-\beta_n^i\right)k_n + \beta_n^i T t_n^{i+1}, \\ k_{n+1} = (1-\alpha_n)k_n + \alpha_n T t_n^1, i = 1,2,\ldots,p-2 \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır (Rhoades ve Şoltuz 2004). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ ve $\{\beta_n^i\} \subset [0,1)$ dir.

3.1.7. İki adım Mann İterasyonu :$(X, \| \quad \|)$ reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere iki adım Mann iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n \quad = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, n = 0,1,2,\dots \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır (Thianwan 2008). Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in [0,1]$ dir. Ayrıca (3.7) eşitliği ile verilen iterasyonda, $\beta_n = 0$ alınması durumunda iki adım Mann iterasyonu Mann iterasyonuna indirgenir.

Yukarıda verilen iterasyon metotlarının, her zaman dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaması garanti edilemez. Bu durumla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.1.8: Alışılmış normla birlikte, $K = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset \mathbb{R}$ ve $T: K \to K$, $Tx = \frac{1}{x}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda,

1) T bir tek sabit noktaya sahiptir ve $F_T = \{1\}$ dir.
2) (3.1) ile verilen Picard iterasyonu $x_0 \neq 1$ için 1'e yakınsamaz.
3) $0 < r < 1$ olmak üzere,

$$0 < \lambda < 2(1-r)/(17-2r)$$

şartını sağlayan her λ için Krasnoselskij iterasyonu T nin sabit noktasına yakınsar.

3.2. Bazı Dönüşümler için Yakınsama Hızları

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ sabit nokta iterasyonu, $T: X \to X$ operatörünün x^* sabit noktasına yakınsasın. Yani, $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, x^*) < \varepsilon \tag{3.8}$$

olacak şekilde pozitif bir n_0 sayısı vardır. Eğer n_0 sayısı, x_0 başlangıç noktasına, ε-sayısına ve T operatörüne bağlı ise (3.8) eşitsizliği, iterasyon yöntemi için bir durma kriteri olarak kullanılır.

Verilen herhangi bir T operatörü için uygulanan iterasyon metodunda kaçıncı adımda durulması gerektiği ile ilgili aşağıda bir bağıntı verilmiştir.

Eğer T, X tam metrik uzayında k-daraltan bir operatör ise hem önceki hem de sonraki hata değerleri

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1), n = 0,1,2,\ldots \quad (3.9)$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n+1}), n = 0,1,2,\ldots$$

şeklindedir. Burada p_0 başlangıç noktası olmak üzere, $\{p_n\}$ Picard iterasyonu ve x^* da T nin tek sabit noktasıdır. $0 < k < 1$ olduğundan, (3.9) dan eğer $d(p_0, p_1) \neq 0$ ise

$$d(p_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(p_0, p_1) < \varepsilon$$

olup

$$k^n d(p_0, p_1) < (1-k)\varepsilon \Rightarrow k^n < \frac{(1-k)\varepsilon}{d(p_0, p_1)} \Rightarrow n < log_k \left(\frac{(1-k)\varepsilon}{d(p_0, p_1)} \right)$$

elde edilir. Eğer

$$n_0 = \log_k \frac{(1-k)\varepsilon}{d(p_0, p_1)}$$

seçilirse $n \geq n_0$ için, p_0 başlangıç noktası ile başlanıldığında n_0 adımda, $\{p_n\}$ Picard iterasyonu ε dan daha az bir hata ile x^* a yaklaşır.

Tanım 3.2.1: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$, sırasıyla a ve b ye yakınsayan pozitif sayıların iki dizisi ve

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|}$$

olsun.

1) $l = 0$ ise $\{a_n\}$ nin a ya yakınsaması, $\{b_n\}$ nin b ye yakınsamasından daha hızlıdır.

2) $0 < l < \infty$ ise, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri aynı yakınsaklık oranına sahiptir.

3) $l = \infty$ ise, $\{b_n\}$ dizisi $\{a_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

Yukarıdaki tanımda verilen yakınsama oranı kavramı, iki dizinin yakınsama hızlarını karşılaştırmada yardımcı olur. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ sabit nokta iterasyonlarının aynı x^* noktasına yakınsadığını kabul edelim. Bu takdirde önceki hata değerleri

$$d(x_n, x^*) \leq a_n, n = 0,1,2,\ldots$$

$$d(y_n, x^*) \leq b_n, n = 0,1,2,\ldots$$

şeklinde olur. Burada $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ sıfıra yakınsayan pozitif reel sayı dizileridir.

Tanım 3.2.2: Eğer $\{a_n\}$ dizisi $\{b_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsarsa, bu durumda $\{x_n\}$ sabit nokta iterasyonu, x^* a $\{y_n\}$ sabit nokta iterasyonundan daha hızlı yakınsar ya da $\{x_n\}$ sabit nokta iterasyonu $\{y_n\}$ sabit nokta iterasyonundan daha iyidir denir.
Rhoades, her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x^*) \leq d(y_n, x^*)$ ise, $\{x_n\}$ sabit nokta iterasyonunun $\{y_n\}$ sabit nokta iterasyonundan daha iyi olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 3.2.3: (X, d) kompakt bir metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan operatör olsun. Bu takdirde T kesin Picard operatördür yani $P(p_0, T)$ Picard iterasyonu T nin sabit noktasına yakınsar.

İspat: $\{p_n\}$ Picard iterasyonu, $p_0 \in X$ ve $n \geq 0$ için $p_n = T^n p_0$ olsun. (X, d) kompakt olduğundan, $\{p_n\}$ dizisinin $x^* \in X$ e yakınsayan $\{p_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. T kesin daraltan olduğundan sürekli bir dönüşümdür ve $\{d(p_n, p_{n+1})\}$ dizisi kesin azalan olup pozitif terimlidir. Dolayısıyla bu dizi yakınsaktır. Metrik fonksiyonunun sürekliliğinden,

$$\lim_{n\to\infty} d\left(p_{n_k}, Tp_{n_k}\right) = d(x^*, Tx^*)$$

yazılır. Buradan

$$d(x,^* Tx^*) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, p_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(p_{n+1}, p_{n+2}) = d(Tx^*, T^2x^*)$$

elde edilir. Şayet $x^* \neq Tx^*$ olduğu kabul edilirse, T nin kesin daraltan oluşundan

$$d(x^*, Tx^*) = d(Tx^*, T(Tx^*)) < d(x^*, Tx^*)$$

olur. Bu bir çelişkidir. O halde $x^* = Tx^*$ dır. Yani $F_T = \{x^*\}$ dır. Bu ise, her $p_0 \in X$ için Picard iterasyonunun X de yakınsak olduğunu ve limitinin de T nin tek sabit noktası olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.3.1: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan operatör olsun. Eğer $\{T^n p_o\}$ Picard iterasyonunun yakınsak bir alt diziye sahip olacak şekilde $p_0 \in X$ varsa, bu durumda $F_T = \{x^*\}$ dir ve x^*, bu alt dizinin limitidir (Berinde 2004).

Teorem 3.2.4: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \tag{3.10}$$

olacak şekilde $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ varsa T, Picard operatörüdür yani $P(p_0, T)$ Picard iterasyonu T nin sabit noktasına yakınsar.

İspat: T, (3.10) eşitsizliğini sağlaması durumunda $cardF_T \leq 1$ olduğu bilinir. $p_0 \in X$ ve $p_n = T^n p_0$ Picard iterasyonu olsun. Bu durumda (3.10) eşitsizliğinden

$$d(p_n, p_{n+1}) = d(Tp_{n-1}, Tp_n) \leq a[d(p_{n-1}, p_n) + d(p_n, p_{n+1})]$$

elde edilir. Buradan

$$d(p_n, p_{n+1}) \leq \frac{a}{1-a} d(p_{n-1}, p_n), n = 1,2, \dots. \tag{3.11}$$

yazılır. $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için, $0 \leq \frac{a}{1-a} < 1$ olduğundan $\{p_n\}$ nin Cauchy dizisi olduğu ve böylece yakınsak olduğu sonucu çıkarılır. $\{p_n\}$ nın limiti $x^* \in X$ olsun. Bu taktirde

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, p_n) + d(p_n, Tx^*) \leq d(x^*, p_n) + a[d(x^*, p_{n-1}) + d(x^*, Tx^*)]$$

yazılır. Buradan

$$d(x^*, Tx^*) \leq \frac{1}{a} d(x^*, p_n) + \frac{a}{1-a} d(p_{n-1}, p_n), n = 0,1,2, ...$$

ve (3.11) eşitsizliği ile birlikte

$$d(x^*, Tx^*) \leq \frac{1}{a} d(x^*, p_n) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(p_0, p_1), n = 0,1,2, .. \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.12) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$d(x^*, Tx^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = Tx^*$$

olur. Yani $F_T = \{x^*\}$ dır. Dolayısıyla her bir $p_0 \in X$ için $p_n \to x^*$ olur.

Örnek 3.2.4.1: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \sqrt{2}, \mathrm{x} > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takirde

i) T sürekli değildir,

ii) T, (3.10) eşitsizliğini sağlar. Bu nedenle 3.2.4. Teoreminden T bir Picard dönüşümüdür.

iii) T genişlemeyen değildir.

Sonuç 3.2.5: Yukarıdaki teoremin şartları sağlanmış olsun. Bu durumda Picard iterasyonun hata tahminleri,

$$d(p_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(p_0, p_1), n = 0,1,2, ..$$

$$d(p_n, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(p_n, p_{n-1}), n = 0,1,2, ..$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{a}{1-a}$ dır. Eğer T, k-daraltan (veya kesin daraltan ya da (3.10) eşitsizliğini sağlıyorsa) ise $F_T = \{x^*\}$ dır. Kesin daraltan operatörler sınıfı, genişlemeyen operatörlerin sınıfının içinde yer alır. Genişlemeyen operatörlerin genelleştirilmesi, en az bir sabit nokta olan quasi-genişlemeyen operatörlerdir.

Tanım 3.2.6 (Quasi genişlemeyen operatör): X tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. x^* bir sabit nokta olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(Tx, x^*) \leq d(x, x^*)$$

oluyorsa, T ye quasi genişlemeyen operatör denir.

Quasi genişlemeyen dönüşüm sınıfını içeren bir operator sınıfı 1972 de Zamfirescu tarafından verilmiştir. Zamfirescu'nun teoremi Banach, Kanan ve Chatterjea sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmiş şeklidir.

Tanım 3.2.7 (Zamfirescu operatör): $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için aşağıdaki $(z_1) - (z_3)$ şartlarından en az biri doğru olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ ve $0 \leq \beta, \gamma < 0{,}5$ şartlarını sağlayan α, β ve γ reel sayıları varsa, T ye Zamfirescu operatör denir.

(z_1) $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$;

(z_2) $d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(z_3) $d(Tx, Ty) \leq \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Teorem 3.2.8 (Zamfirescu): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ de Zamfirescu operatörü olsun. Bu durumda T dönüşümünün sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir.

İspat: $\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$ olarak alınırsa $\delta < 1$ olduğu açıktır. Şimdi herhangi bir $x_0 \in X$ için $x = T^n(x_0)$ ve $y = T^{n+1}(x_0)$ alalım ve kabul eldim ki $x \neq y$ dir. Aksi halde x, T nin bir sabit noktası olur. Eğer (z_1) şartı sağlanırsa,

$$d\big(T^{n+1}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big) \leq \delta d\big(T^{n}(\,x_0),T^{n+1}(\,x_0)\big)$$

yazılır. (z_2) şartı sağlanırsa,

$$\big(T^{n+1}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big) \leq \beta\big\{d\big(T^{n}(\,x_0),T^{n+1}(\,x_0)\big)+d\big(T^{n+1}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big)\big\}$$

olur. Bu ifade

$$\begin{aligned} d\big(T^{n+1}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big) &\leq \frac{\beta}{1-\beta} d\big(T^{n}(\,x_0),T^{n+1}(\,x_0)\big) \\ &\leq \delta d\big(T^{n}(\,x_0),T^{n+1}(\,x_0)\big) \end{aligned}$$

eşitsizliğini gerektirir. Benzer şekilde (z_3) şartının sağlanması halinde

$$\begin{aligned} d\big(T^{n+1}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big) &\leq \gamma d\big(T^{n}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big) \\ &\leq \gamma d\big(T^{n}(\,x_0),T^{n+1}(\,x_0)\big)+\gamma d\big(T^{n+1}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big) \end{aligned}$$

veya

$$d\big(T^{n+1}(\,x_0),T^{n+2}(\,x_0)\big) \leq \delta d\big(T^{n}(\,x_0),T^{n+1}(\,x_0)\big)$$

dir. Bu ifade $\{T^n(\,x_0)\}$ dizisinin, bir Cauchy dizisi olduğunu ve dolayısıyla bir $x \in X$ noktasına yakınsadığını gösterir.

Şimdi x noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için $T(z) \neq z$ olsun. $D = \left\{x \in X : d(x,z) \leq \frac{1}{4} d(z,T(z))\right\}$ yuvarını gözönüne alalım. Burada her $x \in D$ için $d(x,T(z)) \geq \frac{3}{4} d(z,T(z))$ olduğuna dikkat edelim. Buradan her $n \geq n_0$ için $T^n(\,x_0) \in D$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır. Şimdi $x = T^{n_0}(x_0)$ ve $y = z$ alarak aşağıdaki üç durumdan birini elde ederiz.

1. $$d\big(T^{n_0+1}(\,x_0),T(z)\big) \leq \alpha d(T^{n_0}(\,x_0),z)$$

ifadesi bizi

$$\alpha d(T^{n_0}(x_0),z) \leq d(T^{n_0}(x_0),z) \leq \frac{1}{4}d(z,T(z)) < d\big(T^{n_0+1}(x_0),T(z)\big)$$

çelişkisine götürür.

2. $$d\big(T^{n_0+1}(x_0),T(z)\big) \leq \beta\big[d\big(T^{n_0}(x_0),T^{n_0+1}(x_0)\big) + d\big(z,T(z)\big)\big]$$

ifadesi de yine aşağıdaki ifadeyle bir çelişki oluşturur.

$$\beta\big[d\big(T^{n_0}(x_0),T^{n_0+1}(x_0)\big) + d\big(z,T(z)\big)\big]$$
$$< \frac{1}{2}\big[d(T^{n_0}(x_0),z) + d\big(z,T^{n_0+1}(x_0)\big) + d\big(z,T(z)\big)\big]$$

$$\leq \frac{3}{4}d(z,T(z)) \leq d\big(T^{n_0+1}(x_0),T(z)\big)$$

3. $d\big(T^{n_0+1}(x_0),T(z)\big) \leq \gamma\big[d\big(T^{n_0}(x_0),T(z)\big) + d(T^{n_0+1}(x_0),z)\big]$ İfadesi de

$$\gamma\big[d\big(T^{n_0}(x_0),T(z)\big) + d(T^{n_0+1}(x_0),z)\big]$$

$$< \frac{1}{2}\big[d(T^{n_0}(x_0),z) + d(T^{n_0+1}(x_0),z) + d\big(z,T(z)\big)\big]$$

$$\leq \frac{3}{4}d(z,T(z)) \leq d\big(T^{n_0+1}(x_0),T(z)\big)$$

ile çelişir. Böylece $T(z) = z$ olduğu görülür. Şimdi z noktasının tek olduğunu gösterelim. Şayet $z' \in X$, bir başka sabit nokta yani $T(z') = z'$ ise bu durumda z' ve z noktaları için hipotezdeki

$$d(T(z),T(z')) = d(z, z'),$$

$$d\big(T(z),T(z')\big) > d\big(z,T(z)\big) + d(z',T(z')),$$

$$d\big(T(z),T(z')\big) = \tfrac{1}{2}\big[d\big(z,T(z')\big) + d(z',T(z))\big]$$

şartlarından hiçbiri sağlanmaz. Dolayısıyla $z = z'$ dür.

Teorem 3.2.9: (X,d) tam metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. α,β ve γ, $0\le\alpha<1$, $0\le\beta,\gamma<0{,}5$ şartlarını sağlayan reel sayılar olsun. Her $x,y\in X$ için $(z_1)-(z_3)$ şartlardan en az biri doğru ise T Picard Operatörüdür yani $P(p_0,T)$ Picard iterasyonu T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: $x,y\in X$ olsun. $(z_1)-(z_3)$ den en az biri doğru olsun. Şayet (z_2) doğru ise, bu durumda

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\le \beta[d(x,Tx)+d(y,Ty)] \\ &\le \beta\{d(x,Tx)+[d(y,x)+d(x,Tx)+d(Tx,Ty)]\} \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeden,

$$(1-\beta)d(Tx,Ty)\le 2\beta d(x,Tx)+\beta d(x,y)$$

olup

$$d(Tx,Ty)\le\frac{2\beta}{(1-\beta)}d(x,Tx)+\frac{\beta}{(1-\beta)}d(x,y)$$

elde edilir. Eğer (z_3) doğru ise, benzer şekilde

$$d(Tx,Ty)\le\frac{2\gamma}{1-\gamma}d(x,Tx)+\frac{\gamma}{1-\gamma}d(x,y)$$

elde edilir.

$$\delta=\max\left\{\alpha,\frac{\beta}{1-\beta},\frac{\gamma}{1-\gamma}\right\} \tag{3.13}$$

alınırsa, $0\le\delta<1$ olur. Bu durumda her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\le 2\delta d(x,Tx)+\delta d(x,y) \tag{3.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\le 2\delta d(x,Ty)+\delta d(x,y) \tag{3.15}$$

yazılabilir. (3.14) den card$F_T \leq 1$ olduğu görülür. Şimdi, T nin tek bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. p_0 herhangi bir nokta ve $\{p_n\}$,

$$p_n = T^n p_0, n = 0,1,2,\ldots.$$

şeklinde tanımlanan Picard iterasyonu olsun. Eğer (3.15) de $x := p_n$, $y := p_{n-1}$ alınırsa

$$d(p_{n+1}, p_n) \leq \delta d(p_n, p_{n-1})$$

olur. Buradan $\{p_n\}$ nın bir Cauchy dizisi ve bu yüzden yakınsak olduğu sonucu çıkarılır. $x^* \in X$, bu dizinin limiti olsun. O halde

$$\lim_{n\to\infty} d(p_{n+1}, p_n) = 0$$

dır. (3.14) ve üçgen eşitsizliğinden

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, p_{n+1}) + d(Tp_n, Tx^*)$$

$$\leq d(x^*, p_{n+1}) + \delta d(x^*, p_n) + 2\delta d(p_n, Tp_n)$$

elde edilir. Buradan $n \to \infty$ limit alınırsa,

$$d(p_n, Tp_n) = d(p_n, p_{n+1}) \to 0$$

olup,

$$d(x^*, Tx^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = Tx^*$$

elde edilir. Böylece her $p_0 \in X$ ve $n \to \infty$ için $p_n \to x^*$ ve $F_T = \{x^*\}$ dir.

Teorem 3.2.10: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$, Zamfirescu operatörü olsun. $k_0 \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $K(k_0, \lambda, T)$ Krasnoselskij iterasyonu T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Teorem 3.2.8 den T nin K da bir tek sabit noktası olduğu gösterildi. Bu sabit nokta x^* olsun. δ, (3.13) deki gibi olmak üzere her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta\|x - y\| + 2\delta\|x - Tx\| \tag{3.16}$$

olur. $k_0 \in K$ olmak üzere, $\{k_n\}$ Krasnoselskij iterasyonu olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}\|k_{n+1} - x^*\| &= \|(1-\lambda)k_n + \lambda T k_n - (1-\lambda+\lambda)x^*\| \\ &= \|(1-\lambda)(k_n - x^*) + \lambda(Tk_n - x^*)\| \qquad (3.17) \\ &\leq (1-\lambda)\|k_n - x^*\| + \lambda\|Tk_n - x^*\|\end{aligned}$$

yazılır. (3.16) da $x := x^*$ ve $y := k_n$ alınırsa

$$\|Tk_n - x^*\| \leq \delta\|k_n - x^*\| \qquad (3.18)$$

elde edilir. (3.17) ve (3.18) den

$$\|k_{n+1} - x^*\| \leq (1-(1-\delta)\lambda)\|k_n - x^*\|, n = 0,1,2\ldots$$

yazılır. Buradan

$$\|k_{n+1} - x^*\| \leq (1-(1-\delta)\lambda)^{n+1}\|k_0 - x^*\|$$

elde edilir. $0 \leq \delta < 1$ ve $\lambda \in [0,1]$ olduğundan, $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$(1-(1-\delta)\lambda)^{n+1} \to 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|k_{n+1} - x^*\| = 0$$

dır. Yani $\{k_n\}$ Krasnoselskij iterasyonu T dönüşümünün x^* sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Teorem 3.2.11: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ Zamfirescu operatörü olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere $M(x_0, \alpha_n, T)$ Mann iterasyonu T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Teorem 3.2.8 den T nin K da bir tek sabit noktası olduğu gösterildi. Bu sabit nokta x^* olsun. δ, (3.13) deki gibi olmak üzere her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta\|x - y\| + 2\delta\|x - Tx\| \qquad (3.19)$$

olur. Herhangi bir $x_0 \in K$ için, $\{x_n\}$ Mann iterasyonu olsun. Bu durumda

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n - (1-\alpha_n+\alpha_n)x^*\| \tag{3.20}$$

$$= \|(1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Tx_n - x^*)\|$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\|Tx_n - x^*\|$$

dir. (3.19) eşitsizliğinde $x := x^*$ ve $y := x_n$ alınırsa,

$$\|Tx_n - x^*\| \leq \delta\|x_n - x^*\|$$

elde edilir. (3.20) den

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq [1-(1-\delta)\alpha_n]\|x_n - x^*\|, n = 0,1,2,\ldots$$

bulunur. Buradan

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \prod_{k=0}^{n}[1-(1-\delta)\alpha_k].\|x_k - x^*\|, n = 0,1,2,\ldots \tag{3.21}$$

olur. $0 < \delta < 1$, $\alpha_k \in [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}[1-(1-\delta)\alpha_k] = 0$$

dır. Dolayısıyla (3.21) den

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x^*\| = 0$$

olduğu sonucu çıkarılır. Yani $\{x_n\}$, x^* a kuvvetli yakınsar.

Teorem 3.2.12: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ Zamfirescu operatörü olsun. $u_0 \in K$ olmak üzere $\mathrm{I}(u_0, \alpha_n, \beta_n, T)$ Ishikawa iterasyonu T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: x^* T nin K da bir tek sabit noktası olsun. δ, (3.13) deki gibi olmak üzere her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta\|x - y\| + 2\delta\|x - Tx\| \tag{3.22}$$

olur. $u_0 \in K$ olmak üzere $\{u_n\}$, (3.4) ile tanımlanan Ishikawa iterasyonu olsun. Bu taktirde

$$\|u_{n+1} - x^*\| = \|(1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n - (1-\alpha_n+\alpha_n)x^*\| \tag{3.23}$$

$$= \|(1-\alpha_n)(u_n - x^*) + \alpha_n(Tv_n - x^*)\|$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n\|Tv_n - x^*\|$$

yazılır. (3.22) da $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}^*$ ve $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{v_n}$ alınırsa,

$$\|\boldsymbol{T v_n} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{v_n} - \boldsymbol{x}^*\|$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\|\boldsymbol{v_n} - \boldsymbol{x}^*\| = \|(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\beta_n})\boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{\beta_n T u_n} - (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}^*\|$$

$$= \|(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\beta_n})(\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{\beta_n}(\boldsymbol{T u_n} - \boldsymbol{x}^*)\|$$

$$\leq (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\beta_n})\|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{x}^*\| + \boldsymbol{\beta_n}\|\boldsymbol{T u_n} - \boldsymbol{x}^*\|$$

yazılır. (3.22) ifadesinde $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}^*$ ve $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{u_n}$ alınırsa,

$$\|\boldsymbol{T u_n} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{x}^*\| \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.23) ve (3.24) ifadelerinden,

$$\|\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{x}^*\| \leq [\boldsymbol{1} - (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\alpha_n}(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\delta\beta_n})]\|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{x}^*\|$$

yazılır. Ayrıca

$$\big(\boldsymbol{1} - (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\alpha_n}(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\delta\beta_n})\big) \leq (\boldsymbol{1} - (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\delta})^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\alpha_n})$$

eşitsizliğinden

$$\|\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{x}^*\| \leq [\boldsymbol{1} - (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\delta})^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\alpha_n}]\|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{x}^*\|, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots$$

yazılır. Buradan

$$\|u_{n+1} - x^*\| \leq \prod_{k=1}^{n}[1 - (1-\delta)^2\alpha_k]\,\|u_0 - x^*\|$$

elde edilir. $0 \leq \delta < 1$, $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} [1 - (1-\delta)^2 \alpha_k] = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{n+1} - x^*\| = 0$$

dır. Yani Ishikawa iterasyonu, T dönüşümünün x^* sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Aşağıdaki teorem ile Zamfirescu operatör sınıfında iki adım Mann iterasyonunun tek sabit noktaya kuvvetli yakınsaklığı ilk defa ispat edilmiştir.

Teorem 3.2.13: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ Zamfirescu operatörü olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere (3.7) ile tanımlanan iki adım Mann iterasyonu T nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Her $x, y \in K$ için δ, (3.13) deki gibi seçilsin. Keyfi bir Banach uzayında verilen Zamfirescu operatörlerinin sınıfı için iki adım Mann iterasyonunun sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstereceğiz: $\{x_n\}$, (3.7) ile verilen iki adım Mann iterasyonu, $x_0 \in K$ ve $x^* \in F(T)$ olsun. Bu durumda

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|(1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T\text{y} - [(1-\alpha_n) + \alpha_n]x^*\| \tag{3.25}$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|y_n - x^*\| + \alpha_n \|Ty_n - x^*\|$$

dır. (3.22) de $x := x^*$ ve $y := y_n$ alınırsa

$$\|Ty_n - x^*\| \leq \delta \|y_n - x^*\|, \tag{3.26}$$

olur.Diğer yandan

$$\|y_n - x^*\| = \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n - (1 - \beta_n + \beta_n)x^*\|$$

$$\leq (1-\beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n \|Tx_n - x^*\| \tag{3.27}$$

olur.Yine

(3.22) de $x := x^*$ve $y := x_n$ alınırsa,

$$\|Tx_n - x^*\| \leq \delta \|x_n - x^*\| \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28), (3.27) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n \|T\mathrm{x}_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| + \delta\beta_n \|x_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \beta_n + \delta\beta_n)\|x_n - x^*\| \\ &= \big(1 - \beta_n(1 - \delta)\big)\|x_n - x^*\| \end{aligned}$$

olur. (3.26), (3.25) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n - [(1 - \alpha_n) + \alpha_n]x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|y_n - x^*\| + \alpha_n \|Ty_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|y_n - x^*\| + \alpha_n \delta \|y_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|y_n - x^*\| + \alpha_n \delta \|y_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n + \alpha_n \delta)\|y_n - x^*\| \\ &\leq \big(1 - \alpha_n(1 - \delta)\big)\big(1 - \beta_n(1 - \delta)\big)\|x_n - x^*\| \\ &\leq \big(1 - \alpha_n(1 - \delta)\big)\|y_n - x^*\| \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq [1 - (1 - \delta)\alpha_n]\|x_n - x^*\|, n = 0,1,2\ldots.$$

dır. Buradan

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \alpha_k(1 - \delta)\big) \|x_0 - x^*\|, n = 0,1,2,\ldots$$

elde edilir.

$$\delta < 1 \ , \ \alpha_k, \beta_n \in (0,1) \ \text{ ve } \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - (1-\delta)\alpha_k) = 0,$$

olur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x^*\| = 0,$$

yazılır. Yani $\{x_n\}$ dizisi x^* sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Zamfirescu operatörlerinin sınıfında iterasyon yöntemlerinin karşılaştırılması

Bir önceki bölümde, Zamfirescu operatörlerinin sınıfında Picard iterasyonu, Krasnoselskij iterasyonu, Mann iterasyonu, Ishikawa ve iki adım Mann iterasyonu gibi önemli sabit nokta iterasyon metotlarının, böyle bir operatörün tek sabit noktasına yakınsadığı gösterildi. Böyle durumlarda hangi metodun sabit noktaya daha hızlı yakınsadığını bilmek önemlidir.

Bu sebeple, bu kısımda Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, iki adım Mann iterasyon metotlarının yakınsama hızları mukayese edilecektir. Aşağıdaki örnek $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ dizilerinin seçiminin, iterasyon hızlarını etkilediğini göstermektedir.

Örnek 4.1.1: T: $[0,1] \to [0,1]$, $Tx = \frac{1}{2}x$ dönüşümünü alalım. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ dizilerini

$$\alpha_n = \beta_n = 0, n = 1,2,3, \dots ,15 \text{ ve } \alpha_n = \beta_n = \frac{4}{\sqrt{n}}, n \geq 16$$

olarak seçelim. Burada T Zamfirescu operatörü olup $x^* = 0$, T nin tek sabit noktasıdır. Biz bu örnekte Ishikawa iterasyonunun Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını göstereceğiz. $n = 1,2,3,\dots,16$ için $x_n = y_n = x_0$ alalım. Bu halde $x_0 \neq 0$ olmak üzere Mann iterasyonu

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \\
&= \left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)x_n + \frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}x_n \\
&= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)x_n \\
&\;\vdots \\
&= \prod_{i=16}^{n}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}}\right)x_{16} \\
&= \prod_{i=16}^{n}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}}\right)x_0
\end{aligned}$$

olur. Ishikawa iterasyonu ise

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T((1-\beta_n)u_n + \beta_n T u_n) \\
&= \left(1-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)u_n + \frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)u_n + \frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}v_n\right) \\
&= \left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{4}{n}\right)u_n \\
&\vdots \\
&= \prod_{i=1}^{16}\left(1-\frac{2}{\sqrt{i}}-\frac{4}{i}\right)u_{16} \\
&= \prod_{i=1}^{16}\left(1-\frac{2}{\sqrt{i}}-\frac{4}{i}\right)u_0
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır.O halde

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n+1}-0}{x_{n+1}-0}\right| &= \frac{\prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{2}{\sqrt{i}}-\frac{4}{i}\right)x_0}{\prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{2}{\sqrt{i}}\right)x_0} \\
&= \prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{4/i}{1-2/\sqrt{i}}\right) \\
&= \prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{4}{i-2\sqrt{i}}\right)
\end{aligned}
$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to\infty}\prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{4}{i-2\sqrt{i}}\right) \\
&\le \lim_{n\to\infty}\prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{4}{i}\right) \\
&\le \lim_{n\to\infty}\prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{15}{16}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{17}{18}\cdots\frac{n-1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{15}{n} = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}-0}{x_{n+1}-0}\right| = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=16}^{n}\left(1-\frac{4}{i-2\sqrt{i}}\right) = 0$$

dır. Dolayısıyla bu da bize Ishikawa iterasyonunun T nin sabit noktasına, Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını gösterir.

Teorem 4.1.1: E düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$, $(z_1) - (z_3)$ şartlarını sağlayan Zamfirescu operatör olsun. $p_0 \in K$ olmak üzere (3.1) ile tanımlanan Picard iterasyonu ile (3.3) ile tanımlanan Mann iterasyonu verilsin. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi,

i) $\alpha_1 = 1$,

ii) $0 \leq \alpha_n < 1$,

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1-\alpha_n) = \infty$.

şartlarını sağlasın. Bu durumda Picard iterasyonu, Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Berinde2004).

İspat: T zamfirescu operatörünün bir tek sabit noktaya sahip olduğunu,Picard ve Mann itersayonlarının bu sabit noktaya yakınsadığını Teorem 3.2.8 ve 3.2.10 dan biliyoruz.(3.19) eşitsizliğinde $y = p_n$, $x = x^*$ alınırsa,

$$\|p_{n+1} - x^*\| \leq \delta \|p_n - x^*\|$$

olarak bulunur. İndirgeme yöntemi kullanılarak,

$$\|p_{n+1} - x^*\| \leq \delta^n \|p_1 - x^*\|, \qquad n \geq 0$$

yazılır. Şimdi $x_0 \in K$ ve $\{x_n\}$ ile tanımlanan Mann iterasyonu olsun. O zaman (3.3) ile verilen Mann iterasyonunu kullanarak

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n - [(1-\alpha_n) + \alpha_n]x^*\|$$

ifadesini elde ederiz. (3.19) da $y = x_n$ ve $x = x^*$ alınırsa,

$$\|Tx_n - x^*\| \leq \delta\|x_n - x^*\| + 2\delta\|x_n - x^*\| = 3\delta\|x_n - x^*\|$$

bulunur. Buradan,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq [1 - \alpha_n + 3\delta.\alpha_n]\|x_n - x^*\|$$

yazılır. Bu şekilde devam edilirse,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \prod_{k=1}^{n}[1 - \alpha_k + 3\delta.\alpha_k]\|x_1 - x^*\|, n = 0,1,2,..$$

olarak bulunur. $\{p_n\}$ ve $\{x_n\}$ i karşılaştırmak için δ^n ve

$$\prod_{k=1}^{n}[1 - \alpha_k + 3\delta.\alpha_k]$$

ifadelerini karşılaştırmalıyız. İlk olarak her $\delta > 0$, $[1 - \alpha_k + 3\delta.\alpha_k] > 0$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ için (ii) şartının sağlandığına dikkat edelim. Eğer $\delta \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ alınırsa,

$$[1 - \alpha_k + 3\delta.\alpha_k] > 1$$

olur. $\delta \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ için,

$$[1 - \alpha_k + 3\delta.\alpha_k] \geq 1$$

elde edilir. Böylece $\delta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$ için,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\delta^n}{\prod_{k=1}^{n}[1 - \alpha_k + 3\delta.\alpha_k]} < \lim_{n\to\infty} \delta^n = 0$$

olur. Dolayısıyla, Picard iterasyonu Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsar. Eğer $\delta \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ alınırsa, herhangi bir $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ için

$$\alpha_k \leq 1 < \frac{1 - 2\delta}{3\delta^2 - 4\delta + 1}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten,

$$\frac{\delta}{1-\alpha_k+3\delta\alpha_k}<1-\delta$$

yazılır. Böylece

$$\frac{\delta^n}{\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k+3\delta.\alpha_k]}<(1-\delta)^n$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta^n}{\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k+3\delta.\alpha_k]}=0$$

olarak bulunur. Yani $\delta\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$ için Picard iterasyonu, Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsar. Yukarıdaki teoremde geçen $\{\alpha_n\}$ dizisi için

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$

şartını dikkate alalım. (i) ve (ii) şartını sağlayan bir $\{\alpha_n\}$ dizisi

$$0<\alpha_n(1-\alpha_n)<\alpha_n$$

olduğundan, (iv) şartını sağlar. (iv) şartı (iii) den daha zayıftır. Dolayısıyla yukarıdaki teorem (iv) şartı ile de geçerlidir.

Teorem 4.1.2: $T:K\to K$ bir Zamfirescu operatör olsun. $p_0\in K$ için (3.1) ile verilen Picard iterasyonu ve $k_0\in K$ ve $\lambda\in(0,1)$ için (3.2) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu olsun. Bu taktirde Picard iterasyonu, T nin sabit noktasına Krasnoselskij iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Berinde 2004).

İspat: 3.2.8. ve 3.2.10. Teoremlerinden T operatörünün tek sabit noktaya sahip olduğu, Picard ve Krasnoselskij iterasyonlarının bu sabit noktaya yakınsadığı biliniyor. Bu sabit noktaya x^* olsun.δ, (3.13) deki gibi her $x,y\in K$ için T operatörü (3.19) daki eşitsizliği sağlamak üzere $p_0\in K$ ve (3.1) ile tanımlanan Picard iterasyonunu alalım. (3.19) da $y:=p_n$ ve $x:=x^*$alınırsa,

$$\|p_{n+1}-x^*\|\le\delta\|p_n-x^*\|$$

yazılır. Buradan

$$\|p_{n+1} - x^*\| \leq \delta^n \|p_1 - x^*\|, n \geq 0 \tag{4.1}$$

elde edilir. $k_0 \in K$ olmak üzere $\{k_n\}$, Krasnoselskij iterasyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|k_{n+1} - x^*\| &\leq \|(1-\lambda)k_n + \lambda T k_n - (1 - \lambda + \lambda)x^*\| \\ &= \|(1-\lambda)(k_n - x^*) + \lambda(Tk_n - x^*)\| \\ &\leq (1-\lambda)\|k_n - x^*\| + \lambda\|Tk_n - x^*\| \end{aligned} \tag{4.2}$$

yazılır. (3.19) da $x := x^*$ ve $y := k_n$ alınırsa,

$$\|Tk_n - x^*\| \leq \delta\|k_n - x^*\| \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) eşitsizliklerden,

$$\begin{aligned} \|k_{n+1} - x^*\| &\leq (1-\lambda)\|k_n - x^*\| + \lambda\delta\|k_n - x^*\| \\ &\leq (1 - (1-\delta)\lambda)\|k_n - x^*\| \end{aligned}$$

yazılır. $\delta \in [0,1)$ ve $\lambda \in [0,1]$ olduğundan, $\theta_0 = (1 - (1-\delta)\lambda) < 1$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|k_{n+1} - x^*\| &\leq (1 - (1-\delta)\lambda)^{n+1}\|k_0 - x^*\| \\ &\leq \|k_0 - x^*\| \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Böylece $\{p_n\}$ ve $\{k_n\}$ dizilerini karşılaştırmak için (4.1) ve (4.4) den $a_n = \delta^n$ ve $b_n = 1$ alınırsa $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ için

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \delta < 1$$

olur. Bu ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ yakınsak olduğunu gösterir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla Picard iterasyonu T dönüşümünün sabit noktasına Krasnoseslkij iterasyonundan daha hızlı yakınsar.

Teorem 4.1.3: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir Zamfirescu operatör olsun. $p_0 \in K$ için (3.1) ile verilen Picard iterasyonu ve $u_0 \in K$ için (3.4) ile verilen Ishikawa iterasyonu verilsin. Bu taktirde Picard iterasyonu T nin sabit noktasına, Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Babu and Vara Prasad 2006).

İspat: 3.2.9. ve 3.2.12. Teoremlerinden, Picard iterasyonun ve Ishikawa iterasyonun T nin bir tek sabit noktasına yakınsadığını biliyoruz. Bu sabit nokta x^* olsun. δ, (3.13) deki gibi olmak üzere her $x, y \in K$ için T dönüşümü (3.19) daki eşitsizliği sağlamak üzere (3.19) da $y := p_n$ ve $x := x^*$ alınırsa,

$$\|p_{n+1} - x^*\| \leq \delta \|p_n - x^*\|$$

yazılır. İndirgeme yöntemiyle,

$$\|p_{n+1} - x^*\| \leq \delta^n \|p_1 - x^*\|, n \geq 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. $u_0 \in K$ olmak üzere $\{u_n\}$ dizisi (3.4) ile tanımlanan Ishikawa iterasyonu olsun.

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - x^*\| &= \|(1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T u_n - (1 - \alpha_n + \alpha_n)x^*\| \\ &= \|(1-\alpha_n)(u_n - x^*) + \alpha_n (T v_n - x^*)\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n \|T v_n - x^*\| \end{aligned} \tag{4.6}$$

yazılır. (3.19) da $x := x^*$ ve $y := v_n$ alınırsa,

$$\|T v_n - x^*\| \leq \delta \|v_n - x^*\| \tag{4.7}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|v_n - x^*\| &= \|(1-\beta_n)u_n + \beta_n T u_n - (1 - \beta_n + \beta_n)x^*\| \\ &= \|(1-\beta_n)(u_n - x^*) + \beta_n (T u_n - x^*)\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|u_n - x^*\| + \beta_n \|T u_n - x^*\| \end{aligned} \tag{4.8}$$

yazılır. (3.19) da $x := x^*$ ve $y := u_n$ alınırsa,

$$\|Tu_n - x^*\| \leq \delta\|u_n - x^*\| \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.9) ifadelerinden,

$$\|u_{n+1} - x^*\| \leq (1-\alpha_n)\|u_n - x^*\| + \delta\alpha_n\|v_n - x^*\|$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|u_n - x^*\| + \delta\alpha_n[(1-\beta_n)\|u_n - x^*\| + \beta_n\|Tu_n - x^*\|]$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|u_n - x^*\| + \delta\alpha_n[(1-\beta_n)\|u_n - x^*\| + \delta\beta_n\|u_n - x^*\|]$$

$$= \big((1-\alpha_n) + \delta\alpha_n(1-\beta_n) + \delta\beta_n\big)\|u_n - x^*\|$$

$$= [1 - (1-\delta)\alpha_n(1-\delta\beta_n)]\|u_n - x^*\|$$

yazılır. Ayrıca

$$\big(1 - (1-\delta)\alpha_n(1-\delta\beta_n)\big) \leq (1 - (1-\delta)^2\alpha_n)$$

eşitsizliğinden,

$$\|u_{n+1} - x^*\| \leq [1 - (1-\delta)^2\alpha_n]\|u_n - x^*\| \text{ ,} n = 0{,}12{,}{,}.. \quad (4.10)$$

yazılır. Tekrar indirgeme yöntemi kullanılarak,

$$\|u_{n+1} - x^*\| \leq \textstyle\prod_{k=1}^{n}[1 - (1-\delta)^2\alpha_k]\,\|u_0 - x^*\| \quad (4.11)$$

elde edilir. Böylece $\{p_n\}$ ve $\{u_n\}$ dizilerini karşılaştırmak için (4.9) ve (4.11) ifadelerinden, $a_n = \delta^n$ ve

$$b_n = \prod_{k=1}^{n}[1 - (1-\delta)^2\alpha_k]$$

dizilerini karşılaştırmalıyız. $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ olmak üzere,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\delta}{[1 - (1-\delta)^2\alpha_{k+1}]} < 1$$

eşitsizliğinden, $\sum c_n$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ olur. Bu ise, Picard İterasyonunun T dönüşümünün sabit noktasına Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını gösterir.

Teorem 4.1.4: E keyfi bir Banach uzayı, K da E nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir Zamfirescu operatörü olsun. $k_0 \in K$ için (3.2) ile tanımlanan Krasnoselskij iterasyonu ve $u_0 \in K$ için (3.4) ile tanımlanan Ishikawa iterasyonu olsun. Bu durumda Krasnoselskij iterasyonu T nin sabit noktasına Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsar. (Xue 2008)

İspat: Teorem 3.2.8. den T nin bir tek sabit noktası olduğu biliniyor. Bu sabit nokta x^*olsun. Krasnoselskij iterasyonu için (3.2) kullanılarak

$$\|k_{n+1} - x^*\| \leq (1-\lambda)\|k_n - x^*\| + \lambda\|Tk_n - Tx^*\|$$

yazılır. (3.19) da $x = x^*$ ve $y = k_n$ alınırsa,

$$\|Tk_n - Tx^*\| \leq \delta\|k_n - x^*\|$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|k_{n+1} - x^*\| &\leq (1-(1-\delta)\lambda)\|k_n - x^*\| \\ &\leq (1-(1-\delta)\lambda)^{n+1}\|k_0 - x^*\| \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}(1-(1-\delta)\lambda)^{n+1}\|k_0 - x^*\| \to 0$$

yazılır. Ishikawa iterasyonu için (3.4) ü kullanarak

$$\|u_{n+1} - x^*\| \geq (1-\alpha_n)\|u_n - x^*\| - \alpha_n\|Tv_n - Tx^*\| \tag{4.12}$$

elde ederiz. (3.19) da $x = x^*$ ve $y = v_n$ alınırsa,

$$\|Tv_n - Tx^*\| \leq \delta\|v_n - x^*\| \tag{4.13}$$

yazılır. Tekrar (3.2) ve (3.4) kullanılarak,

$$\|v_n - x^*\| \leq (1-\beta_n)\|u_n - x^*\| + \beta_n\|Tu_n - Tx^*\|$$

$$\leq (1-(1-\delta)\beta_n)\|u_n - x^*\| \tag{4.14}$$

olur. (4.12), (4.13) ve (4.14) den

$$\|u_{n+1} - x^*\| \geq \big(1-\alpha_n - \alpha_n\delta(1-(1-\delta)\beta_n)\big)\|u_n - x^*\|$$

$$\geq (1-(1+\delta)\alpha_n)\|u_n - x^*\|$$

$$\geq (1-(1+\delta)\alpha_n)(1-(1+\delta)\alpha_{n-1}) \cdots (1-(1+\delta)\alpha_0)\|u_0 - x^*\|$$

elde edilir. Teorem 4.1.1 deki gibi

$$\frac{\|k_{n+1} - x^*\|}{\|u_{n+1} - x^*\|} \leq \frac{(1-(1-\delta)\lambda^{n+1})\|k_0 - x^*\|}{(1-(1+\delta)\alpha_n)(1-(1+\delta)\alpha_{n-1}) \cdots (1-(1+\delta)\alpha_0)\|u_0 - x^*\|}$$

ifadesi yazılır. $n \to \infty$ için bu ifade 0 olur. Böylece

$$\frac{\|k_n - x^*\|}{\|u_n - x^*\|} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla Krasnoselskij iterasyonu Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsar.

Örnek 4.1.5: $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = \frac{1}{2}x$ dönüşümünü alalım. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ dizilerini

$$n = 1,2,3,\ldots,15 \text{ için } \alpha_n = \beta_n = 0 \text{ ve } n \geq 16 \text{ için } \alpha_n = \beta_n = \frac{4}{\sqrt{n}}$$

olarak seçelim. Burada T Zamfirescu operatörü olup $x^* = 0$, T nin tek sabit noktasıdır. Biz bu örnekte Ishikawa iterasyonunun Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını göstereceğiz. Bu halde $x_0 \neq 0$ için Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$$

$$= \left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)x_n + \frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}x_n$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) x_n$$

$$\vdots$$

$$= \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}}\right) x_{16}$$

$$= \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}}\right) x_0$$

olur. Ishikawa iterasyonu ise,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T((1-\beta_n)u_n + \beta_n T u_n) \\
&= \left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right) u_n + \frac{4}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right) u_n + \frac{4}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} v_n \right) \\
&= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{4}{n}\right) u_n \\
&\vdots \\
&= \prod_{i=1}^{16} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right) u_{16} \\
&= \prod_{i=1}^{16} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right) u_0
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. O halde

$$\left|\frac{u_{n+1} - 0}{x_{n+1} - 0}\right| = \frac{\prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right) x_0}{\prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}}\right) x_0}$$

$$= \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{4/_i}{1 - {}^2/_{\sqrt{i}}}\right)$$

$$= \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{4}{i - 2\sqrt{i}}\right)$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to\infty} \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{4}{i - 2\sqrt{i}}\right) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{4}{i}\right) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{15}{16} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{17}{18} \cdots \frac{n-1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{15}{n} = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1} - 0}{x_{n+1} - 0}\right| = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=16}^{n} \left(1 - \frac{4}{i - 2\sqrt{i}}\right) = 0
$$

sonucu elde edilir. Bu da bize Ishikawa iterasyonunun T nin sabit noktasına, Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını gösterir.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{\mathrm{n}}
$$

olarak seçelim. Bu durumda Mann iterasyonu

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \\
&= \left(1 - \tfrac{1}{\mathrm{n}}\right) x_n + \tfrac{1}{\mathrm{n}}\tfrac{1}{2} x_n \\
&= \left(\frac{2\mathrm{n} - 1}{2\mathrm{n}}\right) x_n \\
&\;\;\vdots \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2\mathrm{i} - 1}{2\mathrm{i}}\right) x_1
\end{aligned}
$$

ve Ishikawa iterasyonu

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T\big((1-\beta_n)u_n + \beta_n T u_n\big) \\ &= \left(1-\frac{1}{\mathrm{n}}\right)u_n + \frac{1}{\mathrm{n}}\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{\mathrm{n}}\right)u_n + \frac{1}{\mathrm{n}}\frac{1}{2}u_n\right) \\ &\vdots \\ &= \prod_{i=1}^{\mathrm{n}}\left(1-\frac{2\mathrm{i}+1}{4\mathrm{i}^2}\right)u_1 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}-0}{x_{n+1}-0}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} = 1$$

elde edilir. Yani, Mann ve Ishikawa iterasyonu aynı yakınsama oranına sahiptir.

Şayet her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha_n = \beta_n = \frac{n-1}{n}$$

olarak seçilirse, aynı dönüşüm için benzer işlemler yapılarak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}-0}{x_{n+1}-0}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-6n}{n^2-8n+3}\right)^{\mathrm{n}} = \infty$$

olduğu görülür. Yani yukarıdaki durumun aksine Mann iterasyonunun Ishikawa iterasyonundan daha hızlı yakınsadığı sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.1.6: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{2}$ fonksiyonu verilsin. $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metriği ile birlikte f fonksiyonun Zamfirescu operatörü olduğu açıktır. Picard, Krasnoselkij, Mann, Ishikawa, İki adım Mann iterasyon yöntemlerini karşılaştırmak amacıyla

$$\lambda = \frac{1}{2}, \alpha_n = \frac{1}{n+1}, \beta_n = \frac{1}{n}$$

olarak seçelim. Ayrıca yukarıdaki beş iterasyon için ortak başlangıç noktası olarak ilk olarak $x_0 = 2$ ve daha sonra da $x_0 = 0$ alarak aşağıdaki tabloları oluşturabiliriz.

4.2.İterasyon hızlarının karşılaştırılması

Çizelge 4.2.1. İterasyon hızlarının karşılaştırılması

	Picard İterasyonu	**Krasnoselkji İterasyonu**	**Mann İterasyonu**	**Ishikawa İterasyonu**	**İki adım Mann İterasyonu**
x_0	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000
x_1	1.500000	1.750000	1.750000	1.625000	1.375000
x_2	1.250000	1.562500	1.625000	1.494792	1.234375
x_3	1.125000	1.421875	1.546875	1.422635	1.170898
x_4	1.062500	1.316406	1.492188	1.375088	1.134583
x_5	1.031250	1.237305	1.451172	1.340705	1.111031
x_6	1.015625	1.177979	1.418945	1.314341	1.094508
x_7	1.007813	1.133484	1.392761	1.293291	1.082273
x_8	1.003906	1.100113	1.370941	1.275979	1.072846
x_9	1.001953	1.075085	1.352394	1.261414	1.065359
x_{10}	1.000977	1.056314	1.336376	1.248937	1.059268
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{50}	1.000000	1.000000	1.157618	1.114528	1.012545
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{100}	1.000000	1.000000	1.112139	1.081283	1.006319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	1	1	1	1	1

Çizelge 4.2.2. İterasyon hızlarının karşılaştırılması

	Picard İterasyonu	**Krasnoselkji İterasyonu**	**Mann İterasyonu**	**Ishikawa İterasyonu**	**İki adım Mann İterasyonu**
x_0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
x_1	5.000000E-01	2.500000E-01	2.500000E-01	3.750000E-01	6.250000E-01
x_2	7.500000E-01	4.375000E-01	3.750000E-01	5.052084E-01	7.656250E-01
x_3	8.750000E-01	5.781250E-01	4.531250E-01	5.773655E-01	8.291016E-01
x_4	9.375000E-01	6.835938E-01	5.078125E-01	6.249118E-01	8.654175E-01
x_5	9.687500E-01	7.626953E-01	5.488281E-01	6.592949E-01	8.889694E-01
x_6	9.843750E-01	8.220215E-01	5.810547E-01	6.856590E-01	9.054918E-01
x_7	9.921875E-01	8.665161E-01	6.072388E-01	7.067086E-01	9.177273E-01
x_8	9.960938E-01	8.998871E-01	6.290588E-01	7.240210E-01	9.271544E-01
x_9	9.980469E-01	9.249153E-01	6.476059E-01	7.385865E-01	9.346412E-01
x_{10}	9.990234E-01	9.436865E-01	6.636238E-01	7.510630E-01	9.407315E-01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{50}	1.000000	9.999995E-01	8.423822E-01	8.854722E-01	9.874552E-01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{100}	1.000000	9.999999E-01	8.878611E-01	9.187169E-01	9.936811E-01
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	1	1	1	1	1

Yukarıdaki sonuçlar, FORTRAN 90 Programlama Dili kullanılarak elde edilmiştir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada daraltan dönüşümlerin sınıfını da ihtiva eden Zamfirescu operatörlerinin sınıfı ele alınmıştır. Zamfirescu operatörlerinin mevcut sabit noktalarını elde etmek için kullanılan çeşitli iterasyon metotları incelenmiş ve bu iterasyon metotlarının sabit noktaya kuvvetli yakınsaklıkları görülmüştür.

Ayrıca dizilerin yakınsama kavramı incelenerek, çok bilinen Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa ve iki adım Mann iterasyon metotları yardımıyla oluşturulmuş dizilerin özellikle Picard iterasyonu ile yakınsama hızları karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda sabit noktaya yakınsaması durumunda Picard iterasyonunun en hızlı iterasyon olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

Babu, G.V.R, and Vara Prasad, K.N. V.V., 2006, ‘Mann iteration converges faster than Ishikawa iteration for the class of Zamfirescu operators’,Fixed Point Theory and Applications, vol. 2006, Article ID 496, 6 pages,

Babu, G.V.R. and Vara Prasad, K.N.V.V., 2006,’Comparison of fastness of the convergence among Krasnoselskij, Mann and Ishikawa iterations in arbitrary real Banach spaces’, Fixed Point Theory and Applications, Volume 2006, Article ID 35704, pages 1-12.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ısbn 975-442-035-1

Berinde, V., 2004,‘On the convergence of the Ishikawa iteration in the class of quasi contractive operators’ Acta Mathematica Universitatis Comenianae, Vol.73, No.1, pp. 119-126.

Berinde, V., 2004,‘Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators’, Fixed Point Theory and Applications, no.2, p.p 97-105.

Berinde, V., Berinde, M., 2005,’On Zamfirescu’s fixed point theorem’ Rev.Roumaine Math. Pures Appl. 50, No. 5-6,443-453

Berinde, V.,2006, İterative Approximation of Fixed Points

Chidume, C.E., and Osilike, M.O., 1993,’Fixed point iterations for quasi-contractive maps in uniformly smooth Banach spaces’ Bull. Kroean Math. Soc.(1993), No:2, pp.201-212.

Ciric, L.B. 2003,:Fixed Point Theory. Contraction Mapping Principle. FME Pres. Beograd.

Expansive Non-self Mapping in a Banach Space, Journal of Computational and Applied Mathematics,Volume 2008,Article ID 6828, 16 pages

Kızıltunç, H. 2007 Obtaining with iteration methods of fixed points of nonexpansive mappings, Atatürk üniversitesi, Doktora Tezi.

Madox, I.J. 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres.

Noor, M.A., 2000, New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math Anal. Appl., 251, 217-229.

Popescu, O., 2007, ‘Picard iteration converges faster than Mann iterations for a class of quasi-conractive operators’ Mathematical Communocations 12(2007), 195-202.

Rhoades, B.E. and Qing, Y., 2008, ‘Comments on the Rate of Convergence between Mann and Ishikawa iterations Applied to Zamfirescu operators’ Fixed Point Theory and Applications, Volume 2008, Article ID 387504, 3 pages.

Rhoades, B.E.,1976, ’Comments on two fixed point iteration methods’ J. Math. Anal. Appl., 56, No.2, 741-750.

Thianwan, S.,2008,Common Fixed Point of New Iterations for Two Asymtotically Non

Ünlü, C., 2004 Fixed point theorems on metric spaces and it’s applications, Atatürk Üniversitesi, Yükseklisans Tezi.

Xue, Z., 2008,‘The comparison of the convergence speed between Picard, Mann, Krasnoselskij and Ishikawa iterations in Banach spaces’, Fixed Point Theory and Applications. Volume 2008, Reiew Article ID 387056, 5 pages.

Zamfirescu, T., 1972, Fix point theorems in metric spaces, Arch.Math (Basel)23 292–298.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Kahramanmaraş'da doğdu. Öğretmen çocuğu olan Elmas, İlköğretimini ve lise öğrenimini Gaziantep'de tamamladı. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazanarak 2004 yılında mezun oldu. 2006 Güz yarıyılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. Yabancı dil, bilimsel hazırlık ve bir kısım lisans üstü derslerini aldıkdan sonra, 2008 yılın da Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yatay geçiş yaptı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmekte ve Erzurum'da Özel Geometri-Matematik Dershanesinde Geometri öğretmenliği yapmaktadır.