LIPSCHITZ SINIFINA AİT PERİYODİK FONKSİYONLARIN NÖRLUND ORTALAMASI YARDIMI İLE YAKLAŞIM DERECELERİ HAKKINDA

Hüseyin ALTINDİŞ

Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü'ne
Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi
olarak sunulmuştur.

Ocak - 1985

Erciyes Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

25/ 02 /1985

Başkan : Doç. Dr. Mustafa BALCI

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BOR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cihan ORHAN

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

28/ 2 /1985

Enstitü Müdürü

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hüseyin Altındiş
Baba Adı	: Ahmet
Ana Adı	: Hikmet
Doğum yeri ve yılı	: Kayseri-24.1.1955

İlk, Orta ve Lise Öğrenimini Kayseri'de tamamladı. Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden Matematik-Fizik Lisans diploması alarak 1977 yılında mezun oldu. Çalışma Bakanlığı'nın bir ünitesinde İstatistik Raportörü olarak memuriyete başladı. Daha sonra askerlik hizmetini İzmir İstihkâm Okulu'nda Askeri Öğretmen olarak tamamladı. Terhisini müteakip Kayseri Meslek Yüksek Okulu'nda dışarıdan Matematik derslerini yürüttü. Erciyes Üniversitesi Mühendislik Fakültesi'nde 1,5 yıl Araştırma Görevlisi olarak çalıştıktan sonra aynı Üniversite'nin Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak 1.1.1984 yılında atandı. Halen bu görevi yürütmektedir.

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Yrd. Doç.Dr. Hüseyin Bor'a teşekkürlerimi arz ederim.

Hüseyin Altındiş

ÖZET

Bu çalışmada Lipα ve Lip (α,p) sınıflarına ait periyodik fonksiyonların Nörlund Ortalaması yardımı ile yaklaşım dereceleri incelenmiştir.

f, 2π periyodlu Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyon, bunun Fourier seriside

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olsun. Bu Fourier serisinin konjugeside

$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx)$ şeklinde verilsin.

$\{p_n\}$, $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \to \infty$, $n \to \infty$ şartını sağlayan pozitif sabitlerin bir dizisi olsun.

$T_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k$ ifadesi Fourier serisinin (N,p_n) ortalamasıdır.

Lipα sınıfına ait 2π periyodlu periyodik f fonksiyonunun yaklaşım derecesi

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - T_n(x)| = O\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}}\right]$$

ve f fonksiyonunun konjugesinin yaklaşım derecesi de

$|\tilde{f}(x) - \tilde{t}_n(x)| = O\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}}\right]$ ile verilir.

f, Lip(α,p) sınıfına ait periyodik bir fonksiyon ise f fonksiyonunun yaklaşım dercesi

$$E_n(f) = \operatorname*{Min}_{T_n} \|f-T_n\|_p \text{ ile verilir ve}$$

$$E_n(f) = 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right) \text{ dir.}$$

SUMMARY

In this paper the degree of approximation of certain functions belonging to the class Lipα and Lip(α,p) by Nörlund means have been determined.

Let f be a periodic function with period 2π and integrable in the Lebesgue sense. Let it's Fourier series be given by

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

The conjugate series of the Fourier series is given by

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Let $\{p_n\}$ be a sequence of positive constants such that

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n \to \infty,\ n \to \infty$$

$T_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k$ are the (N,p_n) means of the Fourier series.

The degree of approximation of a periodic function f with period 2π and belonging to the class of Lipα is given by

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)-T_n(x)| = 0\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}}\right]$$

and the degree of approximation of conjugate series is

given by

$$|\tilde{f}(x)-\tilde{t}_n(x)| = 0\left[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{k^{1+\alpha}}\right]$$

The degree of approximation be given by

$$E_n(f) = \min_{T_n} \|f-T_n\|_p, \text{ if } f \text{ is a periodic function}$$

and belongs to the class Lip(α,p)

Then $E_n(f) = 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right)$.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Periyodik fonksiyonların yaklaşım dereceleri çeşitli araştırmacılar tarafından değişik yönleri ile incelenmiştir. Periyodik bir fonksiyonunun Fourier serisinin (c,δ) ortalaması yardımı ile yaklaşım derecesi ilk olarak Alexist [1] tarafından verilmiştir. Sahney ve Goel [6] (N,p_n) ortalaması yardımı ile, daha sonrada Chandra [2] (R,p_n) ortalaması yardımı ile periyodik fonksiyonların Fourier serilerinin yaklaşım derecesini incelemiştir.

Bu çalışmada (N,p_n) ortalaması yardımı ile 2π periyodlu Lebesgue anlamında integrallenebilen periyodik fonksiyonların yaklaşım dereceleri üzerinde durulmuştur. Çalışma üç bölümünden ibarettir. Birinci bölümde temel tanımlarla birlikte sonraki bölümlerde faydalanılan Lemmalar ifade ve ispat edilmiştir. Lipα ve Lip(α,p) sınıflarına ait 2π periyodlu periyodik fonksiyonların yaklaşım dereceleri İkinci bölümün esasını teşkil etmiştir. Üçüncü bölümde ise yine Lipα ve Lip(α,p) sınıflarına ait 2π periyodlu periyodik fonksiyonların konjugelerinin yaklaşım dereceleri verilmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

1. TEMEL TANIMLAR VE LEMMALAR

Bu bölümde genel olarak çalışmamızda faydalanacağımız tanım ve Lemmaları vereceğiz.

Tanım 1.1. : f fonksiyonu 2π periyodlu periyodik ve Lebesgue anlamında integrellenebilen bir fonksiyon olsun.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1.1)$$

ifadesine f fonksiyonunun x noktasındaki Fourier serisi denir [9]. Burada a_0, a_k, b_k reel x değişkeninden bağımsız katsayılardır ve bunlar

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\, du \qquad (1.2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \cos ku\, du \qquad (1.3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \sin ku\, du \qquad (1.4)$$

şeklindedirler.

Tanım 1.2. : $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx)$ (1.5)

şeklindeki serilere (1.1) serisinin konjuge serisi denir [9].

Tanım 1.3. : Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan Σa_n sonsuz serisi verilmiş olsun. (p_n), $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \to \infty$, $n \to \infty$ olacak şekilde pozitif reel sabitlerin bir dizisini göstermek üzere Σa_n serisinin (N, p_n) ortalamasını T_n ile gösterelim. Burada

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, s_k$$

dır.

Eğer $\lim_{n \to \infty} T_n = s$ ise Σa_n serisi veya bunun kısmi toplamlar dizisi olan (s_n), s değerine (N, p_n) toplanabilirdir denir [6].

Diğer taraftan bu (N, p_n) metodunun matrisini şu şekilde yazabiliriz.

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k+1}}{P_n}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Tanım 1.4. (Hölder Eşitsizliği) : $p > 1$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu L^p nin, $g(x)$ fonksiyonu $L^{p/p-1}$ nin elemanı ise

$f(x).g(x)$ L nin elemanıdır ve

$$| \int f(x).g(x)\ dx| \leqslant \{\int |f(x)|^{p}\ dx\}^{1/p} \{\int |g(x)|^{p/p-1} dx\}^{p-1/p}$$

dir [8] .

Tanım 1.5. (Minkowski Eşitsizliği) : $p > 1$ olmak üzere $f(x)$ ve $g(x)$ L^{p} nin elemanları olan iki fonksiyon ise

$$\{\int |f(x) + g(x)|^{p}\ dx\}^{1/p} \leqslant \{\int |f(x)|^{p}\ dx\}^{1/p} + \{\int |g(x)|^{p}\ dx\}^{1/p}$$

dir [8].

Tanım 1.6. : Eğer $0 < \alpha \leqslant 1$ için $f(x+h)-f(x) = O(|h|^{\alpha})$ ise f fonksiyonuna Lipα sınıfına aittir denir ve $f \in$ Lipα şeklinde gösterilir [2].

Tanım 1.7. : Eğer $a \leqslant x \leqslant b$ için

$$\{\int_{a}^{b} |f(x + h)-f(x)|^{p}\ dx\}^{1/p} \leqslant A|h|^{\alpha},\ 0 < \alpha \leqslant 1$$

ise f fonksiyonu Lip (α,p) sınıfına aittir denir ve $f \in$ Lip (α,p) şeklinde gösterilir [3].

Tanım 1.8. : f fonksiyonunun normu $p \geqslant 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{p} = \{\int_{0}^{2\pi} |f(x)|^{p}\ dx\}^{1/p}$$

şeklinde verilir [7].

Tanım 1.9. : f fonksiyonunun yaklaşım derecesi $E_n(f)$ ile gösterilir ve $E_n(f) = \underset{T_n}{\mathrm{Min}} \| f-T_n \|_p$ şeklinde verilir Burada $T_n(x)$, n.dereceden bir trigonometrik polinomdur [7].

Lemma 1.10. $\{p_n\}$ pozitif ve artmayan bir dizi ise $\alpha > 0$ için

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}}$$

dır [6].

İspat : Madem ki $\{p_n\}$ pozitif ve artmayan bir dizidir. Bu durumda $\{\frac{P_n}{n}\}$ dizisi de pozitif ve artmayan bir dizidir. Bu taktirde

$$\frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{P_n} \frac{P_n}{n} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \cdot n$$

$$= \frac{1}{P_n} \frac{P_n}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} (1) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n}{n^{\alpha+1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{\alpha+1}}$$

O halde

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{\alpha+1}}$$

elde edilir.

Lemma 1.11.: $\{p_n\}$, pozitif ve artmayan bir dizi, $0 \leqslant t \leqslant \pi$ ve herhangi bir n,a,b için

$$\left| \sum_{k=a}^{b} p_k \, e^{i(n-k)t} \right| \leq A \, P_\tau$$

dur [3]. Burada A bir sabit ve $\tau = [\frac{\pi}{t}]$ dir.

Lemma 1.12. Eğer $f(x)$, $[0,\pi]$ aralığı üzerinde Lip (α,p) sınıfına ait bir fonksiyon ise

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

olmak üzere $\phi(t)$ de $[0,\pi]$ aralığı üzerinde Lip (α,p) sınıfının bir elemanıdır [3].

İspat : $\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$

$$\phi(t+h) = f(x+t+h) + f(x-t-h) - 2f(x)$$

$$\phi(t+h) - \phi(t) = [f(x+t+h) + f(x-t-h) - 2f(x)] - [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]$$

$$= f(x+t+h) - f(x+t) + f(x-t-h) - f(x-t)$$

elde edilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|\phi(t+h) - \phi(t)| \leq |f(x+t+h) - f(x+t)| + |f(x-t-h) - f(x-t)|$$

olur.

Minkowski Eşitsizliği uygulanırsa; $p > 1$ olmak üzere

$$\left\{\int_0^\pi |\phi(t+h) - \phi(t)|^p \, dt\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_0^\pi |f(x+t+h) - f(x+t)|^p \, dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_0^\pi |f(x-t-h) - f(x-t)|^p \, dx\right\}^{1/p}$$

elde edilir. Lip (α,p) nin tanımından

$$\{\int_0^{\pi} |f(x+t+h)-f(x+t)|^p \, dx\}^{1/p} \leq A_1 |h|^{\alpha}, 0<\alpha\leq 1$$

ve

$$\{\int_0^{\pi} |f(x-t-h)-f(x-t)|^p \, dx\}^{1/p} \leq A_2 |h|^{\alpha}, 0<\alpha\leq 1$$

yazılırsa

$$\{\int_0^{\pi} |\phi(t+h)-\phi(t)|^p \, dt\}^{1/p} \leq A_1|h|^{\alpha} + A_2|h|^{\alpha}$$

$$= A|h|^{\alpha}, \quad 0<\alpha\leq 1$$

olur.

Lemma 1.13.: $f(x)$, $p \geq 1$, $0<\alpha\leq 1$ için Lip (α,p) sınıfına ait bir fonksiyon ise $\alpha p > 1$ olduğunda $f(x)$ fonksiyonu Lip $(\alpha-\frac{1}{p})$ sınıfının bir fonksiyonuna denktir [3].

İKİNCİ BÖLÜM

2. LİPα VE LİP (α, p) SINIFLARINA AİT PERİYODİK FONKSİYONLARIN YAKLAŞIM DERECELERİ

Bu bölümde Lipα ve Lip (α, p) sınıflarına ait 2π periyodlu periyodik bir fonksiyonun yaklaşım derecesi ile ilgili iki teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 2.1. : Lipα sınıfına ait 2π periyodlu periyodik f fonksiyonunun yaklaşım derecesi

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} | f(x) - T_n(x) | = 0\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k^{\alpha+1}}\right)$$

olarak verilir [6].

Burada $T_n(x)$ Fourier serisinin (N, p_n) ortalaması ve $\{p_n\}$ pozitif ve artmayan bir dizidir.

İspat : $$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.1)$$

serisinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $s_n(x)$ olsun.

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (2.2)$$

olur. a_0, a_k, b_k katsayıları yerine (1,2), (1,3), (1,4) eşitlikleri alınırsa

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\,du + \sum_{k=1}^{n} \{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \cos ku \cos kx \, du$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \sin ku \sin kx \, du\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos ku \cos kx + \sin ku \sin kx)\ f(u)\,du\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(u-x)\}\ f(u)\,du \qquad (2.3)$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(u-x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2} (u-x)}$$

olduğunu gösterelim.

$u-x = v$ dersek

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kv = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})v}{2 \sin \frac{1}{2} v}$$

olur.

$$\text{Coskv.Sin}\ \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} [\text{Sin}(k + \frac{1}{2})v - \text{Sin}(k - \frac{1}{2})v]$$

dir. k ya 1 den n'e kadar değerler verilirse

$$\cos v \sin \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} [\text{Sin}(1 + \frac{1}{2})v - \text{Sin}(1 - \frac{1}{2})v]$$

$$\text{Cos}2v \ \text{Sin} \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} [\text{Sin}(2 + \tfrac{1}{2})v - \text{Sin}(2 - \tfrac{1}{2})v]$$

$$\text{Cos}3v \ \text{Sin} \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} [\text{Sin}(3 + \tfrac{1}{2})v - \text{Sin}(3 - \tfrac{1}{2})v]$$

. . . .

. . . .

$$\text{Cos}nv \ \text{Sin} \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} [\text{Sin}(n + \tfrac{1}{2})v - \text{Sin}(n - \tfrac{1}{2})v]$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\text{Sin} \tfrac{1}{2} v \sum_{k=1}^{n} \text{Cos}kv = \tfrac{1}{2} [\text{Sin}(n + \tfrac{1}{2})v - \text{Sin} \tfrac{1}{2} v]$$

$$\text{Sin} \tfrac{1}{2} v \sum_{k=1}^{n} \text{Cos}kv = \tfrac{1}{2} \text{Sin}(n + \tfrac{1}{2})v - \tfrac{1}{2} \text{Sin} \tfrac{1}{2} v$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos}kv = \frac{\text{Sin}(n + \frac{1}{2})v}{2 \ \text{Sin} \frac{1}{2} v}$$

Şimdi $v = u-x$ yazılırsa

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{Cos}k(u-x) = \frac{\text{Sin}(n + \frac{1}{2})(u-x)}{2\text{Sin} \frac{1}{2} (u-x)}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu eşitlik (2.3) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{Sin}(n + \frac{1}{2})(u-x)}{2\text{Sin} \frac{1}{2} (u-x)} . f(u) \, du$$

bulunur. Bu ifade de $u-x = t$ dönüşümü yapılırsa

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} \frac{\text{Sin}(n + \frac{1}{2})t}{2 \ \text{Sin} \frac{1}{2} t} f(x + t) \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} f(x+t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \right] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} f(x+t)\, dt \tag{2.4}$$

$$= H_1 + H_2$$

diyelim.

(2.4) ifadesindeki H_2 integralinde $t = -v$ dönüşümü yapılırsa

$$H_2 = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{\sin\frac{1}{2}v} f(x-v)\, dv$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{0} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{\sin\frac{1}{2}v} f(x-v)\, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{\sin\frac{1}{2}v} f(x-v)\, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} f(x-t)\, dt$$

dir. O zaman (2.4) eşitliği

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} [f(x+t) + f(x-t)]\, dt \tag{2.5}$$

şeklini alır. (2.5) te $f(x) = 1$ alınırsa $s_n(x) = 1$ olur.

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\, 2\, dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\, 2 f(x)\, dt \tag{2.6}$$

Tanım 1.3.'ten

$$T_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, s_k$$

$$T_n(x)-f(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, s_k - f(x)$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, (s_k - f(x)) \qquad (2.7)$$

(2.7) ifadesinde (2.5) ve (2.6) ifadeleri kullanılırsa

$$T_n(x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} .[f(x+t)+f(x-t)]\, dt \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} .\, 2f(x)\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} dt \right\}$$

Diğer taraftan

$$\frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] = \phi(t)$$

denirse

$$T_n(x)-f(x) = \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi} \phi(t) \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} dt$$

$$|f(x)-T_n(x)| = \left| \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi} \phi(t) \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi/n} \frac{|\phi(t)|}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \sin(k+\tfrac{1}{2})t \right| dt$$

$$+ \frac{1}{\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \operatorname{sinkt} \right| dt$$

$$+ \frac{1}{\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} |\phi(t)| \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \operatorname{Coskt} \right| dt$$

olur.

$$|f(x)-T_n(x)| \leqslant I_1 + I_2 + I_3$$

diyelim.

$$I_1 = \frac{1}{\pi P_n} \int_0^{\pi/n} \frac{|\phi(t)|}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \sin(k+\tfrac{1}{2})t \right| dt$$

$$\max I_1 \leqslant K_1 \int_0^{\pi/n} \frac{t^{\alpha}}{t}\, dt$$

$$= K_1 \left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right]_0^{\pi/n}$$

$$= 0\left[\frac{1}{n^{\alpha}}\right]$$

Burada Lemma 1.10 dikkate alınırsa

$$I_1 = 0\left[\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{1+\alpha}}\right] \qquad (2.8)$$

olur.

$$I_2 = \frac{1}{\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \sin(kt) \right| dt$$

$$\max I_2 \leqslant \frac{K_2}{P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} t^{\alpha-1}\, p_{\tau}\, dt$$

$$= 0[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{P_u}{u^{1+\alpha}}\,du]$$

$$= 0[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{1+\alpha}}] \tag{2.9}$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi P_n}\int_{\pi/n}^{\pi}|\phi(t)|\ |\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\ \cos kt\ |\,dt$$

$$= 0[\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{1+\alpha}}] \tag{2.10}$$

(2.8), (2.9), (2.10) birlikte düşünülürse

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f(x)-T_n(x)| = 0\ [\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{1+\alpha}}]$$

bulunur ki, bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.2. : $0 < \alpha \leq 1$ için $f(x)$, Lip (α,p) sınıfına ait periyodik bir fonksiyon ve $\{p_n\}$ negatif olmayan, artmayan ve

$$P_n = P(n) = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \to \infty,\ n \to \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizi olmak üzere

$$[\int_1^n \frac{(p(y))^q}{y^{q\alpha+2-q}}\,dy]^{1/q} = 0\ [\frac{P(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{q}-1}}]$$

ise f fonksiyonunun yaklaşım derecesi

$$E_n(f) = \min_{T_n}\|f-T_n\|_p$$

$$= 0(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}})$$

dir. Burada $T_n(x)$, (2.1) serisinin (N,p_n) ortalamasıdır [7].

İspat : Teorem 2.1.'deki ispat şeklini aynen takip edersek

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} [f(x+t) + f(x-t)]\,dt$$

bulunur.

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{2\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\, 2f(x)\,dt$$

Tanım 1.3.'den

$$T_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, s_k$$

olduğuda dikkate alınırsa

$$T_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi P_n} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$\frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] = \phi(t)$$

denilirse

$$T_n(x)-f(x) = \frac{2}{\pi P_n} \int_0^{\pi} \phi(t) \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \frac{\operatorname{Sin}(k+\frac{1}{2})t}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t} dt$$

$$= 0(1) \frac{2}{\pi P_n} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n-k)t \, dt$$

$$= 0(1) \frac{2}{\pi P_n} \left[\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^{\pi} \right] \frac{\phi(t)}{t} \sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n-k)t \, dt$$

$$= I_1 + I_2$$

diyelim.

$$I_1 = \frac{2}{\pi P_n} \int_0^{\pi/n} \frac{\phi(t)}{t} \sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n-k)\, t \, dt$$

Bu ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanırsa ve

$\phi(t) \in Lip\ (\alpha,p)$ olduğu dikkate alınırsa

$$I_1 = 0(\frac{1}{P_n}) \left[\int_0^{\pi/n} \left| \frac{\phi(t)}{t^{\alpha}} \right|^p dt \right]^{1/p} \left[\int_0^{\pi/n} \left| \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n-k)t}{t^{1-\alpha}} \right|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n}) \left[\int_0^{\pi/n} \left| \frac{t^{\alpha-\frac{1}{p}}}{t^{\alpha}} \right|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{\pi/n} \left[\frac{0[P_n.nt]}{t^{1-\alpha}} \right]^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n}) 0(1) 0(P_n) 0(n) 0 \left[\int_0^{\pi/n} \left\{ \frac{t}{t^{1-\alpha}} \right\}^q dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= 0(n) \, 0 \left[\int_0^{\pi/n} t^{\alpha q} \, dt \right]^{1/q}$$

$$= 0(n) \quad 0 \left[t^{\alpha q+1} \Big|_0^{\pi/n} \right]^{1/q}$$

$$= 0(n)\, 0\left[\frac{1}{n^{\alpha q+1}} \right]^{1/q}$$

$$= O(n)\,O\left[\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{q}}}\right]$$

$$= O\left(\frac{n}{n^{\alpha+\frac{1}{q}}}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1+\frac{1}{q}}}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right) \qquad (2.11)$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi P_n}\int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sum_{k=0}^{n} p_k \sin(n-k)t\, dt$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$I_2 = O\left(\frac{1}{P_n}\right)\left[\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\frac{\phi(t)}{t^{\alpha}}\right|^p dt\right]^{1/p}\left[\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k \sin(n-k)t}{t^{1-\alpha}}\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

olur.

Lemma 1.11, Lemma 1.12 ve Lemma 1.13 dikkate alınırsa

$$I_2 = O\left(\frac{1}{P_n}\right)O(1)\left[\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\frac{P\left(\frac{\pi}{t}\right)}{t^{1-\alpha}}\right|^q dt\right]^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)O\left[\int_{1}^{n}\left(\frac{P(y)}{y^{\alpha-1}}\right)^q \frac{dy}{y^2}\right]^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_n}\right)\left[\int_{1}^{n}\frac{P(y)}{y^{\alpha q-q+2}}\,dy\right]^{1/q}$$

elde edilir. Diğer taraftan hipotez gereğince

$$I_2 = O\left(\frac{1}{P_n}\right) O\left[\frac{P(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{q}-1}}\right]$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right) \qquad (2.12)$$

dır.

(2.11) ve (2.12) eşitlikleri birlikte düşünülür ve Tanım 1.9.'da gözönüne alınırsa

$$E_n(f) = \underset{T_n}{\mathrm{Min}} \|f-T_n\|_p$$

$$= O\left[\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{q}}}\right]$$

bulunur ki, bu da teoremin ispatını tamamlar.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. LİPα VE LİP (α,p) SINIFLARINA AİT PERİYODİK FONKSİYONLARIN KONJUGELERİNİN YAKLAŞIM DERECELERİ

Bu bölümde Tanım 1.2. ile verilen konjuge serisinin (N,p_n) ortalaması yardımiyle yaklaşım derecesi üzerinde durulmuştur. 2π periyodlu periyodik bir f fonksiyonunun Lipα ve Lip $(\alpha;p)$ sınıflarına ait oluşlarına göre iki teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 3.1. : $\{p_n\}$,

$$n|p_n| < c|P_n|$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} k|p_k-p_{k-1}| < c|P_n|$$

şartlarını sağlayan bir dizi olmak üzere Lipα sınıfına ait 2π periyodlu periyodik f fonksiyonunun $\widetilde{f(x)}$ konjuge fonksiyonunun (N,p_n) ortalaması yardımıyle yaklaşım derecesi

$$|\tilde{f}(x)-\tilde{t}_n(x)| = 0\left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k}{k^{\alpha+1}}\right)$$

ile verilir.

Burada $\widetilde{t_n}(x)$ Tanım 1.2. ile verilen konjuge serisinin (N,p_n) ortalamasıdır [4].

İspat : $\tilde{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ (3.1)

serisinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $\tilde{s_k}(x)$ olsun. Yani,

$$\tilde{s_k}(x) = \sum_{n=1}^{k} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \qquad (3.2)$$

a_n, b_n katsayıları yerine (1.3), (1.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tilde{s_k}(x) = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u) \sin nu \cos nx \, du - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u). \cos nu \sin nx \, du\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{k} (\sin nu \cos nx - \cos nu \sin nx) f(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{k} \sin n(u-x)\, f(u)\, du \qquad (3.3)$$

elde edilir. Şimdi

$$\sum_{n=1}^{k} \sin n(u-x) = \frac{\cos\frac{1}{2}(u-x) - \cos(k+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}$$

olduğunu gösterelim.

$u-x = v$ dersek

$$\sum_{n=1}^{k} \sin nv = \frac{\cos\frac{1}{2}v - \cos(k+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{1}{2}v}$$

olur.

$$\sin nv \cdot \sin\frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}\left[\cos(n+\frac{1}{2})v - \cos(n-\frac{1}{2})v\right]$$

dir. n'e 1 den k ya kadar değerler verilirse

$$\sin v.\sin\frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}\left[\cos(1+\frac{1}{2})v - \cos(1-\frac{1}{2})v\right]$$

$$\sin 2v.\sin\frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}\left[\cos(2+\frac{1}{2})v - \cos(2-\frac{1}{2})v\right]$$

. . . .

. . . .

$$\sin kv.\sin\frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}\left[\cos(k+\frac{1}{2})v - \cos(k-\frac{1}{2})v\right]$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sin\frac{1}{2}v \sum_{n=1}^{k} \sin nv = -\frac{1}{2}\left[\cos(k+\frac{1}{2})v - \cos\frac{1}{2}v\right]$$

$$\sum_{n=1}^{k} \sin nv = \frac{\cos\frac{1}{2}v - \cos(k+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{1}{2}v}$$

Şimdi v yerine u-x yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{k} \sin n(u-x) = \frac{\cos\frac{1}{2}(u-x) - \cos(k+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu eşitlik (3.3) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\tilde{s}_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}(u-x) - \cos(k+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)} f(u)du$$

bulunur. Bu ifade de u-x = t dönüşümü yapılırsa

$$\widetilde{s_k}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} f(x+t)\,dt$$

$$\tilde{s_k}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} f(x+t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \right] \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} f(x+t)\,dt \qquad (3.4)$$

$$= E_1 + E_2$$

diyelim.

(3.4) ifadesindeki E_2 ifadesinde $t = -v$ dönüşümü yapılırsa

$$E_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-2\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}v-\cos(k+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{1}{2}v} f(x-v)\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} \frac{\cos\frac{1}{2}v-\cos(k+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{1}{2}v} f(x-v)\,dv$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}v-\cos(k+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{1}{2}v} f(x-v)\,dv$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} f(x-t)\,dt$$

dir. O zaman (3.4) eşitliği

$$\widetilde{s_k}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} f(x+t)\,dt$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} f(x-t)\,dt$$

$$\tilde{s}_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}t - \operatorname{Cos}(k+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}[f(x+t)-f(x-t)]\,dt \qquad (3.5)$$

şeklini alır.

$$\tilde{s}_k(x) - \tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Cos}(k+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}[f(x+t)-f(x-t)]\,dt$$

$$f(x+t)-f(x-t) = \psi(t)$$

denirse

$$\tilde{s}_k(x) - \tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\frac{\operatorname{Cos}(k+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,dt$$

Tanım 1.3.'den

$$\tilde{t}_n(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\,\tilde{s}_k(x)$$

$$\tilde{t}_n(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}[\tilde{s}_k(x) - \tilde{f}(x)]$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{\operatorname{Cos}(k+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,dt\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\operatorname{Cos}(k+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{t}_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\psi(t)|}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\left|\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\cos(k+\frac{1}{2})t\right|dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^{\pi}\right]\frac{|\psi(t)|}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\left|\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\cos(k+\frac{1}{2})t\right|dt$$

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{t}_n(x)| \leqslant I_1 + I_2$$

diyelim.

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/n} \frac{|\psi(t)|}{2\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}t} \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\frac{1}{2})t \right| dt$$

$\psi(t) \in \mathrm{Lip}\alpha$, $1/\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}t = 0(\frac{1}{t})$, $\left| \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\frac{1}{2})t \right| \leqslant 1$ [4].

olduğu gözönüne alınırsa

$$I_1 = 0\left(\int_0^{\pi/n} \frac{t^\alpha}{t}\,dt\right)$$

$$= 0\left(t^\alpha \Big|_0^{\pi/n}\right)$$

$$= 0\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Lemma 1.10.'dan dolayı ise

$$I_1 = 0\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{\alpha+1}}\right) \tag{3.6}$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{2\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}t} \left| \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\frac{1}{2})t \right| dt$$

$\psi(t) \in \mathrm{Lip}\alpha$ olduğundan

$$I_2 = 0\left(\frac{1}{P_n}\right) \int_{\pi/n}^{\pi} t^{\alpha-1} \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\frac{1}{2})t \right| dt$$

Lemma 1.11. dikkate alınırsa

$$I_2 = 0\left(\frac{1}{P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} t^{\alpha-1}\, P\left(\frac{\pi}{t}\right) dt\right)$$

olur. Burada $\frac{\pi}{t} = y$ dönüşümü yapılırsa

$$I_2 = 0\left(\frac{1}{P_n} \int_{1}^{n} \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha+1} P(y)\, dy\right)$$

$$I_2 = 0\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{\alpha+1}}\right) \qquad (3.7)$$

(3.6) ve (3.7) ifadeleri birlikte düşünülürse

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{t_n}(x)| = 0\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{k^{\alpha+1}}\right)$$

olur ki, bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi de Lip (α,p), $0 < \alpha \leqslant 1$ sınıfına ait f fonksiyonunun konjugesinin yaklaşım derecesine ait bir teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.2. : $0 < \alpha \leqslant 1$ için $f(x)$, Lip (α,p) sınıfına ait periyodik bir fonksiyon ve $\{p_n\}$

$$n|p_n| < c|P_n|$$

$$\sum_{k=1}^{n} k|p_k - p_{k-1}| < c|P_n|$$

şartlarını sağlayan bir dizi olmak üzere

$$\left(\int_{1}^{n} \frac{P(y)^q\, dy}{y^{\alpha q+2+\delta q-q}}\right)^{1/q} = 0\left(\frac{P(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{q}+\delta-1}}\right)$$

ise

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{t_n}(x)\|_p = 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right)$$

dir.

Burada $\tilde{t}_n(x)$ Tanım 1.2. ile verilen konjuge serinin (N,p_n) ortalamasıdır. Ayrıca $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1 \leq p < \infty$ ve δ, $q(1-\delta)-1 > 0$ şartını sağlayan pozitif keyfi bir sayıdır [5].

İspat : Teorem 3.1. in ispatındaki benzer yol takip edilirse

$$\tilde{f}(x)-\tilde{t}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\cdot \frac{\operatorname{Cos}(k+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,dt$$

elde edilir.

$$\psi(t) = f(x+t)-f(x-t)$$

yazılırsa

$$\tilde{f}(x)-\tilde{t}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\frac{\operatorname{Cos}(k+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi P_n}\left(\int_0^{\pi/n}+\int_{\pi/n}^{\pi}\right)\frac{\psi(t)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\cdot \cos(k+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$= I_1 + I_2$$

diyelim.

$$I_1 = \frac{1}{2\pi P_n}\int_0^{\pi/n}\frac{\psi(t)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}t}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\cos(k+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

Bu ifadeye Hölder Eşitsizliğini uygulanır ve Lemma 1.13 dikkate alınırsa

$$I_1 \leqslant \frac{1}{2\pi P_n} \left\{ \int_0^{\pi/n} \left(\frac{t|\psi(t)|}{t^\alpha}\right)^p dt\right\}^{1/p} \left\{ \int_0^{\pi/n} \left(\frac{1}{\mathrm{Sin}(\frac{t}{2})\, t^{1-\alpha}} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left.\left|\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\tfrac{1}{2})t\right|\right)^q dt\right\}^{1/q}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n})\, 0 \left\{ \int_0^{\pi/n} \left(\frac{t.t^{\alpha-\frac{1}{p}}}{t^\alpha}\right)^p dt\right\}^{1/p} 0\left\{ \int_0^{\pi/n} \left(\frac{1}{t^{2-\alpha}} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\tfrac{1}{2})t\right)^q dt\right\}^{1/q}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n})\, 0\left(\int_0^{\pi/n} t^{p-1}\, dt\right)^{1/p} 0(P_n)\, 0\left[\int_0^{\pi/n} (t^{\alpha q-2q})\, dt\right]^{1/q}$$

$$= 0(\frac{1}{n})\, 0(\frac{1}{n})^{\alpha-2+\frac{1}{q}}$$

$$= 0(\frac{1}{n})^{\alpha-1+\frac{1}{q}}$$

$$= 0\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right) \tag{3.9}$$

bulunur.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi P_n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\psi(t)}{\mathrm{Sin}\,\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\tfrac{1}{2})t\, dt$$

Yine bu ifadeye de Hölder Eşitsizliği uygulanır ve Lemma 1.13. dikkate alınırsa

$$I_2 = 0(\frac{1}{P_n}) \left\{ \int_{\pi/n}^{\pi} \left(\frac{t^{-\delta}\, |\psi(t)|}{t^\alpha}\right)^p dt\right\}^{1/p} \left\{ \int_{\pi/n}^{\pi} \left(\frac{1}{t^{1-\delta-\alpha}} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cos(k+\tfrac{1}{2})t\right)^q dt\right\}^{1/q}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n}) \{ \int_{\pi/n}^{\pi} (\frac{t^{-\delta} t^{\alpha-\frac{1}{p}}}{t^{\alpha}})^p dt\}^{1/p} \{ \int_{\pi/n}^{\pi} (\frac{1}{t^{1-\delta-\alpha}} \cdot P(\frac{\pi}{t}))^q dt\}^{1/q}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n}) \{ \int_{\pi/n}^{\pi} t^{-\delta p-1} dt\}^{1/p} \{ \int_1^n (\frac{P(y)}{y^{\alpha+\delta-1}})^q \frac{dy}{y^2}\}^{1/q}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n}) \{ \int_{\pi/n}^{\pi} t^{-\delta p-1} dt\}^{1/p} \{ \int_1^n \frac{P(y)^q}{y^{\alpha q+\delta q-q+2}} dy\}^{1/q}$$

$$= 0(\frac{1}{P_n}) 0(\frac{1}{n})^{-\delta} 0(\frac{P(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{q}+\delta-1}})$$

$$= 0(\frac{1}{n^{\alpha-1+\frac{1}{q}}})$$

$$= 0(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}) \qquad (3.10)$$

elde edilir.

Nihayet (3.9) ve (3.10) birlikte düşünülürse

$$\tilde{f}(x)-\tilde{t}_n(x) = 0(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}})$$

bulunur. Böylece

$$\|\tilde{f}(x)-\tilde{t}_n(x)\|_p = 0[(\int_0^{2\pi} (\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}})^p dx)^{1/p}]$$

$$= 0[\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}} (\int_0^{2\pi} (1)^p dx)^{1/p}]$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{p}}}\right)$$

bulunmuş olur ki, buda teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

[1] G.Alexist "Convergence Problems of Ortogonal Series" Pergamon Press. London (1961).

[2] P. Chandra "On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class" Nanta Math. 8, 88-91 (1975).

[3] L. McFadden "Absolute Nörlund Summability" Duke Math. J. 9. 168-207 (1942).

[4] K. Qureshi "On the degree of approximation of functions belonging to the Lipschitz class by means of Conjugate series" Indian J.Pure appl. Math. 12(9), 1120-1123, (1981).

[5] K. Qureshi "On the degree of approximation of functions belonging to the class Lip (α,p) by means of a conjugale series" Indian J.Pure appl. Math. 13(5), 560-563, (1982).

[6] B.N. Sahney and D.S. Goel "On the degree of Approximation of Continuons functions" Ranchi Üniv. Math. Jour Vol.4, 50-53 (1973).

[7] B.N. Sahney and V.Venu Gopal Rao "Error bounds in the approximation of functions" Bull.Austral Math. soc. Vol.6, 11-18 (1972).

[8] E.C. Titchmarsh "The Theory of functions" Oxford (1939).

[9] A.Zygmund "Trigonometric Series" Vol.I. 2nd. Ed. Cambridge University Press Cambridge (1959).