8. SINIF MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE İSPAT VE MUHAKEME KAVRAMLARININ VE ÖNEMLERİNİN FARKINDALIĞI

Özden ALBAYRAK BAHTİYARİ

Y. Lisans Tezi

Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi
Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. A. Cihan KONYALIOĞLU

2010

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Y.LİSANS TEZİ

8. SINIF MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE İSPAT VE MUHAKEME KAVRAMLARININ VE ÖNEMLERİNİN FARKINDALIĞI

Özden ALBAYRAK BAHTİYARİ

ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2010

Yrd. Doç. Dr. A. Cihan KONYALIOĞLU danışmanlığında Özden ALBAYRAK BAHTİYARİ tarafından hazırlanan bu çalışma 05.05.2010. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ *imza :*

Üye : Prof. Dr. Ahmet IŞIK *imza :*

Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Cihan KONYALIOĞLU *imza :*

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Y. Lisans Tezi

8. SINIF MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE İSPAT VE MUHAKEME KAVRAMLARININ VE ÖNEMLERİNİN FARKINDALIĞI

Özden Albayrak BAHTİYARİ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. A. Cihan KONYALIOĞLU

Birçok matematikçi matematik eğitiminin öneminde hem fikirdirler fakat ispatın eğitimde kullanımının gerekli olup olmadığı hakkında kesin bir yargı yoktur.

Bu veriye göre sekizinci sınıf öğrencilerinin mevcut matematik eğitimi ve matematik eğitiminde ispatın önemi hakkındaki görüşleri belirlenmeye çalışıldı. Bu amaçla İzmir' deki farklı ilköğretim okullarındaki öğrencilere bir anket uygulanmış ve konu hakkındaki görüşleri istatistiksel olarak değerlendirilerek belirlenmiştir.

Sonuç olarak; bu çalışma, hala teknik ve fiziki imkanlar bakımından okullarımızın yetersiz olduğu veya bu imkanların etkili bir şekilde kullanılmadığını göstermiştir. Ayrıca öğrencilerin bir çoğunun ispatın anlamından, gerekliliğinden, matematiksel gelişimleri açısından öneminden emin olmadıkları ve buna ilaveten ispat ve muhakeme açısından yeterli deneyimlere sahip olmadıkları da tesbit edilmiştir.

2010, 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: matematik eğitimi, ispat, muhakeme

ABSTRACT

MS Thesis

THE AWARENESS IN PROOF AND REASONING CONCEPTS AND THEIR IMPORTANCES IN MATHEMATICS EDUCATION OF THE EİGHT CLASS

Özden Albayrak BAHTİYARİ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics Education

Supervisor : Asst. Prof. Dr. A. Cihan KONYALIOĞLU

Most of the mathematicians are all of one mind in importance of the mathematics education but it is not clear if the use of proof during education is essential or not. According to data, a research was carried out to clarify the opinion of the eight class students to the present math education and importance of proof in math education. For this aim, a questionnaire was applied to the students from different primary schools in İzmir and their opinion at issue was determined and evaluated statistically.

Finally, this study showed that technical and physical possibilities are still insufficient in our schools or not used actively. Moreover, it was determined that most of the students are not aware of the meaning and necessity of proof and importance of proof in terms of mathematical improvments and addition to these they have not enough sufficient experience about proof and cognizance.

2010, 68 pages

Keywords: mathematics education, proof, reasoning

TEŞEKKÜR

Tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. A. Cihan KONYALIOĞLU'na, tez çalışmam kapsamında yürütülen anket uygulamasında yardımcı olan başta İzmir İl Milli Eğitim Müdürlüğü olmak üzere, İbni Sina İ.Ö., Boğaziçi İ.Ö., Fevzi Çakmak İ.Ö., Mustafa Urcan İ.Ö. ve 80. yıl Eşrefpaşa İ.Ö. okulları müdür ve öğretmenlerine ve sınav komitesinin değerli üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Özden ALBAYRAK BAHTİYARİ
HAZİRAN 2010

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bireyleri hayata ve üst düzey öğrenime hazırlamada; akıl yürütme, eleştirel düşünme ve problem çözme önemli zihinsel becerilerdir. Bu becerilerin gelişmesinde matematiğin önemi tartışılamaz. Bu nedenle matematik öğretiminin bu becerilerin geliştirilmesini sağlayacak etkililikte olması gerekir.

Bugün matematiğin gelişim sürecine baktığımızda bu zihinsel becerilerin geliştirilmesinde her zaman geçerli bir yöntem ya da yaklaşımdan bahsetmek olası değildir. Bunu işlenen konu, öğrencinin ilgi ve yetenek düzeyi, öğretim aşaması, öğrencinin hazır bulunuşluk seviyesi gibi bir çok etken belirler.

Matematik eğitiminin temel amaçları arasında; matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminoloji ve dili doğru kullanabilecek, model kurabilecek, modelleri sözel ve matematiksel ifadelerle ilişkilendirebilecek, araştırma yapma, bilgi üretme ve kullanma gücünü geliştirebilecek, mantıksal tüme varım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecek bireyler yetiştirmek gibi öğrencilerin matematiksel düşünme ve muhakeme becerilerinin kazanımına yer veren hedefler vardır (http://iogm.meb.gov.tr). Ayrıca akıl yürütme becerisinin kazanılması ve geliştirilmesi üzerinde de önemle durulmuştur.

Matematiksel düşünmenin gelişimi eğitim sistemlerinin daha ileri eğitim sistemlerine uyum sağlamasında temel bir dayanak noktasıdır. Matematiksel düşünme, üst düzey düşünme becerilerini içermektedir. Bir matematiksel durum için açıklanacak olursa; matematiksel düşünme için matematikçilerin teoremleri nasıl ispatladıklarını anlamanın ötesinde, bu ispatın yapılabilmesi için nasıl tahminde bulunduklarını anlamak gerekmektedir. Bir problemle karşılaşıldığında problemin cevabının ne olduğunu bulmaktan öte, problemin çeşitli boyutları ile ele alınarak incelenmesi matematiksel düşünceyi gerektirmektedir. Matematiksel düşünme süreçleri üzerine yapılan araştırmalar ve bilişsel psikoloji, düşünme şekillerinin yapılandırılmasında pek çok yolun olduğunu göstermiştir (Yeşildere ve Türnüklü 2007).

Birçok matematikçi ve matematik eğitimcisi muhakeme ve ispatı matematiğin kalbi olarak tanımlamaktadır (Senk *et al.* 2009). Öte yandan, öğrencilerin matematik eğitiminde ispatın öneminin farkında olup olmadıkları tam manasıyla bilinmemektedir. Fakat matematiksel ispatın, öğrenciler için zor konulardan biri olduğu genel bir kanıdır.

Özellikle son yıllarda matematik öğretimine verilen önemin artmasıyla birlikte matematik öğretiminin nasıl daha iyi gerçekleştirilebileceği sorusuna yanıt aranmaya çalışılmış ve bu doğrultuda da birçok yeni ve etkili öğretim yöntemleri araştırılmıştır. Bu bağlamda matematiksel muhakeme ve ispat süreçlerinin önemi de sıkça vurgulanmıştır (Edwards 1997; Tall 1998; Yeşildere ve Türnüklü 2007; Hanna 2008).

1.1. Düşünme

Geniş anlamda Aristoteles'in öne sürdüğü biçimiyle, insanı hayvandan ayıran belirgin öznitelik: Duyum ve izlenimlerden, tasarımlardan ayrı olarak usun bağımsız ve kendine özgü eylemi; karşılaştırmalar yapma, ayırma, birleştirme, bağlantıları ve biçimleri kavrama yetisi. Usun bu eyleminin ürünü düşüncedir (www.tdk.gov.tr).

Genel olarak düşünceyi açıklamada davranışçı ve bilişsel olmak üzere iki ana yaklaşımdan bahsedilmektedir. Davranışçı yaklaşım düşünceyi bir ürün ya da sonuç olarak; bilişsel yaklaşım ise bir süreç olarak ele almaktadır.

Düşünme sürecini aşağıdaki gibi kabaca sekiz basamağa ayırmak mümkündür (www.ilkogretim-online.org.tr 2009).

- Kavramsal oluşum- tek tek birimlere ilişkin bilgileri organize etmek ve bu bilgiyi bir etiketle birleştirmek. Kavram, nesnelerin insan zihninde olgunlaşmış şekli olarak tanımlanabilir.
- Kural oluşumu- kavramlar arasında ya da içindeki ilişkiyi tanımlamak.
- Kavramak- eski bilgilerle yeni bilgileri ilişkilendirerek anlamlar geliştirme ya da anlama.
- Problem çözme- bir çözüm geliştirmek amacıyla karmaşık ya da zor durumları analiz etme.
- Karar verme- elde edilen alternatifler içinden seçme süreci.
- Araştırma- bir ya da daha fazla hipotezi doğrulamak ya da onaylamak amacıyla incelemek.
- Oluşturmak- yazılı, müzikal ya da mekanik bir ürün geliştirmek.
- Sözel ifade- diğer kişilerle konuşmak.

Foulquie (1994), düşünmeyi düşünme biçimlerinin bir bütünü olarak görmeyi tercih etmiştir. Bu düşünme biçimlerini ise temelde somut ve soyut düşünce olarak kategorize etmiştir. Somut düşünce; yasanmış tecrübelere başvurarak karmaşık gerçekleri ortaya koyar. Soyut (Kavramsal) düşünce ise; ana karakterleri verir; özel ya da bireysel özellikleri dışarıda bırakır. Soyut düşünce somut verilerin işlenmesi sonucu oluşur. Bu nedenle düşünce somuttan soyuta ve soyuttan somuta bir devinim içerisindedir (Foulquie 1994).

Bunların dışında Foulquie (1994), sezgisel düşünme, çıkarımsal düşünme, tümevarımcı düşünme, tümdengelimci düşünme, hipotetik-dedüktif düşünme, işlemsel düşünme ve kendine dönük düşünmeyide düşünme biçimleri olarak sınıflandırmıştır.

Morgan'a göre (1993), insanlar uyanık oldukları zamanın büyük kısmında da düşünmektedirler. Düşünme, çevremize ilişkin bilginin işlenmesi demektir. Morgan düşünmeyi sözel, kavramsal, mantıksal ve mantıksız düşünme olmak üzere dört sınıfta incelemiştir. Bunlardan kavramsal düşünmede; kavram, cisimlerin bazı ortak ve genel özelliğini ya da niteliğini temsil eden simgesel bir yapıdır. Öğrenme birer kavram örneğidir. Kavram oluşturma yeteneği insanların nesneleri sınıflamalarına olanak sağlar. Renk kavramı ile cisimleri renklerine göre ayrılabilir, sınıflandırmalar yapabiliriz. Seçilen özellik, sınıflamanın temeli olan kavramı oluşturur. Kavramların sayısı sonsuz olduğundan, sayısız sınıflandırmalar da söz konusu olacaktır. Sözel düşünme; ilke olarak, kavram adları için kelimelere gerek yoktur. Ancak, elbette kavramları öğrenme ve bunlara ad koyma süreçleri vardır. Bu nedenle, kavramsal düşünme çoğu kez sözel düşünmeye dönüşür. İmgelerle yapılan düşünme, başkalarına aktarılmak istenildiğinde, kavramlar kelimeye dönüşürler. Bu durumda sözel düşünme söz konusudur. Yine mantıksal düşünme; belli mantık kuralları izlenerek gerçekleşen düşünmeye mantıksal düşünme ya da uslamlama denir. Ancak her zaman bu kuralları izlemek zor olduğundan, mantıksal düşünme de güç bir iştir.

Yaratıcı düşünme ise; buluşçu, yenilik arayan ya da eski sorunlara yeni çözümler getiren ve özgün düşüncelerin ortaya çıkmasını sağlayan bir düşünme biçimidir. Zeka araştırmalarında, Guilford (1950) yaratıcı düşünmeyi üç önemli faktörle ilişkili bir özellik olarak tanımlamıştır. Bu özellikler: akıcılık, esneklik ve orijinallikτir. Bunlardan; akıcılık, problem için uygun birçok alternatif çözüm geliştirme becerisidir**.** Esneklik, problem çözümünde yaklaşımları değiştirme becerisidir. Örneğin her biri farklı bir strateji gerektiren matematik problemlerinin çözümünde mekanizmayı değiştirme becerisi gibi. Orijinallik ise yeni ya da özel çözümler geliştirme becerisi olarak tanımlanır. Buna ek olarak, Guilford (1950) iki düşünme tipi arasında önemli bir ayrım yapmıştır. Yakınsak düşünme, basit ve belli bir cevabı doğrudan izleyecek düşünmedir. Örneğin bir faiz problemi hesaplamasında bir doğru cevap vardır. Iraksak düşünme problemin dışında çok farklı yönlerde ilerlemesidir. Örneğin, bir dakikalık sürede, bir tenis raketinin olası tüm kullanımları sorulduğunda, alternatif kullanımlarını da ortaya çıkarmak için geniş düşünülmesi gerekir. Guilford (1950), yaratıcı problem çözmenin ve yaratıcılığın, açıkça ıraksak düşünme ile ilişkili olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle yaratıcılık genellikle ıraksak düşünmenin test edilmesiyle ölçülür. Eleştirel düşünme: Problemi, kanıtları ve çözümleri mantıksal ve sistematik olarak inceleyerek sonuçların değerlendirilmesidir.

1.2. Matematiksel Düşünme ve Muhakeme Süreci

Çok genel olarak, matematiksel tekniklerin, kavramların, yöntemlerin açıkça ya da dolaylı olarak problemin çözümünde uygulanmasına matematiksel düşünme diyebiliriz.

Ridgway (2007)'in tanımına göre matematiksel düşünme, ihtiyacınız olduğunda her zaman orada olan zihne alışmayı geliştirmektir; daha sonra bakabileceğiniz bir kitap değildir. Schoenfeld (1992)'in tanımına göre, matematiksel düşünme, matematiksel bakış açısının gelişmesidir. Matematikleştirme ve özetleme işleminin değerlendirmesi ve onları uygulamaya eğilimli olunması, iş araçlarıyla becerinin gelişimi ve yapıyı anlama hedefine hizmette bu araçların kullanımıdır.

Matematiksel düşünme denildiğinde akla matematiksel bir durum içinde, belli bir sonuca ulaşmak için matematiksel kural ve prosedürlerin etkin şekilde kullanımı gelebilir. Oysa matematiksel düşünme, problemlerin çözümünde açık olarak veya olmayarak matematiksel süreçlerin uygulanmasıdır. Bir problemin çözümü özelleştirme, genelleme, tahmin etme, hipotez üretme, hipotezin doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünme becerilerini gerektiriyorsa, matematiksel düşünme gerçekleşecektir. O halde matematiksel düşünmenin sadece içinde sayıların ve soyut matematiksel kavramların yer aldığı durumlarda değil, günlük yaşamın içinde de gerçekleştirilebilecek bir düşünme biçimi olduğu söylenebilir (Yeşildere ve Türnüklü 2007).

Matematiksel düşünme; matematikte mantıksal çıkarımları, matematikte problem çözmeye yardımcı düşünme yollarını, matematiksel sorulara ilişkin çalışmalar için düşünme yolları bileşenlerini uygun şekilde bir araya getirmeyi, matematiksel fikirleri korumak ve anlamak için matematiksel yaratma gücünü kullanmayı içerir.

Muhakeme, bir başka deyişle usavurma ya da akıl yürütme, bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma sürecidir. Bir konuda muhakeme yapabilenler, o konuda yeterli düzeyde bilgi sahibidir ve yeni karşılaştığı durumu tüm boyutlarıyla inceler, keşfeder, mantıklı tahminlerde, varsayımlarda bulunur, düşüncelerini gerekçelendirir, bazı sonuçlara ulaşır, ulaştığı sonucu açıklayabilir ve savunabilir (Umay 2003).

Muhakeme, çeşitli düşünme tarzlarını içeren bir etkinliktir. Yukarıdaki niteliklerine bakıldığında kolayca görülebileceği gibi, eleştirel düşünme ve yaratıcı düşünme olmadan muhakeme gerçekleştirilemez. Bir başka deyişle muhakeme, ancak düşünmenin ileri basamaklarında ortaya çıkan bir beceridir. Bu bakımdan muhakeme mantıksal bir yolla bir şeyler hakkında düşünme süreci olarak tanımlanabilir, görüş ve düşünceler mantıksal düşünmeye dayalıdır. Muhakeme anlamında düşünme, doğruluğuna inandığımız bir veya birkaç önermenin bizi ne gibi bir başka önermenin doğruluğuna inanmaya zorladığını veya doğruluğuna inandığımız bir önermeye ne gibi başka önermelerin doğruluğunu delil olarak gösterebileceğimizi araştırma anlamına gelmektedir (Pilten 2008).

Webster (1982)'de muhakemeyi bilinen ya da varsayılan gerçeklerden anlam çıkarma ve mantıklı ve tutarlı düşünme yeteneği olarak tanımlar. Bu tanımı matematik eğitimine uyarlarsak matematiksel düşünme; matematikte bilinen gerçeklerden ya da varsayımlardan anlamlar veya sonuçlar çıkarma ve mantıklı ve tutarlı düşünme yeteneği olarak ifade ederiz (Mansi 2003).

Muhakemeyi genel olarak tümevarım ve tümdengelim muhakemesi şeklinde ikiye ayırmak mümkündür.

Tümdengelim: Bilinen gerçek varsayımlardan bir sonuca ulaşmaktır.

Tümevarım: Tersine, özel olaylar alınarak genel sonuçlar oluşturulmasıdır. Geçmiş deneyimlerin temelinde doğru gibi gözükür fakat kesinlikle doğru olacağının garantisi yoktur. Tümevarım, günlük hayatımızda sıklıkla yer aldığından oldukça önemlidir.

Edwards ise muhakeme için formal ispattan önceki vatan benzetmesini kullanır (Edwards 1997). Muhakeme matematiksel kesinliği kuran ve aranan hedefi destekleyen konuşma düşünme ve eylem yolarını içerir. Başka bir ifadeyle öğrencilere formal ispat yapmaları için yol gösteren matematiksel düşünmedir. Öğrenciler ispatlama ve muhakeme yetenekleriyle her günkü matematiksel aktiviteler arasında bağlantı kurabilirler. Bu günlük matematiksel aktiviteler içinde düşünme aktivitelerini Edwards (1997) beş gruba ayırmıştır. Bunlar;

1. Örüntüleri fark etmek ve inşa etmek
2. Örüntüleri tanımlamak
3. Tahmin etmek
4. Tümevarımsal düşünme
5. Tümdengelimsel düşünme

Öğrenciler kural ya da örüntülerin hala geçerli olup olmadığını görmek için özel örnekler denediğinde tümevarımsal düşünmeye başlar. Düşüncelerinin temelinde varsayımlarının doğruluğunu örnek göstererek kanıtlama vardır. Örneğin iki çift sayının toplamı daima bir çift sayıdır teoremini ispatlarken çeşitli sayıları deneyerek kendi doğrulamasını uygulayabilir. Sık sık tümevarımsal düşünme kesinlik hissine neden olur. Bununla birlikte öğrenciler varsayımlarının doğruluğunu ispatlamak için tümevarımsal düşünmelidirler. Bu finaldeki düşünme eylemi ispattan önceki adımdır. Öğrenciler matematiksel aksiyom ve teoremlerin temelinde yer alan tümdengelimsel şekilde düşünmeye başladıklarında varsayımlarının doğruluğunu göstermek için bir yol bulacaklardır (Edwards 1997).

1.3. Problem Çözme ve Muhakeme Süreci

Problem, zihni karıştırması nedeniyle karşılaşan birey tarafından çözme isteği uyandıran ve ilk defa karşılaşılması nedeniyle de standart bir çözüm yolu bulunmayan, sadece çözmeye çalışan kişinin sahip olduğu bilgi birikiminin doğru şekilde kullanılması sonucu çözülmesi mümkün olan sorun olarak tanımlanabilir (Türnüklü ve Yeşildere 2005).

Oldukça yaygın biçimde kabul edilmektedir ki matematiğin ana unsuru; problem çözme ve onun gerektirdiği süreçtir. İnsanları, karşılaştıkları problemlerin çözümüne götüren bu düşünme süreci, hem gündelik hayatta hem de tüm bilim dallarında kullanılmaktadır. İlköğretimin temel amacı; bireyleri hayata ve üst öğrenime hazırlamaktır. Her iki amacın gerçekleşmesi için gerekli zihinsel beceriler; etkili akıl yürütme, eleştirici düşünme ve problem çözmedir (Özsoy 2005).

Problem çözme; genel olarak bilimsel bir konuda apaçık (net olarak) tasarlanan fakat hemen ulaşılamayan bir hedefe varmak için bilinçli olarak araştırma yapmaktır. Matematikte problem çözme ise, matematiğin yapısı gereği sorunun zihinsel süreçlerle (akıl yürütme) gerekli bilgileri kullanarak ve işlemleri yaparak ortadan kaldırılmasıdır (Özsoy 2005).

Muhakeme, problemin sonucuna nasıl ulaşıldığı ve sonucun doğruluğunun değerlendirilmesiyle ilişkilidir. Dolayısıyla muhakemenin, problem çözmenin bir parçası olduğu ve problem çözme ve muhakeme süreçlerinin de kendi aralarında ilişkili olduğu söylenebilir.

İlköğretim matematik programları ve değerlendirme standartları ile ilgili son çalışmalar, matematiksel problem çözme gücünü, muhakeme etme becerilerini geliştirmeye önem vermekte, bu becerileri gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin çözümünde kullanabilme gücünü geliştirmeyi öncelikli hedef olarak belirlemektedir (Altun ve Arslan 2006).

1.4. İspat

İspat kelime manası olarak İngilizce ve Türkçe sözlüklerde aşağıdaki şekilde yer almaktadır.

1. Bir gerçeğin veya bir şeyin doğruluğunun ya da varlığının gösterilmesi

2. Bir iddianın doğruluğunu gösterilmesi

3. Bir iddianın iyi, geçerli veya doğruluğunu test etme sürecidir (Oxford American Dictionary 2004).

Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama, tanıt (www.tdk.gov.tr 2009).

Aslında ispatlar matematikte olduğu kadar günlük hayatta da her gün kullanılırlar. Araştırmaların hemen hepsinde vardır. Mantıkta, dil bilimde, hukukta, sosyolojide, psikolojide, vb. Bu bilim dallarında ispat kavramı bir ifadenin varlığını veya doğruluğunu göstermek için değil ifadenin doğru veya iyi veya geçerli olup olmadığını test etme süreci olarak kullanılır (Calude and Marcus 2004).

Matematiksel ispatların ise iki amacı vardır. Biri bir hipotezin mantıklı adımların sıralanışı ile bir sona götürdüğünü göstermektir. İkincisi ise varsayımlardan sonuçlara neden ve nasıl gidildiğini anlamaktır. Bu iki amaç birbirinden bağımsız olabilir. Öyle ki mantıklı bir ispat anlaşılır, anlaşılır bir ispat mantıklı olmayabilir. İnandırıcılık ispatın öğrencilere düşünmelerini destekleyici bağlantılarını yapan bir şeklidir (Tall 1998).

1.4.1. Matematiksel anlama ve ispat süreci

Tüm bilimsel çalışmalarda birtakım sonuçlara ulaşmak, ulaşılan sonuçların doğruluğunu kanıtlamak ortak amaçtır. Empirik bilimlerde ulaşılan sonuçlar betimleyici veya açıklayıcı genellemeler biçiminde önermelerle dile getirilir. Bilim adamı ulaştığı genellemelere hipotez gözüyle bakar; onları yeni gözlem veya deney verilerine giderek yoklar; bulduğu verilerin hiç birine ters düşmeyen hipotezlerini, ilerde yanlışlanma olasılığını da göz önünde tutarak, doğru sayar (Yıldırım 1996).

Bu şekilde gözlem veya deneye dayalı verilerle matematiksel olarak kesin bir sonuca ulaşılabilir mi?

Önceki Mısırda Babil'de ve Çin'de aslında görsel kanıtların çoğu matematikteki oluşumları kanıtlamak ya da haklı göstermek için yeterliydi. Fakat klasik yunan matematikçiler matematiksel doğru ya da yanlışı açıklamakta kullanılan bu yoldan memnun değildi. Onlar diğer bilimlerde olmadığı gibi matematiğin sonsuz varlıklarla ve sayılarla ilgili olduğunu gördüler. Bu tür durumlarla ilgilenen matematik; istisnasız her örneği doğrulayan durumları çözebilmeyi umar. Bununla birlikte ancak soyut bir varlığın teke yakın gösterimleri gözlenir. Sadece soyut bir varlığın sonsuz sayıda mümkünü vardır ve hepsi sadece ölçümsel hatalıdır. Böylelikle Yunan matematikçilerin gerçeğin deneysel doğrulamalara bağlılığı konusunda başarıları anlaşıldı. Öyle ki deneysel doğrulamalarda her zaman şüpheye yer vardır (Hanna and Barbeau 2009).

Matematik öğretmenleri matematiksel anlamanın zorluğunun farkındadırlar. Matematikçiler arasında en çok tartışılan konulardan biri öğrencilerin matematik algıları ve matematik anlama düzeyleridir. İspatın geçerliliği hakkında en yaygın görüş ise açıkça ve etkili bir şekilde düşünmeye yardım etmesi ve anlamayı sağlamasıdır. Matematikçiler ispatları sadece söz dizimsel kanıtlamalar olarak görürler. Öncelikle kavramsal ve bir teknik yaklaşım olarak ispattan söz edilir. İspatlar problemleri çözmek için matematiksel dizinleri gösterme yolu ve bir probleme çözüm için önerilen çözümün gerçekten bir çözüm olduğunu açıklamaktadırlar. Rav (1999), genel bir taşıma sistemindeki yollar şebekesinde teoremleri otobüs durakları olarak görür (Hanna 2000a). Manin (1992)'de; aksiyomlar, tanımlar, teoremler matematik boşluğunda duran kavşaklardır, ispatlar ise yollar, patikalar, otobanlardır (Hanna 2000a). Her güzergah kendi geziş kalitesine sahiptir öyle ki, bu "a" noktasından "b" noktasına gitmekten daha önemlidir (Hanna 2000a).

Matematikçileri ilgilendiren bir hipotezin doğruluğu değil "neden" doğru olduğudur. Sadece hipotezin doğruluğunu değil de neden doğru olduğu anlayışını verirse ispatın değeri artacaktır. En iyi ispat teoremin anlamının anlaşılmasında matematikçilere teoremin sadece doğruluğunu değil aynı zamanda neden doğru olduğunun anlaşılmasında yardım eder. Buna rağmen ispat okul matematiğinde öğrenciler tarafından genellikle bir resmiyet ve sık sık anlamsız ve öğretmen için yapılan bir aktivite olarak algılanır. Sonuç olarak bir çok müfredatta ya da programda ispat öğrenciler için açıklayıcı bir güç ve kişisel anlama ve kavrayış içermez (Knuth 2002).

Bununla birlikte tanım, aksiyom ve teoremlerden oluşan matematik sisteminde ispat; bir iddianın doğruluğunu ve neden doğru olduğunu açıklamanın ötesinde ispatlanmış teorem sonuçlarıyla yeni teoremler yaratmak ve keşfetmek için de kullanılmaktadır.

1.4.2. İspat çeşitleri

1.4.2.a. Doğrudan ispatlar

Tümevarım'la ispat

Tümevarımla ispat merdiven çıkmayı öğrenmek gibidir. Merdivene adımını atmayı öğrenmek gerekir her şeyden önce. Ardından her basamaktan bir sonraki basamağa nasıl çıkılacağı öğrenilmeli. İşte merdiven çıkmak bu kadar basit (Anonim 2005).

Verilen bir ifadenin tüm doğal sayılar için doğru olduğunu ispatlamakta kullanılan oldukça pratik bir yöntemdir. Bu yönteme ifadenin önce 1 için (daha doğrusu, ifadenin doğruluğunun başladığı doğal sayı için) doğru olduğu gösterilir. Daha sonra n doğal sayısı için doğru olduğu farz edilir ve n+1 doğal sayısı için doğru olduğu gösterilir. Bu da herhangi bir doğal sayı için doğruysa sonraki için de doğru olacağını ispatladığından bütün doğal sayılar için geçerli bir ifade olduğu anlamına gelecektir. Bu yöntem genelde sonsuz sayıda domino taşlarının dizilmesine benzetilir. n. taşın devrilmesi bir sonraki yani n+1. taşın da devrilmesi anlamına geleceğinden taşların tamamı devrilecektir. Tabi ki yine n=1 için doğruluğunu söylemek lazım. Bunun için de ilk taşı devirmeniz yeterli olacaktır.

Teorem: n€Z olmak üzere;

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$ dir.

İspat : Önce ifadenin n=1 için doğru olduğunu göstermeliyiz:

$$\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$$

ki bu 1'den 1'e kadar olan sayıların toplamı demektir ve doğrudur.

Kabul:

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

ifadesi doğru olsun. Aynı ifadenin (n+1) için doğru olduğunu gösterelim yani

$$1+2+3+4+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Doğru olduğunu kabul ettiğimiz ifadenin her tarafına (n +1) ekleyelim:

$$1+2+3+4+...+n+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=\frac{n^2+n}{2}+\frac{2n+2}{2}$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

n için doğru iken n +1 için de teorem doğrudur.

Tümdengelim'le ispat

Doğru olduğu gösterilmek istenen ifade, direk olarak, doğruluğu kanıtlanmış başka ifadelerden veya aksiyomlardan türetilir. Türetmek için, bu ifadeleri mantık kuralları çerçevesinde doğrudan birleştirme yapabiliriz. Sonuç olarak bir teorem elde edilir.Örneğin

$X^2-3x+1<0$ için $x>0$ olduğunu ispatlayalım.

$X^2-3x+1<0$

$3x>x^2+1$($x^2\geq 0$ olduğundan)

x›1/3
olur ki bu da x›0 olduğunun ispatıdır.

1.4.2.b. Dolaylı ispatlar

Aksine örnek'le ispat

Bazen bir ters örnek ispat için yeterli olmaktadır.
Fermat bir çok sayı üzerinde deneyerek n'ler doğal sayı olmak üzere

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

ifadesinin bir asal sayı olduğunu söyler. Bu ifade çoğu sayı için doğru olmasına rağmen n=4294967297 için ifadenin asal sayı olmadığını Fermat'tan yüzyıl sonra Euler gösterir.

Çelişki ile ispat

Bu yöntem "reducto ad absurdum" olarak da bilinir. Doğruluğu ispatlanacak ifadenin yanlış olduğu kabul edilerek başlanır. Yanlışlığı kabul edilen ifade ispatlanırken bir çelişkiye varılır ve sonuç olarak bu ifadenin aslında doğru bir ifade olduğu ispatlanmış olur. Örneğin 2'nin kare kökünün bir rasyonel sayı olmadığını ispatlayalım.

İfadenin tersini kabul edip çelişkiye varalım. Yani $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayı olsun deyip çelişkiye varalım. $\sqrt{2}$ rasyonel; öyleyse rasyonel sayı tanımı gereği (a,b$\in$z ve b$\neq$o olmak üzere,a$\div$b şeklinde ifade edilen sayılara rasyonel sayı denir.) (b≠0) ve a ve b'nin tek ortak çarpanı 1 olmak üzere $\sqrt{2}$, a/b şeklinde yazabiliriz.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

Burada a^2 'nin $2b^2$ 'ye eşit olması onun bir çift sayı olduğunu gösterir. Öyleyse a da bir çift sayıdır. Bu durumda çift sayı tanımından (n bir tamsayı olmak üzere 2n olarak yazılabilen sayılara çift sayı denir.)

$a = 2c, c \in Z$

diyebiliriz. Şimdi yerine yerleştirelim:

$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2c^2$

İşte bu sonuç b^2'nin ve dolayısıyla b'nin bir çift sayı olduğunu söyler. Başta 1'den başka ortak çarpanları olmadığını kabul ettiğimiz a ve b'nin 2 gibi bir katları olduğu sonucu ortaya çıkar. Halbuki a ve b nin bölenleri yoktu, o halde bu bir çelişki olup √2 sayısı irrasyoneldir. Benzer şekilde √3, √5 gibi diğer köklü sayıların irrasyonel sayı olduğu gösterilebilir.

1.4.3. Buluşsal ispatlar

Mantıkçı, sembolist ve sezgici gelenekler matematiğin kesin, yanlışlanamaz, evrensel ve soyut olduğunu düşünürken, bu üç geleneğin karşısına matematiğin yanlışlanabilir, uygulamalı, sosyal ve bireyler tarafından inşa edildiğini ileri süren bir hareket çıkmıştır. Bu hareket yarı deneyselcilik adını taşımaktadır. Çünkü yarı deneyselcilik, matematiğin fizik gibi keşfedilmeyen şeyleri görmezden gelen bilimler kategorisine girmediğini savunmuştur. Matematik pratik deneyimlerden doğan ve beslenen ve daima büyüyen ve değişen bir insan eseridir, düzeltme ve sorgulanmaya açıktır, gerçeklik iddiaları "eleştiri ve spekülasyonla, ispat ve red mantığıyla kestirme" ye dayanır. Polya'ya (1986) göre, matematik hem gösterim hem de yaratımdır (Handal 2003). Yaratım, tahmini içeren aklın kabul edebileceği muhakemeden oluşurken, gösterim, ispatlarla başarılabilir. Matematiksel yöntemler sonuçta mükemmel değ illerdir ve kesin olarak doğruluğu ispatlanamazlar. Matematiksel doğru kesin değildir. Zamana ve yere bağlıdır . Zamana bağlıdır çünkü bilimsel bilgi bugün için doğrudur. Teorik varsayımlar değiştikçe ilerde yanlışlanabilir. Öklit ve Ptolomeus'un teorileri gibi. Matematiksel yöntemler yere bağımlıdır. Çünkü farklı bireyler ve farklı kültürler matematiksel bilgiyi oluşturmanın farklı yollarına sahiptirler (Handal 2003).

Keyfi bir ispat üretebilmek için ispatın kendi içinde tutarlı olması gereklidir. Diğer taraftan bir sonuç olarak eksiksiz olabilmesi için deneysel de olmalıdır. Geçerlik şartlarını hafifletirsek deneysel ispat teknikleri kabul edilebilirdir. Deneysel çalışma uzay çağında olasılıkların araştırılmasıdır. Daha ilgi çekici olsalar da deneysel ispatlar formal ispatlardır (Rubin *et al.* 2005).

Bazı eğitimciler sınıf içerisinde deneysel yöntemlerde ispatın ikincil bir yeri olduğunu söylerler. Görünüşte daha az eğlenceli ve faydalı yetenekler yapısal ispatlara ihtiyaç duyarlar. Simpson (1995) yılında mantık yoluyla ve akıl yürüterek yapılan ispatları ayrıştırır (Hanna 2000a). Ona göre ilki öğrencilerin mevcut zihinsel yapısıyla bağlantı kuramadıkça öğrenciler için yabancıdır. Bu yüzden azınlık bir kısım öğrenci tarafından anlaşılacaktır. Fakat ikinci yolla heuristik elemanlar kullanılarak daha fazla öğrenciye hitap edilebileceğine inanır (Hanna 2000a).

1.4.4. Görselleştirme ve görsel ispat

Uzun yıllardır bilgisayar grafikleri ile yapılan görselleştirmeler standart matematiksel yollarla çözülemeyen bir çok zor matematik problemlerinin çözümünde matematikçiler için iyi bir araç olduğunu ispatladı. Ama görselleştirme matematik için yeni bir sözcük değil. Matematik tarihi görselleştirmeler bakımından zengindir. Örneğin Schwarz'ın 1865 te Gergonne problemi için yaptığı şekil gibi. Schwarz eliptik sınır problemlerinin varlığında analiz ve geometride bir çok problemin çözümünde kullanılan yeni minimal yüzeyleri keşfetti (Polthier 2002).

Görelleştirme terimi geçmiş on yıllardan beri araştırmalarda çeşitli yollarla kullanılmaktadır (Presmeg 2006). Piaget ve Inhelder'e baktığımızda insan zihninde uzaysal bir şekil yaratmaya rehberlik etmek için görsel bir şekil belirir . Matematikte görselleştirme çalışmaları 70'lerin sonları ve 80 lerde psikolojik temelli olarak başlamış ve bu araştırmalarda nitel ve nicel yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemler özellikle insanların görsel ve matematiksel düşünmelerine rehberlik etmiştir. 90'lar da görselleştirme çalışmaları matematik eğitiminin önemli bir parçası haline geldi. Teknolojinin etkisi ve özellikle bilgisayardaki gelişmeler odak noktası olmaya devam etti. 2000'lerde ise görselleştirme temelli semiotik (semiotic) varsayımlar ve teoremler ortaya çıktı (Presmeg 2006).

Francis'e göre birçok matematikçi matematiksel araştırmalarda bilgisayar grafiği kullanmaktadır. Francis yine matematiğin Bourbaki'nin kısır biçimciliğinden uzaklaşacağını ve bilgisayar donanımlı bilgi devriminin en sonunda akademik matematiğe egemen olacağını söyler (Hanna 2000a).

Bununla birlikte bazı araştırma sonuçlarına göre (Francis 1996; Palais 1999) örneğin bilgisayar grafikleri ile yapılan görselleştirmelerde sadece bilgileri değiştirip nesneleri kullanmak değil aynı zamanda bilgisayar kullanmadan ulaşılmaz olan nesnelerin özelliklerini test etmenin de mümkün olduğu ortaya çıkmıştır. Buradan görselleştirmenin kesin ispatlara yol gösterebileceği sonucuna ulaşılsa da görsel ispatların formal ispatlar olarak kabul edilebilir olduğu söylenmemiştir.

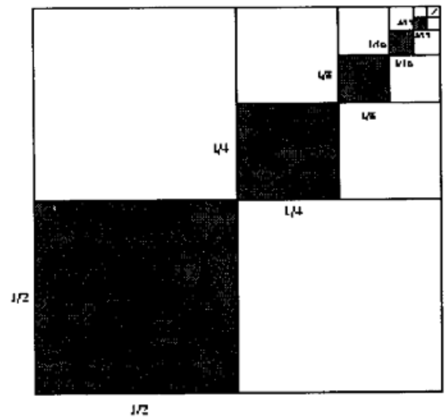
Borwein and Jörgenson (1997)'de yaptıkları çalışmalarında görsel ve mantıksal gösterim arasında birçok farktan bahsederler. Oysa matematiksel bir ispatın geleneksel bir gösterimi vardır. Borwein and Jörgenson; mantıksal bir gösterimin geleneksel gösterimle benzer bilgileri içerebileceğini fakat bu bilgiyi açık bir yolla göstermeyeceğini işaret ettiler (Hanna 2000a).

Bir kaç görsel ispatın varlığı kabul edilmiş ve kelimesiz ispatlar olarak yayınlanmıştır. Şekil 1.1'de See serisinin ispatı bunlardan biridir. Şekil 1.1'de görülen karelerin alanları toplamı

$1/4 + 1/16 + 1/64 + . . . = 1/3$

$1/4\ (1+1/2^2 +1/2^4+\ldots.+1/2^{2n} +\ldots\ldots)=1/4\ \left(\frac{1-(1/4)^{2(n+1)}}{1-1/4} \right)$

$\lim_{n\to\infty}$ $(1/4\,(1+1/2^2+1/2^4+\ldots+1/2^{2n}+\ldots\ldots))=1/3$ olur.



Şekil 1.1. See serisinin ispatı

Ayrıca kabul edilebilir görsel ispat için üç şart önerilir:

1. Güvenilirlik: İspatın temeline varılan yolların güvenilirliği ve sonucun her denetlemeyle değişmemesi

2. Tutarlılık: Diğer bilinen sonuçlarla, ispatlarla tutarlı olması

3. Tekrar: İspatın doğrulanabilirliği veya diğerlerine gösterilebilirliği.

Bu kriterlerin sadece görsel ispatlara değil aynı zamanda genel ispatlara da uygulanıp uygulanmayacağı merak edilebilir. Sonuç olarak kabul edilebilir ve kabul edilemez görsel ispatların ayrılması sağlanamadı. Borwein and Jörgenson matematikte görsel muhakeme ve düşünmeyle önemli araştırmalar yaparak bazı görsel temsillerin ispatı oluşturabileceğini ifade ettlier (Hanna 2000a).

Fischbein (1982) çalışmasında ispatı gösterilen bir teorem için öğrencilere ispatı anladıklarını söyleseler bile başka örnekler de kullanılarak ispatı ya da teoremi çağrıştırıcı, test edici sorular sorulması gerektiğini gözler. Çünkü diğer örneklerle ilgili öğretilen bilgiyle ilgili bir karışıklık olduğunu belirtir.

1.4.5. İspatın fonksiyonları

Matematikçiler açıkça bir ispattan açıklamadan daha çok şey beklerler. En iyi ispat ispatlanan teoremin sadece gerçek olduğunu değil aynı zamanda neden gerçek olduğunu anlamamıza yardım eder. Böyle bir ispat hem ikna edici hem de diğer keşiflere neden olabilir bir ispattır. Böyle ispatlar; sonuçların birbirleriyle bağdaştırılarak matematiğin sistemleştirilmesine veya matematiksel bir bilginin biçimlenmesine katkıda bulunabilirler (Hanna and Barbeau 2009).

Hanna (2000a) bir ispatın fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde sıralar:

1. Doğrulama; bir ifadenin doğruluğuyla ilgilidir.
2. Açıklama; ifadenin neden doğru olduğu kanıtlanır.
3. Sistemleştirme; aksiyomlardan, ana kavram ve teoremlerden oluşan bir sistem içinde çeşitli sonuçlar düzenlenir.
4. Keşif; yeni sonuçlara ulaşmak.
5. İletişim; matematiksel bilginin iletimi.
6. Bir deneysel teorinin inşası.
7. Açıklama; bir varsayımın sonuçlarını ya da bir tanımın anlamını açıklar.
8. Taze bir bakış açısıyla iyi bilinen gerçekleri yeni bir çerçevede kaynaştırır.

1.4.6. İspatın Eğitimdeki Rolü

İspat çoğunlukla en çalışkan öğrenciler tarafından bile dirençle karşılanan bir konudur. Birçok öğrenci bir ispatın yapılışını neden öğrenmeleri gerektiğini anlamaz ve birçoğu onu mecburiyet olarak görür. Matematikteki ispat kavramı başlangıçta muhakeme ve doğrulama olarak ele alınır. İspat hakkındaki yorumları sorulduğunda öğrencilerden genel olarak “ispattan nefret ediyorum”, “böyle açıkça görülen bir şeyi ispatlamanın bir anlamı yok”, ”teoremleri ortaya atan ve ispatlayan matematikçilere güveniyorum” gibi cevaplar alınır. Bununla birlikte birçok öğretmen de öğrencilerin neden ispat yapmayı öğrenmesi gerektiğini, ispat yaparken neden zorlandıklarını ya da öğrencilerin ispat yapma becerilerini geliştirmek için nasıl yardım edeceklerini anlamazlar.Bir matematik öğretmeni öğrencileri ispat yapmaları için hazırlamakla sorumlu olmalıdır (Mansi 2003).

Matematikte ispat, matematik eğitiminin önemli parçalarından biridir. İspat konusunda yurt dışında bir çok araştırma yapılmış olup bu konu ile ilgili pek çok yayına rastlanmaktadır. Ülkemizde ise bu konu ile ilgili olarak yeterli düzeyde araştırmanın yapılmış olmadığı görülmektedir (Özer ve Arıkan 2002).

Bu nedenle ispat konusunda düşünürken özellikle eğitimimizde ispatın yeri, önemi, farkındalığı açısından öğrencilerin ispat konusundaki olumsuz düşüncelerinin yaygın olup olmadığı, olumsuz düşüncelerin nedenleri, ispat kavramının farkında olup olmadıkları, matematik başarıları ve muhakeme ve ispat yeteneği arasında bir ilişkinin olup olmadığı genel olarak akla gelen sorulardır.

Bununla birlikte ispat konusunda matematik eğitiminde iki önemli noktanın varlığından söz edilebilir; ispatın doğruluğu ve doğruluğu gösterilen ispatın öğrencilere anlaşılır ve etkili bir şekilde anlatılması. Tanımı gereği ispat; bir ifadenin doğruluğunu ve neden doğru olduğunu anlatır. Bu noktada ortaya çıkan sorun öğrencilerin matematiksel anlamalarını artırmak için ispatın sınıfta nasıl daha anlaşılabilir ve uygulanabilir yapılabileceği ve farklı yollar ve farklı materyallerle sınıf ortamının nasıl düzenleneceğidir. O halde ispatın matematik eğitiminde rolü nedir ve ne olmalıdır?

Acaba öğrenciler matematik dersindeki ifadelerin doğru olduğunu nasıl anlarlar? Yapılan araştırmada birçok öğrencinin verdiği cevaplara göre matematik bilgilerinin nereden geldiğini düşünmediğini göstermiştir. Bunun nedeni öğrencilerin muhakeme ve ispat deneyimlerinin yetersizliğinden kaynaklanmaktadır. Bu yanıtlar matematik derslerinde ispat ve muhakemenin önemli bir rolünün olmadığını akla getirir (Knuth *et al*. 2009).

Bir ifadenin gerçekliğini ya da bir kuralın doğruluğunun ispatlanması için geliştirilen metotlar öğrenciler için önemlidir. Bu metotlar olmadan onlar kendi yanlışlarını da göremeyeceklerdir. Hersh (1993) bir ispatın ikna edici ve açıklayıcı olması gerektiğini ve 1990 yılında Hanna'da sadece ispatlayan ispatlardan ziyade açıklayıcı ispatların kullanımını önermiştir (Flores 2006). Her iki ispatta geçerlidir; fakat açıklayıcı bir ispat doğru olduğu öne sürülen teoremin nedenini kapsayan matematiksel özellikler ve matematiksel fikirleri içermenin ötesinde mantıksal bir temel sağlar (Flores 2006).

Öğrencilere bir varsayımın neden doğru olduğunu açıklamak için hem öğretmenin hem de öğrencilerin etkili iletişim becerilerine sahip olması gerekir. Kullanılacak olan soru teknikleri ve problemler öğrenciler arasındaki yansıtıcı etkileşimi geliştirecektir.Yani ispat yapmazdan önce öğrencilerin iletişim becerileri üzerinde durulur. Ayrıca öğrencilerin ispat becerileri haklılığını savunma, doğrulama becerilerine dayanır. Bu nedenle bu beceriye de öğretmenlerin dikkat etmesi gerekir (Mansi 2003).

İspat matematikçiler tarafından matematiksel disiplin ve çalışmaların merkezinde kabul edilir. Buna rağmen ispatın matematik eğitimindeki yeri sürekli tartışmalara sebep olmuştur. Bazıları ispatın matematik müfredatında artık yeri olmadığını savunmaktadır. Diğerleri ise matematikten ispatı çıkarmanın matematiğin en temel ve özel uygulama ve öğretisinden yoksun bırakmak olduğunu savunur. Bu tartışmalar ispatın matematik eğitiminde son günlerde keşfedilişinden kaynaklanır. Bununla birlikte NCTM (2000) göre ispat ve muhakeme ilköğretimde keşfedilmesi gereken konulardır. NCTM basitçe öğrencilerin varsayımları formüle etmeleri, varsayımlar arasında bağlantı kurmaları, bu varsayım ve bağlantıları açıklamaları gerektiğini ve kendi fikirlerini doğrulamaları gerektiğini, düşünme yeteneklerini ilköğretimdeki matematiksel deneyimleriyle geliştirmeleri gerektiğini vurgular. NCTM nin öngörüsüne göre bu tavsiyelere uyan öğrenciler liseye başladıklarında formal ispat yapmak için en iyi şekilde hazırlanmış olacaklardır. Bununla birlikte bilinmektedir ki öğrencilerin birçoğu lisede ispat yapmak için yeterli düzeyde değildir. Bunun yanı sıra öğrencilerin liseye gitmeden önce gerekli matematiksel muhakeme becerilerine sahip olamadıkları da gözlenir. İspat yapmak muhakeme ve anlamayı gerektirir. Bu da öğrencilerin matematiği anlamalarını ve matematikte başarılı olmalarını sağlamak açısından önemlidir (Mansi 2003).

Altıparmak ve Öziş 2005'te ispat ve muhakeme kavramlarının gelişimi üzerine yaptıkları çalışmada NCTM standartları doğrultusunda ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin genellemeler hakkında varsayım oluşturabilecek ve karşılaştıkları varsayımları değerlendirebilecek düzeyde olması gerektiğini vurgulamaktadırlar. Bu sınıflardaki öğrenciler varsayımları ve iddiaları değerlendirebilmeli, matematiksel iddiaları formüle ederek tümdengelimli ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilmeli, muhakeme becerilerini geliştirmeli ve sürdürmelidir (Altıparmak ve Öziş 2005).

Bununla birlikte Mansi 2003'te öğrencilerin ilk 8 yılda kendi varsayımlarını yapabilir, test edebilir, arındırabilir, kendi varsayımlarını test etmek için somut materyaller kullanabilir düzeye gelmesi gerektiğini ve aslında öğrencilerin yaşıtları tarafından oluşturulan varsayımları tartışarak muhakeme etmeyi öğrenebileceğini dile getirmiştir. Öğrenciler örnek ve karşıt örnek geliştirmeyi öğrenmeli ve gruplara, kendi arkadaşlarına veya sınıfa sunarak muhakemelerini açıkça belirtebilmeli. Lisede ise artık öğrenciler kendi düşüncelerini açıkça yazarak ifade edebilmeli. Öğretmen ve öğrencilerin "neden" diye sorma alışkanlıkları olmalı. Bu kritik soru öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin gelişmesi için önemli ve gereklidir (Mansi 2003).

NCTM (2000) ilköğretim öğrencilerinin formal ispat yapması gerekmediğini bunun yanı sıra lise düzeyinde ise açık bir şekilde ispat kavramını vurgulamıştır. İlköğretim öğrencileri formal ispat için hazır olmasa da ispat kavramının sadece lise düzeyinde öğretilebilir bir kavram olmaması için matematiksel düşünme ve muhakeme becerilerinin matematik eğitiminin en başından geliştirilmesi vurgulanmıştır. Yine NCTM (2000)'ye göre matematiksel muhakeme yeteneğinin varlığı ilkokulda oluşur. Sonuç olarak bu becerileri liseden önce edinen öğrenciler lise ve ileri düzeyde daha ileri seviyedeki ispatlarda zorlanmayacaklardır. Bu yıllarda da gerçek dünya problemlerinin kullanılması ispatın geliştirilmesine yardımcı olabilmektedir.

Gerçek dünya problemleri öğrencilerde matematiksel kavram ve ilişkilerin öğretilmesine yardımcı olur (Hodgson and Riley 2001). Sonuç olarak öğrenciler bu matematiksel becerilere sahipse lise öğretiminde ispat için daha iyi hazırlanmış olacakları söylenebilir.

Verilen örüntü ödevleri veya sayısal ödevler (üç tek sayının toplamının tek sayı olması gibi) öğretmenlere; öğrencilerin matematiksel ispatlama ve doğrulama yeteneklerini geliştirmeleri için yeterli fırsatları verecektir. Bu gibi fırsatlar öğrencilerin matematikte ispat kavramını anlamalarına yardım ederek daha sonraki yıllarda bu kavramı daha iyi kullanmalarını sağlar. Örüntüleri genelleştirme ilköğretim matematik müfredatının temel öğelerindendir. Çoğunlukla öğrencilerin örnek temelli muhakeme kullanarak tanımladığı genellemeler doğrudur; fakat öğrenciler sık sık muhakemenin sınırlarını anlamakta zorlanırlar. Onlara yardım etmenin bir yolu birkaç olaydan genelleştirilen ifadelerin yanlış genellemeler olduğunu görebildikleri ödevler vermektir (Knuth *et al*. 2009).

1.4.7. İspat öğretimi açısından NCTM standartları

Hanna (2000b) ispatın 20-30 yıl önce olduğu gibi günümüzün lise müfredatında öyle yaygın olmadığına ve bu gerilemeye sebep olan üç önemli neden olduğuna inandığını açıklamıştır. Bunlardan biri NCTM'nin 1989 da yaptığı müfredat değerlendirme standartları ile yapılan tavsiyelerdir. Hanna'nın iddiasına göre NCTM standartlarında ispat; sadece üniversitede matematikle ilgili bölümler okuyacak olan öğrencilerin öğrenmesi gereken bir kavram olarak vurgulanmıştır. Yine Hanna'nın iddiasına göre ikinci neden ise birçok eğitimcinin uygulamalı teknikleri öğrencilerin doğrulama ve muhakeme becerilerinin geliştirilmesi için daha kullanışlı görmeleri ve ispatı gereksiz görmelerinden kaynaklanır. Hanna'nın son iddiası ise formal ispat öğretiminin yerini matematiksel yazılımlar ve bilgisayarların almış olmasıdır. Başka bir ifade ile eğitimde teknolojik materyallerin artışı formal ispatın kullanılmadığını hissettirir.

NCTM (1989)'da standartların temelini oluşturan ilkeleri;

1. Matematiksel güç teknolojik bir toplumda bütün öğrencilerin emrinde olmalı,

2. Matematik problem çözer,iletir,mantıklı düşündürür,bir gösteri sporu değildir,
3. Matematik öğrenimi öğrencilerin gerçek problemlerden,anlamlı deneyimlerden bilgiyi inşa ettiği aktif bir süreçtir,
4. Bir müfredat geniş bir kapsam,çeşitli bağlamlar ve planlı ilişkileri içerir,
5. Değerlendirme bütün matematik programlarının ve eğitimin gelişmesi içindir,

şeklinde açıklar. Ayrıca bütün öğrencilere matematiği öğrenmeleri için fırsatlar verilmesi gerektiğini belirterek bunun için 5 hedef belirlemiştir (NCTM 1989).

1. Matematiğin değerini öğrenmek
2. Matematiksel düşünmeyi öğrenmek
3. Matematiksel iletişimi öğrenmek
4. Matematiksel yeteneklerine güvenmek
5. Matematiksel problem çözücüleri olmak

İspatsız bir matematik öğretimi bütünüyle matematiksel teori ve uygulamalarının düşünmeden yapılması demektir. Öğrenciler bir ispatın ne olduğunu öğrenmeden matematik öğrendiklerini söyleyemezler. Matematiğin obje ve metodları arasındaki bütün disiplinleri göstermeden matematiğin doğasını anlayamazlar. İspatı anlamak için tanımlanabilmeli ve bir dizi anlaşılabilir düşünme sürecinden sonra öğrenciler mutlaka ispat çalışmalı ve ispatlar yaratabilmeli. İspat öğretimi öncelikle sınıfta geçen zamanın faydalı ve verimli kullanılmasıyla ilgilidir. Matematik yapmayı yararlı, eğlenceli ve bir insan eylemi olarak gören matematikçiler, fikir geliştirme ve problem çözme becerileri arasında bir seçim yapmak zorunda değiller. Sonuçta önemli olan ispat merkezli eğitimin deneysel ya da olmayan yaklaşımlarla matematiksel anlamayı artırmasıdır (Hanna 2000b).

NCTM (2000) standartları yüksek kaliteli bir okul matematik programı için üç derece-düzey grubu (ilköğretim 1-5. sınıflar, ilköğretim 6-8. sınıflar ve ortaöğretim 9-12. sınıflar) oluşturup ortaöğretimin sonuna kadar aşağıda beş ana başlık altında verilen hedefleri belirlemiştir.

Problem çözme standartları

1. Problem çözerek yeni matematiksel bilgiler inşa eder.
2. Matematikte ve diğer alanlarda ortaya çıkan problemleri çözer.
3. Problem çözmek için birçok uygun strateji uyarlar ve uygular.
4. Matematiksel problem çözme sürecini düşünür ve kontrol eder.

Muhakeme ve ispat etme

1. Muhakeme ve ispatı matematiğin temel görüşleri olarak kavrar.
2. Matematiksel hipotezler araştırır ve yaratır.
3. Matematiksel iddiaları değerlendirir ve ispatlar geliştirir.
4. Muhakeme çeşitlerini ve ispat metotlarını seçer ve kullanır.

İletişim standartları

1. İletişimle matematiksel düşünmeyi birleştirir ve düzenler.
2. Matematiksel düşüncelerini açık ve tutarlı bir şekilde yaşıtlarına, öğretmenlerine ve diğerlerine iletir.
3. Diğerlerinin matematiksel düşünce ve stratejilerini değerlendirir ve analiz eder.
4. Matematiksel fikirleri tam ve kesin olarak ifade etmek için matematik dilini kullanır.

Bağlantılar için standartlar

1. Matematiksel fikirler arasındaki bağlantıları kullanır ve kavrar.
2. Matematiksel fikirlerin birbirine nasıl bağlandığını ve tutarlı bir bütün oluşturmak için birinden diğerinin nasıl inşa edildiğini anlar.
3. Matematik dışındaki alanlarda matematiği sezer ve kullanır.

Temsil standartları

1. Matematiksel fikirleri kaydetmek, düzenlemek, iletmek için temsilleri kullanır yaratır ve kullanır.
2. Problem çözmek için matematiksel temsiller arasında dönüşüm yapar, seçer ve kullanır.
3. Fiziksel, sosyal ve matematiksel olayları açıklamak ve biçimlendirmek için temsilleri kullanır.

Matematik eğitimi ile ilgilenen ve dünyadaki çalışmaları izleyenlerin çok iyi bildiği gibi "National Council of Teachers and Mathematics" (NCTM) matematik eğitiminde uluslar arası düzeyde kabul gören bir merkezdir (Umay vd 2006).

Bu bağlamda NCTM'nin (2000)' de yayınlanan ve bütün sınıflarda muhakeme ve ispatın geliştirilebilmesi için tavsiyelerde bulunmuştur. Buna göre öğrenciler; matematiğin temel görüşleri olarak ispatı ve muhakemeyi kavramalı, matematiksel varsayımlar oluşturabilmeli, matematiksel fikirleri ve ispatı değerlendirebilmeli ve geliştirebilmeli, ayrıca çeşitli muhakeme çeşitlerini ve tümevarım tümdengelim gibi ispat metotlarını seçip kullanabilmelidirler.

NCTM ilköğretimin ikinci kademesini yani ilköğretimin 6, 7, 8. yıllarını ise öğrencilerin hayatlarında önemli bir dönüm noktası olarak görmektedir. Bu yıllar boyunca öğrenciler matematik öğrenicileri olarak kendileri hakkındaki fikirleri pekiştirirler. Öğrenciler kendi motivasyonları, ilgileri, görüşleri ve matematik yeteneklerinin farkına varırlar. Bu görüşler ilerdeki matematiğe olan yaklaşımlarını etkileyecek ve onlara ilerde kariyer ve kişisel fırsatlar olarak geri dönecektir. İlköğretimin ikinci kademesindeki öğrenciler eğer matematik sınıflarında destek ve cesaret bulurlarsa matematiğe bağlanacaklardır. Böylelikle bulunan yeteneklerini ortaya çıkarıp kullanabilecekler, varsayımlar ortaya atıp ispatlayabilecek, kuramsal düşünebilecek, soyutlamaları kavrayıp genelleştirebileceklerdir (http://www.nctm.org/standards 2009).

Sonuç olarak NCTM (2000)'de matematiği anlamak için ispat kavramının gerekli olduğunu vurgulayarak ispatın önemini açıkça belirtmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Matematiksel ispat yapma evrensel olarak kabul edilmiş kural ve yöntemleri olan, matematiğin temel süreçlerinden biridir (Moralı vd. 2006). Bununla birlikte matematiksel ispat bazılarına çekici, bazılarına ise anlaşılmaz görünür (Tall and Barnard 1997). Bu bağlamda özellikle son yıllarda matematik eğitiminde ispat ve muhakeme kavramlarının öneminin artmasıyla birlikte ispat, muhakeme ve matematiksel düşünme ile ilgili yurt içi ve yurt dışında birçok çalışma yürütülmüştür. Bu bölümde tez konusu dahilinde incelenen bazı araştırmalar kronolojik olarak sunulmaktadır.

Genelleştirme ve ispat matematikteki rolleriyle tanımlanır; fakat okulda ispat, keşif ve keşfin ötesinde yayınlanan sonuçlarda kendi anlamının dışında farklı formlarda olabilmektedir. Bilgisayar temelli microworldler öğrencilere örüntüleri fark edip tanımlamak, genelleştirip formüle etmek ve matematiksel varsayımları oluşturup test etmek için fırsatlar sunar (Edwards 1997). Edwards (1997)'de yaptığı çalışmada dönüşüm geometrisinde yansımaları düzenleyip keşfetmek için bir microworld kullanan bir grup ilköğretim ikinci kademe ve lise öğrencisinin çalışmalarını inceleyerek öğrencilerin varsayımlarını hazırlanan bir öğrenme haritasına göre tanımlamıştır. Tanımlanan informal ispat için genel bir plan ve formal ispat öğretiminden önce ise muhakeme becerisinin kazanımını önermiş ve ispatın öğreniminde sosyal desteğin rolünü tartışmıştır.

İspat matematiğin en temel konularından biridir. Fakat genellikle öğretmek için zordur (Tall 1998).

Tall (1998)'deki çalışmasında ispatın farklı formlarının farklı bağlamlarda uygun olduğunu, bireye özel gösterim formlarına bağlı ve bu formların kavram gelişiminin farklı basamaklarına uygun olduğunu önermektedir. Bu formal gelişme basamağında öğrencilerin formal çıkarım ve tanımlarla kuralları benimsemeleri için iki farklı strateji tanımlayarak, her iki stratejinin de başarılı olabileceğini fakat; bir çok öğrencinin bilişsel ispatlarda zorlandıklarını ortaya koymuştur. Sonuçta formal ispatın sadece bazı öğrenciler için uygun olduğu görüşünü savunarak ispatın bazı formlarının ancak çoğu öğrenci için uygun olabileceğini belirtmiştir. Özellikle fiziksel gösterimler gibi ispatın basit formlarının belki de bütün öğrenciler için uygun olacağını açıklamıştır.

Hanna (2000a)'da yaptığı çalışmada ispatın matematik eğitimindeki rolünü, müfredat açısından ispatlamanın faydalarını araştırarak, dinamik geometri yazılımlarının üç uygulaması olan buluşsal, keşif ve görselleştirmenin ispat öğretiminde kullanımını ve ispatın önemi açısından faydalarını tartışmış ve bunun içinde dinamik geometri yazılımlarının kullanımında deneysel araştırmaları kullanmıştır.

İspat matematik teori ve uygulamalarındaki önemine rağmen lise matematik müfredatında önemini yitirmiş gibi görünmektedir (Hanna 2000b).

Hanna (2000b) çalışmasında ispatın müfredattaki bu azalışını a) İspatın sadece üniversite eğitimi düşünen öğrencilere öğretilmesi gerektiği fikri b) Formal ispatların artık öğretilmemesi gerektiği, çünkü muhakeme ve ispat yeteneklerini geliştirmek için deneysel tekniklerin çok daha kullanışlı olduğu c) Formal ispatlar yerine sınıf ortamında dinamik görsel yaklaşımların tercih edilmesinin daha faydalı olacağı görüşü olarak üç nedene dayandırmıştır. Sonuç olarak ise ispatın; matematik eğitiminin bütün basamaklarında deneysel teknikler ve görsel dinamik yaklaşımlarla uyumlu olarak önemli bir parçası olması gerektiğini vurgulamıştır.

Web de interaktif matematik mevcuttur (Caprotti and Oostdijk 2001). Caprotti ve Oostdijk (2001) yaptıkları çalışmada etkileşimli bir internet sitesinin formal ispatları nasıl okunabilir ve çalıştırabilir yapacağını göstermek istemişler ve bunun için de formal ispat objeleri ve Extensible Markup Language (XML) teknolojisini kullanmışlar ve sonuç olarak özellikle matematiksel ispatlardaki doğru etkileşimi desteklemek için geliştirdikleri son yöntemleri göstermişlerdir.

Farklı ülkelerde yapılan araştırmalarda öğrencilerin matematiksel ispat yaparken zorlandıkları ortaya çıkarılmasına rağmen birkaç araştırmacı üniversite öğrencileri üzerinde matematiksel ispat şemalarının tanımlanmasıyla ilgili çalışmışlardır. Bu bilgi özellikle lise ve üniversite öğretmenleri için faydalıdır (Recio and Godino 2001). Recio ve Godino (2001) çalışmalarında Cordoba üniversitesindeki öğrenciler üzerinde matematiksel ispat şemaları ve bu şemalarda matematiksel ispatların farklı geleneksel bağlamlarda günlük yaşam, deneysel bilimler, profesyonel matematik, mantık ve matematiğin temelleri ile ilişkilerini incelemişlerdir. Sonuç olarak bu öğrencilerin formal matematiksel ispatta zorlandıklarını saptanarak bu zorluğu gidermeye yardım etmek için ispatın farklı geleneksel anlamarlıyla ilgili önerilerde bulunulmuştur.

Amerika'daki son reform hareketleri ispatın lise matematiğindeki rolü ve doğasındaki önemli değişiklikleri içermektedir. Değişiklikler lise matematik müfredatında ispat yoluyla yapılan zengin öğrenme ve deneyimlerle bütün öğrencilerin yararlanması için tasarlanmıştır (Knuth 2002). Knuth (2002)'un çalışması 17 lise matematik öğretmeninin ispat hakkındaki görüşlerinden oluşmaktadır. Sonuçlar öğretmenler için "herkes için ispat" fikrinin öğretilmesinin zor olacağını ve öğretmenlerin sadece bazı öğrencilerin ispat öğrenimi için uygun bulduğunu ve öğretmenlerin ispatı matematik çalışmak ve iletişim için bir araç olmaktan ziyade bir konu olarak gördüklerini ortaya koymuştur. Bu bulguların ışığı altında matematik öğretmenlerine önerilerde bulunulmuştur.

Özer ve Arıkan (2002) M. Miyazaki'nin 'Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics, Educational Studies in Mathematics 41, 47-68, 2000' çalışmasını ve bu konuda yapılan diğer bazı çalışmaları da göz önüne alarak bir araştırma yürütmüş ve bu çalışmada lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerini tespit ederek öğrencilerin ispat düzeylerini incelemişlerdir. Ayrıca çalışmada yer alan öğrencilerin materyal kullanarak ispat yapıp yapamadıkları gözlenmiştir. Bu amaçla 2000-2001 eğitim öğretim yılında toplam 110 öğrenci üzerinde araştırma yapılmıştır. Ayrıca 3 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Açık uçlu sorulara öğrenciler tarafından verilen yanıtlar sonucunda aldıkları puanlar gruplandırılarak tablolar oluşturulmuştur. Görüşme sırasında farklı zamanlarda 3 öğrencinin verdikleri cevaplar kasetlere kaydedilmiş ve bu kayıtlar yazılı görüşme metinlerine dönüştürülmüştür. Araştırma sonucunda lise 2 öğrencilerinin istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak ispat yapamadıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları saptanmıştır

Mansi, (2003)'de yaptığı çalışmada muhakeme ve geometrik ispatın matematik öğrenimi ve öğretimindeki rolünü araştırarak Piaget ve Van Hiele nin teorilerini karşılaştırma yoluyla öğrencilerin matematiksel ve geometrik muhakeme becerilerini nasıl kazandıklarını ve öğrencilerin hazır oluşları ve formal ispat oluşturmaları arasındaki bağıntıları tartışmıştır. Ve sonuçta araştırma bulgularına göre öğrencilerin liseye gelinceye kadar ispatla ilgili Van Hiele nin öngördüğü başarı basamaklarında yeterli olmadıkları görülmüştür. Daha sonra öğrencilerin matematiksel ve geometrik ispatla ilgili yanlış algılarını ve bunların ispat başarısıyla ilişkisini araştırarak öğretmen adaylarının, sınıf, ilköğretim ve lise öğretmenlerinin ispat algılarını ve bu algıların öğrencilerin ispat başarılarına etkisi tartışılmıştır. Sonuç olarak öğretmenlere öğrencilerin matematiksel ve geometrik muhakeme becerilerini geliştirmeleri, ispatı anlamaları ve başarmaları için önerilerde bulunulmuştur.

Umay (2003)'de yayınladığı ve matematiksel muhakemeyi araştırdığı makalesinde "Matematiksel muhakeme yaklaşımları nelerdir? Bireylerin matematiksel muhakeme yaklaşımları neye göre değişmektedir? Kültür farklılıkları muhakeme biçiminin değişmesinde etken midir? Kişilerin belli bir muhakeme "stili" var mıdır, yoksa hangi muhakeme yaklaşımını kullanacağı duruma göre mi değişmektedir? Herkes kendine en uygun muhakeme tarzını nasıl bulabilir?" sorularının yanıtlarını tartışmıştır.

Christou *et al.* (2004)'de yaptıkları çalışmalarında son zamanlardaki dinamik geometri yazılımlarındaki önemli gelişmelerin varsayımların doğru ya da yanlış olup olmadığını kolayca ve çabukça keşfedip geometrik konfigrasyonlarının devamlılığını mümkün kıldığını ve bu yazılımların doğası gereği deneysel-teorik haritalarla geometrik bilginin ispatlanması ve açıklamasının önemli pedagojik bir mesele haline geldiğini vurgulayarak ispatın öğretimi için matematik ve geometri yazılımlarınının gelişimindeki faydaları ve öğrenciler için ispatı nasıl daha anlamlı kılabileceklerini tartışmışlardır.

Bunun için üç sınıf öğretmeninin geometride problemleri nasıl keşfettiği ve bu yazılımlarla varsayımların oluşturulmasını ve ispatlanmasını nasıl görüp anladıkları araştırılmıştır.

Ürüne dönük düşünme, insanı diğer canlılardan ayıran en belirgin özelliğidir. Ancak her düşünce yararlıdır demek pek doğru bir varsayım olmaz. Düşüncenin yararlılığı, gereksinimlerin karşılanmasında kullanımı ve problemlerin çözümünde üretken olması ile ölçülür. Bu nitelikteki düşünmeye, kısaca Matematiksel Düşünme (MD) denir (Alkan ve Bukova Güzel 2005). Alkan ve Bukova Güzel (2005)'in bu çalışması, özellikle matematik öğretmen adaylarının MD gelişimini ölçmeye yönlendirilmiştir. Araştırma iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada deneklerin MD gelişimini ölçme amaçlı araç geliştirilmiştir. İkinci aşamada ise oluşturulan ölçme aracı deneklere uygulanmış ve onların çözüm yaklaşımları, MD ölçütlerine uygun biçimde sınıflandırılarak değerlendirilmiştir. Analiz sonuçları, genel anlamıyla deneklerin MD gelişmişliğinin düşük düzeyde olduğunu ortaya çıkarmıştır. MD'nin düzeyi bakımından gruplar arasında anlamlı farklılıklar gözlenmiştir

Umay ve Kaf (2005) araştırmalarında "İlköğretim ikinci kademe öğrencileri ne gibi kusurlu akıl yürütmeler yapmaktadır?" sorusuna yanıt aramışlardır. Araştırma, Çubuk Atatürk İlköğretim Okulu'nda okumakta olan toplam 90 öğrenci üzerinde yürütülmüştür. Verilerin toplanması için araştırma grubunda bulunan öğrencilerden, verilen dört problemi çözmeleri istenmiştir. Kusurlu akıl yürütmelerde karşılaşılan durum, öğrencilerin akıl yürütme sürecini henüz tamamlamadan sona erdirmeleri ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı, alıştıkları kalıp çözümlere yönelmeleri biçimindedir. Genel olarak, öğrencilerin zayıf akıl yürütme yüzdelerinin en yüksek düzeyde olduğu, bunu kusurlu akıl yürütme yüzdesinin izlediği; doğru akıl yürütme yüzdesinin ise en düşük düzeyde kaldığı görülmüştür. Araştırma sonuçlarında, sınıflar arasında kayda değer bir farkla karşılaşılmamıştır

Altıparmak ve Öziş (2005)'de yürüttükleri çalışmada matematiksel ispat ve muhakeme üzerinde durmuş; konuyla ilgili olarak NCTM (National Council of Teachers of

Mathematics) standartları doğrultusunda, okulöncesi, ilköğretim ve lise seviyelerinde matematiksel ispat kavramı ile ilgili bilgiler ve örnekler vermişlerdir. Okul öncesi, ilköğretim ve lise yıllarında muhakemenin gelişimi incelenmiştir. Okul öncesi dönemde sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma, sıralama kavramları çocuklarda muhakemenin oluşumu için temel kavramlardır. Bu bazda önermeler verilerek, mantıklı düşünmenin oluşması istenmiştir. İlköğretim döneminin birinci kademesinde, birey somut düşünme döneminde olduğu vurgulanarak bu doğrultuda parça-bütün ilişkileri ele alınmış ve tümevarım ilkeleri için örnekler verilmiştir. İkinci kademede ise muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri hedeflendiği ve lise yıllarının soyut düşünebilme evresi olması dolayısıyla bu yıllarda tümdengelim ve tümevarım oluştuğu hatırlatılarak bu doğrultuda ispat çeşitleri incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Moralı vd. (2006)'da yürüttükleri çalışmada, matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ne olduğunu araştırmışlardır. Öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşlerinin, ispat becerilerine ilişkin varsa sorunlarını ortaya çıkarma ve gidermede ilk adımı oluşturacağı varsayımı göz önünde tutularak veriler, geliştirilen bir ölçek ile toplanmıştır. Elde edilen sonuçlar öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik ya görüşlerinin olmadığını ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu ortaya çıkarmaktadır (Moralı vd. 2006).

Flores (2006)'in çalışması öğrencilere matematikte öğrendikleri doğruları kesinleştirme yolları sunmaktadır. Çalışma sırasında ilköğretim 6-8. sınıf (diğer sınıflarda birkaç tane öğrenci) ve öğretmenleri ile görüşülüp, öğrencilere son zamanlarda ne öğrendikleri ve öğrendiklerinin doğru olduğunu nasıl bildikleri sorularak cevaplar öğrencilerin açıklamalarına ve ispat şemalarına göre gruplandırılmıştır. Görüşülen öğrenciler üç çeşit ispatlama şeması kullanmıştır: dıştan temelli, deneysel ve analitik. Her tür için örnekler öğrencilerin açıklamaları ile ispatlanmıştır. Ayrıca öğretmenlere öğrencilerin ispat becerilerini ve matematiksel fikirlere inanmaları için nasıl yardım edeceği konusunda öneriler sunulmuştur.

Yeşildere ve Türnüklü (2007)'nün yürüttüğü araştırmanın amacı, ilköğretim sekizinci sınıftan mezun öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemektir. Araştırmada tarama yöntemi kullanılmıştır. İzmir evreninden tabakalı örnekleme stratejisi ile seçilen 20 okuldan toplanan 262 öğrencinin verileri nicel ve nitel veri çözümleme teknikleri kullanılarak incelenmiştir. Veri toplama aracı olarak on tane açık uçlu problem kullanılmıştır. Açık uçlu problemlerin analizi ile elde edilen veriler, İzmir evreninde yer alan ilköğretim sekizinci sınıftan yeni mezun öğrencilerin problem çözmede matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada ve mantıksal akıl yürütmede sorun yaşadıklarına işaret etmektedir. Bu duruma neden olan faktörler öğrencilerin verilenlerden hareketle değil öznel görüşlerine dayanarak akıl yürütmeleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak ve açıklamalar yaparak ifade edememeleri ve verilenler arasında ilişkilendirme yaparak problemleri çözmemeleri olarak özetlenebilmektedir.

Kapetanas and Zachariades (2007) yürüttüğü çalışmada öğrencilerin matematikle ilgili inanç ve tutumları ve bunların matematiksel yeteneklerine etki edip etmediği tartışılmıştır. Veriler öğrencilerin matematiğe karşı tutum ve inançlarını araştıran daha geniş bir çalışmadan alınmıştır. 10, 11 ve 12. sınıfa devam eden 1645 öğrenci üzerinde araştırma yapılmıştır. İnançlar üç faktör , tutumlar ise iki faktör başlığı altında incelenmiştir. Öğrencilerin tutum ve inançlarındaki farklılıklara okul ve cinsiyet farkları ve sosyal statülerinin etkileri ve bu beş faktörden hangisinin matematiksel yeteneklerini ve başarılarını etkilediği araştırılmıştır.

Nyaumwe and Buzuzi (2007) yürüttüğü araştırmada öğretmenlerin lise matematik müfredatındaki ispatlara karşı tutumları araştırılmıştır. Bunun için 34 matematik öğretmeninin öğrencilerin ispat performans düzeylerinin uygunluğu, negatif tutumlar, pozitif durumlar, ispat yöntemleri ve yararları olmak üzere beş ana başlık altında hazırlanan likert tipi anket uygulanmış ve görüşme yapılıp sonuçlar değerlendirilmiştir. Sonuç olarak öğretmenler bir ispat metodu olarak teknolojinin kullanımı konusunda nötr kalmışlar; fiziksel ispatları matematiksel amaçların uygulanabilirliği bakımından bir ispatlama metodu olarak görmediklerini belirtmişlerdir. Ayrıca bu veri sonuçları ülkede uygulanabilir şekilde öğretmenlerin öğrenci merkezli eğitimi nasıl gerçekleştireceğine ve geliştireceğine dair tartışılmıştır.

Öğrenci başarısını arttıran en önemli faktörlerden birisi etkili öğretimdir (Dede 2007). Bu nedenle Dede (2007)'nin yürüttüğü çalışmada, ilköğretim matematik ve sınıf öğretmenleri tarafından matematiğin öğrencilere nasıl öğretildiği belirlenmeye çalışılmıştır. Bunun için Dede (2006) tarafından geliştirilen ve araştırmacı tarafından öğretmenlere uyarlanan Likert tipindeki bir ölçekten yararlanılmıştır. Ölçek, tartışma ve araştırmaya dayalı öğretim, iletişime dayalı öğretim, çeşitli materyal ve kaynak kullanımına dayalı öğretim ve problem çözmede kullanılan yöntem ve materyaller alt faktörlerini içermektedir. Ölçek, 2005-2006 eğitim-öğretim yılı I. yarıyılında Sivas il merkezindeki 8 ilköğretim okulunda görev yapan 54 sınıf öğretmeni ve 25 ilköğretim okulunda görev yapan 46 matematik öğretmeni olmak üzere toplam 100 öğretmene uygulanmıştır. Sonuçlar, ölçeğin tamamı için öğretmenlerin puanlarının aritmetik ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık olmadığını göstermiştir.

Ridgway (2007); eğitim, sağlık, suç, sosyal değişiklik, iklimsel değişiklik gibi gerçek durumlarda ispatla muhakeme etmek doğal olarak zor olduğunu; bununla birlikte ispatın genellikle çok değişkenli ve bu değişkenler arasındaki ilişkinin nadiren doğrusal olup değişkenlerin birbirini etkilediğini dile getirmiştir. Ayrıca bilgilenmek, hızlı hareketli ticari çevrelerde iş görmek ve önemli kişisel kararlar almak için ispatı kullanmak zorunda olan insanların; bu ileri istatistiksel kavramları sağduyularının bir parçası haline getirmek zorunda olduğunu ifade etmiştir. Bunun için bu kavramları kazanmanın zorluğunu anlamaya, bu fikirleri geliştirecek müfredat eylemlerine, bu becerileri kazanıp değerlendirebileceğimiz farklı yollara ihtiyaç duyabileceğimizi ve bu nedenle çok değişkenli bilgiyi kullanarak muhakeme etmenin zorluğunu temel alıp, yine çok değişkenli bilgiyi kullanarak muhakeme etmenin gelişmesiyle oluşabilecek sonuçları keşfetmeye çalışmıştır.

İspatlar aslında yeni matematiksel teknikleri öğrencilere etkili olarak anlatır (Hanna 2008). Hanna (2008)'de yaptığı bu çalışmada son zamanlardaki araştırmalarda ispatın sınıfta kullanımının büyük bir avantaj sağladığı konusunda matematik eğitimcilerinin büyük bir bölümünün aynı görüşte olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte bu çalışma öğretmenlerin yeni tekniklerin gösteriminde ispatın potansiyelinin kullanımını ve bir çok matematik eğitimcisinin ispat öğretimi için bir çok sebep arasında bu potansiyelin önemi konusunda ittifak yapmaları gerektiğini ortaya koymuştur.

Öner (2008) çalışmasında matematik eğitimi ve CSCL (computer supported collaborative learning) literatürünü inceleyerek matematiksel ispat becerilerinin gelişmesinde CSCL araçlarından nasıl daha iyi faydalanılabileceğini tartışmıştır. Empirik ve dedüktif olarak bilinen yolları birleştiren okul matematiğindeki ispatın rolünü göstererek ispat kavramının yükselişindeki iki önemli gücü (özel bir öğrenme perspektifinden matematik eğitiminde reform yazılarındaki artışı ve dinamik geometri yazılımı olarak bilinen bilgisayar araçlarını) matematiksel ispat bağlamında tartışmıştır. Matematiksel bilginin oluşumunda toplumun önemli rolünü vurgulayarak CSCL aracı ile oluşturulan bilginin bu çalışmada sunulan ispat modeli için uygun pedagojik yaklaşım olup olmadığını araştırmış ve ispat ödevlerinde öğrencilere daha iyi destek olabilecek yazılım değişiklikleri önermiştir.

Knuth *et al.* (2009)'da ilköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin öğrendikleri matematiği doğrulamaları için ispat hakkındaki düşüncelerinin sorgulandığı bu çalışmada doğrulama yaparak kendi fikirlerini oluşturan öğrencilerin lisede ispat için hazır hale geleceği vurgulanmıştır. Bu araştırmanın amacı öğretmenlere öğrencilerin matematiksel ispatı kullanarak anlamalarını artırmak için sınıf içinde fırsatlar oluşturmalarına yardım etmektir. Bu nedenle öğrencilerin varsayımlar oluşturup ispatlama yetenekleri tartışılmış; öğretmenlere öğrencilerin bu becerilerini desteklemeleri ve matematik eğitimleri boyunca ispatı kullanarak anlamlı öğrenmeler gerçekleştirmelerini sağlamak için önerilerde bulunulmuştur.

Tall (2009)'da yaptığı çalışmada; ispatın sosyal bağlamda gelişen matematiksel bir yapı olduğunu vurgulayarak uzun yıllardır kullanılan basit terimlerle ispat için pratik bir yapı oluşturmuştur. Öyleki bu yapı; ispat ve matematiksel düşünmenin tarihsel ve kavramsal gelişiminin temelindeki ispatlama kavramını; simgecilik, biçimcilik ve somutlaştırmanın üç farklı zihinsel dünyasında tanım, küçültme ve kategorize etme yoluyla matematiksel kavramların oluşumu için farklı yollara neden olan algı hareket ve yansıma temelli olarak gelişmeye yönelik olduğunu ortaya koymuştur.

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Problem Durumu

Bu çalışmada ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatlara karşı tutumlarını, ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkında olup olmadıkları belirlenmeğe çalışılmıştır. Ayrıca öğrencilerin ilköğretim matematik müfredatında karşılaştıkları ispatları veya muhakemeleri anlamada yaşadıkları zorlukları; ispatla öğrenirken kullandıkları teknikleri yeterli görüp görmediklerini ve genelden özele (tümdengelim), özelden genele (tümevarım) muhakemelerini kullanıp kullanmadıklarını araştırmaktadır.

3.2. Sayıltılar

1. Ankete katılan öğrencilerin anket sorularına samimi cevap verdikleri varsayılmıştır.

2. Anket sorularından elde edilen bilgilerin objektif olduğu kabul edilmiştir.

3. Örneklemin evreni temsil ettiği varsayılmıştır.

3.3. Sınırlılıklar

1. Araştırma 2009-2010 öğretim yılında İzmir ilinde rastgele seçilen 5 faklı ilköğretim okulunda 8. sınıfa devam eden 340 öğrenci ile sınırlıdır.

2. Araştırma 42 anket sorusu ile sınırlıdır.

3. Araştırma bulguları, veri toplama aracı olan anketten elde edilen veriler ile sınırlıdır.

3.4. Araştırmanın Yöntemi

Araştırmada genel tarama yöntemi kullanılmıştır. Veriler örnekleme alınan öğrencilere hazırlanan likert tipi anket uygulanarak elde edilmiştir.

3.5. Evren ve Örneklem

Araştırmanın çalışma evrenini 2009-2010 öğretim yılı İzmir ilinde ilköğretim 8. sınıfa devam eden öğrenciler oluşturmaktadır. Bu çalışmanın örneklemini ise İzmir ili Konak ve Karabağlar ilçelerinde bulunan 5 farklı ilköğretimde 8. sınıfa devam eden toplam 340 öğrenci oluşturmaktadır. Anket uygulaması 2009-2010 öğretim yılının birinci döneminde gerçekleştirilmişir.

3.6. Veri Toplama Aracı ve Geliştirilmesi

Bu anketin geliştirilmesindeki ilk aşamada konuyla ilgili kaynaklar gözden geçirilmiştir. Daha sonra ispat ve muhakeme kavramları ve eğitimi ile ilgili cümleler oluşturulmuştur. Cümlelerin ilköğretim seviyesine uygun ve anlaşılır olabilmesi ve dilbilgisi kurallarına uygunluğu için Türk Dili öğretim elemanları ve ilköğretim Türkçe öğretmenlerinin görüşlerine başvurulmuştur. Böylece anket için 45 cümle yazılmıştır. Anket formu hazırlandıktan sonra ön çalışma olarak bir grup öğrenciye uygulanmış ve anketin geçerlik ve güvenirliği SPSS programında test edilmiştir. Bu bilgilerden yararlanarak geçerliliği düşük 3 madde anketten çıkarılarak 42 maddelik bir anket oluşturulmuştur.

Duyarlı ve kullanışlı olduğu için 5'li likert tipi ölçek seçilmiştir. Ölçekteki maddeler "tamamen katılıyorum", "katılıyorum", "kararsızım", "katılmıyorum", "hiç katılmıyorum" şeklinde derecelendirilmiştir. Olumlu maddeler "tamamen katılıyorum" seçeneğinden başlayarak 5 den 1 e doğru, olumsuz maddeler ise "tamamen katılıyorum" seçeneğinden başlayarak 1 den 5 e doğru puanlanmıştır. Olumlu ve olumsuz maddelerin ölçekte hemen hemen eşit bir dağılım göstermesine dikkat edilmiştir.

3.7. Geçerlilik ve Güvenirlik

Anketin güvenirliği için anket uygulanmadan önce 30 sekizinci sınıf öğrencisine bir ay arayla birer kez uygulandı. Elde edilen veriler SPSS programında değerlendirildi. Anketin geçerliliği için Kaiser- Meğer-Olkin (KMO) katsayısı ve Barlett testi sonuçları incelenmiştir. 6 bölümün KMO katsayısı ortalaması 0,685 olarak bulunmuş verilerin faktör analizi için uygun olduğu görülmüştür. Güvenirlik katsayısı Cronbach alfa ise 0,7010 olarak saptanmıştır.

3.8. Anket Soruları

Bölüm I

(Öğrenci matematik becerilerini hangi aşamada görüyor.)

1. Matematik problemlerinin çözümünde uygulama yaparken zorlanıyorum.
2. Matematiksel hesaplamaları yaparken eğleniyorum.
3. Matematik problemlerini çözerken zorlanıyorum.
4. Matematik formüllerini hatırlamakta ve aklımda tutmakta zorlanmıyorum.
5. Matematiksel sembollerde zorlanıyorum.
6. Matematik dersinde başarılı olduğuma inanıyorum.

Bölüm II

(Öğrenci ispat veya muhakeme kavramının farkında mı?)

1. Matematik problemlerini çözmek, formülleri ve kuralları uygulamak anlamındadır.
2. Matematik öğrenmek ve başarılı olmak isteyen biri formülleri ve kuralları ezberlemek zorundadır.
3. Bir soruyu çözdüğümde aynı örneği farklı bir yolla çözmeyi deniyorum.
4. Bir soruyu çözdükten sonra bulduğum sonucun mantıklı olup olmadığını sorguluyorum.
5. Bir problemi çözerken sonuca götüren basamakları ve izlenen kuralların nedenini anlamaya çalışırım.
6. Bir soruyu çözdükten sonra yeni sorular ekleyerek soruyu geliştirmeyi denerim.

7. Bir soruyu çözdükten sonra çözüm basamaklarını tekrar kontrol ederim.
8. Öğrenciler matematiksel ifadelerin ispatlanmadan da doğru olduğunu kabul etmelidirler.
9. Matematikte sadece örnekler yardımı ile bir ifadenin doğru olup olmadığını anlayabiliriz.
10. Matematik problemlerini çözmek için her zaman bir kurala veya formüle ihtiyacımız vardır.

Bölüm III

(Öğrenci matematik eğitiminde İspatın öneminin farkında mı?)

1. Okulda öğrendiğimiz matematik doğru düşünmeme yardım eder.
2. İspatlar öğrencileri mantıklı bir şekilde düşünmeleri için eğitir.
3. İspatlanan ifadeler öğrencinin matematiksel düşünme yapısını anlamasını geliştirir.
4. Öğrenciler matematikte ifadeleri ispatlamak için cesaretlendirilmeli.
5. İlköğretim kitaplarında(müfredatında) matematiksel ifadelerin ispatlarına kesinlikle yer verilmeli.
6. İspat yapmak zaman kaybıdır.
7. Eğer matematikte bir ifade açıkça doğruysa ispatlanmasının bir anlamı yoktur.
8. Öğretmen sınavda soracağı için bir ifade ya da kuralın ispatını öğrenirim.
9. Öğretmenim ders içinde soru sormayacağı için bir ifade ya da kuralın ispatını öğrenmem.
10. Örnek ya da problem çözümlerinde gerekli olduğuna inanmadığım için bir ifade ya da kuralın ispatını öğrenmem.
11. İspatları anlamanın bana yeni fikirler vereceğine, örneğin problem çözerken yardım edeceğine, inandığım için bir ifade ya da kuralın ispatını öğrenirim.
12. İspatları neden yapmamız gerektiğini anlamıyorum: derste gördüğümüz bütün iddialar daha önceden ünlü matematikçiler tarafından zaten kanıtlanmış.
13. Bir ifadeyi ispatlamak aslında bir problemi çözmek gibidir.

Bölüm IV

(Öğrenci matematik eğitiminde ispatları kavramada zorlanıyor mu?)

1. Matematiksel iddiaları ispatlarken eğleniyorum.
2. İspatları anlamada genellikle zorlanıyorum.
3. İspatlar öğrenciler için matematiği zorlaştırır.

Bölüm V

(İspatlı Matematik eğitiminde kullanılan teknikler yeterli mi?)

1. Matematiksel ifadeleri ispatlamak için farklı teknolojiler (bilgisayar, tepegöz, projeksiyon) kullanılmalıdır.
2. Cebirsel ifadeler karolarla veya grafiklerle gösterilmelidir.
3. Geometrik şekillerin alanları (paralel kenar, daire gibi) karton veya kağıtlarla görselleştirilerek daha anlaşılır hale getirilmelidir.
4. Görsel materyaller (örüntü blokları, hacim takımları gibi) kullanılmalıdır.
5. Matematik sınıfımızda veya okulumuzda matematiksel ifadeleri anlamlandırabilmemiz için bütün materyaller elimizin altındadır.
6. Sadece öğretmenler tahtada matematiksel ifadeleri ispatlamalıdır.
7. Bir sonucun örnekle gösterildiğini görmek, o sonucun neden doğru olduğunu anlamama her zaman yardımcı olduğu için diğer görsel veya benzeri materyallere ihtiyaç duymuyorum.

Bölüm VI

(Öğrenciler ispatı kullanmada hangi aşamadadır?)

1. “Bazı insanlar göremez.” İfadesinin doğruluğu “Bütün insanlar görür.”ifadesinin yanlış olduğu gösterilerek ispatlanabilir.
2. Ana önerme: Sağlıklı beslenme ve spor kalp krizi riskini azaltır.

Yan önerme: Ali sağlıklı beslenen bir sporcudur.

İfadelerinden “Ali’nin kalp krizi geçirme riski düşüktür.’’ Sonucu çıkarılır.

3. 0=0(çift sayı)

0+2=2(çift sayı)

0+2+4=6(çift sayı)

0+2+4+6=12(çift sayı)

…………………..

0+2+…+2n=(çift sayı)

Bu ifadelerden; “bütün çift sayıların toplamı yine bir çift sayıdır” sonucuna ulaşılır.

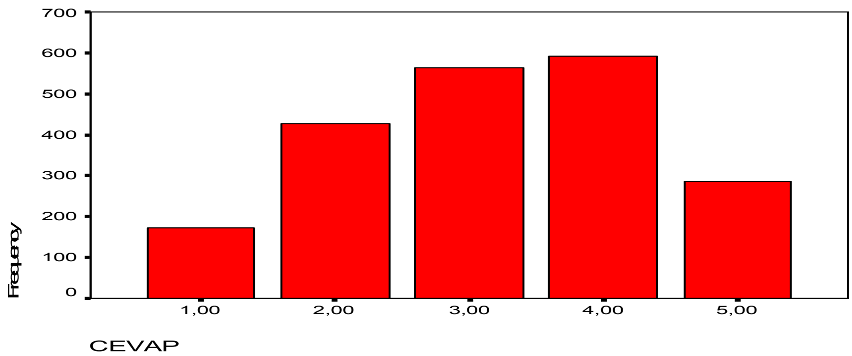
4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Anket soruları altı bölümden müteşekkildir. Anket soruları Ek-1'de verilmiştir. Veriler SPSS programında analiz edilmiştir.

4.1 Frekans Analizleri

4.1.1. Bölüm1'e ait frekans analizi

Bölüm 1 altı sorudan oluşmaktadır. Öğrencilerin matematik için vazgeçilmez olan problem çözme, hesaplama yapma gibi becerileri ispat ve muhakeme öğretimi için önemlidir. Bu nedenle birinci bölümde genel olarak öğrencilerin istenen bazı matematik becerilerinin hangi aşamada olduğunu saptamak amaçlanmıştır.



Şekil 4.1. Bölüm 1'deki cevaplara ait frekans değerleri

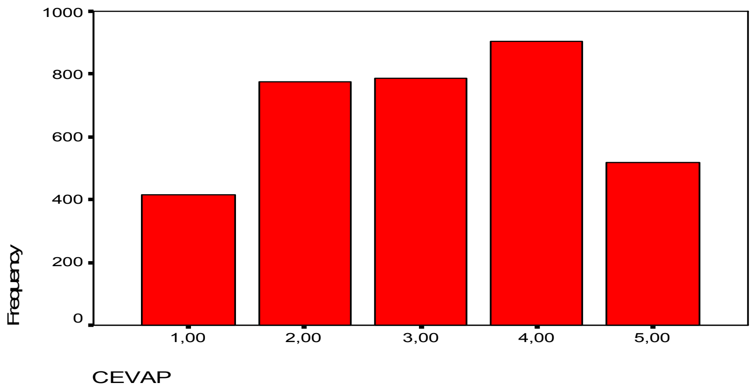
Çizelge 4.1. Bölüm 1'e ait frekans ve yüzde değerleri

		frekans	yüzde
değer	1,00	172	8,4
	2,00	428	21,0
	3,00	563	27,6
	4,00	592	29,0
	5,00	285	14,0
	toplam	2040	100,0

Öğrencilerin yaklaşık %43'ü birinci bölüme olumlu yaklaşmaktadır. Bu bölümdeki soruların amaçlarından biri de öğrencilerin ispat ve muhakeme kavramlarını öğrenmeden önce ya da öğrenmeleri için gerekli olan; problem çözebilme becerisi gibi genel matematik becerilerinin olup olmadığı ve genel olarak matematiğe karşı tutumlarının belirlenmesi idi. Öğrencilerin çoğu matematik problemlerini çözerken zorlanmadıklarını belirtmişlerdir. Olumlu cevaplar olumsuzlardan daha fazla olmasına rağmen kararsızlar için de genel bir başarıdan söz etmek doğru olmaz.

4.1.2. Bölüm 2'nin analizi

Bölüm 2 on sorudan oluşmaktadır. Sorular öğrencilerin ispat veya muhakeme kavramlarının farkında olup olmadığını ve matematiği öğrenirken ezberleyerek mi yoksa nedenselleştirip özümseyerek mi öğrendiğini saptamak için geliştirilmiştir.



Şekil 4.2. Bölüm 2'deki cevaplara ait frekans değerleri

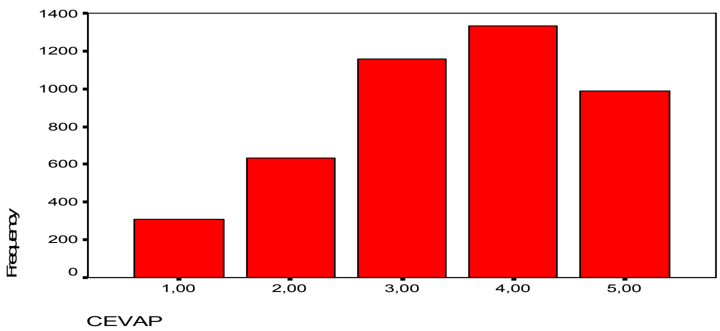
Çizelge 4. 2. Bölüm 2'ye ait frekans ve yüzdeler

		frekans	yüzde
değer	1,00	414	12,2
	2,00	775	22,8
	3,00	787	23,1
	4,00	906	26,6
	5,00	518	15,2
	toplam	3400	100,0

Öğrencilerin % 42' si ispat ve muhakeme kavramlarının farkında olsalar da öğrencilerin çoğu bu bölümün ilk iki sorusunda kararsız kalmaktadırlar. Bu durumda öğrencilerin matematiksel formül ve kurallarını ezberleyerek öğrendiklerini söylemek mümkündür. Bununla birlikte yine öğrenciler bölümün 4, 5 ve 7. sorularında problem çözümünde buldukları sonucun mantıklı olup olmadığını sorguladıklarını, sonuca götüren basamakları kontrol ettiklerini ve nedenlerini anlamaya çalıştığını belirtmiştir. Farklı bir yolla çözme, yeni sorular geliştirme ve matematiksel sonuçların ispatlanmadan da doğru olduğu konularında kararsız kalan öğrenciler matematiksel problemler için her zaman bir kurala gereksinimlerinin olduğunu belirtmişlerdir. Bu durumda özellikle kararsız olan ve olumsuz düşünen öğrencilerin %60 a yakını için ispatın anlamından ve gerekliliğinden emin olmadıkları söylenebilir.

4.1.3. Bölüm 3'ün analizi

Bu bölümdeki on üç soru ile ispatın önemi sorgulanmıştır. Öğrencilerin matematiği okulda öğretilen ve sadece okulda kalan bir ders olarak mı algıladıkları yoksa matematiği bir ders olmanın yanısıra kendi hayatları ve kişisel gelişimleri için gerekli görüp görmedikleri saptanmaya çalışılarak ispatın neden önemli olduğu araştırılmıştır.



Şekil 4.3. Bölüm 3'deki cevaplara ait frekans değerleri

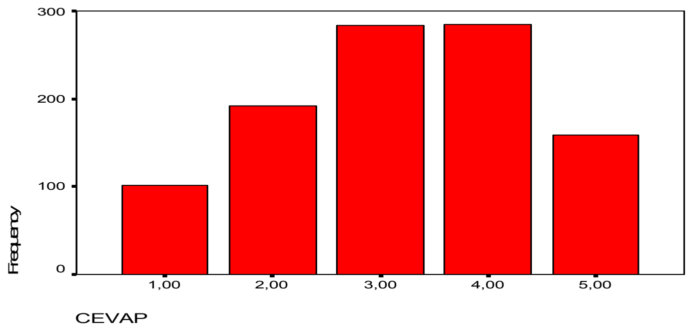
Çizelge 4.3. Bölüm 3'e ait frekans ve yüzdeler

		frekans	yüzde
değer	1,00	307	6,9
	2,00	632	14,3
	3,00	1159	26,2
	4,00	1332	30,1
	5,00	990	22,4
	toplam	4420	100,0

Öğrencilerin bu bölüm için verdikleri cevaplardan yaklaşık %53 'ünün olumlu olduğu görülmektedir. Olumsuz düşünen % 21 lik bir oran sonucunda öğrencilerin ispat, muhakeme kavramlarını genel olarak önemli bulduklarını söyleyebiliriz. Genel olarak bölümün ilk beş sorusuna olumlu cevaplar alınmıştır. Yani öğrenciler doğru ve mantıklı düşünmelerine neden olacağını bunun için ispatın öğretilmesi gerektiğini ve öğrencilerinde ispatlayarak öğrenme konusunda teşvik edilmesini istemektedirler. Yine öğrencilerin çoğu ispat yapmayı bir anlamda problem çözme olarak görmekte ve ispatladıkları sonuçların diğer problem çözümlerinde yardımcı olacağını ve yeni fikirler vereceğini düşünmektedir. Olumsuz düşünen ve karasız olan öğrencilerin diğer yarısı için ispatın matematiksel gelişimleri açısından önemi konusunda emin olmadıkları tespit edilmiştir.

4.1.4. Bölüm 4'ün analizi

Dördüncü bölümdeki üç sorunun amacı öğrencilerin ilköğretim matematik müfredatı içinde karşılaştıkları ispatlı öğretimin öğrenciler açısında zor olup olmadığının ve ispatları anlamada güçlük yaşayıp yaşamadıklarının saptanmasıdır.



Şekil 4.4. Bölüm 4'deki cevaplara ait frekans değerleri

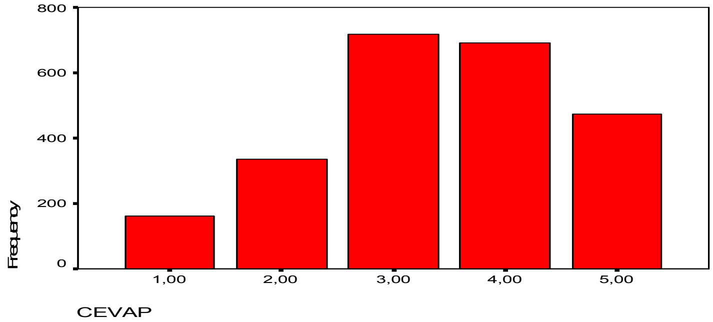
Çizelge 4.4. Bölüm 4'e ait frekans ve yüzdeler

		frekans	yüzde
değer	1,00	101	9,9
	2,00	192	18,8
	3,00	283	27,7
	4,00	285	27,9
	5,00	159	15,6
	toplam	1020	100,0

Öğrencilerin yaklaşık %42'si bu bölümdeki sorular için olumlu yanıtlar vermişlerdir. Yani bu öğrenciler muhakeme ya da ispat yaparken zorlanmadıklarını belirten şıkları işaretlemiştir. Bununla birlikte bu bölüm sorularında kararsız kalan 340 öğrencinin yaklaşık % 30'nu da azımsamak mümkün değildir. Olumsuz cevaplardaki diğer bölümlere nazaran artışa da dikkat edilirse öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun muhakeme ya da ispat yaparken sorun yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

4.1.5. Bölüm 5'in analizi

Bölümdeki yedi sorunun amacı ispatlı matematik öğretiminde kullanılan tekniklerin yeterli olup olmadığının ve öğrencilerin sınıftaki ispat ve muhakeme deneyimlerinde bilgisayarda matematik programı kullanma, farklı görsel materyallerle öğrenimi kalıcı kılma ve böylece neden sonuç ilişkisi kurma imkanlarının olup olmadığının sorgulanmasıdır.



Şekil 4.5. Bölüm 5'deki cevaplara ait frekans değerleri

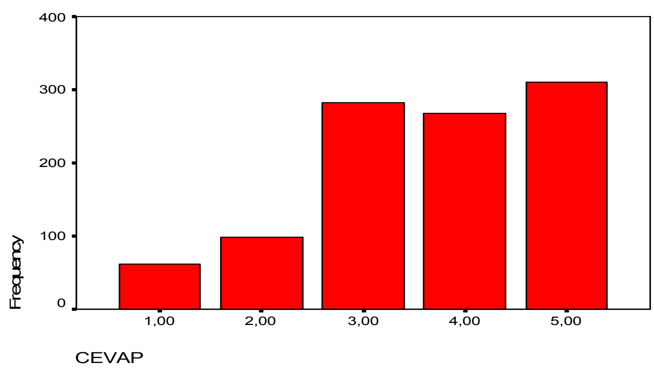
Çizelge 4.5. Bölüm 5'e ait frekans ve yüzdeler

		frekans	yüzde
değer	1,00	163	6,8
	2,00	335	14,1
	3,00	717	30,1
	4,00	692	29,1
	5,00	473	19,9
	toplam	2380	100,0

Öğrencilerin %50'si bu bölümdeki sorulara olumlu yaklaşmakta %30 ise kararsız kalmaktadır. Bölümün 5, 6, 7. sorularında kararsız kalan öğrenciler bölümün diğer sorularına olumlu yönde yanıtlar vermişlerdir. Buradan matematiksel ifade veya sonuçları kendilerinin yapması konusunda çekimser kalan öğrencilerin matematik derslerinde ispat yaparken görselleştirme ve teknoloji kullanma konusunda hemfikir oldukları gözlenmektedir. Önceki bölümlerde matematiği ispatlayarak, tartışarak, muhakeme ederek öğrenmek isteyen öğrencilerin çoğu bu bölümde bunu bilgisayarla veya farklı materyaller yardımıyla yapmak istediklerini ortaya koymuşlardır.

4.1.6. Bölüm 6'nın analizi

Altıncı bölüm üç sorudan oluşup öğrencilerin ilköğretim matematik öğretiminde yer alan genelden özele, özelden genele muhakeme ve tersini ispatlama becerilerini sorgulamaktadır.



Şekil 4.6. Bölüm 6'deki cevaplara ait frekans değerleri

Çizelge 4.6. Bölüm 6'ya ait frekans ve yüzdeler

		frekans	yüzde
değer	1,00	62	6,1
	2,00	99	9,7
	3,00	282	27,6
	4,00	267	26,2
	5,00	310	30,4
	toplam	1020	100,0

Bölümün 1. sorusu ifadenin karşıtının yanlışlığının ispatlanması, 2. soru genelden özele, 3.soru özelden genele muhakemeleri ile ilgili sorulardır. Öğrencilerin çoğu bu bölümdeki soruları olumlu yanıtlamıştır. Üç soru sonucunda bütün bu muhakeme becerilerinin ölçülmesi şüphesiz mümkün değildir; fakat genel olarak özellikle özelden genele muhakemesine olumlu yanıt vermeleriyle bu muhakeme becerisine yabancı olmadıkları gözlenmiştir. Fakat özelden genele muhakemesinde gösterdikleri başarı oranı diğer sorularda devam etmemiştir. Özellikle birinci soruda kararsızların oranı dikkate değerdir. Böylelikle öğrencilerin çoğunun özelden genele muhakemesini kullandıklarını diğer muhakeme çeşitlerinde başarısız oldukları görülmektedir.

4.2. Cevapların Frekans ve Yüzdeleri

Çizelge 4.7. Cevapların soru soru frekans ve yüzdeleri

	1 cevabı verenler		2 cevabı verenler		3 cevabı verenler		4 cevabı verenler		5 cevabı verenler	
sorular	frekans	yüzde %	frekans	%	frekans	%	frekans	%	frekans	%
1	32	9,4	81	23,8	93	9,4	91	26,8	43	12,6
2	36	10,6	54	15,9	88	25,9	98	28,8	64	18,8
3	31	9,1	95	27,9	96	28,2	89	26,2	29	8,5
4	37	10,9	63	18,5	89	26,2	109	32,1	42	12,4
5	19	5,6	65	19,1	74	21,8	114	33,5	68	20,0
6	17	5,0	70	20,6	123	36,2	91	26,8	39	11,5
7	48	14,1	104	30,6	103	30,3	52	15,3	33	9,7
8	68	20,0	121	35,6	61	17,9	54	15,9	36	10,6

Çizelge 4. 7’nin devamı

9	45	13,2	86	25,3	63	18,5	107	31,5	39	11,5
10	7	2,1	30	8,8	54	15,9	154	45,3	95	27,9
11	14	4,1	37	10,9	70	20,6	144	42,4	75	22,1
12	56	16,5	87	25,6	91	26,8	75	22,1	31	9,1
13	20	5,9	47	13,8	79	23,2	120	35,3	74	21,8
14	31	9,1	58	17,1	91	26,8	78	22,9	82	24,1
15	40	11,8	94	27,6	105	30,9	68	20,0	33	9,7
16	85	25	111	32,6	70	20,6	54	15,9	20	5,9
17	14	4,1	29	8,5	95	27,9	138	40,6	64	18,8
18	4	1,2	21	6,2	83	24,4	127	37,4	105	30,9
19	11	3,2	20	5,9	81	23,8	138	40,6	90	26,5
20	8	2,4	25	7,4	76	22,4	115	33,8	116	34,1
21	17	5,0	27	7,9	100	29,4	113	33,2	83	24,4
22	14	4,1	45	13,2	77	22,6	91	26,8	113	33,2
23	51	15,0	95	27,9	85	25,0	58	17,1	51	15,0
24	72	21,2	134	39,4	104	30,6	23	6,8	7	2,1
25	18	5,3	45	13,2	94	27,6	93	27,4	90	26,5
26	31	9,1	58	17,1	93	27,4	90	26,5	68	20,0
27	11	3,2	29	8,5	80	23,5	141	41,5	79	23,2
28	45	13,2	76	22,4	97	28,5	66	19,4	56	16,5
29	11	3,2	28	8,2	94	27,6	139	40,9	68	20,0
30	34	10,0	50	14,7	90	26,5	106	31,2	60	17,6
31	29	8,5	86	25,3	91	26,8	97	28,5	37	10,9
32	38	11,2	56	16,5	102	30,0	82	24,1	62	18,2
33	12	3,5	34	10,0	85	25,0	94	27,6	115	33,8
34	28	8,2	31	9,1	117	34,4	109	32,1	55	16,2
35	22	6,5	34	10,0	81	23,8	120	35,3	83	24,4
36	18	5,3	28	8,2	92	27,1	125	36,8	77	22,6
37	40	11,8	54	15,9	121	35,6	88	25,9	37	10,9

Çizelge 4. 7'nin devamı

38	12	3,5	67	19,7	97	28,5	83	24,4	81	23,8
39	31	9,1	87	25,6	124	36,5	73	21,5	25	7,4
40	31	9,1	41	12,1	121	35,6	90	26,5	57	16,8
41	18	5,3	44	12,9	84	24,7	113	33,2	81	23,8
42	13	3,8	44	4,1	77	22,6	64	18,8	172	50,6

1 cevabı için en yüksek frekanslı sorular 16, 24 ve 8.; 2 cevabı için en yüksek frekanslı sorular yine 8, 16 ve 24.; 3 cevabı için en yüksek frekanslı sorular 39, 40, 37 ve 6.; 4 cevabı için en yüksek frekanslı sorular 10, 11 ve 27.; 5 cevabı için ise en yüksek frekansa sahip sorular 42, 33 ve 20. sorulardır. Bu frekans değerlerinin çoğu 100' ün üzerindedir. 1 ve 2 cevabı için öğrencilerin yaklaşık 3'te 2'sinin aynı yönde düşündüğü göz önüne alındığında matematiği formül ve kuralların kullanıldığı bir ders olarak algıladığı gözlenmektedir. 4 ve 5 cevapları için ise öğrencilerin yine yaklaşık 3'te 2'sinin ispat veya muhakemenin öneminin farkında olduklarını ve ispat veya muhakemeyi derslerde kullanmak istedikleri söylenebilir.

4.3. Cevapların Ortalama Ve Standart Sapmalarının Değerlendirilmesi

Çizelge 4.8. Anket sorularına verilen cevaplara ait tanımlayıcı istatistik değerleri

SORU	Ortalama	Standart Sapma	N	SORU	Ortalama	Standart Sapma	N
1. soru	3,0941	1,1762	340	**22. soru**	3,7176	1,1761	340
2. soru	3,2941	1,2416	340	**23. soru**	2,8912	1,2818	340
3. soru	2,9706	1,1180	340	**24. soru**	2,2912	,9441	340
4. soru	3,1647	1,1884	340	**25. soru**	3,5647	1,1669	340
5. soru	3,4324	1,1692	340	**26. soru**	3,3118	1,2277	340
6. soru	3,1912	1,0483	340	**27. soru**	3,7294	1,0148	340
7. soru	2,7588	1,1652	340	**28. soru**	3,0353	1,2686	340
8. soru	2,6147	1,2627	340	**29. soru**	3,6618	,9928	340
9. soru	3,0265	1,2489	340	**30. soru**	3,3176	1,2117	340
10. soru	3,8824	,9826	340	**31. soru**	3,0794	1,1455	340
11. soru	3,6735	1,0626	340	**32. soru**	3,2176	1,2408	340
12. soru	2,8176	1,2129	340	**33. soru**	3,7824	1,1235	340
13. soru	3,5324	1,1478	340	**34. soru**	3,3882	1,1141	340
14. soru	3,3588	1,2670	340	**35. soru**	3,6118	1,1480	340
15. soru	2,8824	1,1512	340	**36. soru**	3,6324	1,0822	340
16. soru	2,4500	1,1926	340	**37. soru**	3,0824	1,1492	340

17. soru	3,6147	1,0169	340	**38. soru**	3,4529	1,1550	340
18. soru	3,9059	,9485	340	**39. soru**	2,9235	1,0615	340
19. soru	3,8118	,9985	340	**40. soru**	3,2971	1,1560	340
20. soru	3,9000	1,0314	340	**41. soru**	3,5735	1,1408	340
21. soru	3,6412	1,0866	340	**42. soru**	4,0824	1,1127	340
				Genel Toplam	3,3253	1,2081	14280

Çizelgede görüldüğü gibi öğrencilerin cevap analizindeki standart sapmalar 1 veya 1 den yüksektir. Bu da aynı soru için çok farklı görüşlere sahip öğrencilerin olduğunu göstermektedir. Fakat anketin genel ortalaması göz önüne alındığında öğrencilerin ispat kavramının farkındalığı ve ispat öğretimi konularında verdikleri cevaplar 3 ün üstünde yani olumludur. Buradan öğrencilerin matematik öğreniminde ispatı veya muhakemeyi sınırlı da olsa kullandıkları, ispat ile öğrenmeye önem verdikleri ve bu konuda farklı teknikler, metotlar istedikleri söylenebilir.

Anketin ortalaması en yüksek soruları; 42, 18, 20 ve 10. soruları değerlendirilirse;

42. 0=0(çift sayı)

0+2=2(çift sayı)

0+2+4=6(çift sayı)

0+2+4+6=12(çift sayı)

…………………..

0+2+…+2n=(çift sayı)

Bu ifadelerden;

Bütün çift sayıların toplamı yine bir çift sayıdır.

Sonucu çıkarılır.

Öğrencilerin özelden genele muhakemesini kullanıp kullanamadıklarının sorgulandığı bu soru ortalaması en yüksek sorudur. Ortalamanın yüksek olması 8. sınıf öğrencilerinin özelden genele muhakemesini farkında olarak veya olmayarak kullanabildiklerini hatta bu şekilde yapılan çıkarımlara yabancı olmadıkları söylenebilir.

18. İspatlar öğrencileri mantıklı bir şekilde düşünmeleri için eğitir.

18. soru hem ortalaması yüksek hem de standart sapması düşük bir sorudur. Matematik düşünmeyi, ispat ise matematik eğitiminde daha iyi ve doğru düşünmeyi geliştiren en önemli araçlardandır. Öğrenciler ispat ve muhakemenin en yoğun kullanıldığı alan olan matematikle kendi düşünme sistemlerini geliştirebileceklerinin farkındadırlar.

20 .Öğrenciler matematikte ifadeleri ispatlamak için cesaretlendirilmeli.

Derslerde sadece öğretmenlerin ispat yapması sorusunda kararsız kalan öğrencilerin matematikte ispat sürecine dahil olmak istedikleri ve ispat yapmanın eğlenceli ya da zor olup olmadığına karar veremeseler de öğrenmek istediklerini gözlenmiştir.

10. Bir örneği çözdükten sonra bulduğum sonucun mantıklı olup olmadığını sorguluyorum.

Yine bu soru da hem ortalaması yüksek hem de standart sapması düşük bir sorudur. Matematikte ispatlar kavramlar arası bağlar kuran, duruma özel çözüm yolları üretip akılcı sonuçlara ulaştıran süreçlerdir. Bu durumda öğrencilerin bir problemi çözerken sonuca götüren basamaklar, nedenleri ve sonuç arasındaki ilişkileri sorgulayıp anlamaya çalıştıkları söylenebilir.

Standart sapması en düşük sorular ise 29, 24, 19, 18 ve 10. sorulardır.

29. Bir ifadeyi ispatlamak aslında bir problemi çözmek gibidir.

24. Öğretmen sınavda soracağı için bir ifade ya da kuralın ispatını öğrenirim.

19. İspatlanan ifadeler öğrencinin matematiksel düşünme yapısını anlamasını geliştirir.

18. İspatlar öğrencileri mantıklı bir şekilde düşünmeleri için eğitir.

10 Bir örneği çözdükten sonra bulduğum sonucun mantıklı olup olmadığını sorguluyorum.

Öğrencilerin çoğu 29, 19, 18 ve 10. sorularda olumlu olarak; 24.soruda ise olumsuz olarak hemfikirdirler. İspat matematik öğrenmede bir araçtır. Matematik eğitimi açısından ispat bir ifadenin doğruluğunu değil neden doğru olduğunun gösterilmesi açısından daha önemlidir. Ayrıca NCTM (2000) ilköğretim sonunda öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat açısından; mantıksal yolla düşünmenin ve matematiğin temel yönleri açısından ispatlamanın farkına varmak ve değişik mantıksal düşünme yollarını ve ispat çeşitlerini seçmek ve kullanmak gibi becerileri edinmiş olması gerektiğini vurgular. Bunun yanı sıra günümüzde artık aklını kullanan, mantıklı ve hızlı düşünen, sonuçta isabetli kararlar verebilen, soran ve sorgulayan, yaratıcı bireyler başarıya ulaşmaktadır ve eğitimimizin hedefi de elbette böyle bireyler yetiştirmek olmalıdır. Bu bağlamda verilen cevaplara bakarak öğrencilerin bir kısmının matematiksel muhakeme ile ispatın ve bunların öneminin okul ve kendi bireysel yaşamları açısından önemli buldukları söylenebilir.

4.4. Cevaplara Ait Varyans Analiz Değerlendirmesi

Çizelge 4. 9. Anket sorularına verilen cevaplara ait varyans analiz tablosu

kaynak	Tip III Kareler Toplamı	Df	Kareler ortalaması	F	Önemlilik(p)
Düzeltilmiş Model	4722,895	380	12,429	10,718	0,000
Kesim noktası	157900,926	1	157900,926	136169,298	0,000
SORU	2413,083	41	58,856	50,755	0,000
ÖĞRENCI	2309,812	339	6,814	5,876	0,000
Hata	16117,179	13899	1,160		
Toplam	178741,000	14280			
Düzeltilmiş Toplam	20840,074	14279			

Varyans analizi ile farklı öğrenci gruplarının sorulara verdikleri cevapların birbirinden farklı olup olmadığı; öğrenci-soru arasındaki ilişki gözlenmeye çalışılmıştır. “Öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar farklılık göstermekte mi?” ve “Dolayısıyla sonuçlar istatistiksel olarak anlamlı mıdır?" sorularının cevapları aranmıştır. Çünkü anlamlı olan sonuçlar daha geniş gruplara genellenebilmektedir.

Çizelge 4.9'da görüldüğü gibi soru çeşitlerinin ve öğrenci farklılıklarının elde edilen sonuçlarda istatistiksel açıdan önemli oldukları önemlilik değerlerinin p=0,05 değerinden küçük olması ile anlaşılmaktadır. Faktörlerin önemliliklerini ifade eden F değerleri incelendiğinde ise değişen sorularla elde edilen cevap eğilimlerinin değişen öğrencilerle elde edilen cevap eğilimlerine nazaran daha etkin olduğu görülmüştür. Diğer bir ifadeyle %95 güven aralığında yapılan istatistiksel incelemede öğrencilerin matematikte ispatla ilgili görüşleri sorulara göre değişiklik göstermektedir. Sonuç olarak soru faktörü öğrenci faktörüne oranla daha büyük öneme sahiptir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Hazırlanan anket sınırlılığında ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin gerek ispat gerekse muhakeme konusunda eksikliklerinin var olduğu tespit edilmiştir. Bu eksikliklerin sebepleri, öğrencilerin ispat ve muhakeme hakkındaki görüş ve inançlarına bağlanabilir. Öğrencilerin hazırlanan anketteki 6 ana başlık altında verdikleri cevaplar ışığında ispat algılarına bakarak sorunları daha iyi anlayabiliriz. Bu bölümde verilerin analizinden çıkan sonuçlar değerlendirilip çözüm önerileri üzerinde durulmuştur.

Yapılan anket sonucunda öğrencilerin %60 a yakınının problem çözebilmek, hesaplama yapabilmek, matematiksel sembolleri öğrenmek gibi genel matematiksel becerilerinin olmadığı veya bu becerilerinden emin olmadıkları anlaşılmaktadır. 8. sınıfa devam etmekte olan öğrenciler matematikte başarılı olup olmadığı, matematiksel işlemler yapıp yapamadığından emin olamamaktadır. Matematiğin sanıldığı gibi birbirinden kopuk konular içermediği, dahası bir konu öğretilirken bir veya birden fazla ilgili öğrenilmiş bilgi gerektiren ve konuların birbirine bir zincirin halkaları gibi bağlı olduğu, temel ilke ve kavramlara dayanan bir düşünme sistemi olduğu düşünülürse öğrencilerin ispatla ilgili geçmiş matematik deneyimleri ve bilgilerinin eksik olduğu söylenebilir.

Aktaş (2002) ispat kavramının oluşmasının okul öncesi dönemde başladığını söyler. Piaget'ye göre 4-7 yaş çocukların sezgisel dönemidir. NCTM (2000) ise matematiksel muhakeme yeteneğinin ilkokulda oluştuğunu dile getirmiştir. Yani öğrencilerin ilköğretimde edinecekleri başta muhakeme ve matematiksel düşünme becerisi olmak üzere diğer matematik becerileri ispat öğrenimlerini etkilemektedir. Bu nedenle öğrencilerin bu becerilerini edinmeleri ve gerekli donanımlara sahip olarak bir üst düzeye geçebilmeleri için sınıf öğretmenlerinin rolü büyüktür. İlkokul düzeyindeki öğrencilerin öğretmenlerinden her yönde etkilendiği düşünüldüğünde öncelikle sınıf öğretmenlerinin matematiğe karşı olumlu bir tutum içinde olmaları ve gerekli matematiksel bilgilere sahip olmaları beklenir.

Öğretmenler sınıf içinde neden böyle yaptın, nasıl karar verdin, buradan nasıl bir sonuç çıkarabiliriz, bu bize ne söyler, her zaman böyle midir, problemi çözerken ne tür stratejiler kullandın, farklı bir yol izleseydin nasıl olurdu gibi basit soru ve yönlendirmelerle öğrencilerin mantıksal düşünme, muhakeme ve akıl yürütme becerilerini geliştirebilirler.

Piaget'e göre somut işlemler dönemi olan 7-11 yaş arasında öğrencilerin somut nesne ve durumlar üzerinde akıl yürütmesi sağlanmalı,mantığa dayalı şemalar, şekiller oluşturulmalı. Hatta hala oyunun çok önemli olduğu bu dönemde matematik öğretiminde oyunlar kullanılabilir. Öğrencilere matematik yaptığını anlamaksızın gerekli becerilerin oyunlarla verilmesi denense belki de öğrenciler gerekli matematiksel yapıları öğrenebilir.

Öğrencilerin çoğu anketin 15. ve 23. sorularına olumsuza yakın cevaplar vermişlerdir. Matematiksel bir sonuç açıkça doğruysa ispatlamanın anlamı olmadığını ve sadece örnekler yardımıyla bir ifadenin doğru olduğunu anlayabileceklerini söylemişlerdir. Öyle görünüyor ki genel olarak ispatın farkında olsalar da öğrencilerin %60'ı ispat ya da muhakeme kavramlarının anlamından ve gerekliliğinden emin olamamaktadır.

Öğretmenler olarak öğrencilerin ispat konusundaki başarısızlıklarını yetersiz çalışma alışkanlıklarına bağlarız. Bununla birlikte ispat yeteneğine birden fazla faktörün etki ettiği açıktır. Öğrencilerin yetersiz çalışma alışkanlıkları dışında örneğin öğrencilerin muhakeme becerilerinin uygun düzeyde olup olmadığı da önemlidir. Yine bir çok öğrencinin düşük matematiksel düşünme becerileri ile 8. sınıftan mezun olduğunun farkındayız. Yeşildere ve Türnüklü (2007) matematiksel düşünme ile ilgili lise birinci sınıfa devam eden öğrenciler üzerinde yapmış oldukları çalışmada ilköğretim sekizinci sınıftan yeni mezun öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemişlerdir. Araştırma sonuçlarına göre öğrencilerin matematiksel bilgileri kavramsal olarak edinmemiş olmaları problemleri çözmelerine engel olmaktadır. Öğrenciler bilgilerin direkt uygulanarak çözümün istendiği problemlerde, yorumun ve akıl yürütmenin gerekli olduğu problemlere göre daha fazla başarılı olmuşlardır. Açık uçlu problemlerin analizi ile elde edilen veriler, İzmir evreninde yer alan ilköğretim sekizinci sınıftan yeni mezun öğrencilerin problem çözmede matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada ve mantıksal akıl yürütmede sorun yaşadıklarına işaret etmektedir.

Öğrencilerin ispat yeteneklerine etki eden bir diğer faktör de akıl yürütme becerisidir. Yine bir çok öğrenci bu beceriden yoksun olarak liseye gitmektedir. Umay ve Kaf (2005)'te ilköğretim öğrencileri üzerinde yaptıkları kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışmada, verilerin toplanması için araştırma grubunda bulunan öğrencilerden, verilen dört problemi çözmelerini istemiş ve araştırma sonuçlarını analiz etmişlerdir. Kusurlu akıl yürütmelerde karşılaşılan durum, öğrencilerin akıl yürütme sürecini henüz tamamlamadan sona erdirmeleri ya da kavramsal eksikliklerinden dolayı, alıştıkları kalıp çözümlere yönelmeleri biçimindedir. Genel olarak, öğrencilerin zayıf akıl yürütme yüzdelerinin en yüksek düzeyde olduğu, bunu kusurlu akıl yürütme yüzdesinin izlediği; doğru akıl yürütme yüzdesinin ise en düşük düzeyde kaldığı görülmektedir. Araştırma sonuçlarında, sınıflar arasında kayda değer bir farkla karşılaşılmamıştır.

Anketin son üç sorusu özelden genele, genelden özele ve tersinin ispatı muhakemelerini içermektedir. Elde edilen veriler sonucunda öğrenciler özelden genele muhakemesine olumlu diğer sorulara olumsuz yanıtlar vermişlerdir. Bu da muhakeme çeşitleri konusunda yetersiz deneyimlerinin olduğu sonucunu verir. Muhakeme etme, doğru muhakeme çeşidini seçerek kullanma ve akıl yürütme becerilerinden yoksun lise seviyesine gelen öğrenciler elbette lisede ispat yapmakta zorlanacaklardır. Özer ve Arıkan (2002) lise öğrencileriyle yaptıkları lise öğrencilerinin ispat yapabilme düzeylerini araştırdıkları çalışmada lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerini tespit etmiş, öğrencilerin ispat düzeylerini incelemiş ve öğrencilerin ispat yapma yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları sonuçlarına ulaşılmıştır.

Ayrıca öğrencilerin %60'ı ispat yaparken zorlanmakta, aynı zamanda çoğunluk bu konularda klasik düz anlatımdan ziyade farklı yöntemlerin kullanılmasını istemektedir. Peki bunun için yapılması gerekenler nelerdir?

Öncelikle matematik müfredatında matematiksel düşünme, muhakeme, akıl yürütme, ispat ve ilgili alt becerileri öne çıkarılmalıdır. Öğrencilere kendi varsayımlarını oluşturabileceği, bunu dile getirebileceği, arkadaşlarıyla tartışabileceği ve doğrulayabileceği örnekler verilmeli, etkinlikler gerçek yaşam deneyimlerini yansıtır şekilde düzenlenmelidir. En önemlisi 6,7 ve 8. sınıf sonunda uygulanan SBS(Seviye belirleme sınavı) sınav soruları ders içindeki bu etkinlikler doğrultusunda ve muhakeme ve ispat becerilerini destekler nitelikte hazırlanmalıdır.

NCTM (2000) 6–8. sınıflar için muhakeme ve ispat standartlarında ise öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri istenir. Yani varsayım geliştirme ve doğrulama arasındaki önem vurgulanır. İspat bir ifadenin veya nedenlerinin başka varsayımlara, aksiyomlara, teoremlere dayandırılarak oluşturulduğu bir süreçtir. Öğrenciler ezberlemeksizin varsayımları oluşturabilmeli, geliştirebilmeli, oluşturdukları fikirleri modelleştirebilmeli, matematiksel düşünme ve muhakeme becerilerini edinip özelden genele ve genelden özele muhakemelerini kullanabilmeli. Yapılan anket sonucunda bir soruyu farklı bir yolla çözme, yeni sorular geliştirme ve matematiksel sonuçların ispatlanmadan da doğru olduğu konularında kararsız kalan öğrenciler matematiksel problemler için her zaman bir kurala gereksinimlerinin olduğunu belirtmişlerdir. Sonuç olarak öğrencilerin %60 a yakını ispatın anlamından ve gerekliliğinden emin görünmemektedir. Bu noktada öğrencilerin bu becerileri edinmeleri ve geliştirmelerinde öğretmen faktörünün önemi tartışılabilir.

Bir ifadenin gerçekliğini ya da bir kuralın doğruluğunun ispatlanması için geliştirilen yöntemler öğrenciler için önemlidir. Öğretmenlerin bu yöntemleri, matematiksel düşünmeyi ve ispat yollarını öğrencilere anlatması gerekir. Böylece öğrenciler kendi yanlış ya da doğrularını fark edip ispat yeteneklerini geliştireceklerdir. Yani öğretmenler uygun ortam ve koşullar altında öğrencilerin bu yeteneklerini geliştirmeleri için önemli rol oynarlar.

Bir ispatın açıklayıcı olması gerektiğini daha önce belirtmiştik. Açıklayıcı bir ispat bir ifadenin neden doğru olduğunu anlatmanın yanı sıra öğrencilere mantıksal bir temel de sağlar. Bir öğretmen bir ifadenin doğru olduğunu formüllerin ve kuralların nedenlerini açıklayarak, sembol ve kavramların tanımlarını vererek ispatlayabilir. Böylece öğrenciler verilen ifade ve ifadenin anlamı arasındaki ilişkiyi kurabilirler. Ayrıca neden-sonuç ilişkisi kuran öğrenciler ezberden uzaklaşacaktır; bunun için öğretmenler nedenin sonuç kadar önemli olduğunu belirterek, çeşitli ispat yöntemlerini öğrencilere uygulamalı olarak göstermeli ve ispatlama becerilerini geliştirmeleri için öğrencilere rehberlik etmelidir.

Bir ispat aynı zamanda ikna edici olmalıdır. Bir varsayımın doğruluğunu nedenleriyle açıklamak ve inandırabilmek için hem öğretmenin hem de öğrencilerin etkili iletişim becerilerine sahip olması beklenir.

Özellikle matematik öğretmenlerinin ispat, muhakeme, akıl yürütme kavramlarının anlamından, gerekliliğinden ve öneminden emin olarak yetiştirilmeleri gereklidir. Bu nedenle eğitim fakültelerinin de bu kavramların öğrencilere kazandırılmasındaki rolü büyüktür. Ayrıca öğretmenlerin ispat etme ve muhakemeyi öğretmek için hazır olmayışlarındaki yetersizlik uygun olmayan fiziki ortam, öğrenci sayısının fazlalığı, teknolojik ve materyal eksiklik, öğretmenlerin bir çok konuda kavramsal bilgiye sahip olmamaları, ispat ve muhakeme etme konularında kavram yanılgısı yaşamaları gibi birçok sebebe de bağlı olabilir. Başta yeni öğretmenler olmak üzere birçok öğretmen, matematik öğretiminden ve öğrencilerin konuyu anlamasından ziyade sınıf yönetimi ve disiplinle uğraşmak zorunda kalmaktadır.

Bütün öğrenciler birbirinden farklıdır ve bütün öğrencilere matematiksel fikirleri ve matematiksel düşünmeyi öğrenmeleri için fırsatlar verilmesi gerekir. Öğrenciler matematiksel fikirler hakkında konuşmalı ve kendi fikirlerini sınıf arkadaşlarına ve öğretmenlerine açıklamalı.

Öğretmenler çeşitli soru tekniklerini kullanarak öğrencilere "bu sonuç neden doğru? Bu sonuca nasıl ulaştın? Neden böyle yaptın? Başka neler yapılabilir? Bir model oluşturulabilir mi? Tüm durumlar için doğru mu? Nasıl ispatlar sın?" gibi sorular sormalı ve öğrencilerin doğru ya da yanlış cevaplarını sınıfta gerçekleyerek anlatmalı. Bu gerçekleme pratikleri sınıf ortamında öğrencilerin dikkatini derste neyin önemli olduğuna yönlendirecektir. Öğrenciler konuyu neden ve neyin önemli olduğunu bilerek öğrendikleri için daha kolay hatırlayacaklardır. Böylece diğer öğrenmeler için gerektiğinde daha rahat ilişki kurup kullanabileceklerdir.

Bu noktada açık uçlu problemlerden söz etmek yerinde olacaktır. Matematik derslerinde kullanılan soruların "Kenar uzunlukları 3cm ve 8cm olan bir dikdörtgenin alanı kaç cm^2 dir" yerine "Alanı $24cm^2$ olan kaç tane dikdörtgen çizebiliriz?" şeklinde açık uçlu problemlerin sorulması öğrencilerin varsayımlar yaratmasını ve doğrulamasını gerektireceği için ispat ve muhakeme becerilerini geliştirebilir.

Anket sonuçlarını değerlendirmeye devam edersek öğrenciler matematik derslerinde muhakemenin yer alması gerektiğini ve bunun içinde farklı tekniklerin, bilgi teknolojilerinin kullanılmasını istedikleri konularında hemfikirdirler. Günümüzde artık en yeni teknolojiler bile hemen eskiyebilmektedir. Dolayısıyla bugün ve gelecekte yaratıcı düşünebilen teknolojiyi kullanabilen ve takip eden bireylerin yetiştirilmesi hedeflenmelidir.

İspat ve muhakeme konusunda sorunların ortadan kaldırılması için öncelikle öğrenciler sürekli öğrenme ve düzenli çalışma alışkanlıkları edinmenin yanı sıra kendi matematiksel fikirlerini ifade edebilecek, varsayımlar oluşturabilecek ve bu varsayımlarını doğrulayabilecekler ki lise düzeyinde formal ispat için hazır hale gelebilsinler. Uygun ortam ve şartlar altında biz matematik öğretmenleri nedenin sonuçlar kadar önemli olduğunu vurgulayıp çeşitli ispat yöntemlerini uygulamalı olarak göstererek; ispatın anlamı ve gerekliliğini görmeleri, keşfetmeleri, keşfettikleri gerçeğe inanmaları, nedenlerini açıklamaları, gerekli iletişim, doğrulama ve açıklama becerilerini geliştirebilmeleri için öğrencilerimize rehberlik etmeliyiz.

KAYNAKLAR

Akay, H., Soybaş, D., Argün, Z., 2006. Problem Kurma Deneyimleri Ve Matematik Öğretiminde Açık-Uçlu Soruların Kullanımı. Kastamonu Eğitim Dergisi, 14(1), 129-146.

Aktaş, Y. 2002. Okul öncesi dönemde matematik eğitimi. Nobel Tip kitap evi. Adana.

Alkan, H., Bukova Güzel, E., 2005. Öğretmen Adaylarında Matematiksel Düşünmenin Gelişimi GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25(3), 221-236.

Altun, M., Arslan, Ç., 2006. İlköğretim Öğrencilerinin Problem Çözme Stratejilerini Öğrenmeleri Üzerine Bir Çalışma. Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi XIX (1), 2006, 1-21.

Altıparmak, K., Öziş, T., 2005. Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme, Ege Eğitim Dergisi, 6(1), 25–37.

Brown, J.R., 1999. Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures, Routledge, New York.

Bütüner, Ö. S. 2006. Kitap İncelemesi İlköğretim Matematik Dersi 6–8. Sınıflar Öğretim Programı Kitabı MEB, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Elementary Education Online, 5(2), 123-125.

Calude, C. S., Marcus, S., 2004. Mathematical Proofs at a Crossroad? LNCS 3113, pp. 15–28, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Caprotti, O., Oostdijk, M., 2001, On Communicating Proofs In Interactive Mathematical Documents AISC 2000, LNAI 1930, pp. 53–64, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pantazi, D., 2004. Proofs Through Exploration In Dynamic Geometry Environments International Journal of Science and Mathematics Education 2, 339–352, National Science Council, Taiwan.

Cristian, C. S., Solomon, M., 2004. Mathematical Proofs at a Crossroad?, Theory Is Forever: Essays Dedicated To Arto Salomaa On The Occasion Of His 70th Birthday, Lecture Notes In Computer Science, (3113), 15-28.

Dede, Y., 2007. Matematiğin Öğretim Biçimlerine İlişkin Öğretmen Görüşleri Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education) 33, 99-107.

Edwards, L., 1997. Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2(1), 187-215.

Ersoy, Y. 2003. Teknoloji Destekli Matematik Eğitimi-1: Gelişmeler, Politikalar Ve Stratejiler, www.ilköğretim-online.com, 2(1), 18-27.

Fischbein, E., 1982. Intuition and proof, For the Learning of Mathematics 3(2), 9-18, 24.

Flores, A. 2006. How Do Students Know What They Learn in Middle School Mathematics Is True? School Science and Mathematics 106(3), 124-32 .

Foulquie, P., 1994. Boş Zaman Pedagoji Sözlüğü (Çev. C. Karakaya), Sosyal Yayınları, İstanbul.

Gellert, U., 2000. Mathematics instruction in safe space: Prospective elementary teachers' views of mathematics education. Journal of Mathematics Teacher Education, 3(1), 251-270.

Guilford, J. P., 1950. Creativity, American Psychologist, 5(9), 444-454.

Handal, B., 2005. Philosophies and Pedagogies of Mathematics. 2005 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics Waikoloa, Hawaii October 10-12.

Hanna, G., 2000a. Proof, Explanation and Exploration: An Overview, Educational Studies in Mathematics 44, 5–23.

Hanna, G., 2000b. A Critical Examination Of Three Factors In The Decline Of Proof, Interchange, 31(1), 21-33.

Hanna, G., 2008. Beyond verification: Proof can teach new methods Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI (Rome, 5–8 March 2008).

Hanna,G., Barbeau, E. 2009. Proof In Mathematics University Of Toronto, Canada http://www.math.toronto.edu/barbeau/hannajoint.pdf, Kasım 2009.

Hodgson, T., Riley, K. J., 2001. Real-World Problems as Contexts for Proof, Mathematics Teacher, 94(9), 724-728.

http://iogm.meb.gov.tr programlar/ Temel Amaçlar

http://www.nctm.org/standards 2009

Kandemir, M., 2007. Sınıf Öğretmeni Adaylarının Temel Matematik Dersine İlişkin Görüşleri Ve Kavramların Öğrenim Düzeyi , Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi Cilt-Sayı: 9-2.

Kapetanas, E., Zachariades, T. 2007. Students' beliefs and attitudes about studying and learning mathematics. Woo, Jeong-Ho (ed.) et al., Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

PME, Seoul, Korea, July 8–13, Vol. 1-4. Seoul: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics. Part 3, 97-104.

Kline, M., 1980. Mathematics: the loss of certainty, Oxford University Press, New York, 3p.

Knuth, E. J., 2002. Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics, Journal of Mathematics Teacher Education, 5(1), 61-88.

Knuth, E.C., Chopin, J.M., Bieda, K.N. 2009 Proof:Examples and Beyond Mathematics Teaching in the Middle School, 15(4).

Mansi, K. E., 2003. Reasoning and Geometric Proof in Mathematics Education: A Review of the Literature, North Carolina State University, Degree of Master of Science.

Mansi,K.E.,2003. Reasoning And Geometric Proof In Mathematics Education A Review Of The Literature A thesis submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University in partial fulfillment of the Degree of Master of Science.

Martin, T. S ., Soucy Mccrone, S. M., Wallace Bower, M. L., Dindyal, J., 2005. The Interplay Of Teacher And Student Actions In The Teaching And Learning Of Geometric Prof. Educational Studies in Mathematics, 60, 95–124 DOI: 10.1007/s10649-005-6698-0 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Matematik dünyası dergisi 2005. 14(1), 18.

Meissner, H., 2006. Creativity and Mathematics, Education Elementary education online 5(1), 65-72.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., Yeşildere, S. 2006. Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri, Kastamonu Eğitim Dergisi, 14(1), 147-160.

Morgan, C. T., 1993. Psikolojiye Giriş, (Çevirenler: H. Arıcı ve ark.), Ankara Hacettepe Üniversitesi Psikoloji Bölümü Yayınları.

National Council of Teachers of Mathematics, 2000. Principles and standards for school mathematics, www.nctm.org, 2009

Nyaumwe, L., Buzuzi, G., 2007 Teachers' Attitudes towards Proof of Mathematical Results in the Secondary School Curriculum: The Case of Zimbabwe Mathematics Education Research Journal, 19(3), 21–32.

Oxford American Dictionary. 2004.

Öner, D., 2008. Supporting students' participation in authentic proof activities in computer supported collaborative learning (CSCL) environments. http://www.springerlink.com 3, 343-359 September.

Özer, Ö., Arıkan, A., 2002. Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri V. Ulusal Fen Bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresi 16-18 Eylül ODTÜ Kültür Ve Kongre Merkezi ANKARA.

Özsoy, G., 2005. Problem Çözme Becerisi İle Matematik Başarısı Arasındaki İlişki GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25(3), 179-190.

Pilten, Pusat., 2008. Matematiksel Muhakemeyi Değerlendirme Ölçeği: Ölçek Geliştirme, Güvenirlik Ve Geçerlik Çalışması, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi 25, 297-316.

Polthier, K., 2002. Visualizing Mathematics – Online. Mathematics and Art, C. Bruter (Ed.), Springer Verlag , pp.29-42.

Presmeg, N. C., 2006. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Recino, M. A., Godino, J. D., 2001. Institutional And Personal Meanings Of Mathematical Prof Educational Studies in Mathematics 48: 83–99, Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands.

Ridgway, J., Nicholson, J., McCusker, S., 2007. Reasoning with Multivariate Evidence, International Electronic Journal of Mathematics Education, 2(3), 245-269.

Rubin, S. H., Law, J.B., Chen, S. C., Lee, G. K., 2005. On the Inherent Necessity of Heuristic Proofs. 2005 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics Waikoloa, Hawaii October 10-12.

Schoenfeld, A. H., 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, In D. Grouws (ed.), New York: MacMillan, 334-370.

Senk, S. L., Thompson, D. R., Jhonson, G., 2009. Reasonıng And Proof In Hıgh School Textbooks From The Usa. Elementary Education Online, 8(1), t:1-6. http://ilkogretim-online.org.tr (2009).

Tall, D., 2009. Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism. ICMI Conference on Proof , http://www.davidtall.com/

Tall, D., 1998. The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, Conference of the University of Chicago School Mathematics Project.

Tall, D., Barnard,T., 1997. Cognitive Units, Connections and Mathematical Prof Published in Proceedings of PME 21, Finland, , vol. 2, pp. 41–48.

Türnüklü, E. B., Yeşildere, S., 2005. Problem, Problem Çözme ve Eleştirel Düşünme. Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25(3), 107-123

Umay, A., Kaf, Y., 2005. Matematikte Kusurlu Akıl Yürütme Üzerine Bir Çalışma Hacettepe Üniversitesi Egitim Fakültesi Dergisi 28:188-195.

Umay, A., 2003. Matematiksel Muhakeme Yeteneği, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24, 234-243.

Umay, A., Akkuş, O., Duatepe Paksu, A., 2006. Matematik Dersi 1-5. Sınıf Öğretim Programının NCTM Prensip ve Standartlarına Göre İncelenmesi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 31, 198-211.

www.tdk.gov.tr, 2009. TDK türkçe sözlük.

Yeşildere, S., Türnüklü, E. B., 2007. Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40(1), 181-213s.

Yıldırım, C., 1996. Matematiksel Düşünme. Remzi Kitabevi, No: 103 s, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

25.07.1980 tarihinde Erzurum'da dünyaya gelen Özden ALBAYRAK BAHTİYARİ ilk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladıktan sonra 1997 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğinde yüksek öğrenimine başlamıştır. 2001 yılında Matematik Öğretmeni unvanıyla mezun olan Bahtiyari, 2002 yılında Matematik Öğretmeni olarak Milli Eğitim Bakanlığında çalışmaya başlamıştır. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başlayan Bahtiyari halen Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.