HAUSDORFF TOPLANABİLME

Osman MUCUK

Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi
Olarak Sunulmuştur

KAYSERİ - 1988

Erciyes Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

24/ 5 /1988

Başkan : Prof. Dr. Mehmet PALAMUTOĞLU

Üye : Prof. Dr. Ekrem Öztürk......

Üye : Y. Doç. Dr. Hüseyin Çakallı.....

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım

18 / 5 /1988

Enstitü Müdürü

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve soyadı	:	Osman MUCUK
Baba adı	:	Mehmet
Ana adı	:	Zeliha
Doğum yeri	:	Pınarbaşı
Doğum tarihi	:	1961

İlkokulu Yedioluk, Pınarbaşı İlkokulunda, ortayı Kayseri Kadıburhanettin Ortaokulunda, Liseyi Kayseri Lisesinde tamamladı. 1981 yılında Malatya İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt oldu. 1985 de mezun olup, Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde master programına başladı.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana veren, kaynak bulmamda bana yardımcı olan ve tüm çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın Hocam Yrd.Doç.Dr.Hüseyin ÇAKALLI'ya teşekkür eder, minnet ve şükranlarımı sunarım.

Osman MUCUK

KAYSERİ, 1987

ÖZET

Bu tezde Hausdorff matrisleri ile ilgili şimdiye kadar yayınlanmış olan makaleler genel olarak ele alınmıştır. Birinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde diziden diziye ve seriden seriye Hausdorff metotları ile ilgili genel teoremler ispat edilmiştir. Aynı zamanda Hardy eşitsizliği ve ters Hardy eşitsizliğinin ispatları da verilmiştir.

Son bölümde ise Leininger, Endl, Harrel ve Jakimowski genelleştirmeleri arasındaki bazı özellikler verilmiş ve Leininger Genelleştirilmiş Hausdorff ortalamaları için konservatiflik, regülerlik ile çarpımsallık koşulları araştırılmıştır.

S U M M A R Y

In this thesis, the papers, concerning Hausdorff matrices, published so far are generally studied. In the first chapter we give the definitions and theorems which will be used through the other chapters.

In the second chapter, general theorems about sequence to sequence and series to series Hausdorff methods are proved. We also give the proofs of Hardy's inequality and Hardy's reversed inequality.

In the last chapter, certain relations between the generalizations of Leininger, Endl, Harrell and Jakimowski are given and the conditions of conservativity, regularity and multiplicavity of Leininger Generalised Hausdorrf means are investigated.

İ Ç İ N D E K İ L E R

B Ö L Ü M - I

ÖN BİLGİLER

1. GİRİŞ

Bu kesimde, diziden - diziye ve seriden - seriye matris dönüşümlerinin genel tanımları ile birlikte bazı temel teoremler vereceğiz.

K, reel yada kompleks sayılar cismini göstersin. $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ olmak üzere Kompleks terimli sonsuz bir $A = (a_{n,k})$ matrisi ve K da bir $s=(s_n)$ dizisi verilsin. Bu takdirde (t_n) dizisini

$$(1) \qquad t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, s_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ile tanımlayalım. $(t_n) = A(s_n)$ dizisine (s_n) dizisinin A-dönüşüm dizisi ve A ya da diziden - diziye bir dönüşüm denir. Dönüşümün tanımlı olması için (1) in sağ tarafındaki serinin her n için yakınsak olması gerekir.

X, Y herhangi iki dizi uzayını göstermek üzere X den Y içine tüm A dönüşümlerinin cümlesini (X,Y) ile göstereceğiz.

Teorem 1.1.1. c tüm yakınsak dizilerin cümlesi olmak üzere $A \in (c,c)$ olması için gerek ve yeter koşullar ;

(2) $\sup_{n} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = \delta_k$, $k = 0, 1, 2,\ldots$ için mevcut

(4) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \delta$ mevcut

olup, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ise (s_n) nin A-dönüşümü (t_n) olmak üzere

(5) $\lim_{n\to\infty} t_n = s\,(\delta - \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k\, s_k$

dır. Bu teoremin koşullarını sağlayan bir $A = (a_{n,k})$ matrisine diziden-diziye konservatiftir denir. Eğer özel olarak $k = 0, 1, 2,\ldots$ için $\delta_k = 0$ ise A ya çarpımsaldır denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s\,\delta$$

dır.

Teorem 1.1.2. Bir $A = (a_{n,k})$ matrisinin yakınsak her bir diziyi, yine yakınsak bir diziye aynı limit ile dönüştürmesi için gerek ve yeter koşullar ; Teorem 1.1.1 in (2) koşulu ile birlikte

(3') $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$, $k = 0, 1, 2,\ldots$

(4') $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$

dır.

Bu teoremin koşullarını sağlayan bir $A = (a_{n,k})$ matrisine diziden - diziye regülerdir denir ve $A \varepsilon (c, c ; p)$ olarak yazılır.

Teorem 1.1.3. $A \varepsilon (c_0, c_0)$ olması için gerek ve yeter koşullar ; Teorem 1.1.1. in (2) ve Teorem 1.1.2. nin (3') koşullarıdır.

Teorem 1.1.4. $A \varepsilon (c_0, c)$ olması için gerek ve yeter koşullar ; Teorem 1.1.1. in (2) ve (3) koşullarıdır.

Teorem 1.1.5. $A \varepsilon (c, c_0)$ olması için gerek ve yeter koşullar ; Teorem 1.1.1. in (2) ve Teorem 1.1.2. nin (3') koşulları ile

$$(6) \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 0$$

Reel yada kompleks terimli sonsuz bir $B = (b_{n,k})$ matrisi ve bir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi verilsin. Bu takdirde (t_n) dizisini

$$(7) \quad t_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} a_k \quad , \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ile tanımlayalım. $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ serisine $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisinin B-dönüşüm serisi denir ve B ye de seriden - seriye bir dönüşüm adı verilir. Bu dönüşümün var olması için (7) nin sağ tarafındaki serinin her n için yakınsak olması gerekir. Bu durumda B ye $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisine uygulanabilirdir denir.

Teorem 1.1.6. γ yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı olmak üzere $B \varepsilon(\gamma, \gamma)$ olması için gerek ve yeter koşullar ; $G = (g_{n,k})$ matrisi $g_{n,k} = b_{0,k} + \ldots + b_{n,k}$ olarak tanımlanmak üzere

$$(8) \quad \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} | g_{n,k} - g_{n,k+1} | < \infty$$

$$(9) \quad \lim_{n \to \infty} g_{n,k} = \beta_k \quad , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{için mevcut.}$$

dır.

Bu teoremin koşullarını sağlayan bir B matrisine seriden-seriye konservatiftir denir.

Teorem 1.1.7. Bir $B = (b_{n,k})$ matrisinin yakınsak her bir seriyi, yine yakınsak bir seriye aynı toplam ile dönüştürmesi için gerek ve yeter koşullar ; $G = (g_{n,k})$ matrisi Teorem 1.1.6 daki gibi tanımlanmak üzere Teorem 1.1.6 nın (8) koşulu ile

$$(9') \quad \lim_{n\to\infty} g_{n,k} = 1, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

dır. Bu teoremin koşullarını sağlayan $B = (b_{n,k})$ matrisine seriden - seriye regülerdir denir, $B \in (\gamma, \gamma;\, p)$ olarak yazılır.

Teorem 1.1.8. $\ell = \{(x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$ olmak üzere $B \in (\ell, \ell)$ olması için gerek ve yeter koşul ;

$$(10) \quad \sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n,k}| < \infty$$

Teorem 1.1.9. Bir $B = (b_{n,k})$ matrisinin $B \in (\ell, \ell)$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin B- dönüşüm serisi olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ olması için gerek ve yeter koşullar ; Teorem 1.1.8. in (10) koşulu ile

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,k} = 1\,, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

dır.

Bu durumda $B \in (\ell, \ell;\, p)$ olarak yazılır.

Teorem 1.1.10. $bv = \{(x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| < \infty\}$ olmak üzere $B \in (bv, c)$ olması için gerek ve yeter koşullar ; Teorem 1.1.1 in (3) ve (4) koşulları ile

$$(12) \quad \sup_{n,m} \left| \sum_{k=0}^{m} b_{n,k} \right| < \infty$$

dır.

2. STİELTJES İNTEGRALİ

Tanım 1.2.1. f, g $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli fonksiyonlar olsun. $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ olacak şekilde $[a,b]$ nin bir parçalanması ve $|P| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olmak üzere

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i') \, [g(x_i) - g(x_{i-1})] , \quad x_i' \varepsilon [x_{i-1}, x_i] \quad , (i=1,2,\ldots,n)$$

limiti mevcut ise bu limite f nin g ye göre a dan b ye kadar Stieltjes integrali yada Riemann - Stieltjes integrali denir, $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ olarak yazılır [16] . Eğer $g(x) = x$ alınırsa bu integral f nin Riemann integrali olur.

Şimdi kullanılacak olan Stieltjes İntegralinin bazı özelliklerini vereceğiz ;

(1) Eğer her x için $f(x) = c$ yani f sabit bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = c(g(b) - g(a))$$

(2) Eğer g sabit bir fonksiyon ise $\int_a^b f(x)\, dg(x) = 0$

(3) f sürekli ve g, $[a,b]$ de sınırlı salınımlı ise $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ mevcuttur.

(4) f sürekli ve g, $[a,b]$ de sınırlı salınımlı olmak üzere $a < c < b$ ise

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^c f(x)\, dg(x) + \int_c^b f(x)\, dg(x)$$

(5) f_1 ve f_2 sürekli fonksiyonlar ve g, monoton artan olmak üzere her $x \,\varepsilon (a,b)$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ ise

$$\int_a^b f_1(x)\, dg(x) \leq \int_a^b f_2(x)\, dg(x)$$

(6) g, sürekli türeve sahip ve f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

(7) f_1 ve f_2 sürekli fonksiyonlar , g_1 ve g_2 ler $[a,b]$de sınırlı salınımlı ve k_1, k_2, L_1, L_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$\int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))d(L_1 g_1(x) + L_2 g_2(x)) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} k_i L_j \int_a^b f_i(x)\, dg_j(x)$$

(8) $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ olmak üzere

$$g(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq x_0 \\ a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}, & x_{k-1} < x < x_k \; ; \; k = 1,2,\dots n \\ a_0 + a_1 + \dots + a_n, & x_n \leq x \leq b \end{cases}$$

bir basamak fonksiyonu ise

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)$$

(9) $\int_a^b f(x)dg(x)$ mevcut ise $\int_a^b g(x)df(x)$ mevcut ve

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x)$$

olup, bu formüle kısmi integrasyon formülü denir.

3. MOMENT DİZİSİ VE TOTAL MONOTON DİZİLER

Bu kesimde moment dizisi ile total monoton dizinin tanımlarını vererek, bu iki dizi arasındaki ilişkiler üzerinde durulacaktır [3].

Tanım.1.3.1. g, $[0,1]$ de sınırlı salınımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun,

(1) $$d_n = \int_0^1 x^n dg(x) \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

olmak üzere $d = (d_n)$ ye bir moment dizisi denir. Burada $g(0) = 0$ ve x^0

fonksiyonu sıfırda sürekli yani $0^0=1$ olduğu kabul ediliyor. Eğer (1) koşuluna ilaveten

(2) $g(1) = 1$

ve $g(+o)$, g nin sıfırda sağdan limitini göstermek üzere

(3) $g(+o) = g(o) = 0$

ise $d=(d_n)$ ye regüler moment dizisi denir.

Lemma . 1.3.2. Moment dizilerinin toplam ve farkları moment dizisidir.

İspat. (d_n) ve (d_n') iki moment dizisi ise $d_n = \int_0^1 x^n dg_1$ ve $d_n' = \int_0^1 x^n dg_2$ olacak şekilde sınırlı salınımlı g_1 ve g_2 fonksiyonları vardır. Sınırlı salınımlı fonksiyonların toplam ve farkları sınırlı salınımlı olduğundan kesim 2 nin (7) özelliği de dikkate alınırsa

$$d_n+d_n' = \int_0^1 x^n dg + \int_0^1 x^n dg_2 = \int_0^1 x^n d(g_1+g_2)$$

$$d_n-d_n' = \int_0^1 x^n dg_1 - \int_0^1 x^n dg_2 = \int_0^1 x^n d(g_1-g_2)$$

olacağından (d_n+d_n') ve (d_n-d_n') moment dizileridir.

Tanım 1.3.3. (d_n) reel terimli bir dizi olsun. Δ, fark operatörü olup $\Delta d_n = d_n - d_{n+1}$, $\Delta^m d_n = \Delta(\Delta^{m-1} d_n)$ olmak üzere $n = 0,1,2, \ldots, m=0,1,2,\ldots$ için $\Delta^m d_n \geq 0$ ise (d_n) ye total monotondur denir.

Bazen $\Delta^m d_n = d_{n,m}$ olarak yazacağız.

Δ operatörünün (d_n) ye ardışık olarak m - defa uygulanmasıyla

(4) $$\Delta^m d_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} d_{n+k} \qquad n=0,1,2,\ldots,m=0,1,2,\ldots$$

elde edilir. Buna göre

$$(5) \qquad \Delta^m(d_n + d'_n) \leq \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (d_{n+k} + d'_{n+k})$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} d_{n+k} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} d'_{n+k}$$

$$= \Delta^m d_n + \Delta^m d'_n$$

Lemma 1.3.4. Total monoton iki dizinin toplamları ve çarpımları total monotondur.

İspat. (d_n) ve (d'_n) total monoton ise (5) den $(d_n + d'_n)$ total monotondur. Çarpımları için

$$\Delta\, d_n d'_n = d_n d'_n - d_{n+1}\, d'_{n+1} = d_n\, (d'_n - d'_{n+1}) + (d_n - d_{n+1})\, d'_{n+1}$$

$$= d_n \cdot \Delta d'_n + \Delta\, d_n \cdot d'_{n+1}\,,$$

$$\Delta^2 d_n\, d'_n = d_n\, \Delta^2 d'_n + 2\, \Delta d_n\, \Delta\, d'_{n+1} + \Delta^2\, d_n \cdot d'_{n+2} \qquad \text{ve}$$

ardışık olarak

$$\Delta^m\, d_n\, d'_n = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r}\, \Delta^r d_n\, \Delta^{m-r} d'_{n+r}$$

olduğundan $(d_n\, d'_n)$ total monotondur.

Teorem 1.3.5. Artan bir g fonksiyonunun moment dizisi total monotondur ve (d_n) moment dizisi iki total monoton dizinin farkı olarak yazılabilir.

İspat.

$$(6) \qquad \Delta^m\, d_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}\, d_{n+k}\,, \qquad \big((4) \quad \text{den}\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \int_0^1 x^{n+k}\, dg(x), \qquad \Big((1) \text{ den}\Big)$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} x^{n+k}\, dg(x)$$

$$= \int_0^1 x^n (1-x)^m\, dg(x)$$

kesim 2, (4) özelliğinden $\Delta^m d_n \geqslant 0$ olup, (d_n) total monotondur.

Diğerinin ispatı içinde (d_n) nin moment dizisi olduğunu varsayalım.Tanım 1.3.1 den $d_n = \int_0^1 x^n\, dg(x)$ olacak şekilde $[0,1]$ de sınırlı salınımlı bir g fonksiyonu vardır. Bu durumda P(x) ve N(x) sırasıyla g(x) in (0,x) de pozitif ve negatif varyasyonu olmak üzere g(x) = P(x) - N(x) ve P(x) ile N(x) monoton artandır. Kesim 2, (7) özelliğinden

$$d_n = \int_0^1 x^n\, dg(x) = \int_0^1 x^n\, dP(x) - \int_0^1 x^n\, dN(x)$$

dır. $\alpha_n = \int_0^1 x^n\, dP(x)$, $\beta_n = \int_0^1 x^n\, dN(x)$ dersek $d_n = \alpha_n - \beta_n$ olur. P(x) ve N(x) monoton artan olduğundan (α_n) ve (β_n) total monotondur.

Şimdi (6) eşitliğinden faydalanarak çok kullanacağımız

$$(7) \qquad \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \Delta^{m-n} d_n = d_0$$

eşitliğini gösterelim.

(6) dan dolayı $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \Delta^{m-n} d_n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n}\, dg(x)$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n (1-x)^{m-n}\, dg(x)$$

$$= \int_0^1 dg(x)$$

$$= d_0$$

olur ki (7) eşitliği gösterilmiş olur.

g nin (0,1) de sayılabilir adette süreksiz noktası olması (1) integralinin değerini değiştirmez. Bu durumda g nin süreksizliği normal denir ve

$$(8) \quad g(x) = \frac{1}{2} \{ g(x-0) + g(x+0) \} \quad , \text{ her } \quad x \in (0,1) \text{ için}$$

olduğu kabul edilir. Buna göre aşağıdaki teoremde moment dizisi olarak (d_n) in ifadesinin tek olduğunu ispat edeceğiz.

Teorem 1.3.6. g_1 ve g_2 orjinde sıfır olan normal süreksizliğe sahip sınırsalınımlı fonsiyonlar olmak üzere $d_n = \int_0^1 x^n dg_1(x) = \int_0^1 x^n dg_2(x)$ ise her $x \in [0,1]$ için $g_1(x) = g_2(x)$ dir.

İspat. Bunun için $g_1 - g_2 = g$ olmak üzere $\int_0^1 x^n dg(x) = 0$, $(n=0,1,2,\ldots)$ ve g, (8) şartını sağlıyorsa $g(x) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.
$g(0) = g_1(0) - g_2(0) = 0$ olduğundan

$$\int_0^1 dg = g(1) - g(0) \qquad \text{kesim 2, (1) özelliğinden}$$

$$= g(1) = 0$$

Bundan dolayı kısmi integrasyonla

$$\int_0^1 n\, x^{n-1} g(x)dx = g(x)\, x^n \Big|_0^1 - \int_0^1 x^n dg(x) = 0 \quad (n=1,2,\ldots)$$

böylece

$$\int_0^1 x^n g(x)dx = 0 \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

dır. Eğer

$\Psi(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ yazarsak yine kısmi integrasyonla

$$(9)\ \int_0^1 x^n \Psi(x)dx = \Psi(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\, g(x)\,dx\,,\ (n=0,1,2,\ldots)$$

$$= \frac{1}{n+1}\Psi(1) = \frac{1}{n+1}\int_0^1 g(t)\,dt = 0 \quad \text{olur.}$$

$\Psi(x)$ fonksiyonu sürekli ve polinomların cümlesi sürekli fonksiyonların cümlesinde yoğun olduğundan $0 \leq x \leq 1$ için $|\Psi - Q| < \varepsilon$ olacak şekilde bir Q polinomu vardır. (9) dan dolayı

$$\int_0^1 \Psi^2\,dx = \int_0^1 \Psi Q\,dx + \int_0^1 \Psi(\Psi - Q)\,dx \leq \varepsilon \int_0^1 |\Psi|\,dx$$

dır. ε keyfi olduğundan $\int_0^1 \Psi^2 dx = 0$ ve dolayısıyle $\forall x$ için $\Psi(x) = 0$ dır. g nin sürekli olduğu noktalarda $\Psi'(x) = g(x)$ olduğundan bu noktalarda $g(x) = 0$ dır. Bu süreksizlik noktaları $(0,1)$ de yoğun olduğundan her $x \in (0,1)$ için $g(x-0)$, $g(x+0)$ mevcut ve $g(x-0) = g(x+0) = 0$ dır. g, (8) şartını sağladığından her $x \in (0,1)$ için $g(x) = 0$ dır.

O halde her $x \in [0,1]$ için $g(x) = 0$ dır.

Şimdi, Hausdorff'un Temel Teoreminde kullanılacak olan bir teoremi ispat edeceğiz.

Teorem 1.3.7. Eğer (d_n) total monoton ise $d_n = \int_0^1 x^n dg(x)$ olacak şekilde artan ve sınırlı bir g fonksiyonu vardır.

İspat. Bu teoremin ispatında Helly'nin önemli bir genel teoreminden faydalanacağız. Helly'nin Teoreminin ifadesi şu şekildedir. Eğer $(g_q(x))$, x'in artan fonksiyonlarının bir dizisi $0 \leq x \leq 1$ için düzgün sınırlı ise o zaman $\lim_{q_i \to \infty} g_{q_i}(x) = g(x)$ olacak şekilde sınırlı ve artan bir g fonksiyonu ve $q = (q_n)$ nin bir (q_i) alt dizisi vardır. Buna göre $(g_q(x))$ dizisini

$$g_q(0) = 0 \text{ ve } 0 < x \leq 1 \text{ için} \qquad g_q(x) = \sum_{0 \leq s \leq qx} \binom{q}{s} \Delta^{q-s} d_s \quad \text{olarak ta-}$$

nımlayalım.

(d_n) total monoton olduğundan $(g_q(x))$, x in artan fonksiyonlarının bir dizisidir.

(7) eşitliğinden

her q için $g_q(1) = \sum_{0\leq s\leq q} \binom{q}{s} \Delta^{q-s} d_s = d_0$ olduğundan $(g_q(x))$ dizisi $[0,1]$

de düzgün sınırlıdır. O halde Helly'nin Teoreminde bahsedilen sınırlı ve artan g fonksiyonu vardır. Şimdi $d_n = \int_0^1 x^n dg(x)$ olduğunu gösterelim. Bunun içinde önce kullanacağımız eşitlikleri verelim.

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{p=0}^{n} b_p = \sum_{p=0}^{m} b_p \sum_{n=p}^{m} a_n$$

$$(11) \quad \binom{m}{n} \binom{n}{p} = \binom{m}{p} \binom{m-p}{n-p} \quad (0 \leq p \leq n \leq m)$$

bu eşitlikleri göstermek oldukça basittir.

her q için $d_0 = g_q(1) - g_q(0)$ olduğundan

$$d_0 = \lim_{q_i\to\infty} g_{q_i}(1) - \lim_{q_i\to\infty} g_{q_i}(0) = g(1) - g(0) = \int_0^1 dg$$ dır. Eğer $n > 0$

ise her $q \geq n$ için

$$d_n = \sum_{t=0}^{q-n} (-1)^t d_{n+t} \binom{q-n}{t} \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{t}{k} = \sum_{t=0}^{q-n} \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t+k} \binom{q-n}{t}\binom{t}{k} d_{n+t}$$

(10) ve (11) kullanılarak

$$d_n = \sum_{k=0}^{q-n} \sum_{t=k}^{q-n} (-1)^{t+k} \binom{q-n}{t} \binom{t}{k} d_{n+t}$$

$$= \sum_{k=0}^{q-n} \sum_{t=k}^{q-n} (-1)^{t+k} \binom{q-n}{k} \binom{q-n-k}{t-k} d_{n+t}$$

$$= \sum_{k=0}^{q-n} \binom{q-n}{k} \sum_{t=0}^{q-n-k} (-1)^t \binom{q-n-k}{t} d_{n+k+t} = \sum_{k=0}^{q-n} \binom{q-n}{k} \Delta^{q-n-k} d_{n+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{q-n} \frac{(q-n)!}{k!\,(q-n-k)!} \cdot \frac{(n+k)!\,(q-n-k)!}{q!} \binom{q}{n+k} \Delta_{d_{n+k}}^{q-n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{q-n} \frac{(q-n)!\,(n+k)!}{k!\,q!} \binom{q}{n+k} \Delta_{d_{n+k}}^{q-n-k} \quad , \qquad n+k = s \text{ dersek}$$

$$= \sum_{s=n}^{q} \frac{(q-n)!\,s!}{q!\,(s-n)!} \binom{q}{s} \Delta_{d_s}^{q-s} = \sum_{s=0}^{q} \frac{(q-n)!\,s!}{q!\,(s-n)!} \binom{q}{s} \Delta_{d_s}^{q-s}$$

$$= \sum_{s=0}^{q} \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \binom{q}{s} \Delta_{d_s}^{q-s}$$

dır. $(0,1)$ aralığını $0=x_0 < x_1 < \ldots < x_r = 1$ olacak şekilde bölüp ve q yi $q\,x_i > n$ $(0 \leq i \leq r)$ olacak şekilde yeterince büyük seçelim.

$$s_L(q) = \sum_{q x_L < s \leq q x_{L+1}} \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \binom{q}{s} \Delta_{d_s}^{q-s} \qquad \text{dersek}$$

$$d_n = \sum_{L=0}^{r-1} s_L(q) \qquad \text{olur.}$$

$$g_q(x_L) - g_q(0) = \sum_{0 \leq s \leq q x_L} \binom{q}{s} \Delta_{d_s}^{q-s}$$

ve $L > 0$ için $g_q(x_{L+1}) - g_q(x_L) = \sum\limits_{q x_L < s \leq q x_{L+1}} \binom{q}{s} \Delta_{d_s}^{q-s}$ olduğundan

$$\frac{x_L q (x_L q-1)\ldots(x_L q-n+1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \{ g_q(x_{L+1}) - g_q(x_L) \} \leq s_L(q)$$

$$\leq \frac{x_{L+1} q (x_{L+1} q-1)\ldots(x_{L+1} q-n+1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \{ g_q(x_{L+1}) - g_q(x_L) \}$$

Bu eşitsizlik $L=0,1,2,\ldots$ için doğrudur. Buradan

$$\sum_{L=0}^{r-1} \frac{x_L q(x_L q-1)\dots(x_L q-n+1)}{q(q-1)\dots(q-n+1)} \{ g_q(x_{L+1}) - g_q(x_L) \} \leqslant \sum_{L=0}^{r-1} s_L(q) = d_n$$

$$\sum_{L=0}^{r-1} \frac{x_{L+1} q(x_{L+1}q-1)\dots(x_{L+1}q-n+1)}{q(q-1)\dots(q-n+1)} \{ g_q(x_{L+1}) - g_q(x_L) \}$$

Burada $p \to \infty$ için limit alınırsa

$$(12) \quad \sum_{L=0}^{r-1} x_L^n \{ g(x_{L+1}) - g(x_L) \} \leqslant d_n \leqslant \sum_{L=0}^{r-1} x_{L+1}^n \{ g(x_{L+1}) - g(x_L) \}$$

elde edilir. Eğer r yi sonsuza götürür ve $\max_L (x_{L+1} - x_L)$ yi sıfıra götürürsek (12)nin her iki yanındaki ifade kesim 2, (3) özelliğinden mevcut olup $\int_0^1 x^n dg(x)$ Stieltjes integrali olduğundan $d_n = \int_0^1 x^n dg(x)$ dır.

Sınırlı ve artan bir g fonksiyonu sınırlı salınımlı olduğundan bu teoreme göre total monoton bir (d_n) dizisi bir moment dizisidir.

Şimdi ispat edeceğimiz Hausdorff'un Temel Teoremi, Teorem 1.3.5.in ikinci kısmının tersinin de doğru olduğunu göstermektedir.

Teorem 1.3.8. Eğer (d_n), total monoton (α_n) ve (β_n) dizilerinin farkı ise (d_n) bir moment dizisidir.

İspat. (α_n) ve (β_n) total monoton ise Teorem 1.3.7 den $\alpha_n = \int_0^1 x^n dg_1$ ve $\beta_n = \int_0^1 x^n dg_2$ olacak şekilde sınırlı salınımlı g_1 ve g_2 fonksiyonları vardır. Yani (α_n) ve (β_n) moment dizisidir. Eğer $(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ ise Lemma 1.3.2 olan (d_n) moment dizisidir.

Sonuç 1.3.9. Bir (d_n) dizisinin moment dizisi olması için gerek ve yeter koşul (d_n) nin total monoton (α_n) ve (β_n) dizilerinin farkı olarak yazılmasıdır.

İspat. Teorem 1.3.5 ve Teorem 1.3.8 den elde edilir.

BÖLÜM - II

HAUSDORF MATRİSLERİ

1. TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde Hausdorff matrislerinin genel bir tanımını verip, Hausdorff matrisin terimlerini bulacağız [3] .

Hausdorff matrislerinin teorisi aşağıda tanımlanan $\delta = (\delta_{n,k})$ matrisinin özeliiklerine bağlıdır. Δ , Tanım 1.3.3 deki gibi tanımlanmak üzere
$\delta = (\delta_{n,k})$ matrisi

$$(1) \quad t_n = \Delta^n s_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} s_k$$

dönüşümünün matrisi olup,

$$(2) \quad \delta_{n,k} = \begin{cases} (-1)^k \binom{n}{k} & , \quad k \leq n \\ 0, & , \quad k > n \end{cases} \quad \text{yani} \quad \delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \\ 1 & -1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix}$$

dır.

Teorem 2.1.1. $\delta = (\delta_{n,k})$ matrisi kendi kendisinin eşleniğidir. Yani

$\delta\delta$ = I (birim matris) dir.

İspat. Bunun için $s=(s_n)$ dizisinin δ dönüşümü $t=(t_n)$ olmak üzere (t_n) nin δ dönüşümünün (s_n) olduğunu yani $t=\delta s$ ise $s=\delta t$ olduğunu gösterelim. (t_n) nin δ dönüşümü (u_n) olsun. (1) den

$$u_n = \Delta^n t_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} s_p$$

bölüm 1, kesim 3'ün (10) ve (11) eşitliklerinden

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} s_p \sum_{k=p}^{n} (-1)^{p+k} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \sum_{p=0}^{n} s_p \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} (-1)^{p+k} \binom{n-p}{k-p}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} s_p \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n-p}{k} = s_n$$

olduğundan $\delta\delta$ = I(birim matris) dir.

Tanım 2.1.2. $D=(d_{n,k})$ matrisi $d_{n,k}=\begin{cases} d_n, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases}$ olan bir diagonal matris olmak üzere $\delta D \delta$ matrisine bir Hausdorff matrisi denir. Bu hausdorff matrisini H ya da $d=(d_n)$, $D=(d_{n,k})$ nin köşegen elmanlarının bir disizi olmak üzere H(d) ile ve tüm Hausdorff matrislerinin sınıfını $\mathcal{H}$ ile göstereceğiz.

Şimdi (E, q) ile (C, 1) ortalamalarının matrislerinin birer Hausdorff matririsi olduğunu göstereceğiz.

(s_n) dizisinin (E,q) Euler ortalaması

$$t_n = \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} s_k$$

olarak tanımlıdır. Şimdi E operatörünü

(3) $E^m_{s_n} = s_{n+m}$, $(n=0,1,2,\ldots , m=0,1,2,\ldots)$

ile tanımlayalım. $s = (s_n)$ nin (E,q) ortalaması (t_n) olmak üzere (t_n) nin δ dönüşümüne bakalım.

$$\Delta^m t_0 = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} t_n = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} s_k$$

(3) den

$$= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} E^k s_o = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \left(\frac{q+E}{q+1}\right)^n s_o$$

$$= \left(1 - \frac{q+E}{q+1}\right)^m s_0 = \frac{1}{(q+1)^m} (1-E)^m s_o = \frac{1}{(q+1)^m} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} E^n s_o$$

$$= \frac{1}{(q+1)^m} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} s_n = \frac{1}{(q+1)^m} \Delta^m s_0$$

yani $\Delta^n t_0 = \dfrac{1}{(q+1)^n} \Delta^n s_0$ olur.

$\Delta^n t_0 = V_n$, $\Delta^n s_0 = U_n$ ve $\dfrac{1}{(q+1)^n} = d_n$ den $D = (d_{n;k})$ matrisini

$$d_{n,k} = \begin{cases} d_n, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

olarak alınırsa, $\delta t = D \delta s$ ve Teorem 2.1.1.

den de $t = \delta D \delta s$ olur. O halde (E,q) nun matrisi $d_n = \dfrac{1}{(q+1)^n}$ ile

$\delta D \delta$ olup bir Hausdorff matrisidir.

Diğer yandan $s = (s_n)$ dizisinin $(C,1)$ ortalaması $t_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$ dir.

Buna göre

$$\Delta^{m} t_0 = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} t_n = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} s_k \sum_{n=k}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{m} s_k \, \emptyset_k$$

Burada

$$\emptyset_k = \sum_{n=k}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{1}{n+1}$$

$$= (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+1} + (-1)^{k+1} \binom{m}{k+1} \frac{1}{k+2} + \dots +$$

$$+ (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} \frac{1}{m} + (-1)^m \binom{m}{m} \frac{1}{m+1}$$

$$= \frac{(-1)^m}{m+1} \Big\{ 1 - \binom{m}{m-1} \frac{m+1}{m} + \binom{m}{m-2} \frac{m+1}{m-1} + \dots +$$

$$+ (-1)^{k+1-m} \binom{m}{k+1} \frac{m+1}{k+2} + (-1)^{k-m} \binom{m}{k} \frac{m+1}{k+1} \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^m}{m+1} \Big\{ \binom{m+1}{0} - \binom{m+1}{1} + \binom{m+1}{2} + \dots + (-1)^{k-m} \binom{m+1}{k} \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^m}{m+1} \Big\{ \binom{m+1}{0} - \Big[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}\Big] + \Big[\binom{m}{1} + \binom{m}{2}\Big] + \dots +$$

$$+ (-1)^{k-m} \Big[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\Big] \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^m}{m+1} (-1)^{k-m} \binom{m}{k} = \frac{(-1)^k \binom{m}{k}}{m+1}$$

dır. O halde,

$$\Delta^m t_o = \frac{1}{m+1} \sum_{k=o}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} s_k \,, \quad (1) \text{ den}$$

$$= \frac{1}{m+1} \Delta^m s_o$$

Yada $\Delta^n t_o = \frac{1}{n+1} \Delta^n s_o$ dır. Yine aynı şekilde $\Delta^n t_o = V_n$, $\Delta^n s_o = U_n$ ve

$\frac{1}{n+1} = d_n$ dersek $D = (d_{n,k})$ matrisi $d_{n,k} = \begin{cases} d_n, & n=k \\ o & n \neq k \end{cases}$ olmak üzere

$\delta t = D \delta s$ ve Teorem 2.1.1 den de $t = \delta D \delta S$ olur. O halde (C,1) ortalamasının matrisi $d_n = \frac{1}{n+1}$ ile $\delta D \delta$ olup, bir Hausdorff matrisidir.

Diğer yandan (H,k) ortalamasının matrisi (C,1) nin matrisinin k defa çarpımıdır. (C,1) ortalamasının matrisi $d_n = \frac{1}{n+1}$ olmak üzere $\delta D \delta$ olduğundan (H,k) nın matrisi $\delta D \delta \; \delta D \delta \ldots \delta D \delta = \delta D^k \delta$ (Teorem 2.1.1. den) olur. Burada D^k diagonal bir matris olup köşegen elemanları $\frac{1}{(n+1)^k}$ dır. O halde $d_n = \frac{1}{(n+1)^k}$ olmak üzere (H,k) nın matrisi bir Hausdorff matrisidir.

Şimdi bir fonksiyon yardımıyla (H, k) nın (d_n) dizisini bulalım.

Eğer $g(x) = \int_o^x \frac{1}{(k-1)!} \left(\text{Log}\,\frac{1}{t}\right)^{k-1} dt$ fonksiyonunu alırsak bölüm 1, kesim 2 deki (6) özelliğinden

$$d_n = \int_o^1 x^n dg(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_o^1 x^n \left(\text{Log}\,\frac{1}{x}\right)^{k-1} dx \qquad y = -\text{Log}x = \text{Log}\,\frac{1}{x}$$

değişken değiştirmesi yapıldığında $\frac{1}{x} = e^{y}$, $dx = -e^{-y}dy$,

$$d_n = -\frac{1}{(k-1)!} \int_{\infty}^{o} e^{-ny} y^{k-1} e^{-y} dy = \frac{1}{(k-1)!} \int_{o}^{\infty} e^{-(n+1)y} y^{k-1} dy \qquad , (n+1)y=t$$

dersek,

$$= \frac{1}{(k-1)!\,(n+1)^k}\int_0^1 e^{-t}\, t^{k-1} dt \quad , \quad \int_0^1 e^{-t}\, t^{k-1}\, dt = \Gamma(k)=(k-1)!$$

olduğundan

$$= \frac{\Gamma(k)}{(k-1)!\,(n+1)^k}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^k}$$

dır. O halde (H, k) nın matrisi $g(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x \left(\operatorname{Log} \frac{1}{x} \right)^{k-1} dt$ fonksiyonuna karşılık gelen Hausdorff matrisidir.

(C, k) ortalamasının matrisini bir Hausdorff matrisi olduğu ise Hausdorff matrisinin terimlerini bulduktan sonra göstereceğiz.

Şimdi Hausdorff Matrislerinin özellikleri ile ilgili teorem vereceğiz.

Teorem 2.1.3. $H, H' \in \mathcal{H}$ ise $HH' = H'H$ dır.

İspat. $H, H' \in \mathcal{H}$ ise $H = \delta D \delta$ ve $H' = \delta D' \delta$ olacak şekilde D ve D' diagonal matrisleri vardır. Diagonal matrisler çarpmaya göre değişmeli olduğundan Teorem 2.1.1. dikkate alınırsa $HH' = \delta D \delta\, \delta D' \delta = \delta DD' \delta$

$$= \delta D' \delta\, \delta D \delta = H'H$$

elde edilir.

Teorem 2.1.4. Tüm d_n ler farklı olmak üzere $H = \delta D \delta$ bir Hausdorff matrisi ve H' herhangi bir matris olsun. Eğer $HH' = H'H$ ise $H' \in \mathcal{H}$ dır.

İspat. $\delta H' \delta = B$ dersek Teorem 2.1.1. den $H' = \delta B \delta$ dır. Burada B nin bir diagonal matris olduğunu göstermek yeterli olur.

$HH' = (\delta D \delta)(\delta B \delta) = \delta DB \delta$ ve $H'H = (\delta B \delta)(\delta D \delta) = \delta BD \delta$ dır.

$HH'=H'H$ olduğundan $DB = BD$ dır. $DB = A$, $BD = C$ diyelim

$$d_{n,k} = \begin{cases} d_n & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases} \quad \text{olduğundan}$$

$$a_{n,p} = \sum_k d_{n,k}\, b_{k,p} = d_n\, b_{n,p} \quad \text{ve} \quad c_{n,p} = \sum_k b_{n,k}\, d_{k,p} = b_{n,p} d_p$$

dır.

(s_n) , A- dönüşümü mevcut olacak şekilde keyfi bir dizi olsun.

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, s_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k}\, s_k \quad \text{yani} \quad t_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_n\, b_{n,k}\, s_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k} d_k s_k$$

Buradan

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}\, s_k\,(d_n-d_k) = b_{n,0} s_0 (d_n-d_0) + b_{n,1} s_1 (d_n-d_1) + \ldots +$$

$$+ b_{n,n} s_n (d_n - d_n) + \ldots = 0$$

(s_n) keyfi vede $n\neq m$ için $d_m\neq d_n$ olduğundan $n\neq k$ için $b_{n,k}=0$ dır. O halde $B = (b_{n,k})$ bir diagonal matris olup $H'=\delta B \delta$ bir Hausdorff matrisidir.

O halde bu teoremden hemen şu sonucu verebiliriz.

Sonuç.2.1.5. $\mathcal{H}$ sınıfı (C,1) in matrisi ile ya da d_n leri farklı olan herhangi bir $H\in\mathcal{H}$ ile değişmeli olan matrislerin sınıfıdır.

Şimdi bir Hausdorff matrisinin terimlerini bulmaya çalışalım.

$H\in\mathcal{H}$ ise $d_{n,k} = \begin{cases} d_n , & n=k \\ 0 , & n\neq k \end{cases}$ olmak üzere $H = \delta D \delta$ dır. (s_n) nin H-Dönüşümü (t_n) olsun. $\Delta^n s_0 = u_n$, $d_n u_n = v_n$ dersek $t_n = \Delta^n v_0$ olur. Buna göre , Bölüm 1, kesim 3'ün (10) ve (11) eşitlikleri kullanılarak,

$$t_n = \Delta^n v_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} v_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} d_k\, u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} d_k \Delta^k s_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} d_k \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} s_p = \sum_{p=0}^{n} s_p \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k+p} \binom{n}{k} \binom{k}{p} d_k$$

$$= \sum_{p=0}^{n} s_p \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k+p} \binom{n-p}{k-p} d_k = \sum_{p=0}^{n} s_p \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n-p}{k} d_{p+k}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} s_p \binom{n}{p} \Delta^{n-p} d_p$$

Yani $t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k \, s_k$ dır. O halde

$$(4) \quad h_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k , & k \leq n \\ 0 , & k > n \end{cases}$$

dır. Eğer $\Delta^n d_k = d_{k,n}$ olarak yazarsak

$$(4') \quad h_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k} d_{k,n-k} , & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

olur.

Şimdi (C,k) ortalamasının matrisinin bir Hausdorff matrisi olduğunu gösterelim. k bir pozitif tamsayı olmak üzere (C,k) ortalamasının matrisi

$$a_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{\binom{m-n+k-1}{k-1}}{\binom{m+k}{k}} & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

olarak tanımlıdır.

Şimdi $g(x) = k \int_0^x (1-t)^{k-1} dt$ fonksiyonunu göz önüne alıp, bu fonksiyona karşılık gelen Hausdorff matrisinin terimlerini bulalım.

(4) den $h_{m,n} = \binom{m}{n} \Delta^{m-n} d_n$ $\quad n \leq m$, bölüm 1 , kesim 3'ün (6) dan

$$= \binom{m}{n} \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n} dg(x)$$ Bölüm 1, kesim 2 deki (6) özelliğinden

$$= k \binom{m}{n} \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n} (1-x)^{k-1} dx$$

$$= k \binom{m}{n} \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n+k-1} dx \quad , \quad \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = B(m,n) =$$

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \text{ve} \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{olduğundan}$$

$$h_{m,n} = k \binom{m}{n} B(n+1, m-n+k)$$

$$= k \binom{m}{n} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(m-n+k)}{\Gamma(m+k+1)}$$

$$= \frac{k \quad m!}{n!(m-n)!} \; \frac{n!\,(m-n+k-1)!}{(m+k)!}$$

$$= \frac{(m-n+k-1)!}{(m-n)!(k-1)!} \; \frac{k!\,m!}{(m+k)!} = \frac{\binom{m-n+k-1}{m-n}}{\binom{m+k}{k}}$$

ve $d_n = \int_0^1 x^n \, dg(x) = k\int_0^1 x^n (1-x)^{k-1} dx = k \;\; B(n+1,\, k) = \dfrac{k\Gamma(n+1)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k+1)}$

$$= \frac{k!\,n!\,(k-1)!}{(n+k)!} = \frac{n!\,k!}{(n+k)!} = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \quad \text{dır.}$$

O halde (C,k) nın matrisi $d_n = \dfrac{1}{\binom{n+k}{k}}$ ye karşılık gelen bir Hausdorff matrisidir.

Burada $k=1$ alınırsa $d_n = \dfrac{1}{n+1}$, $(C,1)$ in (d_n) yi elde ederiz.

2. DİZİDEN - DİZİYE HAUSDORFF DÖNÜŞÜMLERİ

Bu kesimde diziden-diziye Hausdorff dönüşümlerinin konservatif, regüler ve çarpımsal olması için gerek ve yeter koşulları bulacağız [3].

Bölüm 1, kesim 3 de (7) eşitliği ile kesim 1 de (4) dikkate alınırsa bir H Hausdorff matrisi için Teorem 1.1.2. nin koşulları

$$(1)\quad \sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|\Delta^{n-k} d_k\right| < \infty$$

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k = 0 \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$(3)\quad d_0 = 1$$

koşularına indirgenmiş olur. Eğer (d_n) total monoton ise $\Delta^{n-k} d_k \geqslant 0$ olacağından

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k = d_0$$ olurki (1) koşulu otomatikmen sağlanır.

Şimdi çok kullanılacak olan bir Lemma vereceğiz.

Lemma 2.2.1. Bir reel (d_n) dizisinin (1) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul (α_n) ve (β_n) total monoton iki dizi olmak üzere $(d_n)=(\alpha_n-\beta_n)$ olmasıdır.

İSPAT.: Gerek şart . Burada gösterim kolaylığı için $E\, u_k = u_{k+1}$, $E_1 u_{k,p} = u_{k+1,p}$ ve $E_2 u_{k,p}\ u_{k,p+1}$ yazacağız. Tanım 1.3.3 den $u_{k,p} = \Delta^p u_k$ dır.

$$(4)\quad d_{k,p} = \Delta^p d_k = \Delta^p d_{k+1} + \Delta^p d_k - \Delta^p d_{k+1}$$
$$= \Delta^p d_{k+1} + \Delta^{p+1} d_k = d_{k+1,p} + d_{k,p+1}$$
$$= E_1\, d_{k,p} + E_2\, d_{k,p} = (E_1+E_2)\, d_{k,p}$$

bundan dolayı

(5) $|d_{k,p}| \leq |d_{k+1,p}| + |d_{k,p+1}| = E_1 |d_{k,p}| + E_2 |d_{k,p}|$

$= (E_1+E_2) |d_{k,p}|$

Eğer,

(6) $d_{k,p,n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d_{k+r,p+n-r}$ ve $d^{*}_{k,p,n} =$

$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} |d_{k+r,p+n-r}|$ dersek

(4) den,

(7) $d_{k,p,n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d_{k+r,p+n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} E_1^{r} E_2^{n-r} d_{k,p}$

$= (E_1+E_2)^{n} d_{k,p} = d_{k,p}$ ve (5) den

(8) $d^{*}_{k,p,n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} E_1^{r} E_2^{n-r} |d_{k,p}| = (E_1+E_2)^{n} |d_{k,p}| \geq |d_{k,p}|$

dır. Hipotezden $\sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |d_{k,n-k}| < \infty$ olduğundan (6) dan

(9) $d^{*}_{0,0,n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} |d_{r,n-r}| < K$

dır (5) den

$d^{*}_{k,p,n} = (E_1+E_2)^{n} |d_{k,p}| \leq (E_1+E_2)^{n+1} |d_{k,p}| =$

$d^{*}_{k,p,n+1}$ olduğundan $(d^{*}_{k,p,n})_n$

monoton artandır ve de

$d^{*}_{k,p,n} = (E_1+E_2)^{n} |d_{k,p}| = (E_1+E_2)^{n} E_1^{k} E_2^{p} |d_{0,0}| \leq \binom{k+p}{p} (E_1+E_2)^{n} ($

$E_1^{k} E_2^{p} |d_{0,0}|) \leq (E_1+E_2)^{n} \sum_{r=0}^{k+p} \binom{k+p}{r} E_1^{k+p-r} E_2^{r} |d_{0,0}|$

$$=(E_1+E_2)^n\ (E_1+E_2)^{k+p}\ |d_{o,o}|$$

$$= (E_1+E_2)^{k+p+n}\ |d_{o,o}| \quad , (8) \text{ den}$$

$$= d_{o,o,k+p+n}$$

(9) dan $d^{*}_{k,p,n} < K$ olup $(d^{*}_{k,p,n})_n$ sınırlı olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} d^{*}_{k,p,n}$ mevcut tur. Bu limiti

$$\lim_{n\to\infty} d^{*}_{k,p,n} = d^{*}_{k,p} \quad (k=0,1,2,\ldots\ ,\ p=0,1,2,..)$$

ile gösterelim. (7) ve (8) den $|d_{k,p}| = |d_{k,p,n}| \leqslant d^{*}_{k,p,n}$ ve $(d^{*}_{k,p,n})_n$ artan olduğundan $d^{*}_{k,p,n} \leqslant d^{*}_{k,p}$ ki böylece $d_{k,p} \leqslant d^{*}_{k,p}$,

$|d_k| = |\Delta^{o} d_k| = |d_{k,o}| \leqslant d^{*}_{k,o} = d^{*}_k$ ile gösterelim (8) den

$$d^{*}_{k,p,n+1} = (E_1+E_2)^{n+1}\ |d_{k,p}| = (E_1+E_2)\ d^{*}_{k,p,n} = d^{*}_{k+1,p,n} + d^{*}_{k,p+1,n}$$

buradan

$$d^{*}_{k,p+1} = d^{*}_{k,p} - d^{*}_{k+1,p} = \Delta\, d^{*}_{k,p} \quad \text{ve} \quad d^{*}_{k,p} = \Delta\, d^{*}_{k,p-1} =$$

$$\Delta^2 d^{*}_{k,p-2} = \ldots = \Delta^p\, d^{*}_{k,o} = \Delta^p d^{*}_k \qquad \text{böylece}$$

$$(10)\quad |\Delta^p d_k| = |d_{k,p}| \leqslant d^{*}_{k,p} = \Delta^p d^{*}_k$$

dır. Eğer $\alpha_k = \dfrac{1}{2}(d^{*}_k + d_k)$ $\beta_k = \dfrac{1}{2}(d^{*}_k - d_k)$ dersek

$d_k = \alpha_k - \beta_k$ olup, (10) dan $\Delta^p \alpha_k = \dfrac{1}{2}\Delta^p(d^{*}_k + d_k) = \dfrac{1}{2}(\Delta^p d^{*}_k + \Delta^p d_k) \geqslant 0$, $\Delta^p \beta_k = \dfrac{1}{2}\Delta^p(d^{*}_k - d_k) = \dfrac{1}{2}(\Delta^p d^{*}_k - \Delta^p d_k) \geqslant 0$

Yeter Şart . (α_n) ve (β_n) total monoton olmak üzere $(d_n)=(\alpha_n - \beta_n)$ ise

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\Delta^{n-k} d_k| = \sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\Delta^{n-k}(\alpha_k - \beta_k)| \leq \sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (|\Delta^{n-k}\alpha_k| + |\Delta\beta_k^{n-k}|)$$

$$= \sup_n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k}_{\alpha_k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k}_{\beta_k} \right\}$$

$$= \alpha_0 + \beta_0$$

olup $\sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\Delta^{n-k} d_k| < \infty$ dır.

Buradan hemen şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2.2. (d_n) nin (1) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul (d_n) nin moment dizisi olmasıdır,

İspat, Sonuç 1.3.9 ve Lemma 2.2.1 den elde edilir

Şimdi de (1) koşulunun sağlanması durumunda (2) koşulunun hafifletileceğini gösteren bir lemma vereceğiz.

Lemma 2.2.3. (d_n) nin (1) koşulunu sağlaması durumunda

$k > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \Delta^n d_0 = l_0$ mevcut

İspat. (d_n) (1) koşulunu sağlarsa lemma 2.2.1 den (α_n) ve (β_n) total monoton iki dizi olmak üzere $(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ olarak yazılabilir. Bundan dolayı Lemmayı bir (α_n) total monoton dizisi için ispatlayalım.

(4) deki gibi $\alpha_{k,n-k} = \Delta^{n-k}_{\alpha_k} = \alpha_{k+1,n-k} + \alpha_{k,n-k+1}$ dir ve

$$(n+1)\, h_{n,k} = (n+1) \binom{n}{k} \alpha_{k,n-k} = (n+1) \binom{n}{k} \; \Delta\alpha_k^{n-k} \qquad (k \leq n)$$

$$= \frac{(n+1)\,!}{k!\,(n-k)\,!} \; \Delta\alpha_k^{n-k} = \frac{(n+1)\,!}{k!\,(n-k)\,!} \; \Delta\alpha_k^{n-k} + \left[\frac{(n+1)\,!}{k!\,(n-k)\,!} - \frac{(n+1)\,!}{k!\,(n-k)\,!} \right] \Delta\,\alpha_{k+1}^{n-k+1}$$

$$= (n-k+1) \frac{(n+1)\,!}{k!\,(n-k+1)\,!} \; \Delta\alpha_k^{n-k} + \left[\frac{(k+1)\,(n+1)\,!}{(k+1)\,!\,(n-k)\,!} - \frac{(n-k+1)\,(n+1)\,!}{k!\,(n-k+1)\,!} \right] \Delta\alpha_{k+1}^{n-k}$$

$$= (n-k+1) \binom{n+1}{k} \; \Delta\alpha_k^{n-k} + \left[(k+1) \binom{n+1}{k+1} - (n-k+1) \binom{n+1}{k} \right] \Delta\alpha_{k+1}^{n-k}$$

$$= (n-k+1) \binom{n+1}{k} \left[\Delta\alpha_k^{n-k} - \Delta\alpha_{k+1}^{n-k} \right] + (k+1) \binom{n+1}{k+1} \; \Delta\alpha_{k+1}^{n-k}$$

$$= (n-k+1) \binom{n+1}{k} \; \Delta\alpha_k^{n-k+1} + (k+1) \binom{n+1}{k+1} \; \Delta\alpha_{k+1}^{n-k}$$

$$= (n-k+1)\, h_{n+1,k} + (k+1)\, h_{n+1,k+1}$$

olup, buradan

$$(n+1)\,(h_{n,k} - h_{n+1,k}) = (k+1)\, h_{n+1,k+1} - k h_{n+1,k}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=o}^{k} (n+1)\,(h_{n,p} - h_{n+1,p}) = \sum_{p=o}^{k} ((p+1)\,h_{n+1,p+1} - p\,h_{n+1,p})$$

$$= \sum_{p=o}^{k} (p+1)\,h_{n+1,p+1} - \sum_{p=o}^{k} p\,h_{n+1,p}$$

$$= \sum_{p=1}^{k+1} p\,h_{n+1,p} - \sum_{p=1}^{k} p\,h_{n+1,p}$$

$$= (k+1)\,h_{n+1,k+1}$$

$$\Rightarrow (n+1)\,\Big(\sum_{p=o}^{k} h_{n,p} - \sum_{p=o}^{k} h_{n+1,p}\Big) = (k+1)\,h_{n+1,k+1}$$

$$\sum_{p=o}^{k} h_{n,p} = \Lambda_{n,k}$$ dersek

$$(11) \quad (n+1)\,(\Lambda_{n,k} - \Lambda_{n+1,k}) = (k+1)\,h_{n+1,k+1} = (k+1)\,\binom{n+1}{k+1}.$$

$$\Delta\alpha_{k+1}^{n-k} \geqslant 0$$

(α_n) total monoton olduğundan $\Lambda_{n,k} \geqslant 0$ ve de (11) den $(\Lambda_{n,k})_n$ monoton azalan olup, $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_{n,k}$, $(k = 0,1,2,\ldots)$ mevcuttur. $h_{n,k} = \Lambda_{n,k} - \Lambda_{n,k-1}$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} h_{n,k} = l_k$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ da mevcuttur. $k = 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} h_{n,o} = \lim\limits_{n\to\infty} \Delta_{\alpha}^{n}{}_{o} = l_o$ dır. $k \geqslant 0$ için $P_n = \Lambda_{n,k} - \Lambda_{n+1,k}$ dersek $\sum_n P_n$ yakınsaktır. Çünkü

$$S_n = \sum_{k=o}^{n} P_k = P_o + P_1 + \ldots + P_n = (\Lambda_{o,k} - \Lambda_{1,k}) + (\Lambda_{1,k} - \Lambda_{2,k}) + \ldots +$$

$$(\Lambda_{n,k} - \Lambda_{n+1,k}) = \Lambda_{o,k} - \Lambda_{n+1,k}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = A_{o,k} - \lim_{n\to\infty} A_{n+1,k} \qquad (A_{n,k})_n \text{ yakınsak olduğundan } \sum_n P_n$$

yakınsaktır. Dolayısiyle (11) den $\sum_n \frac{k+1}{n+1} h_{n+1,k+1}$ yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k+1}{n+1} h_{n+1,k+1}}{\frac{k+1}{n+1} l_{k+1}} = 1 \neq 0 \quad \text{olduğundan} \quad \sum_n \frac{k+1}{n+1} l_{k+1} \text{ da yakınsaktır.}$$

Buradan $l_{k+1} = 0$ dır. Eğer $l_{k+1} \neq 0$ olsaydı $\sum_n \frac{k+1}{n+1} l_{k+1}$ serisi ıraksak olurdu. O halde

$$k>0 \text{ için } \lim_{n\to\infty} h_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \Delta\alpha_k^{n-k} = 0 \quad \text{dır.}$$

(α_n) ve (β_n) total monoton olmak üzere $(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ ise

$$k>0 \text{ için } \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \Delta_{d_k}^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} (\alpha_k - \beta_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \Delta\alpha_k^{n-k} - \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \Delta_{\beta_k}^{n-k} = 0$$

$$k = 0 \text{ için } \lim_{n\to\infty} \Delta_{d_o}^{n} = \lim_{n\to\infty} \Delta_{\alpha_o}^{n} - \lim_{n\to\infty} \Delta_{\beta_o}^{n} = l_o - l'_o \quad \text{mevcuttur.}$$

Buradan da şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2.4. $H \in \mathcal{H}$ olmak üzere $H \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter koşullar (3) koşulu ile birlikte

(12) (d_n) moment dizisi

(13) $\lim_{n\to\infty} \Delta_{d_o}^{n} = 0$

dır.

İspat, Sonuç 2.2.2 ve Lemma 2.2.3. den elde edilir.

Teorem 2.2.5. $H \in \mathcal{H}$ olmak üzere $H \in (c,c)$ olması için gerek ve yeter koşul (d_n) nin moment dizisi olmasıdır.

İspat, $\sum_{k=o}^{n} h_{n,k} = d_o$ olduğu dikkate alınarak Teorem 1.1.1, sonuç 2.2.2 ve lemma 2.2.3 den elde edilir.

Şimdi sonuç 2.2.4'e birkaç örnek verelim.

Birinci olarak $d_n = \dfrac{1}{n+1}$ alırsak, $d_o = 1$ ve

$$\Delta \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Delta^2 \frac{1}{n+1} = \Delta\left(\Delta \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} - \frac{1}{(n+2)\,(n+3)}$$

$$= \frac{2!}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

Tümevarım ile ispatlanabileceği gibi

$$(14) \quad \Delta^p \frac{1}{n+1} = \frac{p\,!}{(n+1)\,(n+2)\,\ldots\,(n+p+1)} \geqslant 0 \qquad \begin{array}{l} n = 0,1,2,\ldots, \\ p = 0,1,2,\ldots, \end{array}$$

olup, Teorem 1.3.7. den (d_n) moment dizisidir. (14) den

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^n d_o = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \text{dır.}$$

O halde (C,1) dönüşümünün matrisi (c,c;p) nin elemanıdır.

İkinci olarak $(d_n) = (1,0,0,\ldots)$ dizisini alalım.

$$d_o = 1 \quad \text{ve} \quad \Delta^p d_n = \sum_{k=o}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} d_{n+k} = \begin{cases} 1, & n = o \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

olduğundan (d_n) total monoton dolayısıyle (d_n) moment dizisidir.

$\Delta^n d_o = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} d_k = 1$ olup, $\lim_{n\to\infty} \Delta^n d_o = 1$ olduğundan (d_n) ye karşılık gelen H, Hausdorff matrisi $(c,c;p)$ nin elemanı değildir. Fakat (c,c) nin elemanıdır.

Üçüncü olarak $d_n = (2,2,\ldots)$ dizisini alalım.

$$\Delta^p d_n = \sum_{k=o}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} d_{n+k} = 2 \sum_{k=o}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = \begin{cases} 2, & p = o \\ 0, & p > o \end{cases}$$

olduğundan (d_n) total monoton dolayısiyle moment dizisidir.

$\lim_{n\to\infty} \Delta^n d_o = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} d_k = 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ olmasına rağmen $d_o = 2$ olduğundan $H \notin (c,c;p)$ fakat $H \in (c,c)$ dir.

Dördüncü olarak $(d_n) = (1,1,\ldots)$ dizisini alırsak $H \in (c,c;p)$ dir.

Teorem 2.2.6 $H \in \mathcal{H}$ olmak üzere $H \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter koşul (d_n) nin regüler moment dizisi olmasıdır.

İspat. $d_o = \int_o^1 dg = g(1) - g(o) = g(1)$ olduğundan Tanım 1.3.1. ve Sonuç 2.2.4 den $\lim_{n\to\infty} \Delta^n d_o = g(+o)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 1.3.5. deki gibi

$$\Delta^n d_o = \int_o^1 (1-x)^n dg(x) = \int_o^1 (1-x)^n dP(x) - \int_o^1 (1-x)^n dN(x) \quad \text{dir.}$$

$$\alpha_n = \int_o^1 x^n dP(x) , \quad \beta_n = \int_o^1 x^n dN(x) \quad \text{dersek}$$

$\Delta^n_{\alpha_0} = \int_0^1 (1-x)^n \, dP(x) \geq 0$ ve $\Delta^n_{\beta_0} = \int_0^1 (1-x)^n dN(x) \geq 0$ olup,

bölüm 1, kesim 2 deki (5) den $\alpha_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \, dP(x) \leq \int_0^1 x^n dP(x) = \alpha_n$

olduğundan (α_n) monoton azalandır. Aynı şekilde (β_n) de monoton azalan olduğundan $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$ ve $\lim_{n\to\infty} \beta_n = b$ olacak şekilde a ve b sayıları vardır.

$$(15) \quad \lim_{n\to\infty} \Delta^n d_0 = \lim_{n\to\infty} \Delta^n \alpha_0 - \lim_{n\to\infty} \Delta^n \beta_0 = a - b \quad \text{dir.}$$

$\lim_{x\to 0^+} P(x) = P(+0)$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere $|P(\eta) - P(+0)| < \varepsilon$ olacak şekilde η , $0 < \eta < 1$ sayısı vardır. Bundan dolayı

$$\Delta^n \alpha_0 = \int_0^1 (1-x)^n \, dP(x) = \int_0^\eta (1-x)^n \, dP(x) + \int_\eta^1 (1-x)^n \, dP(x) ,$$

Bölüm 1, kesim 2, (1), (4) ve (5) özelliklerinden dolayı

$$\Delta^n \alpha_0 \leq \int_0^\eta dP(x) + (1-\eta)^n \int_\eta^1 dP(x) = P(\eta) - P(0) +$$

$$(1-\eta)^n (P(1) - P(\eta)) \quad , \quad P(0) = 0 \text{ ve } P(x) \geq 0 \text{ old.}$$

$$\leq P(\eta) + (1-\eta)^n P(1) \quad , \quad \text{yeteri derecede büyük n'ler için}$$

$$< P(+0) + 2\varepsilon$$

bu her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $\lim_{n\to\infty} \Delta^n \alpha_0 = a \leq P(+0)$. Diğer yandan $\lim_{x\to 0^+} (1-x)^n P(x) = P(+0)$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için $|(1-\eta)^n P(\eta) - P(+0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\eta = \eta(n,\varepsilon)$ $0 < \eta < 1$ sayısı vardır. Bundan dolayı yeterince büyük n ler için

$$\Delta^n \alpha_o = \int_0^1 (1-x)^n \, dP(x) = \int_0^{\eta} (1-x)^n \, dP(x) + \int_{\eta}^1 (1-x)^n \, dP(x)$$

$$\geqslant (1-\eta)^n \int_0^{\eta} dP(x) = (1-\eta)^n (P(\eta) - P(0)) = (1-\eta)^n P(\eta) > P(+0) - \varepsilon$$

buradada aynı şekilde $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta^n \alpha_o = a \geqslant P(+0)$ olduğundan $a = P(+0)$ dır.

Benzer olarak $b = N(+0)$ olup (15) den $\lim\limits_{\to\infty} \Delta^n d_o = P(+0) - N(+0)$

$= g(+0)$ dır.

Bu ana kadar yaptıklarımızın ışığı altında aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 2.2.7. $H \in \mathcal{H}$ olmak üzere H nın çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul (12) ve (13) koşullarının sağlanmasıdır.

İspat, $\sum\limits_{k=0}^{n} h_{n,k} = d_o$ olduğundan Teorem 1.1.1. dikkate alınarak sonuç 2.2.2 ve lemma 2.2.3. den elde edilir.

Sonuç 2.2.8 $H \in (c_o, c_o)$ olması için gerek ve yeter koşullar (12) ile (13) ün sağlanmasıdır.

İspat, Teorem 1.1.3. dikkate alınarak sonuç 2.2.2. ve lemma 2.2.3 den elde edilir.

Sonuç 2.2.7 ve sonuç 2.2.8 den $H \in (c_o, c_o)$ olması için gerek ve yeter koşul H nın çarpımsal olmasıdır.

Sonuç 2.2.9 $H \in (c_o, c)$ olması için gerek ve yeter koşul (12) nin sağlanmasıdır.

İspat, Teorem 1.1.4 dikkate alınarak sonuç 2.2.2 ve lemma 2.2.3 den elde edilir.

Sonuç 2.2.10. $H \in (c, c_o)$ olması için gerek ve yeter koşullar (12), (13) ve $d_o = 0$ nın sağlanmasıdır.

İspat, $\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} = d_0$ olduğundan Teorem 1.1.5 dikkate alınarak sonuç 2.2.2 ve lemma 2.2.3 den elde edilir.

3. SERİDEN - SERİYE HAUSDORFF DÖNÜŞÜMLERİ

Bu kesimde $H \in \mathcal{H}$ olmak üzere $H \in (\gamma, \gamma)$, $H \in (\gamma, \gamma; p)$, $H \in (\ell, \ell)$, $H \in (\ell, \ell; p)$ ve $H \in (bv, c)$ olması için gerek ve yeter koşulları bulacağız. Önce $H \in (\gamma, \gamma)$ ve $H \in (\gamma, \gamma; p)$ olması için gerek ve yeter koşulları bulalım [11] .

Teorem 1.1.6 dikkate alınarak, $g_{n,k} = h_{0,k} + h_{1,k} + \ldots + h_{n,k}$

$$= \sum_{m=0}^{n} h_{m,k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \Delta^{m-k} d_k$$

$$g_{n,k} - g_{n,k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \Delta^{m-k} d_k - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} \Delta^{m-k-1} d_{k+1}$$

$$= \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \Delta^{m-k} d_k + \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} \Delta^{m-k} d_k - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} \Delta^{m-k} d_k$$

$$- \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} \Delta^{m-k-1} d_{k+1}$$

$$= \sum_{m=k}^{n} \left\{ \binom{m}{k} \Delta^{m-k} d_k + \binom{m}{k+1} \Delta^{m-k} d_k \right\}$$

$$- \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} \left\{ \Delta^{m-k} d_k + \Delta^{m-k-1} d_{k+1} \right\}$$

$$= \sum_{m=k}^{n} \binom{m+1}{k+1} \Delta^{m-k} d_k - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} \Delta^{m-k-1} d_k$$

$$= \sum_{m=k}^{n} \binom{m+1}{k+1} \Delta^{m-k} d_k - \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1} \Delta^{m-k} d_k$$

$$= \binom{n+1}{k+1} \Delta^{n-k} d_k$$

dır. Buna göre $H \in (\gamma, \gamma)$ olması için

$$(1) \quad \sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} |\Delta^{n-k} d_k| < \infty$$

koşulu gereklidir. V_0 keyfi ve $n \geqslant 1$ için $V_n = d_{n-1}$ alalım. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} |\Delta^{n-k} d_k| = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\Delta^{n+1-k} d_{k-1}|$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\Delta^{n+1-k} V_k| \leq \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\Delta^{n+1-k} V_k|$$

Diğer yandan Bölüm 1, kesim 3 deki (7) den $V_0 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \Delta^{n+1-k} V_k$

olduğundan $\Delta^{n+1} V_0 = V_0 - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \Delta^{n+1-k} V_k$ ve bundan dolayı

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\Delta^{n+1-k} V_k| = |\Delta^{n+1} V_0| + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\Delta^{n+1-k} V_k|$$

$$= \left| V_0 - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \Delta^{n+1-k} V_k \right| + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\Delta^{n+1-k} V_k|$$

$$\leq |V_0| + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} |\;^{n+1-k} V_k|$$

$$= |V_0| + 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} |\Delta^{n-k} V_{k+1}|$$

$$= | V_o | + 2 \sum_{k=o}^{n} \binom{n+1}{k+1} | \Delta^{n-k} d_k |$$

olduğundan (1) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_n \sum_{k=o}^{n+1} \binom{n+1}{k} | \Delta^{n+1-k} V_k | < \infty$$

dır. Sonuç 2.2.2 dende (1) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul (V_n) nin bir moment dizisi olmasıdır. (V_n) bir moment dizisi ise Tanım 1.3.1 den $f(x)$ $[0,1]$ de sınırlı salınımlı bir fonksiyon olmak üzere $V_n = \int_0^1 x^n \, df(x)$ dir. Bundan dolayı her bir k için

$$g_{n,k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \Delta^{m-k} V_{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{m-k} \, df(x) \qquad \text{dir.}$$

Diğer yandan m herhangi bir sayı ve $|x| < 1$ olmak üzere binom serisi olarak adlandırılan

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \ldots + \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)x^n}{n!}+\ldots$$

bağıntısından $\sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} (1-x)^{m-k} = x^{-(k+1)}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} g_{n,k} = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{m-k} \, df(x)$$

$$= \int_0^1 \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} x^{k+1} (1-x)^{m-k} \, df(x) = \int_0^1 df(x) \quad \text{dir}$$

O halde aşağıdaki teoremleri ispat etmiş olduk.

Teorem 2.3.1. $H \in (\gamma,\gamma)$ olması için gerek ve yeter koşul V_0 keyfi ve $n \geq 0$ iç $d_n = V_{n+1}$ olmak üzere (V_n) nin bir moment dizisi olmasıdır.

Teorem 2.3.2. $H \in (\gamma, \gamma;p)$ olması için gerek ve yeter koşullar, (V_n) nin b moment dizisi olması ile beraber

$$V_0 = \int_0^1 df(x) = 1 \quad \text{dir.}$$

İspat, Teorem 1.1.7 dikkate alınarak yukarıda yapılanlardan elde edilir.

Şimdi de $H \in (l,l)$ olması için gerek ve yeter koşulları bulmada kullanılacak ol bir lemma vereceğiz.

Lemma 2.3.3. Bir reel (d_n) dizisinin

$$(2) \quad \sup_n \sum_{k=n}^{\infty} \left| \binom{k}{n} \Delta^{k-n} d_{n+1} \right| < \infty$$

koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul (d_n) nin bir moment dizisi olmasıdır [12] .

İspat Sonuç 1.3.9 dan (2) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşulun (α_n) ve (β_n) total monoton olmak üzere $(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\Delta^p d_n = \Delta^p d_{n+1} + \Delta^p d_n - \Delta^p d_{n+1} = \Delta^p d_{n+1} + \Delta^{p+1} d_n$$

$$= d_{n+1,p} + d_{n,p+1}$$

$$\Rightarrow d_{n,p} = d_{n+1,p} + d_{n,p+1} \quad \text{ardışık olarak devam edilirse}$$

$$= d_{n+1,p} + d_{n+1,p+1} + d_{n,p+2}$$

$$= d_{n+1,p} + d_{n+1,p+1} + d_{n+1,p+2} + d_{n,p+3}$$

$$= \ldots,$$

(2) den $\sup_{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{k+n}{n} \Delta^k d_{n+1} \right| < \infty$ olup $\lim_{r \to \infty} d_{n,p+r} = \lim_{r \to \infty} \Delta^{p+r} d_n = 0$

ve $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{k+n}{n} \Delta^k d_{n+1} \right| \geq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \Delta^k d_{n+1} \right| = \sum_{k=0}^{p-1} \left| \Delta^k d_{n+1} \right| + \sum_{k=p}^{\infty} \left| \Delta^k d_{n+1} \right|$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \left| \Delta^k d_{n+1} \right| + \sum_{r=0}^{\infty} \left| \Delta^{p+r} d_{n+1} \right|$$

olduğundan $\sum_{r=0}^{\infty} \left| \Delta^{p+r} d_{n+1} \right| = \sum_{r=0}^{\infty} \left| d_{n+1,p+r} \right| < \infty$ dır. Bundan dolayı

$$(3) \quad \Delta^p d_n = d_{n+1,p} + d_{n+1,p+1} + d_{n+1,p+2} + \cdots + d_{n+p,p+s} + d_{n,p+s+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{s} d_{n+1,p+r} + d_{n,p+s+1} = \sum_{r=0}^{\infty} d_{n+1,p+r} + \lim_{s \to \infty} d_{n,p+s+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} d_{n+1,p+r}$$

Buradan da

$$\left| \Delta^p d_n \right| = \left| d_{n,p} \right| \leq \sum_{r=0}^{\infty} \left| d_{n+1,p+r} \right|$$

dır. Şimdi $d_{n,p,r} = \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r} d_{n+r+1,p+m-r}$ ve

$$d^{x}_{n,p,r} = \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r} \left| d_{n+r+1,p+m-r} \right|$$

diyelim. Buradan $d_{n,p,r} = d_{n+r+1,p} + (r+1)\, d_{n+r+1,p+1}$

$$+ \frac{(r+2)(r+1)}{1.2} d_{n+r+1,p+2} + \cdots$$

$$+ \cdots$$

dır. Şimdi $d_{n+r+2,p} + d_{n+r+2,p+1} + \dots +$

$$+ (r+1)\, d_{n+r+2,p+1} + (r+1)\, d_{n+r+2,p+2} + \dots +$$

$$+ \frac{(r+2)(r+1)}{1.2}\, d_{n+r+2,p+2} + \dots +$$

$$+ \dots$$

Çift serisini göz önüne alalım. Bu çift serinin satırlarının toplamı (3) den $d_{n,p,r}$ ve sütunlarının toplamı

$$d_{n+r+2,p} + (r+2)\, d_{n+r+2,p+1} + \frac{(r+3)(r+2)}{1.2}\, d_{n+r+2,p+2} + \dots = d_{n,p,r+1}$$

dir. Çift serinin terimlerinin mutlak değerlerini alır sütunlarını toplarsak

$$\sum_{m \geqslant r+1} \binom{m}{r+1} \left| d_{n+r+2,p+m-r-1} \right| \qquad \text{serisini buluruz.}$$

$$\binom{m}{r+1} \leqslant \binom{m+p}{r+1} \leqslant \binom{m+p+n}{r+1+n} \qquad \text{ve de}$$

$$\sum_{m=r+1}^{\infty} \binom{p+n+m}{n+r+1} \left| d_{n+r+2,p+m-r-1} \right| = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{p+n+m+r+1}{n+r+1} \left| d_{n+r+2,p+m} \right|, \quad n+r+1 = s$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{p+m+s}{s} \left| d_{s+1,p+m} \right| , \qquad p+m = k$$

$$= \sum_{k=p}^{\infty} \binom{k+s}{s} \left| d_{s+1,k} \right| = \sum_{k=p}^{\infty} \binom{k+s}{s} \left| \Delta^k d_{s+1} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+s}{s} \left| \Delta^k d_{s+1} \right| < \infty$$

olduğundan $\sum\limits_{m \geqslant r+1}^{\infty} \binom{m}{r+1} \left| d_{n+r+2,p+m-r-1} \right| < \infty$ dır. O halde çift seri mutlak yakınsak olup, $d_{n,p,r+1} = d_{n,p,r}$ dir vede $(d^x_{n,p,r})_r$ n ve p den bağımsız olarak sınırlıdır. Diğer yandan

$$d^x_{n,p,r} = \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r} \left| d_{n+r+1,p+m-r} \right|$$

$$= \left| d_{n+r+1,p} \right| + (r+1) \left| d_{n+r+1,p+1} \right| + \frac{(r+2)(r+1)}{1\ .\ 2} \left| d_{n+r+1,p+2} \right|$$

$$+ \ldots \qquad (3)\text{ den}$$

$$= \left| \sum_{t=0}^{\infty} d_{n+r+2,p+t} \right| + (r+1) \left| \sum_{t=0}^{\infty} d_{n+r+2,p+1+t} \right|$$

$$+ \frac{(r+2)(r+1)}{1.2} \left| \sum_{t=0}^{\infty} d_{n+r+2,p+2+t} \right| + \ldots$$

$$\leqslant \left| d_{n+r+2,p} \right| + \left| d_{n+r+2,p+1} \right| + \left| d_{n+r+2,p+2} \right| + \ldots +$$

$$+ (r+1) \{ \left| d_{n+r+2,p+1} \right| + \left| d_{n+r+2,p+2} \right| + \ldots \}$$

$$+ \frac{(r+2)(r+1)}{1.2} \{ \left| d_{n+r+2,p+2} \right| + \ldots \}$$

$$+ \ldots$$

bu çift serinin sütunlarını toplarsak

$$\left| d_{n+r+2,p} \right| + (r+2) \left| d_{n+r+2,p+1} \right| + \frac{(r+3)(r+2)}{1.2} \left| d_{n+r+2,p+2} \right| + \ldots$$

$$= \sum_{m=r+1}^{\infty} \binom{m}{r+1} \left| d_{n+r+2,p+m-r} \right| = d^x_{n,p,r+1}$$

olur ki $d^x_{n,p,r} \leqslant d^x_{n,p,r+1}$ olduğundan $\lim_{r\to\infty} d^x_{n,p,r}$ mevcuttur. Bu limiti $\lim_{r\to\infty} d^x_{n,p,r} = d^x_{n,p}$ olarak gösterelim. $d_{n,p,r} = d_{n,p,r+1}$ olduğundan

(3) den $d_{n,p,r} = d_{n,p,o} = d_{n,p}$ dir. Buradan $d^{x}_{n,p,r} \geqslant |d_{n,p,r}| = |d_{n,p}|$.
Buradan da

$$(4) \quad d_{n,p} \leqslant |d_{n,p}| \leqslant d^{x}_{n,p,r} \leqslant d^{x}_{n,p} \qquad \text{dır.}$$

$$d^{x}_{n,p,r+1} - d^{x}_{n+1,p,r} = \sum_{m=r+1}^{\infty} \binom{m}{r+1} |d_{n+r+2,p+m-r-1}|$$

$$- \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r} |d_{n+r+2,p+m-r}|$$

$$= \sum_{m=r+1}^{\infty} \binom{m}{r+1} |d_{n+r+2,p+m-r-1}| - \sum_{m=r+1}^{\infty} \binom{m-1}{r} |d_{n+r+2,p+m-r-1}|$$

$$= \sum_{m=r+1}^{\infty} \left[\binom{m}{r+1} - \binom{m-1}{r} \right] |d_{n+r+2,p+m-r-1}| = \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m-1}{r+1} |d_{n+r+2,p+m-r-1}|$$

$$= \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r+1} |d_{n+r+2,p+m-r}| = \sum_{m=r+1}^{\infty} \binom{m}{r+1} |d_{n+r+2,p+m-r}| = d^{x}_{n,p+1,r+1}$$

dir. O halde $\lim\limits_{r\to\infty} (d^{x}_{n,p,r+1} - d^{x}_{n+1,p,r}) = \lim\limits_{r\to\infty} d^{x}_{n,p+1,r+1}$,

$d^{x}_{n,p} - d^{x}_{n+1,p} = d^{x}_{n,p+1}$ Yani $\Delta d^{x}_{n,p} = d^{x}_{n,p+1}$ dir. Ardışık olarak

$$d_{n,p} = \Delta d_{n,p-1} = \Delta^{2} d_{n,p-2} = \dots = \Delta^{p} d^{x}_{n} \quad \text{ve} \quad (4) \quad \text{den}$$

$$(5) \quad |\Delta^{p} d_{n}| = |d_{n,p}| \leqslant |d^{x}_{n,p}| = \Delta^{p} d^{x}_{n}$$

elde edilir.

$\alpha_{n} = \dfrac{1}{2} [d^{x}_{n} + d_{n}]$ ve $\beta_{n} = \dfrac{1}{2} [d^{x}_{n} - d_{n}]$ dersek

$(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ ve (5) den $\Delta^p \alpha_n = \frac{1}{2} [\Delta^p d_n^x + \Delta^p d_n] \geq 0$ ve

$\Delta^p \beta_n = \frac{1}{2} [\Delta^p d_n^x - \Delta^p d_n] \geq 0$ olup (α_n) ve (β_n) total monotondur.

Karşıt olarak (α_n) ve (β_n) total monoton olmak üzere $(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ olsun. Teorem 1.3.7 den $\alpha_n = \int_0^1 x^n \, dg_1$ ve $\beta_n = \int_0^1 x^n \, dg_1$ olacak şekilde g_1 ve g_2 sınırlı salınımlı fonksiyonları vardır.

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} |\Delta^{k-n} d_{n+1}| = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} |\Delta^{k-n} (\alpha_{n+1} - \beta_{n+1})|$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} |\Delta^{k-n} \alpha_{n+1} - \Delta^{k-n} \beta_{n+1}|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} |\Delta^{k-n} \alpha_{n+1}| + \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} |\Delta^{k-n} \beta_{n+1}|$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \Delta^{k-n} \alpha_{n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \Delta^{k-n}_{\beta} {}_{n+1}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{k-n} \, dg_1(x) + \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{n-k} \, dg_2(x)$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^{n+1} (1-x)^{k-n} \, dg_1(x) + \int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^{n+1} (1-x)^{k-n} \, dg_2(x)$$

$$= \int_0^1 dg_1(x) + \int_0^1 dg_2(x) = \alpha_0 + \beta_0 \qquad \text{olup}$$

$$\sup_{n} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \left| \Delta^{k-n} d_{n+1} \right| < \infty \qquad \text{dır.}$$

Şimdi $H \in (\ell,\ell)$ ve $H \in (\ell,\ell;p)$ olması için gerek ve yeter koşulları bulmak için önce Teorem 1.1.8 i dikkate alalım. $H \in (\ell,\ell)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left| \Delta^{n-k} d_{k} \right| < \infty$$

dır. V_0 keyfi ve $k \geqslant 0$ için $d_k = V_{k+1}$ alırsak $H \in (\ell,\ell)$ olması için gerek ve yeter koşul $\sup_{k} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left| \Delta^{n-k} V_{k+1} \right| < \infty$ dır. Lemma 2.3.3 den $H \in (\ell,\ell)$ olması için gerek ve yeter koşul (d_n) nin moment dizisi olmasıdır.

O halde aşağıdaki teoremler ispatlanmış oldu.

Teorem 2.3.4. $H \in (\ell,\ell)$ olması için gerek ve yeter koşul ; Teorem 2.3.1. in koşulunun sağlanmasıdır.

Teorem 2.3.5. $H \in (\ell,\ell;p)$ olması için gerek ve yeter koşul Teorem 2.3.2. nin koşullarının sağlanmasıdır.

İspat, $$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} V_{k+1} = \int_0^1 d\, f(x)$$

olduğundan Teorem 1.1.9 dikkate alınarak Teorem 2.3.4 den elde edilir.

Bunlardan sonra hemen aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.3.6 (i) $H \in (\gamma,\gamma)$ olması için gerek ve yeter koşul $H \in (\ell,\ell)$

(ii) $H \in (\gamma,\gamma;p)$ olması için gerek ve yeter koşul $H \in (\ell,\ell;p)$ dir.

Şimdi de $[\,0,1\,]$ üzerinde Riemann integrallenebilen fonksiyonların cümlesi $R[0,1]$ ile gösterilmek üzere $g \in R[0,1]$ tarafından oluşturulan (d_n) moment dizisi için $H(d)$ nın Teorem 1.1.10 un koşullarını sağlaması için gerek ve yeter koşulları bulacağız [1] . Bunun içinde önce gerekli olan aşağıdaki lemmaları vereceğiz.

Eğer n,k $k \leq n$ negatif olmayan herbir sayı çifti için $f_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ dersek Bölüm 1, kesim 2 deki (6) ve (9) özelliklerinden $\int_0^1 f_{n,k}(x)\, dg(x)$ mevcuttur.

Lemma 2.3.7. $V_{[0,1]} f_{n,k}$, $f_{n,k}(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde varyasyonu yani $V_{[0,1]} f_{n,k} = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f_{n,k}(x_i) - f_{n,k}(x_{i-1})|$ ve K, g nin sürekli olduğu her $x \in [0,1]$ için $|g(x)| < K$ olacak şekilde pozitif bir sayı ise

$$\left| \int_0^1 g\, d f_{n,k}(x) \right| \leq K\, V_{[0,1]} f_{n,k}$$

dır.

İspat, [15] Sayfa 362, Teorem 2.

Lemma 2.3.8. Eğer n,m $m \leq n$ negatif olmayan tamsayı çifti ise o zaman $\sum_{k=0}^{m} f_{n,k}(x)$, $[0,1]$ üzerinde monoton azalandır.

İspat . $f(x) = \sum_{k=0}^{m} f_{n,k}(x)$ diyelim

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} k\, x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} x^k (n-k)(1-x)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} k\, x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n}{k-1} x^{k-1} (n-k+1)^{n-k} (1-x)^{n-k}$$

$k \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} (n-k+1)$ olduğundan

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k-1} (n-k+1)\, x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=1}^{m+1} \binom{n}{k-1} (n-k+1)\, x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$= -\binom{n}{m} x^m (n-m)(1-x)^{n-m-1} \leqslant 0$$

olduğundan $f(x) = \sum_{k=o}^{m} f_{n,k}(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ de monoton azalandır.

Teorem 2.3.9. $g \in R[0,1]$ de (d_n), g nin moment dizisi ise $H(d)$ Hausdorff matrisinin Teorem 1.1.10 un koşullarını sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k\right)_{n=k}^{\infty} \quad , (k=o,1,2,\ldots) \text{ için yakınsak olmasıdır.}$$

İspat. $f(1) = \begin{cases} 0 & , \quad m < n \\ 1 & \quad m = n \end{cases}$ $f(0) = 1$ dir. Bölüm 1, kesim 2 deki (9) özelliğinden kısmi integrasyonla

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dg(x) \right| = \left| g(1)f(1) - g(o)f(o) - \int_0^1 g(x)\, d f(x) \right|$$

$$= \begin{cases} \left| - g(o) - \int_0^1 g(x)\, d f(x) \right. , & m < n \\ \left| g(1) - g(o) - \int_0^1 g(x)\, d f(x) \right., & m = n \end{cases}$$

Lemma 2.3.8 den $V_{[0,1]} f(x) = \operatorname{Sup}_p \sum_{i=1}^{m} | f(x_i) - f(x_i-1) | = f(0) - f(1)$

dir. O halde, $K > |g(x)| < K$ olacak şekilde bir pozitif sayı olmak üzere

$m < n \Rightarrow \left| \int_0^1 f(x)\, dg(x) \right| \leqslant |g(o)| + \left| \int_0^1 g(x)\, d f(x) \right|$ lemma 2.3.7 den

$$\leqslant |g(o)| + K\, V_{[0,1]} f(x)$$

$$< 2K$$

ve $n = m$ ise

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dg(x) \right| \leq |g(1)| + |g(o)| + K\, V_{[0,1]} f(x) < 2K$$

$$\left| \sum_{k=0}^{m} h_{n,k} \right| = \left| \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dg(x) \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f(x)\, dg(x) \right| < \infty \qquad \text{olup}$$

$$\sup_{n,m} \left| \sum_{k=0}^{m} h_{n,k} \right| < \infty \qquad \text{dır.}$$

Diğer yandan

$$\sum_{k=0}^{n} h_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k = \int_0^1 dg$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} h_{n,k}$ mevcuttur ve de $\left(\binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k\right)_{n=k}^{\infty} = (h_{n,k})_{n=k}^{\infty}$

olduğundan Teorem 1.1.10 dikkate alınırsa ispat tamamlanmış olur.

4. HAUSDORFF DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Bu kesimde birinci olarak Hardy tarafından ispatlanan Hausdorff Dönüşümleri için bir eşitsizlik [4] , ikinci olarakta bazı sınırlamalar ile bu eşitsizliğin tersini vereceğiz [13] .

g artan bir fonksiyon, $g(+0) = 0$, $g(1) = 1$ ve $d_m = \int_0^1 t^m dg(t)$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ olmak üzere (b_n), (a_n) dizisinin

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^{n-m} d_m \; a_m \quad \text{ile tanımlı Hausdorff ortalaması olsun.}$$

Teorem 2.4.1. Eğer $a_n \geq 0$ ve $P > 1$ ise her n için $a_n = 0$ olmadıkça ve dönüşüm birim dönüşüm olmadıkça

$$(1) \quad \sum_n b_n^p < \left(\int_0^1 t^{-1/p} \, dg(t) \right)^p \quad \sum_n a_n^p = K(p) \sum_n a_n^p$$

dir. Burada $K(p)$ bu eşitsizliği sağlayanların en küçüğü olup, $K(p)$ ve $\sum_n a_n^p$ nın sonlu olduğu varsayılmaktadır.

İspat. $0 < t < 1$ olmak üzere

$$(2) \quad e_n = e_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m$$

olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$(3) \quad e_n \leqslant \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m^p \right)^{1/p} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m \right)^{p-1}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m^p \right)^{1/p}$$

olup, buradan

$$\sum_n e_n^p \leqslant \sum_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m} t^m a_m^p$$

$$= \sum_m t^m a_m^p \sum_{n \geqslant m} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m}$$

$$= \sum_m t^m a_m^p \, t^{-(m+1)}$$

$$= t^{-1} \sum_m a_m^p \qquad \text{yani}$$

$$(4) \quad \sum_n e_n^p \leqslant t^{-1} \sum_n a_n^p$$

dir. (2) den

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^{n-m} a_m = \int_0^1 \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m (1-t)^{n-m} a_m$$

$$= \int_0^1 e_n(t)\, dg(t)$$ dir. g fonksiyonu artan olduğundan

(4) ile [5] deki Teorem 201 den

$$(5) \quad (\sum_n b_n^p)^{1/p} \leqslant \int_0^1 (\sum_n e_n^p)^{1/p}\, dg(t) \leqslant (K(P) \sum_n a_n^p)^{1/p}$$

elde edilir. (5) eşitsizliğinde eşitlik olmazsa (1) eşitsizliğidir. Eğer g nin varyasyonunu sıfır yapan noktaların s cümlesinin dışında $e_n(t) = K_n \emptyset(t)$ olmadıkça (5) in birinci tarafında eşitsizlik vardır [5]. s cümlesinin tümleyeni olan s^t cümlesi için

(a) s^t, sonsuz sayıda noktaların cümlesidir,
(b) s^t, sonlu sayıda noktaların cümlesidir.

(a) durumunda sonsuz sayıda t'ler ve her n için $e_n(t) = K_n \emptyset(t)$, (b) durumunda ise g bir basamak fonksiyonudur. (a) durumunda (2) den

$$e_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m (1-t)^{n-m} a_m = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m (1-t)^{n-m} E^m a_0$$

$$= (1-t+tE)^n a_0 = (1-t(1-E))^n = (1-t\,\Delta)^n a_0, \quad (1-E = \Delta)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} t^s \Delta^s a_0$$

Eğer sıfırdan farklı ilk a_n, a_k ise o zaman $n < k$ için $e_n(t) = 0$ ve

$$e_k(t) = (-1)^k t^k \Delta^k a_0 = (-1)^k t^k \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} a_s = t^k a_k$$

$$e_{k+1}(t) = \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s \binom{k+1}{s} t^s \Delta^s a_0 = (-1)^k (k+1) t^k \Delta^k a_0 +$$

$$+ (-1)^{k+1} t^{k+1} \Delta^{k+1} a_0$$

$$= (-1)^k (k+1) t^k \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} a_s + (-1)^{k+1} t^{k+1} \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s \binom{k+1}{s} a_s$$

$$= (k+1) t^k a_k + t^{k+1} (a_{k+1} - (k+1) a_k)$$

s^t cümlesinde $E_k \neq 0$, $E_{k+1} \neq 0$ olmak üzere $e_k(t) = E_k \emptyset(t)$, $e_{k+1}(t) = E_{k+1} \emptyset(t)$ olduğundan $E_{k+1}\, e_k(t) = E_k\, e_{k+1}(t)$ dir. Buradan $\emptyset(t)$, t^k nin bir çarpanı ve $n > k$ için $\Delta^n a_0 = 0$ dır. Şimdi

$$\Delta^{k+1} a_0 = 0 \Rightarrow \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s \binom{k+1}{s} a_s = (-1)^k (k+1) a_k + (-1)^{k+1} a_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = (k+1) a_k = k\, a_k + a_k$$

$$\Delta^{k+2} a_0 = 0 \Rightarrow \sum_{s=0}^{k+2} (-1)^s \binom{k+2}{s} a_s = 0 \Rightarrow a_{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2!} a_k$$

$$\Delta^{k+3} a_0 = 0 \Rightarrow \sum_{s=0}^{k+3} (-1)^s \binom{k+3}{s} a_s = 0 \Rightarrow a_{k+3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!} a_k$$

....

$$\Delta^{k+r} a_0 = 0 \Rightarrow \sum_{s=0}^{k+r} (-1)^s \binom{k+r}{s} a_s = 0$$

$$\Rightarrow a_{k+r} = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+r)}{r!} a_k$$

olduğundan a_n, n nin bir polinomudur. $\sum_n a_n^p$ yakınsak olduğundan a_n bir sıfır polinomudur.

(b) Eğer g, $t = t_k$ da α_k sıçramasına sahip bir basamak fonksiyonu ise (method regüler olduğundan $t_k \neq 0$ dır) Bölüm 1, kesim 2 nin (8) özelliginden

$$b_n = \int_0^1 e_n(t)\, dg(t) = \sum_k \alpha_k\, e_n(t_k) \qquad \text{ve}$$

$$\int_0^1 \Big(\sum_n e_n^p\Big)^{1/p} dg(t) = \sum_k \alpha_k \Big(\sum_n e_n^p(t_k)\Big)^{1/p} \quad \text{olup (5) den}$$

$$\Big(\sum_n b_n^p\Big)^{1/p} \leq \sum_k \alpha_k \Big(\sum_n e_n^p(t_k)\Big)^{1/p} \quad \text{ve (4) den}$$

$$\int_0^1 \Big(\sum_n e_n^p(t_k)\Big)^{1/p} dg(t) \leq \int_0^1 t^{-1/p} \Big(\sum_n a_n^p\Big)^{1/p} dg(t) \quad \text{olduğundan}$$

$$\sum_k \alpha_k \Big(\sum_n e_n^p(t)\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_n a_n^p\Big)^{1/p} \int_0^1 t^{-1/p} dg(t) \quad \text{dir. Bundan dolayı}$$

$$(6) \quad \Big(\sum_n b_n^p\Big)^{1/p} \leq \sum_k \alpha_k \Big(\sum_n e_n^p(t)\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_n a_n^p\Big)^{1/p} \int_0^1 t^{-1/p} dg(t)$$

dır. Her n için $a_n = c$ (c sabit), $t = o$ yada $t = 1$ olmadıkça (3) de eşitsizlik vardır. $t_k \neq 0$ ve $\sum_n a_n$ yakınsak olduğundan her n için $a_n = 0$ yada t_k lar 1 olmadıkça (6) da eşitsizlik vardır. Fakat ikinci durumda

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

olup Bölüm 1, kesim 2 nin (8) özelliğinden $b_n = \sum_k \alpha_k\, e_n(t_k) = e_n(1) = a_n$ yani dönüşüm özdeş dönüşüm olur. O halde (5) de eşitlik olmayıp

$$\sum_n b_n^p < \Big(\int_0^1 t^{-1/p} dg(t)\Big)^p \sum_n a_n^p = K(p) \sum_n a_n^p \qquad \text{dir.}$$

Şimdi de K(p) nin bu eşitsizliği sağlayanların en küçüğü olduğunu göstereceğiz. Bunun için de $w = (1/p) + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/p$, $a_n = (n+1)^{-w}$ olarak alalım ve η herhangi bir pozitif sayı olmak üzere c, N ve ε'u

$$(1+\frac{1}{c})^{-2/p} > (1-\eta) , \quad \int_{\frac{c}{n}}^{1} t^{-1/p}\, dg(t) > (1-\eta) \int_{0}^{1} t^{-1/p}\, dg(t)$$

$(n \geq N)$, ve $\sum\limits_{N}^{\infty} a_n^p = \sum\limits_{N}^{\infty} (n+1)^{-1-p\varepsilon} > (1-\eta) \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^p$ olacak şekilde

seçelim. $(n+1)\,x = t$ değişken değiştirilmesiyle

$$\int_0^\infty e^{-(n+1)x}\, x^{w-1}\, dx = \frac{1}{(n+1)^w} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{w-1}\, dt = \frac{1}{(n+1)^w}\, \Gamma(w)$$

olacağından

$$(7) \qquad a_n = \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty e^{-(n+1)x}\, x^{w-1}\, dx \qquad \text{dir.}$$

ve $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{w-1} (1-t+t\,e^{-x})^n\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{w-1} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{m-n} (te^{-x})^m\, dx$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m}\, t^m \int_0^\infty e^{-(m+1)x}\, x^{w-1}\, dx \quad ; \quad (7) \text{ den}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-t)^{n-m}\, t^m\, a_m\, \Gamma(w) \qquad \text{olduğundan (2) den,}$$

$$(8) \qquad e_n(t) = \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty e^{-x}\, x^{w-1}\, (1-t+t\,e^{-x})\, dx$$

Diğer yandan $x > 0$, $0 < t < 1$ için $1-t+te^{-x} > e^{-tx}$ olduğundan (8) den

$$(9) \qquad e_n(t) \geq \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty x^{w-1}\, e^{-(1+nt)x}\, dx$$

olurki $(1+nt)\,x=u$ değişken değiştirilmesiyle $\int_0^\infty x^{w-1}\,e^{-(1+nt)x}\,dx =$

$$\frac{1}{(1+nt)^w}\int_0^\infty u^{w-1}\,e^{-u}\,du = \frac{1}{(1+nt)^w}\,\Gamma(w)$$ olduğundan (9) dan

$$(10) \qquad e_n(t) \geq (1+nt)^{-w}$$

elde edilir. Eğer $\frac{c}{n} < t < 1$ ise

$$(1+nt)^{-w} \geq (n+1)^{-w}\,t^{-w}\,(1+\frac{1}{c})^{-w} > t^{-1/p}\,(1+\frac{1}{c})^{-2/p}\,a_n \geq (1-\eta)t^{-1/p}\,a_n$$

olacağından (10) dan

$$(11) \qquad e_n(t) \geq (1-\eta)\,t^{-1/p}\,a_n$$

ve baştaki kabullerinde dikkate alınmasıyla (11) den

$$b_n \geq \int_{c/n}^1 e_n(t)\,dg(t) \geq (1-\eta)\,a_n \int_{c/n}^1 t^{-1/p}\,dg(t)$$

$$\geq (1-\eta)^2\,a_n \int_0^1 t^{-1/p}\,dg(t)\,,\quad (n \geq N \text{ için})$$

ve bundan dolayı da

$$\sum_{n=0}^\infty b_n^p \geq \sum_{n=N}^\infty b_n^p \geq (1-\eta)^{2p}\left(\int_0^1 t^{-1/p}\,dg(t)\right)^p \sum_{n=N}^\infty a_n^p$$

$$\geq (1-\eta)^{2p+1}\,K(p)\sum_{n=0}^\infty a_n^p$$

elde edilir. η keyfi olduğundan ispat tamamlanır.

Şimdi $K(p)$ sayısının bulunmasına birkaç örnek verelim.

Birinci olarak $g(t) = t$, fonksiyonunu alırsak

$$b_n = \int_0^1 e_n(t)\, dg(t) = \int_0^1 \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m (1-t)^{n-m} a_m\, dt$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_m \int_0^1 t^m (1-t)^{n-m} a_m\, dt = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_m\, B(m+1, n-m+1)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_m \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+2)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a_m \frac{m!\,(n-m)!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} a_m$$ ve

$$K(p) = \left(\int_0^1 t^{-1/p}\, dt\right)^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$$ olduğundan

$$\sum_n \left(\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_n a_n^p$$ elde edilir.

İkinci olarak daha genel olan $g(t) = 1 - (1-t)^k$ fonksiyonunu alırsak

$$K(p) = \left(\int_0^1 t^{-1/p}\, dg(t)\right)^p = \left(k \int_0^1 t^{-1/p} (1-t)^{k-1}\, dt\right)^p$$

$$= \left(k\, B\left(1-\frac{1}{p}, k\right)\right)^p = \left[\frac{k\,\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)\Gamma(k)}{\Gamma\left(k+1-\frac{1}{p}\right)}\right]^p$$

$$= \left[\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+1-\frac{1}{p}\right)}\right]^p$$

olup

$$\sum_n b_n^p \leqslant \left[\frac{\Gamma(1-\frac{1}{p})\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\frac{1}{p})} \right]^p \sum_n a_n^p \qquad \text{dir.}$$

Üçüncü olarak $g(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^t (\log \frac{1}{x})^{k-1} dx$ olarak alınırsa

$K(p) = (\frac{p}{p-1})^{kp}$ elde edilir.

Dördüncü olarak

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t < a \\ 1 & a \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$ fonksiyonu alınırsa Birinci

bölüm, kesim 2 nin (8) özelliğinden

$$K(p) = \left(\int_0^1 t^{-1/p}\, dg(t) \right)^p = (1.a^{-1/p})^p = a^{-1} \quad \text{dir.}$$

Şimdi de Hardy eşitsizliğinin tersi olan bir eşitsizlik ispat edeceğiz.

Hardy eşitsizliğinden $x=(x_n)$ in Cesaro ortalaması $(Sx)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ olmak üzere $p>1$, $(x_n) \in l_p$ için $||S.x||_p \leqslant \frac{p}{p-1} ||x||_p$ olup, S l_p de bir sınırlı lineer dönüşümdür. S dönüşümü bire birdir fakat örten olmadığından $||Sx||_p \geqslant K_p \,||x||_p$ olacak şekilde x den bağımsız bir K_p sayısı yoktur. Lyons [10], (x_n) leri monoton azalan dizilere sınırlayarak $\zeta(p) = \sum_n \frac{1}{n^p}$ olmak üzere $p = 2$ için

$||S x||_2^2 \geqslant \zeta(2)\; ||x||_2^2$ olduğunu ispat etti. Daha sonra Renault bunun bir genelleştirmesi olan $p > 1$ için $||Sx||_p^p \geqslant \zeta(p)\; ||x||_p^p$ eşitsizliğini ispatladı [13]. Biz burada Renault'un eşitsizliğinin ispatını vereceğiz.

Önce, eşitsizliğin ispatında kullanılacak iki tane lemma vereceğiz.

Lemma 2.4.1. $p > 1$ ve $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ için

$$(12) \qquad (x_1 + \ldots + x_n)^p - (x_1^p + \ldots + x_n^p) \geqslant \sum_{k=2}^{n} (k^p - (k-1)^p - 1)\, x_k^p$$

İspat. k sabit olmak üzere $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}$ ve $x = x_k$ dersek $u \geqslant (k-1)\,x$, $(x_1 + \ldots + x_k)^p - (x_1 + \ldots + x_{k-1})^p = (u + x)^p - u^p$

$$= x^p\,[\,(\alpha + 1)^p - \alpha^p\,] \qquad \alpha = u/x \geqslant k - 1$$

dır. Şimdi $f(x) = (x + 1)^p - x^p$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f artan olduğundan $f(u/x) \geqslant f(k-1)$ olup, böylece

$$(x_1 + \ldots + x_k)^p - (x_1 + \ldots + x_{k-1})^p = x^p f(u/x) \geqslant x^p f(k - 1)$$

yani

$$(13) \qquad (x_1 + \ldots + x_k)^p - (x_1 + \ldots + x_{k-1})^p \geqslant (k^p - (k-1)^p)\, x_k^p$$

(13) eşitsizliğini $k = 2$ den $k = n$ ye kadar toplarsak

$$\sum_{k=2}^{n} [\,(x_1 + \ldots + x_k)^p - (x_1 + \ldots + x_{k-1})^p\,] \geqslant \sum_{k=2}^{n} (k^p - k-1)^p)\, x_k^p$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} (x_1 + \ldots + x_k)^p - \sum_{k=1}^{n-1} (x_1 + \ldots + x_k)^p \geqslant \sum_{k=2}^{n} (k^p - (k-1)^p)\, x_k^p$$

$$\Rightarrow (x_1 + \ldots + x_n)^p - x_1^p \geqslant \sum_{k=2}^{n} (k^p - (k-1)^p)\, x_k^p$$

$$\Rightarrow (x_1 + \ldots + x_n)^p - (x_1^p + \ldots + x_n^p) \geqslant \sum_{k=2}^{n} (k^p - (k-1)^p - 1)\, x_k^p$$

olup (12) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.4.2. Eğer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ ve $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ olmak üzere $n \geqslant 2$ için $(n^p - (n-1)^p - 1)\, T_{n-1} \geqslant S_{n-1}$ dir.

İspat. Eğer n=2 alırsak $(2^p - 2)\,(\xi(p)-1) \geqslant 1$ yani $\xi(p) \geqslant 1 + \frac{1}{2^p-2}$ olduğunu göstermek gereklidir, fakat

$$\xi(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

$$\geqslant 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{2}{4^p} + \frac{4}{8^p} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p-1}} + \frac{1}{2^{3p-2}} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2^p}\left(1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2^p}\left(\frac{1}{1-2^{-p+1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2^p - 2}$$

dır. O halde eşitsizliği $n > 2$ için ispatlamak yeterlidir.

$$(14) \quad (n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^p}{k^p} - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad \text{dir.}$$

(14) ün sağındaki birinci toplamın $k = n^2-n,\ n^2, n^2+n, \ldots$ ye karşılık

gelen terimleri ile üçüncü toplamın $k = n, n+1, n+2, \ldots$ ye karşılık gelen terimleri sadeleşeceğinden

$$(n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1} = \sum_{k=0}^{n^2-n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \sum_{k=n^2-n+1}^{n^2-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \sum_{k=n^2+1}^{n^2+n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p$$

$$(15) \qquad + \sum_{k=n^2+n+1}^{n^2+2n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \ldots - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

$$= \sum_{k=0}^{n^2-n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n^2+k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n^2+n+k}\right)^p$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n^2+2n+k}\right)^p + \ldots - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

$$= \sum_{k=0}^{n^2-n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n^2+jn+k}\right)^p - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

dır. Diğer taraftan

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p = \sum_{k=n}^{n^2-n} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \sum_{k=n^2-n+1}^{n^2-1} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \sum_{k=n^2}^{n^2+n-2} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

$$+ \sum_{k=n^2+n-1}^{n^2+2n-3} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \sum_{k=n^2+2n-2}^{n^2+3n-4} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \ldots$$

$$= \sum_{k=n}^{n^2-n} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{n^2-n+k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{n^2-1+k}\right)^p$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{n^2+n-2+k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{n^2+2n-3+k}\right)^p + \ldots$$

$$= \sum_{k=n}^{n^2-n} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{n^2+(j-1)n-j+k}\right)^p$$

olduğundan bu değeri (15) de yerine yazarsak

$$(n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1} = \sum_{k=o}^{n^2-n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p - \sum_{k=n}^{n^2-n} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

$$+ \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n^2+jn+k}\right)^p - \left(\frac{n-1}{n^2+(j-1)n-j+k}\right)^p$$

elde edilir. $\dfrac{n}{n^2+jn+k} \geqslant \dfrac{n-1}{n^2+(j-1)n-j+k}$ olduğundan çift serinin toplamı pozitif olup

$$(16) \quad (n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1} \geqslant \sum_{k=o}^{n^2-n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p - \sum_{k=n}^{n^2-n} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

dır. Diğer yandan

$$(17) \quad \sum_{k=o}^{n^2-n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p = 1^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1}\right)^p + \sum_{k=n^2-2n+1}^{n^2-n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n+k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{2n+k}\right)^p$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{3n+k}\right)^p + \ldots + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{(n-1)n+k}\right)^p$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{jn+k}\right)^p$$

ve

$$(18)\quad \sum_{k=n}^{n^2-n} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p = \sum_{k=n}^{2n-2} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \sum_{k=2n-1}^{3n-3} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

$$+ \sum_{k=3n-2}^{4n-4} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p + \ldots + \sum_{k=n^2-2n+2}^{n^2-n} \left(\frac{n-1}{k}\right)^p$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{(n-1)+k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{2(n-1)+k}\right)^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{3(n-1)+k}\right)^p + \ldots$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{(n-1)(n-1)+k}\right)^p$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-1}{j(n-1)+k}\right)^p$$

dır. (17) ve (18) deki değerlerini (16) da kullanırsak

$$(n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{n}{jn+k}\right)^p - \left(\frac{n-1}{j(n-1)+k}\right)^p \right]$$

elde edilir. $\frac{n}{jn+k} \geqslant \frac{n-1}{j(n-1)+k}$ olduğundan buradaki çift serinin toplamı pozitif olup

$$(n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} = S_{n-1}$$

olur ki buda ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.3. Eğer $p > 1$ ve $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ olmak üzere $(x_n) \in \ell_p$ ise

$$\|Sx\|_p^p \geqslant \xi(p)\ \|x\|_p^p$$ (burada $\xi(p)$ bu eşitsizliği sağlayanların en büyüğüdür).

İspat. $(x_n) \in l_p$ ve $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0$ ise

$$\|Sx\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n)^p}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1^p+\dots+x_n^p+\varepsilon_n)}{n^p}$$

Burada $\varepsilon_1=0$ ve $n \geq 2$ için $\varepsilon_n = (x_1+\dots+x_n)^p - (x_1^p + \dots x_n^p)$

dır. Lemma 2.4.1.den

$$(19) \qquad \varepsilon_n \geq \sum_{k=2}^{n} (k^p - (k-1)^p - 1)\, x_k^p$$

dır.

$$(20) \|Sx\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1^p+\dots+x_n^p)}{n^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}, \quad \varepsilon_1 = 0$$

oldugundan

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^p}{n^p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \left(\frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \dots \right)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} + \sum_{n=2}^{\infty} x_n^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} - \sum_{n=2}^{\infty} x_n^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_n}{n^p} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) x_n^p \right]$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_n}{n^p} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}\right) x_n^p \right]$$

$$= \|x\|_p^p \quad \zeta(p) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_n}{n^p} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}\right) x_n^p \right]$$

dır. (19) dan $n \geqslant 2$ için $\varepsilon_n \geqslant \sum_{k=2}^{n} (k^p-(k-1)^p-1)\, x_k^p$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=2}^{n} (k^p-(k-1)^p-1)\, x_k^p = \sum_{k=2}^{\infty} (k^p-(k-1)-1) x_k^p \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} (n^p-(n-1)^p-1) x_n^p \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ dır. Burada $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$,

$T_n = \zeta(p) - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ dersek

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} (n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1}\, x_n^p$ olur. lemma 2.4.2 den

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^p} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} (n^p-(n-1)^p-1)\, T_{n-1}\, x_n^p \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} S_{n-1}\, x_n^p$$

$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}\right) x_n^p$ dir. O halde (20) den

$$\|Sx\|_p^p \geqslant \zeta(p) \quad \|x\|_p^p$$

elde edilirki, buda ispatı tamamlar.

Şimdi de $\xi(P)$ nın bu eşitsizliği sağlayan en büyük pozitif tam sayı olduğunu gösterelim.

Bunun içinde $\|Sx\|_p^p \geq K\|x\|_p^p$ olacak şekilde bir $K > \xi(p)$ sayısı bulunduğunu varsayalım. $(x_n) = (x_1, 0, 0, \ldots)$ dizisini alırsak $(x_n) \in l_p$,

$\|x\|_p^p = \sum_n x_n^p = x_1^p$ ve $\|Sx\|_p^p = \sum_n \left(\frac{x_1}{n}\right)^p = x_1^p \, \xi(P)$ dır.

$\|Sx\|_p^p \geq K \|x\|_p^p$ olduğundan $\xi(P) \geq K$ dır .

O halde $\xi(p) = K$ dır.

Hardy eşitsizliği ile ters eşitsizliğinden $\xi(p)\|x\|_p^p \leq \|Sx\|_p^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|x\|_p^p$ olduğundan $\xi(P) \leq \left(\frac{P}{p-1}\right)^p$ olduğu da elde edilmiş olur.

Şimdi esitsizliklerle ilgili iki teorem daha vereceğiz.

Teorem 2.4.4. Eğer $P > 1$ ise $\sum_n (x_n + x_{n+1} + \ldots)^p \leq p^p \sum_n (nx_n)^p$ dır.

İspat. [5] sf.246 da Teo.331

Teorem 2.4.5. Eğer $P > 1$ ve $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$ ise o zaman

$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + x_{n+1} + \ldots)^p \geq \sum_{n=1}^{\infty} (nx_n)^p$ dir.

İspat. Lemma 2.4.1 de $(x_1 + \ldots + x_n)^p - x_1^p \geq \sum_{k=2}^{n} (k^p - (k-1)^p)\, x_k^p$ olduğunu bulmuştuk. Bundan dolayı

$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p \geq \sum_{k=1}^{n} (k^p - (k-1)^p)\, x_k^p$ ve buradan da $\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)^p \geq \sum_{k=1}^{\infty} (k^p - (k-1)^p) x_k^p$

şimdi buna benzer olarak $r \geqslant 1$ için $\left(\sum_{k=r}^{\infty} x_k\right)^p \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (k^p-(k-1)^p)\, x_{k+r-1}^p$

olduğunu gösterelim. Lemma 2.4.1 dekine benzer olarak

$u=x_r+x_{r+1}+\ldots+x_{r+k-2}$, $x=x_{r+k-1}$ dersek

$$(x_1+\ldots+x_{r+k-2}+x_{r+k-1})^p-(x_r+\ldots+x_{r+k-2})^p \geqslant (k^p-(k-1)^p)\, x_{r+k-1}^p$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} (x_r+\ldots+x_{r+k-1})^p - \sum_{k=2}^{n} (x_r+\ldots+x_{r+k-2})$$

$$\geqslant \sum_{k=2}^{n} (k^p-(k-1)^p)\, x_{r+k-1}^p$$

$$(x_r+\ldots+x_{r+n-1})^p - x_r^p \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} (k^p-(k-1)^p)\, x_{r+k-1}^p$$

$$(x_r+\ldots+x_{r+n-1})^p \geqslant \sum_{k=1}^{n} (k^p-(k-1)^p)\, x_{r+k-1}^p$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=r}^{r+n-1} x_k\right)^p \geqslant \sum_{k=1}^{n} (k^p-(k-1)^p)\, x_{r+k-1}^p$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)^p \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (k^p-(k-1)^p)\, x_{r+k-1}^p \quad \text{buradan da}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)^p \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (k^p-(k-1)^p)\, x_{n+k-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left[(k-(n-1))^p - (k-(n-1)-1)^p \right] x_k^p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left[(k-(n-1))^p - (k-n)^p \right] x_k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} (k-(n-1))^p - (k-n)^p \right) x_k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^p \quad x_k^p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n\, x_n)^p$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

B Ö L Ü M - III

GENELLEŞTİRİLMİŞ HAUSDORFF MATRİSLERİ

Endl [2], Harrell [6], Jokimowski [7] ve Leininger [8], [9] herbiri Hausdorff matrisinin genelleştirmelerini tanımladılar. Bu bölümde birinci olarak bu genelleştirmelerin genel tanımları ile beraber aralarındaki ilişkiyi vereceğiz. İkinci olarak Leininger genelleştirmesinin diziden diziye konservatif ve regüler olması için gerek ve yeter koşulları bularak bunlar üzerine bazı teoremler vereceğiz.

1. GENELLEŞTİRLMİŞ HAUSDORFF MATRİSLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu kesimde genel tanımlar ile beraber Harrell'in genelleştirmesi ile Leinninger'in genelleştirmesinin formal olarak aynı olduğunu, hem Leininger genelleştirilmiş matrisi, hem de Jokimowski genelleştirilmiş matrisi olan matrislerin sınıfının sadece Endl genelleştirilmiş matrislerinin sınıfı olduğunu göstereceğiz.

Tanım 3.1.1. $s=(s_n)$ pozitif sayıların bir dizisi n,p negatif olmayan sayıların bir çifti ve

$$(a)\quad \binom{n}{p}_s = \begin{cases} 0, & n<p \\ 1 & n=p \\ \dfrac{s_n s_{n-1}\cdots s_{p+1}}{(n-p)!}, & n>p \end{cases}$$

olmak üzere $S = (s_{n,p})$, $[(-1)^p \binom{n}{p}_s]$ matrisini, (d_n) bir reel sayı dizisini ve $D = (d_{n,p})$

$$d_{n,p} = \begin{cases} d_n , & n=p \\ o , & n \neq p \end{cases}$$

ile diogonal matrisini göstersin. Bu durumda

$H^{(s)} = S^{-1}DS$ matrisine Leininger genelleştirilmiş Hausdorff matrisi denir. Bu matrisi $H^{(s)}$ (d) ile bu matrislerin sınıfını da $\mathcal{H}^{(s)}(d)$ ile göstereceğiz.

Eğer her n için $s_n = n$ alınırsa $S = \delta$ olacağından $H^{(s)}(d)$ normal Hausdorff matrisi olur.

Teorem 3.1.2. $S^{-1} = S$ ve negatif olmayan her bir n,p sayı çifti için $h^{(s)}_{n,p} = \binom{n}{p}_s \Delta^{n-p} d_p$ dir.

İspat . SS=T diyelim $t_{n,p} = \sum\limits_k s_{n,k}\, s_{k,p}$ olduğundan (a) dan

$$t_{n,n} = \sum_k s_{n,k}\, s_{k,n} = s^2_{n,n} = 1$$

$$n < p \Rightarrow t_{n,p} = o \qquad \text{ve}$$

$$n > p \Rightarrow t_{n,p} = \sum_k s_{n,k}\, s_{k,p} = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k}_s (-1)^p \binom{k}{p}_s$$

$$= \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k+p} \frac{s_n\, s_{n-1} \dots s_{k+1}}{(n-k)!} \; \frac{s_k \dots s_{p+1}}{(k-p)!}$$

$$= \binom{n}{p}_s \sum_{k=o}^{n-p} (-1)^k \binom{n-p}{n-k-p} = \binom{n}{p}_s \sum_{k=o}^{n-p} (-1)^k \binom{n-p}{k} = 0$$

O halde $S^2 = I$ yani $S = S^{-1}$ dir.

Eğer n,p negatif olmayan tamsayı çifti ise o zaman

$$h_{n,p}^{(s)} = \sum_{k=p}^{n} s_{n,k}\, d_k\, s_{k,p} = \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k+p} \binom{n}{p}_s \binom{n-p}{n-k} d_k$$

$$= \binom{n}{p}_s \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k+p} \binom{n-p}{n-k} d_k$$

$$= \binom{n}{p}_s \sum_{k=o}^{n-p} (-1)^{k} \binom{n-p}{k} d_{k+p} = \binom{n}{p}_s \; \Delta^{n-p} d_p$$

Teorem 3.1.3. Eğer (b_n) ve (d_n) birer sayı dizisi, $B = (b_{n,p})$,

$$b_{n,p} = \begin{cases} b_n , & n = p \\ o, & n \neq p \end{cases}$$

olan diagonal bir matris, $\mathcal{X}$ = SBS ve $H^{(s)}$ = SDS ise $H^{(s)} \mathcal{X} = \mathcal{X} H^{(s)}$ dir.

İspatı, Teorem 2.1.3 ün ispatına benzerdir.

Teorem 3.1.4. (d_n) $n \neq m$ iken $d_n \neq d_m$ olacak şekilde bir sayı dizisi, $H^{(s)}$ = SDS ve $\mathcal{X}$, $H^{(s)} \mathcal{X} = \mathcal{X} H^{(s)}$ olacak şekilde bir matris ise $\mathcal{X}$, $H^{(s)}$ (b) nin matrisi olacak şekilde bir (b_n) dizisi vardır.

İspatı, Teorem 2.1.4 ün ispatına benzerdir.

Şimdi bir (d_n) reel dizisi için diğer genelleştirilmiş Hausdorff matrislerinin tanımını verelim.

Tanım 3.1.5. c bir reel sayı olmak üzere $h_{n,k}^{(c)}$ terimleri

$$h_{n,k}^{(c)} = \begin{cases} \binom{n+c}{n-k} \; \Delta^{n-k} d_k , & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olan $H^{(c)} = (h_{n,k}^{(c)})$ matrisine Hausdorff matrisinin Endl genelleştirmesi adı verilir. Tüm Endl genelleştirmelerinin sınıfını $\mathcal{H}^{(c)}$ ile göstereceğiz. Eğer $c = o$ alırsak $H^{(o)} = (h_{n,k}^{(o)})$ Endl genelleştirmesi normal Hausdorff matrisi olur. Yani $H^{(o)} = H$ dir. Burada

$U_n = \sum_{k=0}^{n} h_{n,k}^{(c)} s_k$ nın $n \geqslant |c|$ için tanımlı olduğuna dikkat etmek gerekir.

Tanım .3.1.6. (z_n) , $z_o = o$ ve her $n = 1,2,...$ için $z_n \neq 0$ özelliğine sahip bir dizi olsun. Terimleri

$$h_{n,k}^{(z)} = \frac{z_n}{z_k} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k$$

olan $H^{(z)} = (h_{n,k}^{(z)})$ matrisine Hausdorff matrisinin Harrell genelleştirmesi denir. Tüm Harrell genelleştirmelerinin sınıfı $\mathcal{H}^{(z)}$ ile göstereceğiz.

Eğer her n için $z_n = 1$ alırsak $H^{(z)}$ Harrell genelleştirmesi normal Hausdorff matrisi olur.

Hausdorff ve Jakimowiskiye ait olan diğer bir genelleştirme de aşağıdaki şekildedir.

Tanım .3.1.7. (λ_n) $0 \leqslant \lambda_o < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots \to \infty$ ve $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} = \infty$ olacak şekilde bir reel dizi olsun.

$[d_k, d_{k+1}] = \dfrac{d_k - d_{k+1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$ ve ardışık olarak $[d_k, \dots, d_n] =$

$$\frac{[d_k, \dots, d_{n-1}] - [d_{k+1}, \dots, d_n]}{\lambda_n - \lambda_k}$$ olmak üzere terimleri

$$\lambda_{n,k} = \lambda_{n,k}^{(\lambda)} = \begin{cases} \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n \; [d_k, \dots, d_n], & k < n \\ d_n, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanan $H_{(\lambda, d)} = (\lambda_{n,k}^{(\lambda, d)})$ matrisine Hausdorff matrisinin Jakimowski genelleştirmesi denir. Tüm Jakimowski genelleştirmelerinin sınıfını da $\mathcal{H}(\lambda, d)$ ile göstereceğiz.

Eğer her n için $\lambda_n = n$ alırsak

$$[d_k , d_{k+1}] = d_k - d_{k+1} = \Delta d_k$$

$$[d_k, d_{k+1}, d_{k+2}] = \frac{1}{2}([d_k, d_{k+1}] - [d_{k+1}, d_{k+2}])$$

$$= \frac{1}{2.1}(d_k - 2d_{k+1} + d_{k+2}) = \frac{1}{2!} \Delta^2 d_k$$ aynı şekilde

$$[d_k, d_{k+1}, d_{k+2}, d_{k+3}] = \frac{1}{3!}(d_k - 3d_{k+1} + 3d_{k+2} - d_{k+3})$$

$\frac{1}{3!} \Delta^3 d_k$ ve Tümevarımla $[d_k,\ldots, d_n] = \frac{1}{(n-k)!} \Delta^{n-k} d_k$

olduğu gösterilebileceğinden her $n \in N$ için

$$\lambda_{k+1} \cdots \lambda_n [d_k,\ldots,d_n] = (k+1)(k+2)\ldots n \frac{1}{(n-k)!} \Delta^{n-k} d_k$$

$$= \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k$$ olur.

O halde her n için $d_n = n$ olmak üzere $H(\lambda, d)$ Jakimowski Genelleştirmesi normal Hausdorff matrisidir.

Teorem 3.1.8. $\mathcal{H}^{(z)}$ ve $\mathcal{H}^{(s)}$ sınıfları formal olarak aynıdır [14]

İspat. $H \in \mathcal{H}^{(s)}$ ise $h_{n,k} = \binom{n}{k}_s \Delta^{n-k} d_k$ olacak şekilde pozitif sayıların b (s_n) dizisi vardır. Eğer (z_n) dizisini

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{s_n \ldots s_1}{n!}, & n > 0 \\ 0 , & n = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanarak $\binom{n}{k}_s = \frac{s_n \cdots s_{k+1}}{(n-k)!} = \frac{s_n \cdots s_1}{n!} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{k!}{s_k \cdots s_1}$

$$= \frac{z_n}{z_k} \binom{n}{k}$$

olacağından $h_{n,k} = \frac{z_n}{z_k} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k$ olur. O halde H, bir Hairell genelleştirmesidir. Karşıt olarak $H \in \mathcal{H}^{(z)}$ ise $h_{n,k} = \frac{z_n}{z_k} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} d_k$ olacak şekilde, $z_0=0$, $n > o$ için $z_n \neq 0$ özelliğine sahip bir (z_n) dizisi vardır. Eğer (s_n) dizisini $s_n = n \frac{z_n}{z_{n-1}}$ olarak tanımlarsak

$$\binom{n}{k}_s = \frac{s_n\, s_{n-1} \cdots s_{k+1}}{(n-k)!} = \frac{n\, z_n}{z_{n-1}} \cdot \frac{(n-1)\, z_{n-1}}{z_{n-2}} \cdots \frac{(k+1)\, z_{k+1}}{z_k} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= \frac{z_n}{z_k} \binom{n}{k}$$

olur ki (s_n) nin pozitif sayı dizisi olma koşulu olmaksızın H, bir Leininger genelleştirmesidir.

Teorem 3.1.9. $\mathcal{H}^{(s)}_{(d)} \cap \mathcal{H}(\lambda,d) = \mathcal{H}^{(c)}_{(d)}$ [14] dir.

İspat. Bir $H=(h_{n,k})$ matrisi hem bir Leininger, hem de bir Jokimowski genelleştirmesi olsun. Bu durumda $h_{n,k} = \binom{n}{k}_s \Delta^{n-k} d_k$ olacak şekilde bir (s_n) pozitif sayı dizisi ve

$$h_{n,k} = \begin{cases} d_n & k=n \\ \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n [d_k, \ldots, d_n] , & k < n \\ 0 , & k > n \end{cases}$$

olacak şekilde $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \ldots,\ \lambda_n \to \infty$ ve $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty$

özelliğine sahip bir (λ_n) reel sayı dizisi vardır, $k \geqslant n$ için $h_{n,k}$ elemanları Endlimin genelleştirmesinin terimlerine uyar. Biz $k < n$ durumunu inceleyelim. Kabul dolayısiyle

her $k < n$ için $\binom{n}{k}_s \Delta^{n-k} d_k = \lambda_{k+1} \dots \lambda_n [d_k, \dots, d_n]$ olup $k=n-1$

için $\binom{n}{n-1}_s \Delta d_{n-1} = \lambda_n [d_{n-1}, d_n] \Longrightarrow s_n (d_{n-1} - d_n) = \lambda_n \dfrac{(d_{n-1} - d_n)}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$

buradan da

$$(1) \qquad s_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \quad , \text{ ya da } \quad \lambda_n (s_n - 1) = \lambda_{n-1} s_n$$

dır. Eğer $d_o = o$ ise (1) den $s_1 = 1$ ve $\lambda_{n-1} < \lambda_n$ olduğundan $n > 1$

için $s_n > 1$ dir. Bu durumda yine (1) den

$n > 1$ için $\lambda_n = \dfrac{\lambda_{n-1} s_n}{s_n - 1} = \dfrac{\lambda_{n-1}}{1 - \dfrac{1}{s_n}}$ dir. Buna göre

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1 - \frac{1}{s_2}} \quad , \qquad \lambda_3 = \frac{\lambda_2}{1 - \frac{1}{s_3}} = \frac{\lambda_1}{(1 - \frac{1}{s_2})(1 - \frac{1}{s_2})} , \dots ,$$

$$(2) \qquad \lambda_n = \frac{\lambda_1}{\prod_{j=2}^{n} (1 - \frac{1}{s_j})} \qquad (n > 1)$$

Eğer $\lambda_o > o$ ise (1) den her n için $s_n > 1$ ve $\lambda_n = \dfrac{\lambda_{n-1}}{1 - \dfrac{1}{s_n}}$

ve buradan da

$$(3) \qquad \lambda_n = \frac{\lambda_0}{\prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{1}{s_j})} \qquad (n \geqslant 1) \qquad \text{dir.}$$

$k=n-2$ için

(4) $$h_{n,n-2} = \lambda_n \lambda_{n+1} [d_{n-2}, d_{n-1}, d_n]$$

$$= \lambda_n \lambda_{n-1} \left[\frac{[d_{n-2}, d_{n-1}] - [d_{n-1}, d_n]}{\lambda_n - \lambda_{n-2}} \right]$$

$$= \lambda_n \lambda_{n-1} \left[\frac{\dfrac{d_{n-2} - d_{n-1}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} - \dfrac{d_{n-1} - d_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}}{\lambda_n - \lambda_{n-2}} \right]$$

$$= \lambda_n \lambda_{n-1} \left[\frac{d_{n-2}}{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})(\lambda_{n-2} - \lambda_n)} \right.$$

$$- d_{n-1} \left(\frac{1}{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})(\lambda_{n-2} - \lambda_n)} + \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_n - \lambda_{n-2})} \right.$$

$$\left. + \frac{d_n}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_n - \lambda_{n-2})} \right]$$

$$= \lambda_n \lambda_{n-1} \left[\frac{d_{n-2}}{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})(\lambda_{n-2} - \lambda_n)} - \frac{d_{n-1}}{(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})(\lambda_n - \lambda_{n-1})} \right.$$

$$\left. + \frac{d_n}{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_n - \lambda_{n-2})} \right]$$

$$= \frac{\lambda_n \lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-2}} \left[\frac{d_{n-2}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} - \frac{d_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-2})}{(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})(\lambda_n - \lambda_{n-1})} \right.$$

$$\left. + \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \right]$$

$$= \frac{\lambda_n \lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-2}} \left[\frac{d_{n-2}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} - d_{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} + \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{d_n}{\lambda - \lambda} \right]$$

$$= \frac{\lambda_n \lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-2}} \left[\frac{\Delta d_{n-2}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} - \frac{\Delta d_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \right]$$ dir.

(1) den $\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\lambda_n}{s_n}$ ve $\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} = \frac{\lambda_{n-1}}{s_{n-1}}$ dır. Bu değerleri (4) de yerine yazalım.

$$(5) \quad h_{n,n-2} = \frac{\lambda_n \cdot \lambda_{n-1}}{\lambda_n \cdot \lambda_{n-2}} \left[\frac{s_{n-1} \Delta d_{n-2}}{\lambda_{n-1}} - \frac{s_n \Delta d_{n-1}}{\lambda_n} \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-2}} \left[\lambda_n s_{n-1} \Delta d_{n-2} - \lambda_{n-1} s_n \Delta d_{n-1} \right]$$

ve (1) den

$$\lambda_n - \lambda_{n-2} = \lambda_n - \lambda_{n-1} + \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} = \frac{\lambda_n}{s_n} + \frac{\lambda_{n-1}}{s_{n-1}}$$

$$= \frac{\lambda_n s_{n-1} + s_n \lambda_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{\lambda_n (s_{n-1} + s_n - 1)}{s_n s_{n-1}}$$

Bu değerleri (5) de yerine yazarsak

$$(6) \quad h_{n,n-2} = \frac{s_n s_{n-1}}{\lambda_n (s_n + s_{n-1} - 1)} [\lambda_n s_{n-1} \Delta d_{n-2} - \lambda_{n-1} s_n \Delta d_{n-1}]$$

$$= \frac{s_n s_{n-1}}{s_n + s_{n-1} - 1} [s_{n-1} \Delta d_{n-2} - (s_n - 1) \Delta d_{n-1}]$$

elde edilir. Diğer yandan

$$(7) \quad h_{n,n-2} = \binom{n}{n-2} \Delta^2 d_{n-2} = \frac{s_n \cdot s_{n-1}}{2!} \Delta^2 d_{n-2}$$

(6) ile (7) eşit olduğundan

$$2(s_{n-1} \Delta d_{n-2} - (s_n - 1) \Delta d_{n-1}) = (s_n + s_{n-1} - 1) \Delta^2 d_{n-2}$$

$$2(s_{n-1}\ \Delta\ d_{n-2} - (s_n - 1)\ \Delta\ d_{n-1}) = (s_n + s_{n-1} - 1)(\Delta d_{n-2} - \Delta\ d_{n-1})$$

$$(s_{n-1} - s_n + 1)\ (\ \Delta d_{n-2} + \Delta\ d_{n-1}) = 0 \quad (d_n) \quad \text{keyfi olduğundan}$$

$s_n - s_{n-1} = 1$ olmalıdır. Bundan dolayı c sabit olmak üzere $s_n = n + c$ olarak alabiliriz. Yalnız $\lambda_o > 0$ ise her n için $s_n > 1$ olduğundan $c > 0$, $\lambda_o = 0$ ise $S_1 = 1$ olduğundan $c = 0$ alınmalıdır.

($\lambda_o > 0$ ise (3) den $\lambda_n = \dfrac{\lambda_o\ (n+c)}{c}$

$\lambda_o = 0$ ise (2) den $\lambda_n = \dfrac{\lambda_1\ (n+c)}{n + 1}$)

$$c > 0 \text{ ise} \quad \binom{n}{k}_s = \frac{s_n \cdots s_{k+1}}{(n-k)\ !} = \frac{(n+c)\ \ldots\ (k+1+c)}{(n-k)\ !} = \binom{n+c}{n-k}$$

olduğundan $h_{n,k} = \binom{n+c}{n-k}\ \Delta^{n-k} d_k$ dır ve $c = o$ ise $s_n = n$, $h_{n,k} = \binom{n}{k}_s\ \Delta^{n-k} d_k = \binom{n}{k}\ \Delta^{n-k} d_k$ olurki H normal Hausdorff matrisidir. Karşıt olarak $H = (h_{n,k})$ matrisi bir Endl genelleştirmesi olsun. Bu durumda

$h_{n,k} = \binom{n+c}{n-k}\ \Delta^{n-k} d_k \quad (k \leq n)$ olacak şekilde bir c reel sayısı vardır.

Eğer $c > 0$ ise $s_n = n + c$ olarak alırsak $\binom{n+c}{n-k} = \binom{n}{k}_s$ olduğundan $H = (h_{n,k})$ matrisi bir Leininger genelleştirmesidir. Diğer yandan $\lambda_o > 0$ ve $n \geq 1$ için $\lambda_n = \dfrac{\lambda_o\ (n+c)}{c}$ olarak alırsak, $0 < \lambda_o < \lambda_1 < \cdots \lambda_n \longrightarrow \infty$ ve $\Sigma\ \dfrac{1}{\lambda_n} = \infty$ olup

$$[\,d_k,\ d_{k+1}\,] = \frac{d_k - d_{k+1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \frac{c}{\lambda_o}\ \Delta d_k$$

$$[d_k,\ d_{k+1},\ d_{k+2}\,] = \left(\frac{c}{\lambda_o}\right)^2\ \frac{1}{2.1}\ (d_k - 2d_{k+1} + d_{k+2}) =$$

$(\frac{c}{\lambda_o})^2 \frac{1}{2!} \Delta^2 d_k$, ve Tümevarımla gösterileceği gibi

$$[d_k,\ldots, d_n] = (\frac{c}{\lambda_o})^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \Delta^{n-k} d_k$$ ve buradan

$$\lambda_{k+1} \ldots \lambda_n [d_k,\ldots, d_n] = (\frac{\lambda_o}{c})^{n-k} (k+1+c) \ldots (n+c)(\frac{c}{\lambda_o})^2 \frac{1}{(n-k)!} \Delta^{n-k} d_k$$

$$= \binom{n+c}{n-k} \Delta^{n-k} d_k$$

olduğundan $H = (h_{n,k})$ matrisi bir Jakimovski matrisidir

$c = 0$ ise iddia açık

$c < 0$ ise $[|c|] = k$ diyelim.

$$s_n = \begin{cases} n + c & n > k \\ \text{Keyfi pozitif}, & n = 1,2,\ldots k \end{cases}, \quad \lambda_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_k (n+c)}{c+k}, & n > k \\ 0 \leq \lambda_o < \lambda_1 \ldots < \lambda_k \end{cases}$$

olarak (s_n) ve (λ_n) dizilerini tanımlarsak $H = (h_{n,k})$ hem bir Leininger genelleştirmesi, hemde bir Jakimovski genelleştirmesi olur.

2. LEININGER GENELLEŞTİRMESİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde Leininger genelleştirmesinin diziden-diziye regüler yada konservatif olması için gerek ve yeter koşulları bulacağız [8] . Gösterim olarak [0,1] üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonlar tarafından oluşturulan $d = (d_n)$ dizilerinin cümlesini BV ile göstereceğiz.

Lemma 3.2.1. $d \in BV$ ve $n \geq 1$ için $s_n \leq n$ olmak üzere $H^{(s)}(d) \in (c,c)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=o}^{n} h_{n,p}^{(s)}$$ 'nın mevcut olmasıdır.

İspat. $d \in BV$ yani $d = (d_n)$ moment dizisi ise sonuç 1.3.9 dan (α_n) ve (b_n) total monoton olmak üzere $(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ olarak yazılabilir. Buna göre

$$\sum_{p=o}^{n} |h_{n,p}^{(s)}| = \sum_{p=o}^{n} |\binom{n}{p}_s \Delta^{n-p} d_p| = \sum_{p=o}^{n} |\frac{s_n \cdot s_{n-1} \ldots s_{p+1}}{(n-p)!} \Delta^{n-p} d_p|$$

$$= \sum_{p=o}^{n} |\frac{s_n s_{n-1} \ldots s_{p+1}}{n(n-1) \ldots (p+1)} \binom{n}{p} \Delta^{n-p} d_p| \leqslant \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} |\Delta^{n-p} d_p|$$

$$= \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} |\Delta^{n-p} \alpha_p - \Delta^{n-p} \beta_p| \leqslant \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} |\Delta^{n-p} \alpha_p|$$

$$+ \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} |\Delta^{n-p} \alpha_p|$$

$$= \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} \Delta^{n-p} \alpha_p + \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} \Delta^{n-p} \alpha_o$$

$$= \alpha_o + \beta_o$$

olduğundan

$$\sup_{n} \sum_{p=o}^{n} |h_{n,p}^{(s)}| < \infty$$

dır.

Diğer yandan

$$\lim_{n\to\infty} h^{(s)}_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n \ldots s_{p+1}}{n(n-1)\ldots p+1} \binom{n}{p} \Delta^{n} \bar{d}_p^{p}$$

burada $U_n = \dfrac{s_n \ldots s_{p+1}}{n(n-1)\ldots(p+1)}$ dersek (U_n) monoton azalan vede her n için $U_n > 0$ olduğundan $\lim_n U_n$ mevcuttur ve (d_n) moment dizisi olduğundan lemma 2.2.3. den $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{p} \Delta^{n} \bar{d}_p^{p}$ mevcut olup $\lim_{n\to\infty} h^{(s)}_{n,p}$ mevcuttur.

Buna göre Teorem 1.1.1 in dikkate alınmasıyla ispat elde edilir.

Şimdi $p \geqslant 0$ olmak üzere $(\Pi_n^{(p)})$ dizisini $\Pi_n^{(p)} = \begin{cases} 1, & n = p \\ \prod\limits_{k=p+1}^{n} \dfrac{s_k}{k}, & n > p \end{cases}$

olarak tanımlayıp bu diziyi $\Pi^{(p)} = (\Pi_n^{(p)})_n$ ile , $\Pi^{(o)}$ yı Π ile $\left(\dfrac{1}{\Pi_n^{(p)}}\right)$ dizisini ρ_p ile gösterelim.

Lemma 3.2.2. Eğer $n \geqslant 0$ ise

$$\sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p} = \sum_{p=o}^{n} \Pi_n^{(p)} h_{n,p} = \Pi_n \sum_{p=o}^{n} h_{n,p} \rho_p = \Pi_n \sum_{p=o}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \Delta^{p}_{p}{}_{o}\, d_p$$

ve $\displaystyle\sum_{p=o}^{n} h_{n,p} = \rho_n \sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p} \Pi_p$

dir.

İspat. $\displaystyle\sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p} = \sum_{p=o}^{n} \frac{s_n \ldots s_{p+1}}{n \ldots (p+1)} h_{n,p} = \sum_{p=o}^{n} \Pi_n^{(p)} h_{n,p}$

$$= \sum_{p=o}^{n} \Pi_n \frac{1}{\Pi_p} h_{n,p} = \Pi_n \sum_{p=o}^{n} \rho_p \; h_{n,p}$$

$$= \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta^{n-p} d_p \cdot \rho_p = \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \rho_p \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n-p}{k} d_{p+k}$$

$$= \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \rho_p \sum_{k=p}^{n} (-1)^{k-p} \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p} d_k$$

$$= \Pi_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_k \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p} \rho_p \quad , \quad \text{bölüm 1, kesim 3}$$

ün (10) ve (11) eşitliklerinden

$$= \Pi_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d_k \binom{n}{k} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} \rho_p$$

$$= \Pi_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \Delta^k \rho_0 \, d_k$$

ve $$\sum_{p=0}^{n} h_{n,p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta^{n-p} d_p = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \Delta^{n-p} d_p$$

$$= \frac{1 \dots n}{s_1 \dots s_n} \sum_{p=0}^{n} \frac{s_n \dots s_{p+1}}{(n-p)\,!} \Delta^{n-p} d_p \frac{s_1 \dots s_p}{p!}$$

$$= \frac{1}{\Pi_n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}_s \Delta^{n-p} d_p \cdot \Pi_p = \rho_n \sum_{p=0}^{n} h^{(s)}_{n,p} \, \Pi_p$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. Eğer $d = (d_n) \in BV$ ve $n \geq 1$ için $s_n \leq n$ ise $H^{(s)}(d) \in (c,c)$ olması için gerek ve yeter koşul $a_{n,p} = (-1)^p \Pi_n \binom{n}{p} \Delta^n_p \rho_0$ olmak üzere

$A \in (BV, c)$ olmasıdır.

İspat. Lemma 3.2.2 den
$$\sum_{p=0}^{n} h_{n,p}^{(s)} = \sum_{p=0}^{n} \Pi_n (-1)^p \binom{n}{p} \Delta^n \rho_0 d_p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_{n,p} d_p$$

olduğundan Lemma 3.2.1 dikkate alınarak ispat elde edilir.

Şimdi ara işlemlerinde kullanılacak olan bir lemma vereceğiz.

Lemma.3.2.4. $d_n \geqslant 0$ olmak üzere $\prod_{n=1}^{\infty} (1-d_n)$ sonsuz çarpımının sıfırdan farklı sonlu bir değere yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\sum_n d_n$ serisinin yakınsak olmasıdır.

Teorem 3.2.5. Eğer $d = (d_n) \in BV$ ve $s_n \leqslant n$, $a_n = 1 - \dfrac{s_n}{n}$ $(n \geqslant 1)$ olmak üzere $\sum_n a_n$ yakınsak ise $H^{(s)}(d) \in (c, c)$ dir.

İspat. $(d_n) \in BV$ olduğundan Teorem 2.2.5. den $H \in (c, c)$ ve $\sum_n a_n$ yakınsak olduğundan Lemma 3.2.4 den $\prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{s_n}{n}$ yakınsaktır. Bundan dolayı $\lim_{n\to\infty} \Pi_n = u > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \dfrac{1}{u}$ dır. Buna göre Lemma.3.2.2 ve lemma 2.2.3 den

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} h_{n,p}^{(s)} = \lim_{n\to\infty} \Pi_n \sum_{p=0}^{n} h_{n,p} \rho_p = U \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} h_{n,p} \rho_p$$

mevcut olup

Lemma 3.2.1 den ispat tamamlanmış olur.

Sonuç .3.2.6 $d = (d_n) \in BV$, $s_n \leqslant n$ ve $a_n = 1 - \dfrac{s_n}{n}$ olmak üzere

$\sum_n a_n$ yakınsak ise $H^{(s)}(d) \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter koşul $H(d) \in (c,c;p)$ olmasıdır.

İspat. $H^{(s)}(d) \in (c,c;p)$ olsun. $\sum_n a_n$ yakınsak olduğundan Teorem 3.2.5 deki gibi

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_n = u \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \rho_n = \frac{1}{u} \quad \text{dır.}$$

$$h^{(s)}_{n,p} = \frac{s_{p+1} \cdots s_n}{(p+1)\cdots n}\, h_{n,p} \quad \text{olup} \quad h^{(s)}_{n,o} = \Pi_n\, h_{n,o} = \Pi_n\, \Delta^n d_o \quad \text{olduğundan}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^n d_o = \frac{1}{u} \lim_{n\to\infty} h^{(s)}_{n,p} = 0 \quad \text{ve Lemma 3.2.2. den} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} h_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \rho_n \sum_{p=0}^{n} h^{(s)}_{n,p}$$

$\frac{1}{u} \cdot u = 1$ olup $d_o = 1$ dir. $(d_n) \in BV$ olduğu dikkate alınırsa sonuç 2.2.4 den $H(d) \in (c,c;p)$ dir.

Karşıt olarak $H(d) \in (c,c;p)$ olsun. Lemma 3.2.1 de yapılanlara benzer olarak

$$\sup_n \sum_{p=0}^{n} |h^{(s)}_{n,p}| < \infty \quad , \lim_{n\to\infty} h^{(s)}_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{p+1} \cdots s_n}{p+1 \cdots n} \lim_{n\to\infty} h_{n,p} = 0$$

$$\text{ve Lemma 3.2.2 den} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} h^{(s)}_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \Pi_n \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} h_{n,p}\, \rho_p = u \cdot \frac{1}{u} = 1$$

dir. Teorem 1.1.2. gözönüne alınırsa $H^{(s)}(d) \in (c,c;p)$ elde edilir.

Teorem 3.2.7. Eğer $d = (d_n) \in BV$ ve $s_n \leq n$ ve herbir pozitif n tam sayısı için $a_{n+1} \geqslant \frac{n\, a_n}{(n+1)}$ ise $H^{(s)}(d)$ çarpımsaldır.

İspat. Bunun içinde Teorem 1.1.1 ve sonuç 3.2.1. göz önüne alınırsa

$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} h^{(s)}_{n,p}$ nın mevcut ve $\lim_{n\to\infty} h^{(s)}_{n,p} = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$(d_n) \varepsilon$ BV olduğundan sonuç 1.3.9 dan (α_n) ve (β_n) total monoton olmak üzere $(d_n) = (\alpha_n - \beta_n)$ olarak yazılabilir. Bunun için önce herhangi bir (α_n) total monoton dizisi için bu şartların sağlandığını ispatlayalım.
Lemma 3.2.2. den

$$(1) \qquad \sum_{p=0}^{n} h^{(s)}_{n,p} = \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \rho_p h_{n,p} = \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \rho_p \binom{n}{p} \Delta^{n-p} \alpha_p$$

$$= \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \rho_p \binom{n}{p} \left(\Delta^{n+1-p} \alpha_p + \Delta^{n-p} \alpha_{p+1} \right)$$

$$= \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \rho_p \binom{n}{p} \left[\frac{\binom{n+1}{p} \Delta^{n+1-p} \alpha_p}{\binom{n+1}{p}} + \frac{\binom{n+1}{p+1} \Delta^{n-p} \alpha_{p+1}}{\binom{n+1}{p+1}} \right]$$

$$= \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \rho_p \binom{n}{p} \left[\frac{h_{n+1,p}}{\binom{n+1}{p}} + \frac{h_{n+1,p+1}}{\binom{n+1}{p+1}} \right]$$

$$= \Pi_n \sum_{p=0}^{n} \left[\rho_p \binom{n}{p} \frac{h_{n+1,p}}{\binom{n+1}{p}} + \rho_p \binom{n}{p} \frac{h_{n+1,p+1}}{\binom{n+1}{p+1}} \right] , \quad \rho_0 = 1$$

$$= \Pi_n \left\{ h_{n+1,o} + \sum_{p=1}^{n} \left[\rho_p \binom{n}{p} \frac{h_{n+1,p}}{\binom{n+1}{p}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \rho_{p-1} \binom{n}{p-1} \frac{h_{n+1,p}}{\binom{n+1}{p}} \right] + \rho_n \binom{n}{n} h_{n+1,n+1} \right\}$$

$$= \Pi_n \left\{ h_{n+1,o} + \sum_{p=1}^{n} \frac{h_{n+1,p}}{\binom{n+1}{p}} \left[\rho_{p-1} \binom{n}{p-1} \right. \right.$$

$$+ \mathcal{P}_p \binom{n}{p} \Big] + \frac{1}{\Pi_n} \alpha_{n+1} \Big\} \qquad ; h_{n+1,n+1} = \binom{n+1}{n+1} \Delta^{o}{}_{n+1}$$

$$= \alpha_{n+1}$$

$$= \Pi_n h_{n+1,o} + \Pi_n \sum_{p=1}^{n} \frac{h_{n+1,p}}{\binom{n+1}{p}} \left[\mathcal{P}_{p-1} \binom{n}{p-1} + \mathcal{P}_p \binom{n}{p} \right] + \alpha_{n+1}$$

$$= \Pi_n h_{n+1,o} + \Pi_n \sum_{p=1}^{n} h_{n+1,p} \frac{[p \mathcal{P}_{p-1} + (n+1-p) \mathcal{P}_p]}{(n+1)} + \alpha_{n+1}$$

dır.

Eğer $1 \leq p \leq n$ ise

$$h^{(s)}_{n+1,p} = \frac{s_{p+1} \cdots s_{n+1}}{(n+1-p)!} \Delta\alpha_p^{n+1-p} = \frac{\Pi_n \mathcal{P}_p}{(n+1)} \frac{(n+1)!\, s_{n+1}}{p!\,(n+1-p)!} \Delta\alpha_p^{n+1-p}$$

$$= \frac{\Pi_n \mathcal{P}_p h_{n+1,p} s_{n+1}}{n+1}$$

olduğundan

$$(2) \quad \Pi_n h_{n+1,p} \frac{[p \mathcal{P}_{p-1} + (n-p+1) \mathcal{P}_p]}{n+1} - h^{(s)}_{n+1,p}$$

$$= \Pi_n h_{n+1,p} \frac{[p \mathcal{P}_{p-1} + (n-p+1) \mathcal{P}_p]}{n+1} - \frac{\Pi_n \mathcal{P}_p h_{n+1,p} s_{n+1}}{n+1}$$

$$= \Pi_n h_{n+1,p} \mathcal{P}_p \left\{ \frac{\left[\frac{p \mathcal{P}_{p-1}}{\mathcal{P}_p} + (n-p+1) \right]}{n+1} - \frac{s_{n+1}}{n+1} \right\}$$

$$= \Pi_n \, h_{n+1,p} \, \mathcal{P}_p \left\{ \frac{[\, p \, \mathcal{P}_{p-1} \, \Pi_p + (n-p+1) \,]}{n+1} - \frac{s_{n+1}}{n+1} \right\}$$

$$= \Pi_n \, h_{n+1,p} \, \mathcal{P}_p \left\{ \frac{[\, p(1 - a_p) + (n - p + 1) \,]}{n+1} - (1 - a_{n+1}) \right\}$$

$$= \Pi_n \, h_{n+1,p} \, \mathcal{P}_p \left[\, a_{n+1} - \frac{p \, a_p}{(n+1)} \right]$$

dır.

$$a_{n+1} \geqslant \frac{n \, a_n}{(n+1)} \geqslant \frac{(n-1) \, a_{n-1}}{(n+1)} \geqslant \ldots \geqslant \frac{p \, a_p}{n+1}$$ olduğundan (2) den

$$\Pi_n \, h_{n+1,p} \, \frac{[\, p \, \mathcal{P}_{p-1} + (n-p+1) \, \mathcal{P}_p \,]}{n+1} \geqslant h^{(s)}_{n+1,p}$$ ve (1) den de

$$\sum_{p=0}^{n+1} h^{(s)}_{n+1,p} = h^{(s)}_{n+1,0} + \sum_{p=1}^{n+1} h^{(s)}_{n+1,p} \leqslant h^{(s)}_{n+1,0}$$

$$+ \; \Pi_n \sum_{p=1}^{n+1} h_{n+1,p} \, \frac{[\, p \, \mathcal{P}_{p-1} + (n-p+1) \mathcal{P}_p \,]}{n+1}$$

$$= h^{(s)}_{n+1,0} + \Pi_n \left\{ \sum_{p=1}^{n} h_{n+1,p} \, \frac{[\, p \, \mathcal{P}_{p-1} + (n-p+1) \mathcal{P}_p \,]}{n+1} \right.$$

$$\left. + \; h_{n+1,n+1} \; \mathcal{P}_n \right\}$$

$$= h^{(s)}_{n+1,o} + \Pi_n \sum_{p=1}^{n} h_{n+1,p} \frac{[\, p\, P_{p-1} + (n-p+1)P_p]}{n+1} + \alpha_{n+1}$$

$$= h^{(s)}_{n+1,o} + \sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p} - \Pi_n h_{n+1,o} \quad , \quad h^{(s)}_{n+1,o} = \Pi_{n+1} h_{n+1,o}$$

olduğundan

$$= \sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p} - (\Pi_n - \Pi_{n+1}) h_{n+1,o}$$

dır.

$\Pi_n \leqslant \Pi_{n+1}$ ve (α_n) total monoton olup $h_{n+1,o} \geqslant o$ olduğundan

$$\sum_{p=o}^{n+1} h^{(s)}_{n+1,p} \leqslant \sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p}$$

vede $\sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p} \geqslant o$ olup $\left(\sum_{p=o}^{n} h^{(s)}_{n,p} \right)_n$ monoton azalan vede

alttan sınırlı olduğundan $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=o}^{n} h_{n,p}$ mevcuttur.

Diğer yandan $a_{n+1} \geqslant \frac{n\, a_n}{n+1}$ olduğundan $\sum_n a_n$ ıraksak Lemma 3.2.4. den

de $\lim_{\to\infty} \Pi_n = o$ dır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} h^{(s)}_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \Pi_n P_p h_{n,p} = o$$

dır.

Bu teoremden aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 3.2.8. $(d_n) \in BV$, $o < \alpha < 1$ olmak üzere $s_n = n-1+\alpha$ ise

$H^{(s)}$ (d) bir Endi genelleştirmesi olup çarpımsaldır.

İspat . $a_n = 1 - \frac{s_n}{n} = \frac{1-\alpha}{n} \Rightarrow 1-\alpha = n\, a_n$

$$a_{n+1} = 1 - \frac{s_{n+1}}{n+1} = n \frac{a_n}{n+1}$$

olup Teo. 3.2.7 den $H^{(s)}$ (d) çarpımsaldır.

Şimdi $H^{(s)}$(d) nın çarpımsal olmadığına bir örnek verelim.

$a_n = 1 - \frac{s_n}{n}$, $\frac{s_n}{n} \leq 1$ ($n=1,2,..$) olmak üzere (a_n) dizisini

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4} , & n = 2^{2k-1} , \quad k=1,2,... \\ 0 , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve (d_n) dizisini $d_n = \frac{1}{n+1}$ olarak alırsak $H^{(s)}$ (d) çarpımsal olmaz.

(c ,1) için $d_n = \frac{1}{n+1}$ ve bölüm 2. kesim 2, (14) den

$$\Delta^p \frac{1}{n+1} = \frac{p\,!}{(n+1)\,...(n+p+1)}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\sum_{p=0}^{n} h_{n,p}^{(s)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}_s \Delta^{n-p} d_p = \sum_{p=0}^{n} \frac{s_{p+1}\cdots s_n}{(n-p)\,!} \; \frac{(n-p)!}{(p+1)\ldots(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} \pi_n^{(p)} = \frac{1}{n+1}\Big[\frac{s_1}{1} \cdots \frac{s_n}{n} + \frac{s_2}{2} \cdots \frac{s_n}{n} + \ldots + \frac{s_n}{n} + 1$$

$$= \frac{1}{n+1} \big[(1-a_1)\,(1-a_2)\,\ldots(1-a_n) + (1-a_2)\ldots(1-a_n) + \ldots$$

$n = 2^{2k-1}$, (k=1,2,...) ise

$$\sum_{p=0}^{n} h^{(s)}_{n,p} = \sum_{p=0}^{2^{2k-1}} h_{2^{2k-1},p} = \frac{1}{2^{2k-1}+1}\left[(1-a_1)\dots(1-a_{2^{2k-1}}) + (1-a_2)\dots \right.$$

$$\left. (1-a_{2^{2k-1}}) + \dots + (1-a_{2^{2k-1}}) + 1 \right]$$

(3)

$$\leqslant \frac{1}{2^{2k-1}+1}\left[(1-a_{2^{2k-1}}) + \dots (1-a_{2^{2k-1}}) + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2^{2k-1}+1}\left[\frac{2^{2k-1}}{4} + 1 \right] \leqslant \frac{1}{2}$$

Eğer $n = 2^{2k-1}-1$, (k=1,2,...) ise

(4) $$\sum_{p=0}^{n} h^{(s)}_{n,p} = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[(1-a_1)\dots(1-a_{2^{2k-3}})\dots(1-a_{2^{2k-1}}) + (1-a_2)\dots \right.$$

$$(1-a_{2^{2k-3}})\dots(1-a_{2^{2k-1}-1}) + \dots +$$

$$+ (1-a_{2^{2k-3}})\dots(1-a_{2^{2k-1}}) + (1-a_{2^{2k-3}+1})\dots(1-a_{2^{2k-1}-1}) + \dots +$$

$$\left. + (1-a_{2^{2k-1}-2})(1-a_{2^{2k-1}-1}) + (1-a_{2^{2k-1}-1}) + 1 \right]$$

$$\geqslant (1-a_{2^{2k-3}+1})\dots(1-a_{2^{2k-1}-1}) + (1-a_{2^{2k-3}+2})\dots(1-a_{2^{2k-1}-1}) + \dots$$

$$+ (1-a_{2^{2k-1}-1}) + 1$$

$$\geq \frac{1}{2^{2k-1}}(1+1+\ldots+1) \quad (2^{2k-1}-2^{2k-3} \text{ tane})$$

$$= \frac{1}{2^{2k-1}}(2^{2k-1}-2^{2k-3}) = \frac{3}{4}$$

olup (3) ve (4) den $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=o}^{n} h_{n,p}^{(s)}$ mevcut değil dolayısıyla

$H^{(s)}(d) = (h_{n,p}^{(s)})$ çarpımsal değildir.

İkinci kesimde buraya kadar $(d_n) \in BV$ için Leininger $H^{(s)}_{(d)}$ genelleştirmesinin bazı özelliklerini inceledik. Şimdi de [o,1] üzerinde Riemann integrallenebilen fonksiyonlar tarafından oluşturulan (d_n) dizilerinin cümlesi R ile gösterilmek üzere $(d_n) \in R \mid BV$ dizleri için $H^{(s)}(d)$ nın bazı özelliklerini araştıracağız [9] . Sınırlı salınımlı fonksiyonlar Riemann integrallenebilir olduğundan $BV \subset R$ olduğuna dikkat etmeliyiz.

Lemma 3.2.9. $s_n \leq n$, $(n=1,2,..)$ olmak üzere eğer $\Pi^{(P)} \in c_o$ olacak şekilde negatif olmayan bir P tamsayı varsa, o zaman negatif olmayan her bir p tamsayısı için $\Pi^{(p)} \in c_o$ dır.

İspat. $p < P$ ise $\Pi_n^{(p)} = \frac{s_{p+1}}{p+1} \cdots \frac{s_{P+1}}{P+1} \cdots \frac{s_n}{n} \leq \frac{s_{P+1}}{P+1} \cdots \frac{s_n}{n}$

$$= \Pi_n^{(P)}$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(P)} \Rightarrow o \leq \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} \leq o \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} = o$

$$\Rightarrow \Pi_n^{(p)} \in C_o \text{ dır.}$$

Eğer $p > P$ ise $o < \prod\limits_{k=P+1}^{p} \frac{s_k}{k} \leq 1$ vede $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(P)} = o$ olduğundan $\varepsilon > o$

olmak üzere $n > N$ için

$\Pi_n^{(P)} < \varepsilon \prod\limits_{k=P+1}^{p} \frac{s_k}{k}$ olacak bir N doğal sayısı vardır. O halde $n > N$ için

$$\frac{\Pi_n^{(P)}}{\prod\limits_{k=P+1}^{p} \frac{s_k}{k}} = \frac{s_{p+1}}{p+1} \cdots \frac{s_n}{n} = \Pi_n^{(p)} < \varepsilon \text{ olur ki } \lim_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} = 0$$

yani $\Pi^{(p)} \varepsilon c_0$ dır.

Teorem 3.2.10. Eğer $(d_n) \varepsilon R \mid BV$, $\frac{s_n}{n} \leq 1$ ve $\sum\limits_{p=0}^{n} | h_{n,p}^{(s)} | < K$,

$(n=0,1,2,\ldots)$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} h_{n,p}^{(s)} = 0$, $(p=0,1,2,\ldots)$ dır.

İspat. $(d_n) \not\varepsilon BV$ olduğundan sonuç 2.2.2. den $\left(\sum\limits_{p=0}^{n} | h_{n,p} |\right)$ dizisi sınırlı değildir. Önce her $p \geq 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} = 0$ olduğunu gösterelim.

Bunun içinde $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(P)} \neq 0$ olacak şekilde negatif olmayan bir P tamsayısının olduğunu varsayalım. Eğer $p \geq 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} = t_p$ olacak şekilde bir pozitif t_p sayısı vardır. Bundan başka $\Pi_n^{(o)} \leq \Pi_n^{(p)}$ olduğundan

$\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(o)} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} \Rightarrow t_o \leq t_p$, $(\Pi_n^{(p)})$ azalan olduğundan $\Pi_n^{(o)} \geq t_o$ olup $\Pi_n^{(p)} \geq \Pi_n^{(o)} \geq t_o$ dır. Böylece

$\sum\limits_{p=0}^{n} | h_{n,p}^{(s)} | = \sum\limits_{p=0}^{n} | \Pi_n^{(p)} h_{n,p} | \geq t_o \sum\limits_{p=0}^{n} | h_{n,p} |$ olacağından $\left(\sum\limits_{p=0}^{n} | h_{n,p} |\right)$ sınırlı olur. Halbuki $\left(\sum\limits_{p=0}^{n} | h_{n,p} |\right)$ sınırsızdır. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(P)} = 0$ dır.

Diğer yandan $\{ h_{n,p} \}$ sınırlı olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} h_{n,p}^{(s)} = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n^{(p)} h_{n,p} = 0$ dır.

Bu teoremden sonra aşağıdâki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.2.11. Eğer $(d_n) \varepsilon R|BV$ ve $H^{(s)}(d) \varepsilon (c,c)$ ise $H^{(s)}(d)$ çarpımsaldır.

Sonuç 3.2.12. Eğer $(d_n) \varepsilon R|BV$ ise $\sup_n \sum_{p=o}^{n} |h_{n,p}^{(s)}| < K$ olması için gerek ve yeter koşul $H^{(s)}(d) \varepsilon (c_o, c_o)$ dır.

İspat, Teorem 1.1.3 ve Teorem 3.2.10 dan elde edilir.

Sonuç 3.2.13. $(d_n) \varepsilon R|BV$ ise $H^{(s)}(d)$ nın çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_n \sum_{p=o}^{n} |h_{n,p}^{(s)}| < K$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=o}^{n} h_{n,p}^{(s)} = L$ olacak şekilde K ve L sayılarının var olmasıdır.

İspat, Teorem 1.1.1 ve Teorem 3.2.10 dan elde edilir.

Teorem 3.2.14. $a_n = 1 - \frac{s_n}{n}$, $s_n \leqslant n$ $(n=1,2,\ldots)$ olmak üzere $(d_n) \varepsilon R|BV$ ve $H^{(s)}(d) \varepsilon (c,c)$ ise $\sum_n a_n$ ıraksaktır.

İspat. Eğer $\sum_n a_n$ yakınsak olsaydı Lemma 3.2.4. den $\lim_{n\to\infty} \pi_n = u > o$ olurdu. Halbuki sonuç 3.2.12 den $\sup_n \sum_{p=o}^{n} |h_{n,p}^{(s)}| < K$ ve Teorem 3.2.10 ve ispatında olduğu gibi $\lim_{n\to\infty} \pi_n = o$ dır. O halde $\sum_n a_n$ ıraksaktır.

Sonuç.3.2.15. $a_n = 1 - \frac{s_n}{n}$, $s_n \leqslant n$ olmak üzere eğer $\sum_n a_n$ yakınsak ise $H^{(s)}(d) \varepsilon (c,c)$ olması için gerek ve yeter koşul $(d_n) \varepsilon BV$ dır.

İspat. Teorem 3.2.5 ve Teorem 3.2.14 den elde edelir.

Şimdide son olarak vereceğimiz bir teoremi ispatlamak için gerekli olan bazı lemmaları ispat edeceğiz.

Lemma 3.2.16.. Negatif olmayan herbir n,p $n > p$ sayı çifti için

$f_{n,p}(x) = \binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p}$ olmak üzere

(i) $f_{n,p}$, $[o, \frac{p}{n}]$ üzerinde artan ve $[\frac{p}{n},1]$ üzerinde azalandır.

(ii) $V[0,1)\, f_{n,p} = 2\, f_{n,p}\left(\frac{p}{n}\right)$

(iii) $^{V}[o,1]\, f_{n,n-p} = {}^{V}[0,1]\, f_{n,p}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} {}^{V}[0,1]\, f_{n,p} = 2\,\frac{p^p\, e^{-p}}{p\,!}$

dır.

İspat (i) $(f_{n,p}(x))' = \binom{n}{p} [\, p\, x^{p-1}(1-x)^{n-p} - x^p(n-p)(1-x)^{n-p-1}]$

$(f_{n,p}(x))' = o \Leftrightarrow x = \frac{p}{n}$

$o < x \leqslant \frac{p}{n} \Rightarrow x(n-p) \leqslant p\,(1-x) \Rightarrow x^p(n-p)\,(1-x)^{n-p-1}$

$\leqslant p\, x^{p-1}(1-x)^{n-p}$

$p\, x^{p-1}(1-x)^{n-p} - x^p(n-p)(1-x)^{n-p-1} \geqslant o$

$\Rightarrow (f(x))' \geqslant o$ dolayısıyla $f_{n,p}$, $[o, \frac{p}{n}]$ de artan

aynı şekilde $\frac{p}{n} \leqslant x < 1$ ise $(f_{n,p}(x))' < o$ olur ki $f_{n,p}$,

$[\frac{f}{n}, 1]$ de azalandır.

(ii) $[\,0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\,]$ parçalanmasını alırsak (i) den

$$\binom{n}{p} \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^p (1-x_k)^{n-p} - x_{k-1}^p (1-x_{k-1})^{n-p} \right|$$

$$= \binom{n}{p} \left\{ \sum_{k=1}^{p} \left| x_k^p (1-x_k)^{n-p} - x_{k-1}^p (1-x_{k-1})^{n-p} \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{k=p+1}^{n} \left| x_k^p (1-x_k)^{n-p} - x_{k-1}^p (1-x_{k-1})^{n-p} \right| \right\}$$

$$= \binom{n}{p} \left\{ (x_p^p (1-x_p)^{n-p} - x_o^p (1-x_o)^{n-p}) - (x_n^p (1-x_n)^p - x_p^p (1-x_p)^{n-p}) \right\}$$

$$= 2 \binom{n}{p} x_p^p (1-x_p)^{n-p} = 2 \binom{n}{p} \left(\frac{p}{n}\right)^p \left(1- \frac{p}{n}\right)^{n-p} = 2 f_{n,p}\left(\frac{p}{n}\right) \quad \text{olup}$$

(5) $\quad 2 f_{n,p} \left(\frac{p}{n}\right) \leq V_{[\,0,1\,]} f_{n,p}$

elde edilir.

Karşıtını göstermek için de $[\,0,1\,]$ in herhangi bir $\{ x_o, x_1, \ldots, x_m \}$ parçalanmasını alalım. $x_i = p/n$ olacak şekilde bir $0 \leqslant i \leqslant m$ varsa

$$\binom{n}{p} \sum_{k=1}^{m} \left| x_k^p (1-x_k)^{n-p} - x_{k-1}^p (1-x_{k-1})^{n-p} \right| = 2 f_{n,p} \left(\frac{p}{n}\right)$$

Eğer her $0 \leqslant i \leqslant m$ için $x_i \neq p/n$ ise o zaman $x_r < \frac{p}{n} < x_{r+1}$ olacak şekilde bir $0 \leqslant r \leqslant m$ indisi vardır. Bu durumda

$$\binom{n}{p} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left| x_k^p (1-x_k)^{n-p} - x_{k-1}^p (1-x_{k-1})^{n-p} \right| \right\}$$

$$= \binom{n}{p} \left\{ \sum_{k=1}^{r} | x_k^p (1-x_k)^{n-p} - x_{k-1}^p (1-x_{k-1})^{n-p} | \right.$$

$$\left. + \sum_{k=r+1}^{m} | x_k^p (1-x_k)^{n-p} - x_{k-1}^p (1-x_{k-1})^{n-p} | \right\}$$

$$= 2 \binom{n}{p} x_r^p (1-x_r)^{n-p} \leqslant 2 \binom{n}{p} \left(\frac{p}{n}\right)^p (1-\frac{p}{n})^{n-p} = 2 f_{n,p} \left(\frac{p}{n}\right) \quad \text{ve}$$

(6) $\quad V_{[0,1]} f_{n,p} \leqslant 2 f_{n,p} \left(\frac{p}{n}\right)$

(5) ve (6) dan (ii) elde edilir.

(iii). (ii) den $V_{[0,1]} f_{n,p} = 2 f_{n,p} = 2 \binom{n}{p} \left(\frac{p}{n}\right)^p \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n-p}$

$$V_{[0,1]} f_{n,n-p} = 2 f_{n,n-p} \left(\frac{n-p}{n}\right) = 2 \binom{n}{n-p} \left(\frac{n-p}{n}\right)^{n-p} \left(1- \frac{n-p}{n}\right)^p$$

$$= 2 \binom{n}{p} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n-p} \left(\frac{p}{n}\right)^p$$

olup $V_{[0,1]} f_{n,p} = V_{[0,1]} f_{n,n-p}$ dir.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} V_{[0,1]} f_{n,p} = 2 \lim\limits_{n\to\infty} f_{n,p} \left(\frac{p}{n}\right) = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{p} \left(\frac{p}{n}\right)^p \left(1- \frac{p}{n}\right)^{n-p}$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-p)!\, p!} \frac{p^p}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n-p}$$

$$= 2 \frac{p^p}{p!} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots n)}{n^p} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-p}$$

$$= 2 \frac{p^p e^{-p}}{p!}$$

Lemma 3.2.17. $\lim\limits_{p \to \infty} \dfrac{p^p e^{-p}}{p!} = 0$

İspat. Stirling formülüne göre p nin büyük değerleri için yaklaşık olarak $p! \cong \sqrt{2\pi p}\; p^p e^{-p}$ dir. Buna göre yaklaşık olarak

$$\frac{p^p e^{-p}}{p!} \cong \frac{p^p e^{-p}}{\sqrt{2\pi p}\; p^p e^{-p}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}}$$

olup, $\lim\limits_{p \to \infty} \dfrac{p^p p^{-p}}{p!} = 0$ dır.

Lemma 3.2.18. Eğer $(d_n) \in R$ ve $\varepsilon > 0$ ise o zaman $n > N$ ve $P \leqslant p \leqslant n-p$ olduğunda $|h_{n,p}| < \varepsilon$ olacak şekilde N, P pozitif tam sayı çifti vardır.

İspat. $(d_n) \in R$ olduğundan $[0,1]$ de (d_n) yi oluşturan fonksiyon g olmak üzere $x \in [0,1]$ için $|g(x)| < M$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Lemma 3.2.17 den P yeteri derecede büyük bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\frac{P^P e^{-P}}{P!} < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{dir.}$$

Lemma 3.2.16. (iv) den $n > N_p$ için $V_{[0,1]} f_{n,P} < \frac{\varepsilon}{M}$ olacak şekilde bir N_p pozitif tamsayı vardır. Şimdi n,p pozitif tamsayı çifti $p \leqslant \frac{n}{2}$ ve $p \leqslant q \leqslant n-p$ ise $V_{[0,1]} f_{n,q} \leqslant V_{[0,1]} f_{n,p}$ olduğunu gösterelim. $p = \frac{n}{2}$ ise $p \leqslant q \leqslant n-p$ olduğundan $p=q$ dir $\Rightarrow V_{[0,1]} f_{n,p} = V_{[0,1]} f_{n,q}$ dir. $n = 2 \Rightarrow p = 1,\ q = 1,\ n = 3$ ise $p = 1,\ q = 1$ yada $q = n-p = 2$ dir. Eğer $q = n-p = 2$ ise Lemma 3.2.16 (iii) den $V_{[0,1]} f_{n,q} = V_{[0,1]} f_{n,n-p} = V_{[0,1]} f_{n,p}$ dir.

$(k+1)$, $p< (\frac{k+1}{2})$ ise $q \leq p \leq k+1-p$ ve $V_{[0,1]} f_{k+1,q} > V_{[0,1]} f_{k+1,p}$ olacak şekilde bir q pozitif tamsayısı var olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı olsun. Yani yukarıdaki iddiayı sağlayan en küçük pozitif tamsayı k+1 olsun. $q < k+1-p$ dır. Eğer $q = k+1-p$ de dahil olabilseydi Lemma 3.2.16 (iii) den $V_{[0,1]} f_{k+1,q} = V_{[0,1]} f_{k+1,\, k+1-p}$

$= V_{[0,1]} f_{k+1,p}$ olurdu. Halbuki

$V_{[0,1]} f_{k+1,q} > V_{[0,1]} f_{k+1,p}$ olmasını kabul etmiştik. O halde

$p \leq q < k+1-p$ almalıyız. Bundan başka kabulümüzder $r \leq q \leq k-p$ ise

$V_{[0,1]} f_{k,p} \leq V_{[0,1]} f_{k,p}$ dir. Çünkü

$(1+\frac{1}{n})^n$ artan olduğundan $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(1+\frac{1}{k-q}\right)^{k-q} V_{[0,1]} f_{k,q}$

$\leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-p} V_{[0,1]} f_{k,p}$ dir.

Diğer yandan

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(1+\frac{1}{k-p}\right)^{k-p} V_{[0,1]} f_{k,p} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(\frac{k-p+1}{k-p}\right)^{k-p} 2\, f_{k,p}\left(\frac{p}{k}\right)$$

$$= 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(\frac{k-p+1}{k-p}\right)^{k-p} \binom{k}{p} \left(\frac{p}{k}\right)^p \left(1-\frac{p}{k}\right)^{k-p}$$

$$= 2\left(\frac{k}{k+1}\right) \left(\frac{k-p+1}{k-p}\right)^{k-p} \binom{k}{p} \left(\frac{p}{k}\right)^p \left(\frac{k-p}{k}\right)^{k-p}$$

$$= 2\left(\frac{1}{k+1}\right) \binom{k}{p} (k-p+1)^{k-p}\, p^p$$

$$V_{[0,1]} f_{k+1,p} = 2\, f_{k+1,p}\left(\frac{p}{k+1}\right)$$

$$= 2\binom{k+1}{p} \left(\frac{p}{k+1}\right)^p \left(1-\frac{p}{k+1}\right)^{k+1-p}$$

$$= 2 \binom{k}{p} \frac{k+1}{k+1-p} \left(\frac{p}{k+1}\right)^p \left(\frac{k+1-p}{k+1}\right)^{k+1-p}$$

$$= 2 \binom{k}{p} \left(\frac{1}{k+1}\right)^k (k+1-p)^{k-p} \; p^p$$

olduğundan $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k-p}\right)^{k-p} \; V_{[0,1]} \, f_{k,p} = V_{[0,1]} \, f_{k+1,p}$ ve aynı şekilde

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(1+ \frac{1}{k-q}\right)^{k-q} \; V_{[0,1]} \; f_{k,q} = V_{[0,1]} \, f_{k+1,q} \quad \text{dır.}$$

Bundan dolayı $V_{[0,1]} \; f_{k+1,q} \leq V_{[0,1]} \, f_{k+1,p}$ dir. O halde n,p pozitif tam sayı çifti için $p \leq n/2$ ve $p \leq q \leq n-p$ ise o zaman $V_{[0,1]} \, f_{n,q} \leq V_{[0,1]} \, f_{n,p}$ olduğu gösterilmiş oldu.

$N = N_P + 2P$ dersek $n > N$ ve $P \leq p \leq n-P$ için $V_{[0,1]} \, f_{n,p} \leq V_{[0,1]} \, f_{n,P} < \frac{\varepsilon}{M}$

$$|h_{n,p}| = \left| \int_0^1 f_{n,p} \, dg \right| = \Big| f_{n,p}(1) \, g(1) - f_{n,p}(o) \, g(o)$$

$$- \int_0^1 g(x) \, d \, f_{n,p}(x) \Big| \,, \quad \text{Bölüm 1, kesim 2 (8) özelliğinden}$$

$$= \left| \int_0^1 g(x) \, d \, f_{n,p}(x) \right| \qquad , \text{Lemma 2.3.7 den}$$

$$\leq M \, V_{[0,1]} f_{n,p} < \varepsilon$$

dir.

Lemma 3.2.19. Eğer $0 < t < 1$ ve p pozitif bir tamsayı ise o zaman $\lim_{n \to \infty} V_{[0,t]} \, f_{n,n-p} = 0$ dır.

İspat. Eğer n yi $\frac{p}{1-t} \leqslant n$ olacak şekilde alırsak Lemma 3.2.16 (i) den, $f_{n,n-p}$ $[0,t]$ aralığında artan olacağından

$$\bigvee_{[0,t]} f_{n,n-p} = \sup_{P} \sum_{k=1}^{m} | f_{n,n-p}(x_k) - f_{n,n-p}(x_{k-1}) | = f_{n,n-p}(t)$$

$$= \binom{n}{p} t^{n-p} (1-t)^p \qquad \text{dir.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p}$ serisi yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{p} t^{n-p} (1-t)^p = 0$

böylece $\lim_{n\to\infty} \bigvee_{[0,t]} f_{n,n-p} = 0$ dır.

Teorem 3.2.20. Eğer $(d_n) \in R \cap BV$ ve $\sum_{p=0}^{n} \Pi_n^{(p)} < M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $H^{(s)}(d) \in (c_o, c_o)$ dır. Bundan başka $g(1-)$ mevcut ise $H^{(s)}(d)$ çarpımsaldır.

İspat. $(h_{n,p})_n$ sınırlı olduğundan $n \geqslant p$, $p = 0,1,2 \ldots n$ için $|h_{n,p}| < W$ olacak şekilde bir W sayısı vardır.

$$\sum_{p=0}^{n} | h_{n,p}^{(s)} | = \sum_{p=0}^{n} | \Pi_n^{(p)} h_{n,p} | = \sum_{p=0}^{n} \Pi_n^{(p)} | h_{n,p} | < W M$$ olduğundan

$$\sup_n \sum_{p=0}^{n} |h_{n,p}^{(s)}| < \infty$$ dır. Sonuç 3.2.12 den $H^{(s)}(d) \in (c_o, c_o)$ dır.

Şimdi de $H^{(s)}(d)$ nin çarpımsal olduğunu gösterelim. Sonuç 3.2.13 dikkate alınarak $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n} h_{n,p}^{(s)}$ nın mevcut olduğunu göstermek yeterlidir. $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. Lemma 3.2.18 den $n > N_1$ ve $P \leqslant p \leqslant n-P$ olacak şekilde p ler için $|h_{n,p}| < \varepsilon/3M$ kalacak şekilde N_1, P tamsayı çifti bulunabilir.

O halde $n > N_1$ için

$$\sum_{p=P}^{n-P} |h_{n,p}^{(s)}| = \sum_{p=P}^{n-P} \pi_n(p) \, | h_{n,p} | < \frac{\varepsilon}{3\,M} \sum_{p=P}^{n-P} \pi_n^{(p)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3\,M} \sum_{p=o}^{n-P} \pi_n^{(p)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\operatorname{Sup}_n \sum_{p=o}^{n} | h_{n,p}^{(s)} | < \infty$ olduğundan Teorem 3.2.10 dan $\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(s)} = o$ olup

$\forall n > N_2$ için $| h_{n,p} | < \frac{\varepsilon}{3P}$ olacak şekilde bir $N_2 \geq N_1$, N_2 doğal sayısı vardır.

O halde $n > N_2$ için

$\sum_{p=o}^{P-1} |h_{n,p}^{(s)}| < \frac{\varepsilon}{3}$ dir. Lemma 3.2.16 (iv) den $(V_{[0,1]} f_{n,p})_n$ sınırlıdır. Böylece

$n > P$ ve $0 < p < P$ için $| V_{[0,1]} \; f_{n,p}| = V_{[0,1]} \; f_{n,p} < V$ olacak

şekilde bir V sayısı vardır. Lemma 3.2.16 (iii) den eğer $n- P < n-p < n$ ise

$V_{[0,1]} \; f_{n,p} = V_{[0,1]} \; f_{n,n-p} < V$ dır. $g(1-)$ mevcut olduğundan

$t \leq x < 1$ için $| g(x)-g\,(1-)| < \frac{\varepsilon}{9\,P\,V}$ olacak şekilde bir t sayısı vardır.

Lemma 3.2.19 dan u, [0,1] üzerinde g nin bir üst sınırı olmak üzere $n > N$ ve $o < p < P$ için $V_{[0,1]} \; f_{n,n-p} < \frac{\varepsilon}{18PU}$ olacak şekilde bir $N > N_2$, N doğal sayısı vardır. Lemma 3.2.16 (i) den $f_{n,n-p}$, $[\frac{n-p}{n}, 1]$ üzerinde azalan vede $f_{n,n-p}(1) = 0$ olduğundan her bir n için $V_{[z_n,1]} f_{n,n-p} < \frac{\varepsilon}{18\,PU}$ olacak şekilde bir z_n, $t < z_n < 1$ sayısı vardır. Böylece $n > N$ ise

$$|h^{(s)}_{n,n-p}| = |\Pi_n^{(n-p)} h_{n,n-p}| \leq |h_{n,n-p}| = |\int_0^1 f_{n,n-p}(x)\,dg(x)|$$

$$= |f_{n,n-p}(1)g(1) - f_{n,n-p}(o)\,g(o) - \int_0^1 g(x)\,d\,f_{n,n-p}(x)|$$

$$= |\int_0^1 g(x)\,d\,f_{n,n-p}(x)|$$

$$\leq |\int_0^1 [g(x)-g(1-)]\,d\,f_{n,n-p}(x)| + |\int_0^1 g(1-)\,d\,f_{n,n-p}(x)|$$

$$= |\int_0^1 [g(x)-g(1-)]\,d\,f_{n,n-p}(x)| + |g(1-)|\,|f_{n,n-p}(1)-f_{n,n-p}(o)|$$

$$= |\int_0^1 [g(x)-g(1-)]\,d\,f_{n,n-p}(x)|$$

$$\leq |\int_0^t [g(x)-g(1-)]\,d\,f_{n,n-p}(x)|$$

$$+ |\int_t^{z_n} [g(x)-g(1-)]\,d\,f_{n,n-p}(x)| + |\int_{z_n}^1 [g(x)-g(1-)]\,d_{n,n-p}(x)|$$

$$\leq 2U\,V_{[0,t]} f_{n,n-p} + \frac{\varepsilon}{9\,PV}\,V_{[t,z_n]} f_{n,n-p} + 2U\,V_{[z_n,1]} f_{n,n-p}$$

$$< 2U\,\frac{\varepsilon}{18\,PU} + \frac{\varepsilon}{9\,P\,V}\,V + 2U\,\frac{\varepsilon}{18\,P\,U} = \frac{\varepsilon}{3\,P}$$

Bundan dolayı $n > N$ için $n-P < n-p < n$ ise $|h^{(s)}_{n,p}| < \frac{\varepsilon}{3}$ dir.