BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Erhan SET

Doktora Tezi

Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları
Eğitimi Anabilim Dalı
Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR
Prof. Dr. Sever S. DRAGOMIR

2010

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Erhan SET

ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI

ERZURUM
2010

Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR danışmanlığında, Erhan SET tarafından hazırlanan bu çalışma 02/07/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU *İmza* :

Üye : Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Murat ÖZDEMİR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Uğur S. KIRMACI *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)

....

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Erhan SET

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Ortak Danışman : Prof. Dr. Sever S. DRAGOMIR

Bu tezde, bazı farklı türden konveks fonksiyonlar incelenerek bu türden konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. Tezde kullanılan temel tanımlar, teoremler ve pozitif reel sayıların bazı özel ortalamaları ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak $E-$konveks küme, güçlü $E-$konveks küme, $E-$konveks, yarı $E-$konveks, $E-$quasi konveks, güçlü $E-$konveks ve yarı güçlü $E-$konveks fonksiyon kavramları verilmiştir. Daha sonra, diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlarla ilgili temel özellikler verilmiştir. Son olarak da konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ile birlikte bu eşitsizliklerin ve bu tezde elde edilen yeni eşitsizliklerin bazılarının ispatında kullanılan lemmalar verilmiştir. Dördüncü bölümde ilk olarak $E-m-$konvekslik kavramları tanımlanarak bu türden konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra sırasıyla $m-$ konveks, $(\alpha,m)-$ konveks, $log-$ konveks, $quasi-$ konveks, $s-$ konveks, $r-$konveks ve $h-$konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizliklerinin yanı sıra bazı genelleştirmeler elde edilmiştir. Ayrıca bu eşitsizliklerin bazılarının ispatında iki katlı integraller için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılmış ve çalışmada elde edilen sonuçlardan birçoğunun literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.

2010, 88 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, $E-$ konvekslik, $E-m-$ konvekslik, $m-$ konveks fonksiyon, $(\alpha,m)-$konveks fonksiyon, $log-$konveks fonksiyon, $quasi-$konveks fonksiyon, $s-$konveks fonksiyon, $r-$konveks fonksiyon, $h-$konveks fonksiyon.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR SOME DIFFERENT TYPES OF CONVEX FUNCTIONS

Erhan SET

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Secondary School Science and Mathematics Education

Supervisor : Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR
Co-supervisor : Prof. Dr. Sever S. DRAGOMIR

In this thesis, some different types of convex functions were analyzed and integral inequalities were obtained for those types of functions. First part is the introduction part that includes information about the studies that have been performed on convex functions and inequalities until now. Basic definitions, theorems and some special means of positive real numbers which were used in the study are given in the second part. In the third part, firstly, $E-$convex set, strongly $E-$convex set, $E-$convex, semi $E-$convex, $E-$quasi convex, strongly $E-$convex and semi-strongly $E-$convex function concepts were given. Secondly, some other different types of convex functions and the basic attributes of those functions were included. Finally, in addition to Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions, some lemmas used for the proof of those inequalities and inequalities obtained in this study were given. In the fourth part, firstly, $E-m-$ convexity concepts were defined and Hermite-Hadamard type integral inequalities were obtained. Then, besides new integral inequalities, some generalizations were obtained for $m-$ convex, $(\alpha,m)-$ convex, $log-$ convex, $quasi-$ convex, $s-$ convex, $r-$convex and $h-$convex functions, respectively. In addition, in the proof of some of those inequalities, Hölder and power mean inequalities for double integrals were used and it was observed that most of the results obtained from the research supported the literature.

2010, 88 pages

Keywords: Inequalities, $E-$ convexity, $E-m-$ convexity, $m-$ convex function, $(\alpha,m)-$ convex function, $log-$ convex function, $quasi-$ convex function, $s-$ convex function, $r-$convex function, $h-$convex function.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde yapılmıştır.

Doktora çalışmam boyunca, tez konumda çalışmamı sağlayan, önümde yeni ufuklar açan, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, beni yönlendiren ve rehberlik eden saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR'e;

ikinci danışmanlığımı üstlenerek, değerli bilgileriyle bana ışık tutan, her konuda yardımcı ve yol gösterici olan, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim,

Sayın Prof. Dr. Sever S. DRAGOMIR'e;

tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen

Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Doktoraya başladığım günden itibaren yanımda olan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Enver TATAR'a ve değerli arkadaşım Sayın Arş. Gör. Fatih BEKTAŞ'a teşekkür ederim.

Doktora çalışmalarım boyunca bana maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Eğitim yaşantımın her aşamasında içten ve özverili desteklerini benden esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Erhan SET

Temmuz 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

SİMGELER DİZİNİ vi

ŞEKİLLER DİZİNİ vii

1. GİRİŞ 1

2. KURAMSAL TEMELLER 4

2.1. Genel Kavramlar 4

2.2. İki Pozitif Sayı İçin Bazı Ortalamalar 13

3. MATERYAL ve YÖNTEM 15

3.1. E −konveks Küme, Güçlü E −konveks Küme, E −konveks, Yarı E −konveks, E −quasi Konveks, Güçlü E −konveks ve Yarı Güçlü E −konveks Fonksiyonlar 15

3.2. Diğer Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar ve Bu Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler 17

3.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 22

4. ARAŞTIRMA BULGULARI 27

4.1. $E - m$ −konveks Küme ve $E - m$ −konveks Fonksiyon 27

4.2. Yarı $E - m$ −konveks Fonksiyon 34

4.3. Güçlü $E - m$ −konveks Küme ve Güçlü $E - m$ −konveks Fonksiyon 37

4.4. Yarı Güçlü $E - m$ −konveks Fonksiyon 42

4.5. m −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri 46

4.6. (α, m) −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri 52

4.7. log −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri 59

4.8. $Quasi$ −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri 70

4.9. s −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri 74

4.10. r −konveks ve h −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri 79

5. TARTIŞMA ve SONUÇ 85

KAYNAKLAR 86
ÖZGEÇMİŞ 89

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n −boyutlu Öklid Uzayı
E	$\mathbb{R}^n$ ’den $\mathbb{R}^n$’e Bir Operatör
I	$\mathbb{R}$’de Bir Aralık
I°	I’nın İçi
$L^1([a,b])$	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$SX(h,I)$	h −konveks Fonksiyonların Sınıfı
$SV(h,I)$	h −konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	m −konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	(α,m) −konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s −konveks Fonksiyonların Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme 5

Şekil 2.2. Konveks olmayan küme 5

Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$) 6

Şekil 2.4. Konveks fonksiyon 7

Şekil 4.1. $E - m$ −konveks küme 28

Şekil 4.2. Güçlü $E - m$ −konveks küme.. 38

Şekil 4.3. Güçlü $E - m$ −konveks fonksiyon 40

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy *et al*. 1952). Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. E.F. Beckenbach and R. Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinović'in 1970'te yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Bu üç temel kaynağın yanı sıra Mitrinović *et al.* (1993) tarafından "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte (2005) tarafından "Mathematical Inequalities" ve son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach and Bellman (1961) ve Mitrinović (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Funtions: Inequalities) 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts and Varberg (1973), Pečarić *et al*. (1992), Niculescu and Persson (2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin, özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı kaynakta toplanmıştır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiş ve bu konuda yapılan çalışmaların sayısında bir hayli artış gözlenmiştir.

Bu çalışmada, bazı farklı türden konveks fonksiyonlar detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde pür matematikte yer alan bazı temel tanım ve teoremler ile birlikte, reel sayıların özel ortalamaları verilmiştir. Üçüncü bölümde de farklı türden konveks fonksiyonların yanı sıra bu fonksiyonlar hakkında genel bilgiler ve konveks fonksiyonlar için bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sırasıyla $E-$konveks ve $E-m-$konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden $E-$konveks ve $E-m-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bu farklı türden konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni integral eşitsizliklerinin ispatında iki katlı integraller için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılmıştır. Ayrıca üçüncü bölümde verilen eşitsizliklerden bazılarının daha genel halleri elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:
A) $L, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,
$G1$. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,
$G2$. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,
$G4$. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,
$G5$. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.
B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:
$L1$. $\alpha . x \in L$ dir,
$L2$. $\alpha .(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir,
$L3$. $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . x$ dir,
$L4$. $(\alpha\beta). x = \alpha .(\beta . x)$ dir,
$L5$. $1. x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).
$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir (Anton 1994).

Tanım 2.1.2. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir (Bayraktar 2000).

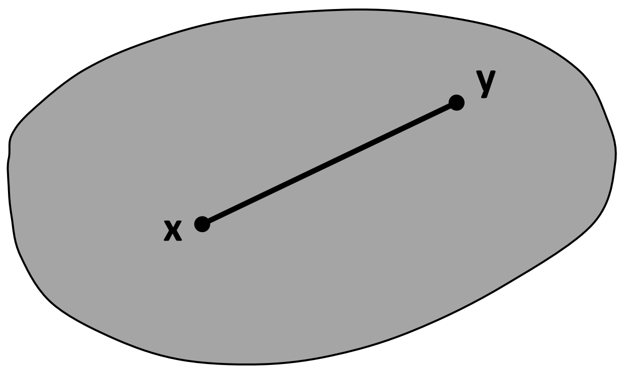
Tanım 2.1.3. F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T: V \to W$ dönüşümü,
(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
(b) $T(cu) = cT(u)$

şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir (Anton 1994).

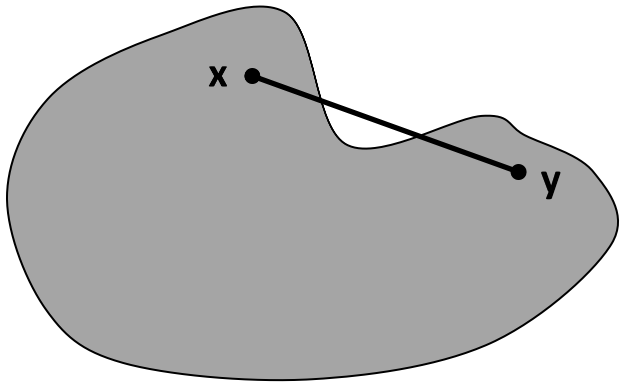
Tanım 2.1.4. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Örneğin aralıklar reel eksen üzerindeki konveks kümelerdir.

Tanım 2.1.5. (J −Konveks Fonksiyon): I, ℝ’de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.6. (Kesin $J-$ Konveks Fonksiyon): I, ℝ de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

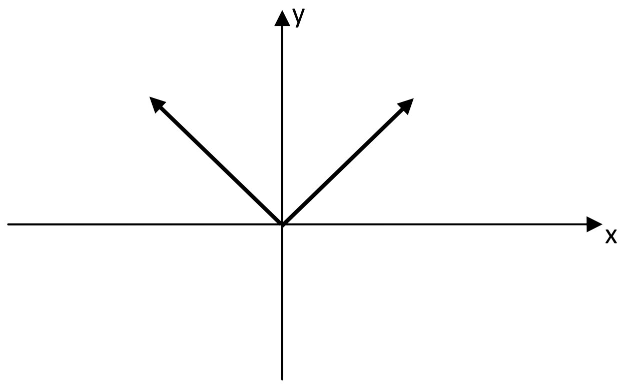
oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin $J-$konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.7. (Konveks Fonksiyon): I, ℝ de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad (2.1)$$

şartını sağlayan , f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić *et al*. 1992).

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

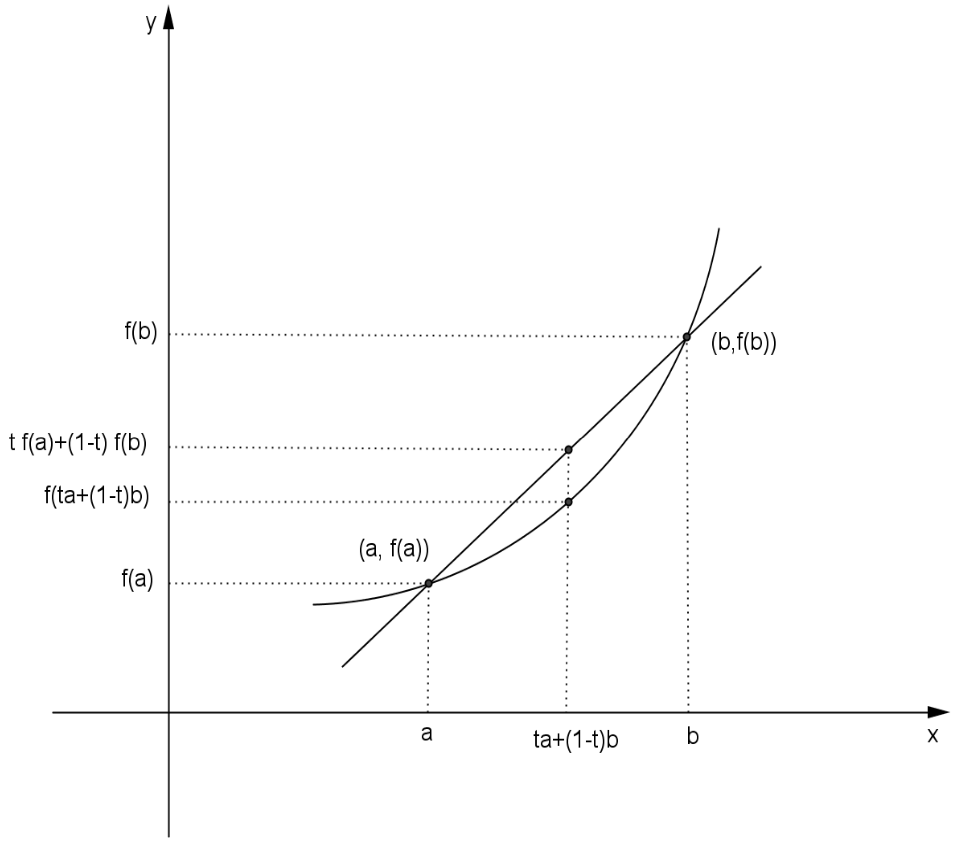
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon J −konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bakınız Şekil 2.4.



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. f, (a, b) aralığında süreklidir ve

b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Teorem 2.1.2. f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Konveks fonksiyonlar için literatürde birçok eşitsizlik elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin en önemlilerinden biri de Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik üzerine son yıllarda (Pachpatte 2005; Dragomir and Mcandrew 2005; Kırmacı *et al*. 2007; Alomari *et al*. 2010; Sarıkaya *et al*. 2008; Set *et al*. 2010; Özdemir *et al*. 2010) yazarları ve başka birçok araştırmacı tarafından çeşitli genelleştirmeler ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 2.1.3. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.2}$$

olur (Pečarić *et al*. 1992).

İspat: Teorem 2.1.1'den dolayı f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani $x = a(1-t) + bt$, $t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(a(1-t)+bt)dx \\ &\leq f(a)\int_0^1 (1-t)dt + f(b)\int_0^1 tdt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

olur ve bu (2.2) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafın ispatını verelim:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right] \tag{2.3}$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa son parantez içindeki ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde ve $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa ikinci terim

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde yazılabilir.

(2.3) de bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.8. (Starshaped Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyonu denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.9. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I'da iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.4. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

(b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

(c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

(Adams and Essex 2010).

Sonuç 2.1.3. f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Tanım 2.1.10. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1-\alpha}$$

oluyorsa f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyonu veya f, $Q(I)$ sınıfına aittir denir (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.11. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna $P-$fonksiyonu veya f, $P(I)$ sınıfına aittir denir. Ayrıca $P(I) \subset Q(I)$ olduğu aşikârdır (Dragomir *et al*. 1995).

Teorem 2.1.5. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n −lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.6. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\, dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x,y)|^q dx\, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.4. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|\,dxdy$$
$$\leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)||g(x,y)|^q dx\,dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Reel sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.1.7. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Teorem 2.1.8. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

2.2. İki Pozitif Sayı İçin Bazı Ortalamalar:

a, b pozitif iki reel sayı olmak üzere;

(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2} \ ,$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) := \sqrt{ab} \, ,$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b} \ ,$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{b-a}{lnb - lna}, & a \neq b \end{cases} \ ,$$

(5) Identric ortalama:

$$I = I(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases} \ ,$$

(6) $p -$ logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}, & a \neq b \end{cases} \ ,$$

ortalamaları vardır.

Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde iyi bilinir:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p'nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I, \ L_{-1} = L$ ile gösterilir.

Son olarak, x, y pozitif sayılarının r . kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{r}{r+1}.\dfrac{x^{r+1}-y^{r+1}}{x^r-y^r}, & r \neq 0,-1, x \neq y \\ \dfrac{x-y}{lnx-lny}, & r=0, x \neq y \\ xy\dfrac{lnx-lny}{x-y}, & r=-1, x \neq y \\ x, & x=y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı tanım, teorem ve örnekler verilmiştir.

Bu bölümden itibaren notasyonları basitleştirmek için $E(x)$ yerine E_x kullanılacaktır.

3.1. E −konveks Küme, Güçlü E −konveks Küme, E −konveks, Yarı E −konveks, E −quasi Konveks, Güçlü E −konveks ve Yarı Güçlü E −konveks Fonksiyonlar

E-konvekslik kavramı ilk olarak Youness (1999) tarafından ifade edilmiş ve bu konvekslik sınıfından hareketle (Yang 2001; Chen 2002; Syau and Lee 2005; Youness and Emam 2005a; Youness and Emam 2005b; Youness and Emam 2008; Grace and Thangavelu 2009) yazarları tarafından E −konvekslik türleri ve bu konvekslik türlerinin özellikleri ifade edilmiştir.

Tanım 3.1.1. $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda E_x + (1-\lambda)E_y \in M$$

oluyorsa $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine E −konveks küme denir (Youness 1999).

Tanım 3.1.2. $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, \alpha \in [0,1]$ için

$$\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)(\alpha y + E_y) \in M$$

oluyorsa $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine güçlü E −konveks küme denir (Youness ve Emam 2005a).

Tanım 3.1.3. M, E −konveks bir küme ve M üzerinde $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + (1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(E_x) + (1-\lambda) f(E_y)$$

oluyorsa $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna E −konveks fonksiyon denir (Youness 1999).

Tanım 3.1.4. M, E −konveks bir küme ve $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda E_x + (1-\lambda)E_y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

oluyorsa $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde yarı $E-$ konveks fonksiyon denir (Chen 2002).

Tanım 3.1.5. M, E −konveks bir küme ve $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda E_x + (1-\lambda)E_y\right) \leq max\left\{f(E_x), f(E_y)\right\}$$

oluyorsa $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde $E-$ quasi konveks fonksiyon denir (Syau and Lee 2005).

Tanım 3.1.6. M, güçlü E −konveks bir küme ve $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, \alpha \in [0,1]$ için

$$f(\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)\left(\alpha y + E_y\right)) \leq \lambda f(E_x) + (1-\lambda)f(E_y)$$

oluyorsa $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna güçlü E −konveks fonksiyon denir (Youness ve Emam 2005a).

Tanım 3.1.7. M, güçlü E −konveks bir küme ve $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, \alpha \in [0,1]$ için

$$f(\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)\left(\alpha y + E_y\right)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

oluyorsa $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yarı güçlü $E-$ konveks fonksiyon denir (Youness ve Emam 2005b).

3.2. Diğer Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar ve Bu Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler

Bilinen konvekslik ile starshaped konvekslik arasında bir kavram olan $m-$konvekslik kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1. $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$ ve $m,t\in[0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\leq tf(x)+m(1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $m-$konvekstir denir (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu $m-$konveks ise bu takdirde f fonksiyonu $m-$konkavdır. Ayrıca $f(0)\leq 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $m-$konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Açıkçası Tanım 3.2.1 de $m=1$ için standart konveks fonksiyon kavramı ve $m=0$ için de starshaped fonksiyon kavramı elde edilir.

Lemma 3.2.1. Eğer f fonksiyonu $K_m(b)$ sınıfında ise o zaman f starshaped fonksiyonudur (Toader 1988).

İspat: Herhangi bir $x\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için $f\in K_m(b)$ olduğundan

$$f(tx)=f(tx+m(1-t).0)\leq tf(x)+m(1-t)f(0)\leq tf(x)$$

elde edilir.

Lemma 3.2.2. Eğer f , $m-$ konveks ve $0<n<m\leq 1$ ise bu takdirde f , $n-$konvekstir (Toader 1988).

İspat: $x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ ise bu takdirde

$$
\begin{aligned}
f(tx+n(1-t)y) &= f\left(tx+m(1-t)\left(\frac{n}{m}\right)y\right) \\
&\leq\ tf(x)+m(1-t)f\left(\frac{n}{m}y\right) \\
&\leq\ tf(x)+m(1-t)\frac{n}{m}f(y) \\
&=\ tf(x)+n(1-t)f(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2'den $m \in (0,1)$ olduğunda

$$K_1(b) \subset K_m(b) \subset K_0(b)$$

yazılır. $K_1(b)$ sınıfında, $f(0) \leq 0$ olmak üzere sadece $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar vardır. Yani, $K_1(b)$, $[0,b]$ üzerinde tanımlı konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır (Bakula *et al*. 2008).

m −konvekslik notasyonu aşağıdaki tanımda ifade edildiği gibi genelleştirilmiştir.

Tanım 3.2.2. $f:[0,b] \to R$ bir fonksiyon ve $b>0$ olsun. Her $x,y \in [0,b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha,m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx+m(1-t)y) \leq t^{\alpha}f(x)+m(1-t^{\alpha})f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna (α,m) −konveks fonksiyon denir (Miheşan 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $(\alpha,m)-$konveks fonksiyonlarının sınıfı $K_m^{\alpha}(b)$ ile gösterilir. Ayrıca, $(\alpha,m) \in \{(0,0),(1,0),(1,m),(1,1)\}$ için sırasıyla artan, starshaped, $m-$konveks ve konveks fonksiyon sınıfları elde edilir. $f(0) \leq 0$ olmak üzere $K_1^1(b)$ sınıfında sadece $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar yer alır, yani $K_1^1(b)$, $[0,b]$ üzerinde tanımlı tüm konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır.

Tanım 3.2.3. I, ℝ'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $logf$ konveks ise veya her $x, y \in I$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq [f(x)]^{\alpha}[f(y)]^{(1-\alpha)} \tag{3.1}$$

ise f'ye log −konveks fonksiyon ve (3.1) eşitsizliği ters çevrilirse f'ye log −konkav fonksiyon denir (Pečarić *et al*. 1992).

(2.2) eşitsizliğine $f: I \to (0, \infty)$, log −konveks fonksiyonu uygulanırsa

$$ln\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b lnf(x)dx \leq \frac{lnf(a) + lnf(b)}{2}$$

olur. Buradan da

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b lnf(x)dx\right] \leq \sqrt{f(a)f(b)}$$

şeklinde log-konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliği elde edilir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 3.2.4. I, ℝ'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\,(f(x), f(y))$$

oluyorsa f fonksiyonuna $quasi$ −konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al*. 1992).

Sonuç 3.2.1. Herhangi bir konveks fonksiyon $quasi$ −konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani $quasi$ − konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \in [-2,-1] \\ t^2, & t \in [-1,2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında $quasi$ −konveks fonksiyondur (Ion 2007).

İkinci anlamda s −konveks fonksiyonlar sınıfı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2.5. Her $x, y \in [0, \infty)$, $t \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

şartını sağlayan $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir ve ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar sınıfı genellikle K_s^2 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Burada $s = 1$ için $[0, \infty)$ aralığında $s-$konvekslik kavramından bilinen konvekslik kavramının kolaylıkla elde edildiği görülebilir.

Örnek 3.2.1. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

İkinci anlamda s −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1. $s \in (0,1)$ olmak üzere $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ikinci anlamda s −konveks bir fonksiyon, $a, b \in [0, \infty)$ ve $a < b$ olsun. $f \in L^1([a, b])$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1} \tag{3.2}$$

olur.

(3.2) eşitsizliğindeki ikinci eşitsizlikteki olabilecek en iyi sabit $k = 1/(s+1)$ ’dir (Dragomir and Fitzpatrick 1999).

x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.6. f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r −konveks fonksiyon denir (Gill *et al*. 1997).

Bu tanımdan 0 −konveks fonksiyonların log −konveks fonksiyonlar ve 1 −konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir.

r −konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \begin{cases} \lambda f^r(x) + (1-\lambda)f^r(y), & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al*. 1998).

Tanım 3.2.7. $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. f negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y) \tag{3.3}$$

oluyorsa $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h −konveks fonksiyon veya f, $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

Eğer (3.3) eşitsizliği ters çevrilirse, $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h −konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$'dır (Varošanec 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha)=\alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h,I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h,I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h,I)=Q(I)$ 'dır; $h(\alpha)=1$ ise $SX(h,I)\supseteq P(I)$'dır; $s\in(0,1)$ olmak üzere $h(\alpha)=\alpha^s$ ise $SX(h,I)\supseteq K_s^2$'dir.

3.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.3.1. $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $a<b$ ve $f,g:[a,b]\to[0,\infty)$ iki konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b) \text{ ve } N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)$$

dir (Pachpatte 2003).

Lemma 3.3.1. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L([a,b])$ ise bu durumda

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \qquad (3.4)$$

dir (Dragomir and Agarwal 1998).

İspat: Bu eşitliği ispatlamak için

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1(1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\\&=\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}(1-2t)\Big|_0^1+2\int_0^1\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt\\&=\frac{f(a)+f(b)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Sonuç 3.3.1. (3.4) eşitliğinde $t \in [0,1]$ olmak üzere $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)dx$$

yazılabilir (Dragomir and Agarwal 1998).

Teorem 3.3.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f' \in L([a,b])$ olsun. Bu durumda $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\left(\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{8}\right)$$

dir (Dragomir and Agarwal 1998).

Teorem 3.3.3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$, $f' \in L([a,b])$ ve $p > 1$ olsun. Bu durumda $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\left(\frac{|f'(a)|^{p/(p-1)} + |f'(b)|^{p/(p-1)}}{2}\right)^{(p-1)/p}$$

dir (Dragomir and Agarwal 1998).

Teorem 3.3.4. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda $q \geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir (Pearce and Pečarić 2000).

Lemma 3.3.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^{\circ}$ve $a < b$ olsun. $f' \in L([a,b])$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 \int_0^1 [f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)](s-t)dtds \tag{3.5}$$

dir (Sarıkaya *et al*. 2010).

İspat: Kısmi integrasyon yöntemi yardımıyla,

$$\int_0^1 \int_0^1 [f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)](s-t)dtds$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f'(ta+(1-t)b)(s-t)dt - \int_0^1 f'(sa+(1-s)b)(s-t)dt \right\} ds$$

$$= \int_0^1 \left\{ (s-t)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^1 \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt + \left(\frac{1}{2}-s\right) f'(sa+(1-s)b) \right\} ds$$

$$= \int_0^1 \left\{ (s-1)\frac{f(a)}{a-b} - s\frac{f(b)}{a-b} \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt + \left(\frac{1}{2}-s\right) f'(sa+(1-s)b) \right\} ds$$

$$= \left(\frac{(s-1)^2}{2}\frac{f(a)}{a-b} - \frac{s^2}{2}\frac{f(b)}{a-b} \right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$+ \left(\frac{1}{2}-s\right)\frac{f(sa+(1-s)b)}{a-b}\Bigg|_0^1 + \int_o^1 \frac{f(sa+(1-s)b)}{a-b}ds$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

elde edilir. $t \in [0,1]$ için $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılıp eşitliğin her iki tarafı $\frac{b-a}{2}$ ile çarpılırsa, (3.5)'deki eşitlik elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.5. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^{\circ}$ve $a < b$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

dir (Sarıkaya *et al*. 2010).

Teorem 3.3.6. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^{\circ}$ve $a < b$ olsun. $q \geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks bir dönüşüm ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{3}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir (Sarıkaya *et al*. 2010).

Teorem 3.3.7. f, $[0, b]$ aralığında pozitif log −konveks bir fonksiyon olsun. L pozitif reel sayıların logaritmik ortalaması olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq L(f(a), f(b)) \tag{3.6}$$

dir. f, pozitif log −konkav fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \geq L\big(f(a), f(b)\big)$$

olur (Gill *et al*. 1997).

Teorem 3.3.8. f , $[0, b]$ aralığında pozitif $log -$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \min_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)L(f(a), f(x)) + (b-x)L(f(x), f(b))}{b-a}$$

dır. Eğer f, $[0, b]$ aralığında pozitif log $-$konkav bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \geq \max_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)L(f(a), f(x)) + (b-x)L(f(x), f(b))}{b-a}$$

olur (Gill *et al*. 1997).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, araştırmada elde edilen bazı bulgulara yer verilecektir.

İlk olarak, 3. bölümde ifade edilen konveks küme, E–konveks küme, güçlü E −konveks küme, $E-$ konveks fonksiyon, yarı $E-$ konveks fonksiyon, güçlü $E-$ konveks fonksiyon, yarı güçlü E −konveks fonksiyon ve m −konveks fonksiyon kavramlarından yararlanılarak yeni konveks fonksiyon sınıfları tanımlanmaya, bu fonksiyon sınıflarına örnekler verilmeye çalışılmış ve bu fonksiyonlar ile ilgili teoremler ve ispatları verilmiştir. Ayrıca yukarıda ifade edilen ve yeni tanımlanan fonksiyon sınıfları ile ilgili Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler içeren teoremler ve ispatları verilmiştir.

4.1. $\boldsymbol{E-m}$ −konveks Küme ve $\boldsymbol{E-m}$ −konveks Fonksiyon

Tanım 4.1.1. $E:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y \in M$$

oluyorsa $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine $E-m$ −konveks küme denir.

Sonuç 4.1.1. $E-m$ −konveks küme tanımından

- $m=1$ ve $E:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ özdeş dönüşüm olarak alınırsa standart konveks küme,
- $m=1$ için E −konveks küme,

elde edilir.

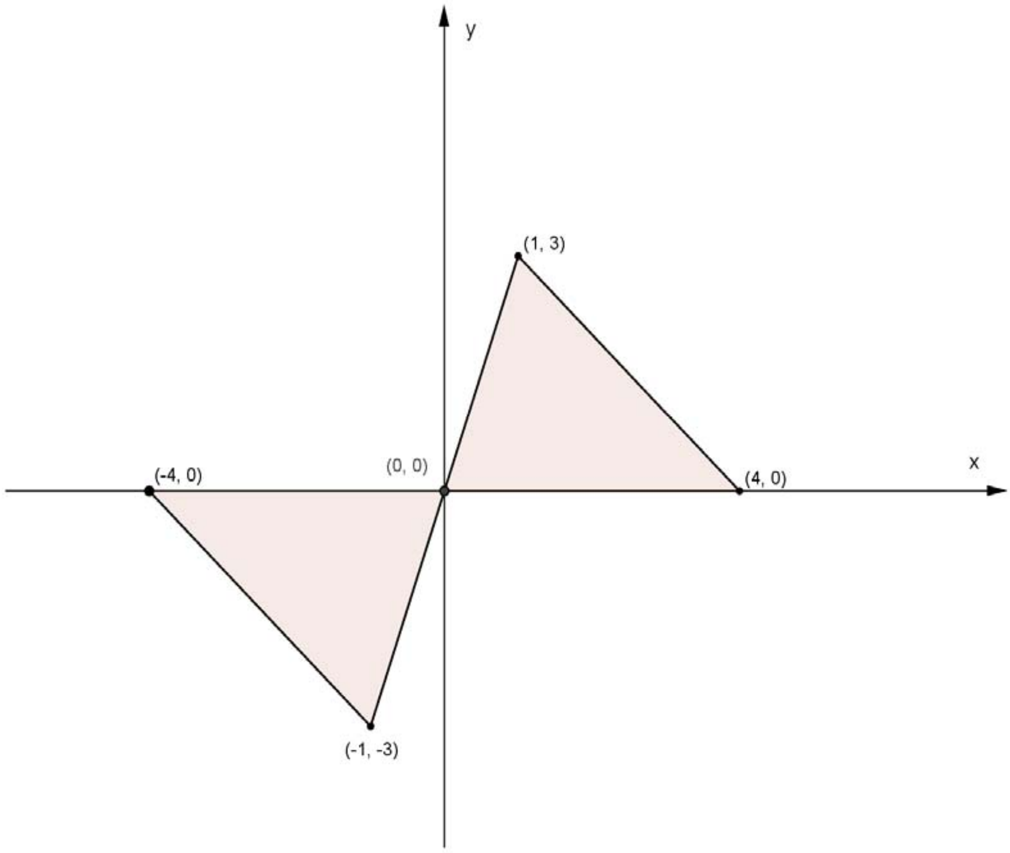
Örnek 4.1.1. $E:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $E(x,y)=(x,0)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ için

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(4,0) + \lambda_3(1,3)\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(-4,0) + \lambda_3(-1,-3)\}$$

kümesi $E-m$ −konveks kümedir fakat konveks değildir. Çünkü $\lambda = \frac{1}{2}$ için

$$\lambda(2,0) + (1-\lambda)(-1,-2) \notin M$$

dir.



Şekil 4.1. $E - m$ $-$konveks küme

Teorem 4.1.1. Eğer $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi $E - m$ $-$konveks küme ise $E(M) \subseteq M$ dir.

İspat: M, $E - m$ $-$konveks küme olduğundan her $x, y \in M$ ve $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y \in M$$

dir. Dolayısıyla $\lambda = 1$ için $E_x \in M$ olur. Böylece $E(M) \subseteq M$ elde edilir.

Teorem 4.1.2. M_1 ve M_2 iki $E - m -$konveks küme olsun. Bu durumda $M_1 \cap M_2$ kümesi $E - m -$konveks kümedir.

İspat: $x, y \in M_1 \cap M_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x, y \in M_1$ ve $x, y \in M_2$ olur. M_1 ve M_2 iki $E - m$ −konveks küme olduğundan, her $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y \in M_1$$

ve

$$\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y \in M_2$$

yazılır. Böylece,

$$\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y \in M_1 \cap M_2$$

dir. Yani $M_1 \cap M_2$ kümesi $E - m$ −konveks kümedir.

Lemma 4.1.1. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $E_1 - m -$ konveks küme, $E_2 - m -$ konveks küme ve $E_1 \circ E_2 = E_1(E_2)$ olsun. Bu durumda M kümesi $(E_1 \circ E_2) - m -$ konveks ve $(E_2 \circ E_1) - m$ −konveks kümedir.

İspat: Farz edelim ki, bazı $\lambda, m \in [0,1]$ değerleri için $x, y \in M$ ve

$$\lambda(E_1 \circ E_2)_x + m(1-\lambda)(E_1 \circ E_2)_y \notin M$$

yani

$$\lambda E_1[E_2(x)] + m(1-\lambda)E_1[E_2(y)] \notin M$$

olsun. Teorem 4.1.1' den $E_2(x) \in M$ ve $E_2(y) \in M$ yazılır. O halde

$$\lambda E_1[E_2(x)] + m(1-\lambda)E_1[E_2(y)] \notin M,$$

ifadesi M kümesinin $E_1 - m -$ konveksliği ile çelişmektedir. Bundan dolayı M , $(E_1 \circ E_2) - m$ −konveks kümedir.

Benzer şekilde, farz edelim ki, bazı $\lambda, m \in [0,1]$ değerleri için $x, y \in M$ ve

$$\lambda(E_2 \circ E_1)_x + m(1-\lambda)(E_2 \circ E_1)_y \notin M$$

yani

$$\lambda E_2[E_1(x)] + m(1-\lambda)E_2[E_1(y)] \notin M$$

olsun. Teorem 4.1.1' den $E_1(x) \in M$ ve $E_1(y) \in M$ yazılır. O halde

$$\lambda E_2[E_1(x)] + m(1-\lambda)E_2[E_1(y)] \notin M$$

ifadesi M kümesinin $E_2 - m$ −konveksliği ile çelişmektedir. Bundan dolayı M kümesi $(E_2 \circ E_1) - m$ −konveks kümedir.

Lemma 4.1.2. $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm ve $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri $E - m$ −konveks kümeler olsun. Bu durumda $M_1 + M_2$ kümesi $E - m$ −konveks kümedir.

İspat: $p, x \in M_1$, $q, y \in M_2$ ve $(p+q), (x+y) \in M_1 + M_2$ olsun. O halde, $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm olduğundan $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\lambda E_{(p+q)} + m(1-\lambda)E_{(x+y)}$$
$$= \left[\lambda E_p + m(1-\lambda)E_x\right] + \left[\lambda E_q + m(1-\lambda)E_y\right] \in M_1 + M_2$$

yazılır. Dolayısıyla $M_1 + M_2$ kümesi $E - m$ −konveks kümedir.

Tanım 4.1.2. $M, E - m$ −konveks bir küme ve M üzerinde $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\right) \leq \lambda f(E_x) + m(1-\lambda)f(E_y)$$

oluyorsa reel değerli $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $E - m$ −konveks fonksiyon denir.

Diğer taraftan,

$$f\left(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\right) \geq \lambda f(E_x) + m(1-\lambda)f\left(E_y\right),$$

ise f' ye M üzerinde $E - m$ −konkav fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizlikler sırasıyla

$$f\left(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\right) < \lambda f(E_x) + m(1-\lambda)f(E_y)$$

ve

$$f\left(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\right) > \lambda f(E_x) + m(1-\lambda)f\left(E_y\right),$$

şeklinde ise f 'ye sırasıyla kesin(strictly) $E - m -$ konveks ve kesin(strictly) $E - m$ −konkav fonksiyon denir.

Sonuç 4.1.2. $E - m$ −konveks fonksiyon tanımından

✓ $m = 1$ ve $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ özdeş dönüşüm olarak alınırsa standart konveks fonksiyon,

✓ $E: [0, b] \to \mathbb{R}$ özdeş dönüşüm olarak alınırsa m −konveks fonksiyon,

✓ $m = 1$ için E −konveks fonksiyon,

elde edilir.

Örnek 4.1.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ olmak üzere

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda_1(0,0) + \lambda_2(4,0) + \lambda_3(1,3)\}$$

olarak verilsin ve $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü $E(x, y) = (x, 0)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} y^3 & x < 1 \\ yx^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $E - m$ −konvekstir. Fakat konveks ve m −konveks fonksiyon değildir. Çünkü, bazı $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda(4,0) + (1 - \lambda)(1,3)\big) \nleq \lambda f(4,0) + (1 - \lambda) f(1,3)$$

ve bazı $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda(4,0) + m(1 - \lambda)(1,3)\big) \nleq \lambda f(4,0) + m(1 - \lambda) f(1,3)$$

dir.

Örnek 4.1.3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

ve $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(x) = -x^2$ olarak tanımlansın. Bu takdirde $\mathbb{R}$, $E - m$ −konveks küme ve f , $E - m$ − konveks fonksiyondur. Fakat f , konveks ve m − konveks değildir. Çünkü, bazı $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda.0 + (1 - \lambda)1) \nleq \lambda f(0) + (1 - \lambda) f(1)$$

ve bazı $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f(\lambda.0+m(1-\lambda)1) \nleq \lambda f(0)+m(1-\lambda)f(1)$$

dir.

Teorem 4.1.3. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, E −konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, E −konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x+(1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(E_x)+f(E_y)}{2}$$

dir.

İspat. f, E −konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x+(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(E_x)+(1-\lambda)f(E_y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının [0,1] üzerinden λ'ya göre integrali alınarak,

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x+(1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(E_x)+f(E_y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.3'de $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ şeklinde alınırsa, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı, yani

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $E-m$ −konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E-m$ −konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x+m(1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(E_x)+mf(E_y)}{2}$$

dir.

İspat. f, $E-m$ −konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(E_x) + m(1-\lambda)f(E_y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının [0,1] üzerinden λ'ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(E_x) + mf(E_y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.4 de, $m=1$ için Teorem 4.1.3 deki eşitsizlik elde edilir. Dolayısıyla $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ şeklinde alınırsa, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı da elde edilir.

Teorem 4.1.5. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $E-m-$ konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f, g: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ $E-m-$ konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde, her $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)g\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)d\lambda$$
$$\leq \frac{f(E_x)g(E_x)}{3} + m^2\frac{f(E_y)g(E_y)}{3} + m\frac{f(E_x)g(E_y) + f(E_y)g(E_x)}{6}$$

dir.

İspat. f ve g, $E-m$ −konveks fonksiyonlar olduğundan her $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(E_x) + m(1-\lambda)f(E_y)$$
$$g\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda g(E_x) + m(1-\lambda)g(E_y)$$

olur. f ve g negatif olmayan fonksiyonlar olduğu için

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)g\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)$$
$$\leq \lambda^2 f(E_x)g(E_x) + m^2(1-\lambda)^2 f(E_y)g(E_y)$$
$$+m\lambda(1-\lambda)[f(E_x)g(E_y) + f(E_y)g(E_x)]$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)g\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)d\,\lambda$$

$$\leq \frac{f(E_x)g(E_x)}{3} + m^2\frac{f(E_y)g(E_y)}{3} + m\frac{f(E_x)g(E_y) + f(E_y)g(E_x)}{6}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5. Teorem 4.1.5 de $m = 1$ ve $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ alınırsa Teorem 2.1.1 deki eşitsizlik yani

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(x)g(x) + f(y)g(y)}{3} + \frac{f(x)g(y) + f(y)g(x)}{6}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.3. $M, E - m$ −konveks bir küme ve M üzerinde $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq max\{f(E_x), f(E_y)\}$$

oluyorsa $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna quasi $-E - m-$ konveks fonksiyon denir. $x, y \in M$, $E(x) \neq E(y)$ ve $\lambda \in (0,1)$ için bu eşitsizlik kesin ise f fonksiyonu kesin quasi$-E - m$ −konveks fonksiyondur.

Bu tanımdan açıkça anlaşılmalıdır ki quasi$-E - m$ −konvekslik, $E - m$ −konveksliğin bir genelleştirmesidir.

4.2. Yarı $E - m$ −konveks Fonksiyon

Tanım 4.2.1. $M, E - m$ −konveks bir küme ve M üzerinde $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(x) + m(1-\lambda)f(y)$$

oluyorsa reel değerli $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yarı $E-m-$konveks fonksiyon denir.

Sonuç 4.2.1. Yarı $E-m-$konveks fonksiyon tanımından;

- ✓ $E: [0, b] \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ için $m-$konveks fonksiyon,
- ✓ $m = 1$ için yarı $E-$konveks fonksiyon,
- ✓ $m = 1$ ve $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ özdeş dönüşüm olarak alınırsa standart konveks fonksiyon

elde edilir.

Teorem 4.2.1. M , $E-m-$ konveks bir küme ve $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yarı $E-m-$ konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in M$ ve $m \in [0,1]$ için $f(E_x) \leq f(x)$ ve $f(mE_y) \leq mf(y)$'dir.

İspat: f, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $E-m-$konveks kümesi üzerinde tanımlı yarı $E-m-$konveks fonksiyon olduğundan keyfi $x, y \in M$ ve $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y \in M$$

ve

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(x) + m(1-\lambda)f(y)$$

yazılır. Dolayısıyla $\lambda = 1$ için $f(E_x) \leq f(x)$ ve $\lambda = 0$ için $f\big(mE_y\big) \leq mf(y)$ elde edilir.

Teorem 4.2.2. M, $E-m-$konveks bir küme ve $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E-m-$konveks bir fonksiyon olsun. Her $x \in M$ için $f(E_x) \leq f(x)$ ise f , yarı $E-m-$ konveks fonksiyondur.

İspat: M , $E-m-$ konveks bir küme ve $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E-m-$ konveks bir fonksiyon ve her $x \in M$ için $f(E_x) \leq f(x)$ olsun. Bu takdirde keyfi $x, y \in M$ ve $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(E_x) + m(1-\lambda)f(E_y)$$

$$\leq \lambda f(x) + m(1-\lambda)f(y)$$

dir. Dolayısıyla f, M üzerinde yarı $E-m-$konveks fonksiyondur.

Teorem 4.2.3. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $E-$konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yarı $E-$konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x + (1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

dir.

İspat: f, yarı $E-$konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + (1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x + (1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.2.3'de $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ şeklinde alınırsa, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir.

Teorem 4.2.4. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $E-m-$konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yarı $E-m-$konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(x)+mf(y)}{2}$$

olur.

İspat: f, yarı $E-m$ −konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big) \leq \lambda f(x) + m(1-\lambda)f(y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının [0,1] üzerinden λ'ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f\big(\lambda E_x + m(1-\lambda)E_y\big)d\lambda \leq \frac{f(x)+mf(y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3. Teorem 4.2.4 de $m=1$ için Teorem 4.2.3 deki eşitsizlik elde edilir. Dolayısıyla $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $E_x = x$ şeklinde alınırsa, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı da elde edilir.

4.3. Güçlü $E-m$ −konveks Küme ve Güçlü $E-m$ −konveks Fonksiyon

Tanım 4.3.1. $E:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x,y\in M$ ve $\alpha,\lambda,m\in[0,1]$ için

$$\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y) \in M$$

oluyorsa $M\subseteq\mathbb{R}^n$ kümesine güçlü $E-m$ −konveks küme denir.

Sonuç 4.3.1. Güçlü $E-m$ −konveks küme tanımından;

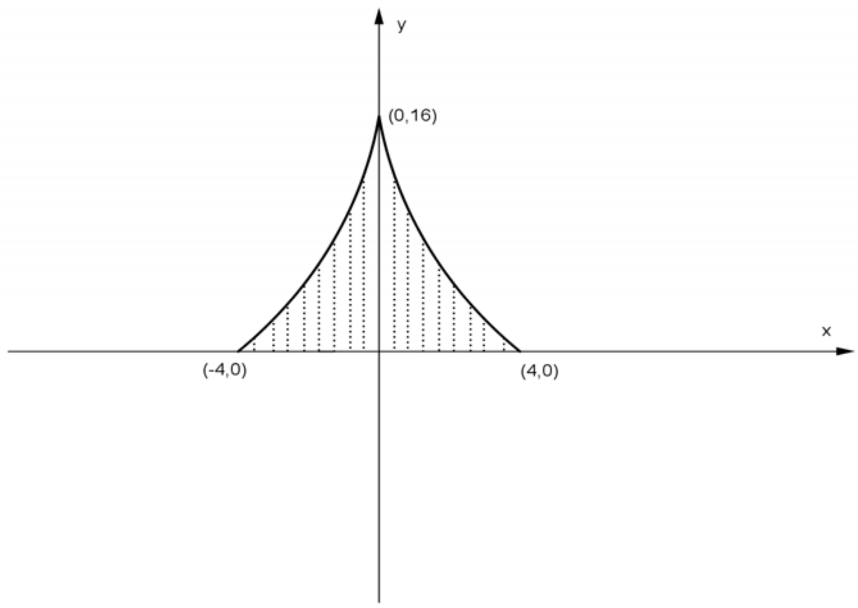
- $m=1$ için güçlü E −konveks küme,
- $\alpha=0$ için $E-m$ −konveks küme,

elde edilir. Dolayısıyla Sonuç 4.1.1'den dolayı güçlü $E-m-$ konveks küme tanımından standart konveks küme kavramı da elde edilir.

Örnek 4.3.1. $E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $E(x,y)=(-x,0)$ olmak üzere E operatörüne göre

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (4-x)^2 \;\; ve \;\; 0 \leq x \leq 4\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (4+x)^2 \;\; ve \;\; -4 \leq x \leq 0\}$$

kümesi güçlü $E-m$ −konveks kümedir.



Şekil 4.2. Güçlü $E-m$ −konveks küme

Teorem 4.3.1. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi güçlü $E-m$ −konveks küme ise $E(M) \subseteq M$ dir.

İspat: M kümesi güçlü $E-m$ −konveks küme olduğundan herhangi bir $x, y \in M$ ve $\alpha, \lambda, m \in [0,1]$ için

$$\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y) \in M$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = 1$ ve $\alpha = 0$ için $E_x \in M$'dir. Böylece $E(M) \subseteq M$ olur.

Teorem 4.3.2. M_1 ve M_2 güçlü $E-m$ −konveks küme ise $M_1 \cap M_2$ kümesi de güçlü $E-m$ −konveks kümedir.

İspat: $x, y \in M_1 \cap M_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x, y \in M_1$ ve $x, y \in M_2$ olur. M_1 ve M_2 iki güçlü $E - m -$konveks küme olduğundan $\alpha, \lambda, m \in [0,1]$ için

$$\lambda(\alpha x + E_x) + m(1 - \lambda)\left(\alpha y + E_y\right) \in M_1$$

ve

$$\lambda(\alpha x + E_x) + m(1 - \lambda)\left(\alpha y + E_y\right) \in M_2$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lambda(\alpha x + E_x) + m(1 - \lambda)\left(\alpha y + E_y\right) \in M_1 \cap M_2$$

olur, yani $M_1 \cap M_2$ kümesi güçlü $E - m -$konveks bir kümedir.

Teorem 4.3.3. $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm ve $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$ kümeleri güçlü $E - m -$konveks kümeler ise bu durumda $M_1 + M_2$ kümesi güçlü $E - m -$konveks kümedir.

İspat: $p, x \in M_1$, $q, y \in M_2$ ve $(p + q), (x + y) \in M_1 + M_2$ olsun. Bu durumda $\lambda \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$\lambda\left(\alpha(p + q) + E_{(p+q)}\right) + m(1 - \lambda)\left(\alpha(x + y) + E_{(x+y)}\right)$$

$$= \left[\lambda\left(\alpha p + E_p\right) + m(1 - \lambda)(\alpha x + E_x)\right] + \left[\lambda\left(\alpha q + E_q\right) + m(1 - \lambda)\left(\alpha y + E_y\right)\right]$$

$$\in M_1 + M_2$$

elde edilir. Dolayısıyla $M_1 + M_2$, güçlü $E - m -$konveks kümedir.

Tanım 4.3.2. M, güçlü $E - m -$konveks bir küme ve M üzerinde $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\alpha, \lambda, m \in [0,1]$ için

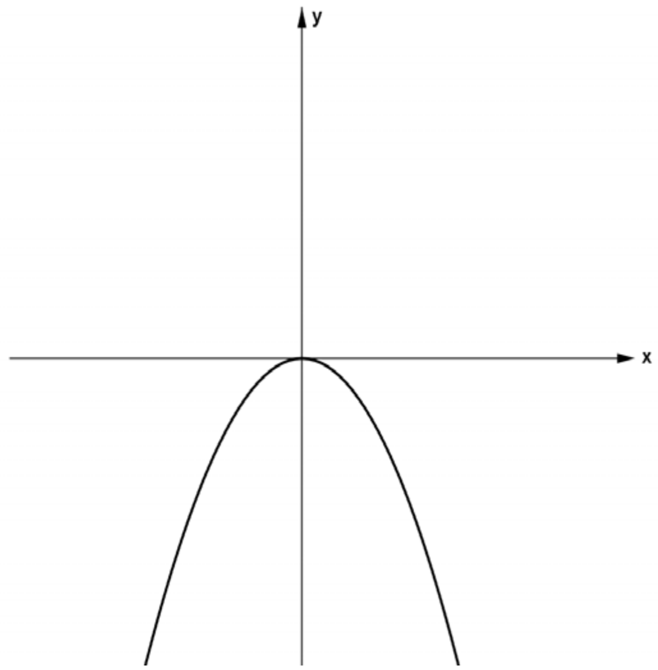
$$f(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1 - \lambda)\left(\alpha y + E_y\right)) \leq \lambda f(E_x) + m(1 - \lambda) f(E_y)$$

oluyorsa reel değerli $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna güçlü $E - m$ −konveks fonksiyon denir.

Sonuç 4.3.2. Güçlü $E - m$ −konveks fonksiyon tanımından

- ✓ $m = 1$ için güçlü E −konveks fonksiyon,
- ✓ $\alpha = 0$ için $E - m$ −konveks fonksiyon ve dolayısıyla da Sonuç 4.1.3'den dolayı $m -$ konveks fonksiyon, $E -$ konveks fonksiyon ve standart konveks fonksiyon kavramları elde edilir.

Örnek 4.3.2. $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(x) = 0$ ve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ olarak tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu E operatörüne göre güçlü $E - m$ −konveks fonksiyondur.



Şekil 4.3. Güçlü $E - m$ −konveks fonksiyon

Teorem 4.3.4. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ güçlü E −konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ güçlü E −konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda, \alpha \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big)d\lambda \le \frac{f(E_x) + f\big(E_y\big)}{2}$$

dir.

İspat: f, güçlü E −konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda, \alpha \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big) \le \lambda f(E_x) + (1-\lambda) f(E_y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big)d\lambda \le \frac{f(E_x) + f(E_y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.3. Teorem 4.3.4 de $\alpha = 0$ için Teorem 4.1.3'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.5. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ güçlü $E - m -$konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ güçlü $E - m -$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\lambda, \alpha, m \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big)d\lambda \le \frac{f(E_x) + mf(E_y)}{2}$$

dir.

İspat: f, güçlü $E - m -$konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda, \alpha, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big) \le \lambda f(E_x) + m(1-\lambda) f(E_y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big)d\lambda \le \frac{f(E_x) + mf(E_y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.4. Teorem 4.3.5'de $m = 1$ için Teorem 4.3.4'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.3.5. Teorem 4.3.5'de $\alpha = 0$ için Teorem 4.1.4'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.3.6. Teorem 4.3.5'de $m = 1$ ve $\alpha = 0$ için Teorem 4.1.3'deki eşitsizlik elde edilir. Dolayısıyla $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ şeklinde alınırsa, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı da elde edilir.

4.4. Yarı Güçlü $E - m$ −konveks Fonksiyon

Tanım 4.4.1. M, güçlü $E - m$ −konveks bir küme ve $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in M$ ve $\lambda, \alpha, m \in [0,1]$ için

$$f(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)) \leq \lambda f(x) + m(1-\lambda) f(y)$$

oluyorsa $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yarı güçlü $E - m$ −konveks fonksiyon denir.

Sonuç 4.4.1. Yarı güçlü $E - m$ −konveks fonksiyon tanımından;

- ✓ $m = 1$ için yarı güçlü E −konveks fonksiyon,
- ✓ $\alpha = 0$ için yarı $E - m$ −konveks fonksiyon,
- ✓ $m = 1$ ve $\alpha = 0$ için yarı E −konveks fonksiyon,
- ✓ $\alpha = 0$ ve $E: [0, b] \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ için m −konveks fonksiyon,
- ✓ $m = 1, \alpha = 0$ ve $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ için standart konveks fonksiyon,

elde edilir.

Örnek 4.4.1. $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(x) = -|x|$ ve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |\sqrt{x}|, & x \geq 0 \\ -|\sqrt{-x}|, & x < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu E operatörüne göre yarı güçlü $E - m$ −konveks fonksiyondur.

Teorem 4.4.1. $E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir operatör, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ güçlü $E - m$ −konveks bir küme ve $i = 1,2, \dots, k$ olsun. $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları M üzerinde yarı güçlü $E - m$ −konveks fonksiyonlar ise bu takdirde $a_i \geq 0$, $i = 1,2, \dots, k$ için $h(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(x)$ fonksiyonu M üzerinde yarı güçlü $E - m$ −konveks fonksiyondur.

İspat: f_i fonksiyonları M üzerinde yarı güçlü $E - m -$ konveks fonksiyonlar olduklarından herhangi bir $x, y \in M$ ve $\lambda, \alpha, m \in [0,1]$ için

$$\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y) \in M$$

ve

$$\begin{aligned} & h\left(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)\left(\alpha y + E_y\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)) \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(x) + m(1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(y) \\ &= \lambda h(x) + m(1-\lambda) h(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla h fonksiyonu M üzerinde yarı güçlü $E - m -$ konveks fonksiyon olur.

Teorem 4.4.2. M güçlü $E - m$ −konveks bir küme ve $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da M üzerinde güçlü $E - m$ −konveks bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in M$ için $f(E_x) \leq f(x)$ oluyorsa, f fonksiyonu M üzerinde yarı güçlü $E - m$ −konveks fonksiyon olur.

İspat: $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu M üzerinde güçlü $E - m$ −konveks bir fonksiyon ve her $x \in M$ için $f(E_x) \leq f(x)$ olduğundan, herhangi $x, y \in M$ ve $\lambda, \alpha, m \in [0,1]$ için

$$\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y) \in M$$

ve

$$f(\lambda(\alpha x+E_x)+m(1-\lambda)\big(\alpha y+E_y\big))\leq \lambda f(E_x)+m(1-\lambda)f(E_y)$$

$$\leq \lambda f(x)+m(1-\lambda)f(y)$$

elde edilir. Dolayısıyla f, M üzerinde yarı güçlü $E-m$ −konveks fonksiyondur.

Teorem 4.4.3. $M\subseteq\mathbb{R}^n$ güçlü $E-m-$konveks bir küme olmak üzere $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonu M üzerinde yarı güçlü $E-m$ −konveks fonksiyon ve $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da pozitif, homojen ve azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, φof bileşke fonksiyonu M üzerinde yarı güçlü $E-m$ −konveks fonksiyondur.

İspat: f fonksiyonu M üzerinde yarı güçlü $E-m$ −konveks bir fonksiyon olduğundan, her $x,y\in M$ ve $\lambda,\alpha,m\in[0,1]$ için

$$f(\lambda(\alpha x+E_x)+m(1-\lambda)\big(\alpha y+E_y\big))\leq \lambda f(x)+m(1-\lambda)f(y)$$

$$\varphi of\left(\lambda(\alpha x+E_x)+m(1-\lambda)\big(\alpha y+E_y\big)\right)\leq \varphi[\lambda f(x)+m(1-\lambda)f(y)]$$

$$\leq \lambda(\varphi of)(x)+m(1-\lambda)(\varphi of)(y)$$

elde edilir. Dolayısıyla φof bileşke fonksiyonu M üzerinde yarı güçlü $E-m$ −konveks fonksiyon olur.

Teorem 4.4.4. $M\subseteq\mathbb{R}^n$ güçlü E −konveks bir küme ve $x,y\in M$ olmak üzere $f:M\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ yarı güçlü E −konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda,\alpha\in[0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x+E_x)+(1-\lambda)(\alpha y+E_y)\big)d\lambda\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

dir.

İspat: f, yarı güçlü E −konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda,\alpha\in[0,1]$ için

$$f\big(\lambda(\alpha x+E_x)+(1-\lambda)(\alpha y+E_y)\big)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının [0,1] üzerinden λ'ya göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + (1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big)d\lambda \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.2. Teorem 4.4.4'de $\alpha = 0$ için Teorem 4.2.3'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.4.5. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ güçlü $E - m -$konveks bir küme ve $x, y \in M$ olmak üzere $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yarı güçlü $E - m -$konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $\lambda, \alpha, m \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big)d\lambda \leq \frac{f(x)+mf(y)}{2}$$

dir.

İspat: f, yarı güçlü $E - m -$konveks bir fonksiyon olduğundan her $\lambda, \alpha, m \in [0,1]$ için

$$f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big) \leq \lambda f(x) + m(1-\lambda)f(y)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının [0,1] üzerinden λ'ya göre integrali alınarak

$$\int_0^1 f\big(\lambda(\alpha x + E_x) + m(1-\lambda)(\alpha y + E_y)\big)d\lambda \leq \frac{f(x)+mf(y)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.3. Teorem 4.4.5'de $m = 1$ için Teorem 4.4.4'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.4.4. Teorem 4.4.5'de $\alpha = 0$ için Teorem 4.2.4'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.4.5. Teorem 4.4.5'de $m = 1$ ve $\alpha = 0$ için Teorem 4.2.3'deki eşitsizlik elde edilir. Dolayısıyla $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E_x = x$ şeklinde alınırsa, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı da elde edilir.

4.5. m −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 4.5.1. I, $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde açık reel bir aralık, $a, b \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $m \in (0,1]$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde m −konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dur.

İspat: İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $m-$konveks fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $m \in (0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q + m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^1\int_0^1 \left(t|f'(a)|^q + m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds = \int_0^1\left[\int_0^s (s-t)^p dt + \int_s^1 (t-s)^p dt\right]ds = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1 \left(t|f'(a)|^q + m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds = \frac{|f'(a)|^q + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.1. Teorem 4.5.1'de $m = 1$ seçilirse, Teorem 4.5.1'deki eşitsizlik Teorem 3.3.5'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.5.2. I, $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde açık reel bir aralık, $a, b \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $m \in (0,1]$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde m −konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{3}\left(\frac{|f'(a)|^q + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dur.

İspat: İki katlı integraller için power mean eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left. + \int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t||f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $m-$konveks fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $m \in (0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q + m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|\left(t|f'(a)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds=\frac{1}{3}$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|\left(t|f'(a)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds=\frac{|f'(a)|^q+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{6}$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)}{3}\left(\frac{|f'(a)|^q+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.2. Teorem 4.5.2'de $m=1$ seçilirse, Teorem 4.5.2'deki eşitsizlik Teorem 3.3.6'daki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.5.3. $f,g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ iki fonksiyon, $0\leq a<b<\infty$ ve $fg\in L^1([a,b])$ olsun. $m_1,m_2\in(0,1]$ için $[a,b]$ aralığında f , m_1-konveks fonksiyon ve g de m_2-konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq min\{S_1, S_2\} \tag{4.1}$$

olur. Burada

$$S_1 = \frac{1}{6}\Big[\big(f^2(a) + g^2(a)\big) + m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right)$$

$$+m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right) + m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right) + m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right)\Big]$$

ve

$$S_2 = \frac{1}{6}\Big[\big(f^2(b) + g^2(b)\big) + m_1 f(b) f\left(\frac{a}{m_1}\right)$$

$$+m_2 g(b) g\left(\frac{a}{m_2}\right) + m_1^2 f^2\left(\frac{a}{m_1}\right) + m_2^2 g^2\left(\frac{a}{m_2}\right)\Big]$$

dir.

İspat: f, m_1 −konveks fonksiyon ve g, m_2 −konveks fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + m_1(1-t) f\left(\frac{b}{m_1}\right) \tag{4.2}$$

ve

$$g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + m_2(1-t) g\left(\frac{b}{m_2}\right) \tag{4.3}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(ta + (1-t)b) g(ta + (1-t)b)dt \tag{4.4}$$

eşitliğini göstermek kolaydır.

(4.4) eşitliğinin sağ tarafında (4.2), (4.3) ve $cd \leq \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$ $(c, d \geq 0)$ eşitsizliklerini kullanıp değişken değişikliği yapılırsa

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 [\{f(ta+(1-t)b)\}^2 + \{g(ta+(1-t)b)\}^2]dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 \left[\left(tf(a) + m_1(1-t)f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right)^2 + \left(tg(a) + m_2(1-t)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right)^2\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{3}f^2(a) + \frac{1}{3}m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right) + \frac{1}{3}m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}g^2(a) + \frac{1}{3}m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right) + \frac{1}{3}m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left[\left(f^2(a) + g^2(a)\right) + m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right.$$

$$\left. + m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right) + m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right) + m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right)\right] \tag{4.5}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 [\{f(tb+(1-t)a)\}^2 + \{g(tb+(1-t)a)\}^2]dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 \left[\left(tf(b) + m_1(1-t)f\left(\frac{a}{m_1}\right)\right)^2 + \left(tg(b) + m_2(1-t)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{3}f^2(b)+\frac{1}{3}m_1^2f^2\left(\frac{a}{m_1}\right)+\frac{1}{3}m_1f(b)f\left(\frac{a}{m_1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}g^2(b)+\frac{1}{3}m_2^2g^2\left(\frac{a}{m_2}\right)+\frac{1}{3}m_2g(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\right]$$

$$=\frac{(b-a)}{6}\left[\left(f^2(b)+g^2(b)\right)+m_1f(b)f\left(\frac{a}{m_1}\right)\right.$$

$$\left.+m_2g(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right)+m_1^2f^2\left(\frac{a}{m_1}\right)+m_2^2g^2\left(\frac{a}{m_2}\right)\right] \tag{4.6}$$

yazılır. (4.5) ve (4.6) eşitsizlikleri yeniden yazılırsa (4.1)'deki istenilen eşitsizlik elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

4.6. (α, m) −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 4.6.1. I, $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde açık reel bir aralık, $a,b\in I$, $0\le a<b<\infty$ ve $f: I\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\alpha, m\in(0,1]$, $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde (α,m) −konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le(b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+\alpha m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dur.

İspat: İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1|f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde (α,m) −konveks fonksiyon olduğundan, $t\in[0,1]$ ve $\alpha,m\in(0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^\alpha |f'(a)|^q + m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^1\int_0^1\left(t^\alpha|f'(a)|^q+m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds = \int_0^1\left[\int_0^s (s-t)^p dt + \int_s^1 (t-s)^p dt\right]ds = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1\left(t^\alpha|f'(a)|^q+m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds = \frac{|f'(a)|^q+\alpha m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{\alpha+1}$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+\alpha m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6.1 Teorem 4.6.1'de $\alpha=1$ seçilirse, Teorem 4.6.1'deki eşitsizlik Teorem 4.5.1'deki eşitsizliğe indirgenir. Eğer $\alpha=m=1$ seçilirse bu durumda da Teorem 4.6.1'deki eşitsizlik Teorem 3.3.5'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.6.2. I, $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde açık reel bir aralık, $a,b\in I$, $0\leq a<b<\infty$ ve $f\colon I\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\alpha,m\in(0,1]$ ve $q\geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde (α,m) −konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{3}\left(\frac{3(\alpha^2+3\alpha+4)|f'(a)|^q+m(2\alpha^3+9\alpha^2+13\alpha)\left|f'(\frac{b}{m})\right|^q}{2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dur.

İspat: İki katlı integraller için power mean eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1|f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t||f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

bulunur. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $(\alpha,m)-$konveks fonksiyon olduğundan, $t\in[0,1]$ ve $\alpha,m\in(0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^\alpha|f'(a)|^q + m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

dır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|\left(t^\alpha|f'(a)|^q + m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds = \frac{1}{3}$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|\left(t^\alpha|f'(a)|^q + m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dtds$$

$$= \frac{3(\alpha^2+3\alpha+4)|f'(a)|^q + m(2\alpha^3+9\alpha^2+13\alpha)\left|f'(\frac{b}{m})\right|^q}{6(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{3}\left(\frac{3(\alpha^2+3\alpha+4)|f'(a)|^q+m(2\alpha^3+9\alpha^2+13\alpha)\left|f'(\frac{b}{m})\right|^q}{2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6.2. Teorem 4.6.2'de $\alpha = 1$ seçilirse, Teorem 4.6.2'deki eşitsizlik Teorem 4.5.2'deki eşitsizliğe indirgenir. Eğer $\alpha = m = 1$ seçilirse bu durumda da Teorem 4.6.2'deki eşitsizlik Teorem 3.3.6'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.6.3. $f, g: [0,\infty) \to [0,\infty)$ iki fonksiyon, $0 \leq a < b < \infty$ ve $fg \in L^1([a,b])$ olsun. $\alpha_1, m_1, \alpha_2, m_2 \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığında f, (α_1, m_1) −konveks fonksiyon ve g de (α_2, m_2) −konveks fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq min\{Z_1, Z_2\} \tag{4.7}$$

olur. Burada

$$Z_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\alpha_1+1}f^2(a) + \frac{1}{(2\alpha_2+1)}g^2(a)\right.$$

$$+\frac{2\alpha_1}{(\alpha_1+1)(2\alpha_1+1)}m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right)$$

$$+\frac{2\alpha_2}{(\alpha_2+1)(2\alpha_2+1)}m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right)$$

$$+\frac{2\alpha_1^2}{(\alpha_1+1)(2\alpha_1+1)}m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right)$$

$$\left.+\frac{2\alpha_2^2}{(\alpha_2+1)(2\alpha_2+1)}m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]$$

ve

$$Z_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\alpha_1 + 1} f^2(b) + \frac{1}{(2\alpha_2 + 1)} g^2(b)\right.$$

$$+ \frac{2\alpha_1}{(\alpha_1 + 1)(2\alpha_1 + 1)} m_1 f(b) f\left(\frac{a}{m_1}\right)$$

$$+ \frac{2\alpha_2}{(\alpha_2 + 1)(2\alpha_2 + 1)} m_2 g(b) g\left(\frac{a}{m_2}\right)$$

$$+ \frac{2\alpha_1^2}{(\alpha_1 + 1)(2\alpha_1 + 1)} m_1^2 f^2\left(\frac{a}{m_1}\right)$$

$$\left.+ \frac{2\alpha_2^2}{(\alpha_2 + 1)(2\alpha_2 + 1)} m_2^2 g^2\left(\frac{a}{m_2}\right)\right]$$

dir.

İspat: f , $(\alpha_1, m_1) -$ konveks fonksiyon ve g , $(\alpha_2, m_2) -$ konveks fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^{\alpha_1} f(a) + m_1(1 - t^{\alpha_1}) f\left(\frac{b}{m_1}\right) \tag{4.8}$$

ve

$$g(ta + (1-t)b) \leq t^{\alpha_2} g(a) + m_2(1 - t^{\alpha_2}) g\left(\frac{b}{m_2}\right) \tag{4.9}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b)dt \tag{4.10}$$

eşitliğini göstermek kolaydır.

(4.10) eşitliğinin sağ tarafında (4.8), (4.9) ve $cd \leq \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$ $(c, d \geq 0)$ eşitsizliklerini kullanıp değişken değişikliği yapılırsa

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 [\{f(ta+(1-t)b)\}^2 + \{g(ta+(1-t)b)\}^2]dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 \left[\left(t^{\alpha_1} f(a) + m_1(1-t^{\alpha_1}) f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(t^{\alpha_2} g(a) + m_2(1-t^{\alpha_2}) g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right)^2\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{2\alpha_1+1} f^2(a) + \frac{1}{(2\alpha_2+1)} g^2(a)\right.$$

$$+ \frac{2\alpha_1}{(\alpha_1+1)(2\alpha_1+1)} m_1 f(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right)$$

$$+ \frac{2\alpha_2}{(\alpha_2+1)(2\alpha_2+1)} m_2 g(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right)$$

$$+ \frac{2\alpha_1^2}{(\alpha_1+1)(2\alpha_1+1)} m_1^2 f^2\left(\frac{b}{m_1}\right)$$

$$\left. + \frac{2\alpha_2^2}{(\alpha_2+1)(2\alpha_2+1)} m_2^2 g^2\left(\frac{b}{m_2}\right)\right] \tag{4.11}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 [\{f(tb+(1-t)a)\}^2 + \{g(tb+(1-t)a)\}^2]dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\int_0^1 \left[\left(t^{\alpha_1} f(b) + m_1(1-t^{\alpha_1}) f\left(\frac{a}{m_1}\right)\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(t^{\alpha_2} g(b) + m_2(1-t^{\alpha_2}) g\left(\frac{a}{m_2}\right)\right)^2\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{2\alpha_1+1}f^2(b) + \frac{1}{(2\alpha_2+1)}g^2(b)\right.$$

$$+\frac{2\alpha_1}{(\alpha_1+1)(2\alpha_1+1)}m_1 f(b) f\left(\frac{a}{m_1}\right)$$

$$+\frac{2\alpha_2}{(\alpha_2+1)(2\alpha_2+1)}m_2 g(b) g\left(\frac{a}{m_2}\right)$$

$$+\frac{2\alpha_1^2}{(\alpha_1+1)(2\alpha_1+1)}m_1^2 f^2\left(\frac{a}{m_1}\right)$$

$$\left.+\frac{2\alpha_2^2}{(\alpha_2+1)(2\alpha_2+1)}m_2^2 g^2\left(\frac{a}{m_2}\right)\right] \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.12) eşitsizlikleri yardımıyla (4.7)'deki istenilen eşitsizlik elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6.3. Teorem 4.6.3'de $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ seçilirse (4.1)'deki eşitsizlik elde edilir.

4.7. log −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 4.7.1. $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ve $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde log −konveks fonksiyon ise L pozitif reel sayıların logaritmik ortalaması olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} [L(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{1/q}$$

olur.

İspat: İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde log $-$konveks fonksiyon olduğundan, $t\in[0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq |f'(a)|^{qt}|f'(b)|^{q-qt}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1 (|f'(a)|^{qt}|f'(b)|^{q-qt})dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$=(b-a)\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left\{|f'(b)|^q\int_0^1\left[\frac{|f'(a)|^q}{|f'(b)|^q}\right]^t dt\right\}ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds=\int_0^1\left[\int_0^s (s-t)^p dt+\int_s^1 (t-s)^p dt\right]ds=\frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

ve

$$\int_0^1 \left\{ |f'(b)|^q \int_0^1 \left[\frac{|f'(a)|^q}{|f'(b)|^q}\right]^t dt \right\} ds = L(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} [L(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{1/q}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.7.2. $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to (0, \infty)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q \geq 1$ ve $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde log $-$konveks fonksiyon ise L pozitif reel sayıların logaritmik ortalaması olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{3^{1-\frac{1}{q}}}\left[\frac{L(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{2L(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q) - (|f'(a)|^q + |f'(b)|^q)}{[ln(|f'(a)|^q) - ln(|f'(b)|^q)]^2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

dır.

İspat: İki katlı integraller için power mean eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t||f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde log $-$konveks fonksiyon olduğundan, $t\in[0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq |f'(a)|^{qt}|f'(b)|^{q-qt}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|(|f'(a)|^{qt}|f'(b)|^{q-qt})dtds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds=\frac{1}{3}$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|(|f'(a)|^{qt}|f'(b)|^{q-qt})dtds$$

$$=\frac{L(|f'(a)|^q,|f'(b)|^q)}{2}+\frac{2L(|f'(a)|^q,|f'(b)|^q)-(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)}{[ln(|f'(a)|^q)-ln(|f'(b)|^q)]^2}$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{3^{1-\frac{1}{q}}}\left[\frac{L(|f'(a)|^q,|f'(b)|^q)}{2}+\frac{2L(|f'(a)|^q,|f'(b)|^q)-(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)}{[ln(|f'(a)|^q)-ln(|f'(b)|^q)]^2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.7.3. $a, b \in I$, $a < b$ ve $i = 1,2,3, \dots, n$ olmak üzere $f_i: I \subset \mathbb{R} \to (0, \infty)$ $log -$ konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda L pozitif sayıların logaritmik ortalamasını göstermek üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{i=1}^{n} f_i(x)dx \leq L\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(a), \prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right) \tag{4.13}$$

olur. f_i fonksiyonları pozitif log −konkav fonksiyonlar ise bu durumda (4.13) eşitsizliği yön değiştirir.

İspat: $i = 1,2,3, \dots, n$ olmak üzere f_i fonksiyonları $log -$ konveks fonksiyonlar olduğundan her $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f_i(ta + (1-t)b) \leq [f_i(a)]^t [f_i(b)]^{(1-t)} \tag{4.14}$$

yazılabilir. (4.14) eşitsizliğinde $i = 1,2,3, \dots, n$ için

$$f_1(ta + (1-t)b) \leq [f_1(a)]^t [f_1(b)]^{(1-t)}$$

$$f_2(ta + (1-t)b) \leq [f_2(a)]^t [f_2(b)]^{(1-t)}$$

$$f_3(ta + (1-t)b) \leq [f_3(a)]^t [f_3(b)]^{(1-t)}$$

$$\begin{matrix} . & & . \\ . & & . \\ . & & . \end{matrix}$$

$$f_n(ta + (1-t)b) \leq [f_n(a)]^t [f_n(b)]^{(1-t)}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa, her $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} f_i(ta + (1-t)b) &\leq \left[\prod_{i=1}^{n} f_i(a)\right]^t \left[\prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right]^{(1-t)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} f_i(b) \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{f_i(a)}{f_i(b)}\right]^t \end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitsizliğinin $[0,1]$ üzerinden t'ye göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 \prod_{i=1}^{n} f_i(ta+(1-t)b)\,dt \le \prod_{i=1}^{n} f_i(b) \int_0^1 \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{f_i(a)}{f_i(b)}\right]^t dt$$

olur. Burada

$$\int_0^1 \prod_{i=1}^{n} f_i(ta+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{i=1}^{n} f_i(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{f_i(a)}{f_i(b)}\right]^t dt = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} f_i(b)} L\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(a), \prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Sonuç 4.7.1. Teorem 4.7.3'de $n=1$ alınırsa, (3.6) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.7.4. $a,b \in I$, $a<b$ ve $i=1,2,3,\dots,n$ olmak üzere $f_i\colon I \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ $log-$ konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda L pozitif sayıların logaritmik ortalamasını göstermek üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{i=1}^{n} f_i(t)dt \le \min_{x\in[a,b]} \frac{1}{(b-a)}\left\{(x-a)L\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(a), \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)\right.$$
$$\left. +(b-x)L\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x), \prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right)\right\} \tag{4.16}$$

dir. Eğer $i=1,2,3,\dots,n$ için f_i fonksiyonları pozitif $log-$konkav fonksiyonlar ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{i=1}^{n} f_i(t)dt \ge \max_{x\in[a,b]} \frac{1}{(b-a)}\left\{(x-a)L\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(a), \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)\right.$$
$$\left. +(b-x)L\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x), \prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right)\right\} \tag{4.17}$$

olur.

İspat: $i = 1,2,3,\dots,n$ olmak üzere f_i fonksiyonları log −konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda Teorem 4.7.3'den her $x \in [a,b]$ için

$$\int_a^b \prod_{i=1}^n f_i(t)dt$$

$$= \int_a^x \prod_{i=1}^n f_i(t)dt + \int_x^b \prod_{i=1}^n f_i(t)dt$$

$$\leq (x-a)L\left(\prod_{i=1}^n f_i(a), \prod_{i=1}^n f_i(x)\right) + (b-x)L\left(\prod_{i=1}^n f_i(x), \prod_{i=1}^n f_i(b)\right)$$

yazılır. Böylece (4.16)'daki istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Benzer şekilde, $i = 1,2,3,\dots,n$ olmak üzere f_i fonksiyonları log −konkav fonksiyonlar olsun. Bu durumda Teorem 4.7.3'den her $x \in [a,b]$ için

$$\int_a^b \prod_{i=1}^n f_i(t)dt$$

$$= \int_a^x \prod_{i=1}^n f_i(t)dt + \int_x^b \prod_{i=1}^n f_i(t)dt$$

$$\geq (x-a)L\left(\prod_{i=1}^n f_i(a), \prod_{i=1}^n f_i(x)\right) + (b-x)L\left(\prod_{i=1}^n f_i(x), \prod_{i=1}^n f_i(b)\right)$$

yazılır. Böylece (4.17)'deki istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Sonuç 4.7.2. Teorem 4.7.4'de $n = 1$ alınırsa, Teorem 3.3.8'deki eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.7.5. $f, g: I \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ log-konveks fonksiyonlar olsun. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)f(a+b-x)+g(x)g(a+b-x)]dx\right\}$$

$$\leq\frac{f(a)f(b)+g(a)g(b)}{2} \tag{4.18}$$

dır.

İspat: $t\in[0,1]$ için

$$\frac{a+b}{2}=\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2} \tag{4.19}$$

eşitliği yazılabilir. $cd\leq\frac{1}{2}[c^2+d^2]$ $(c,d\geq 0)$ temel eşitsizliğini ve (4.19) eşitliğini kullanarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+g^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f^2\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\right.$$

$$\left.+g^2\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\left\{\left[(f(ta+(1-t)b))^{1/2}\right]^2\left[(f(1-t)a+tb))^{1/2}\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[(g(ta+(1-t)b))^{1/2}\right]^2\left[(g((1-t)a+tb))^{1/2}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)f(1-t)a+tb)$$

$$+g(ta+(1-t)b)g(1-t)a+tb)] \tag{4.20}$$

bulunur. f ve g, log −konveks fonksiyonlar olduğundan $a,b\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)f(1-t)a+tb)+g(ta+(1-t)b)g(1-t)a+tb)]$$

$$\leq \frac{1}{2}\{[f(a)]^t[f(b)]^{(1-t)}[f(a)]^{(1-t)}[f(b)]^t+[g(a)]^t[g(b)]^{(1-t)}[g(a)]^{(1-t)}[g(b)]^t\}$$

$$=\frac{f(a)f(b)+g(a)g(b)}{2} \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitsizliği (4.20)'de yerine yazılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)f(1-t)a+tb)$$

$$+g(ta+(1-t)b)g(1-t)a+tb)]$$

$$\leq \frac{f(a)f(b)+g(a)g(b)}{2} \tag{4.22}$$

olur. (4.22) eşitsizliklerinin her tarafının t'ye göre $[0,1]$ üzerinden integrali alınırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)f(a+b-x)+g(x)g(a+b-x)]dx\right] \tag{4.23}$$

ve

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)f(a+b-x)+g(x)g(a+b-x)]dx\right]$$

$$\leq \frac{f(a)f(b)+g(a)g(b)}{2} \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.23) ve (4.24) eşitsizlikleri birleştirilerek (4.18)'deki istenilen eşitsizlik bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.7.6. $f, g: I \subset \mathbb{R} \to (0,\infty)$ iki log −konveks fonksiyon $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu takdirde L, pozitif reel sayıların logaritmik ortalamasını göstermek üzere

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b [f^2(x) + g^2(x)]dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}L\big(f(a), f(b)\big) + \frac{g(a)+g(b)}{2}L(g(a), g(b)) \tag{4.25}$$

dir.

İspat: Her $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için (4.22) eşitsizliğinden

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b)f(1-t)a + tb)$$

$$+g(ta + (1-t)b)g(1-t)a + tb)]$$

yazılarak bu eşitsizliğin sağ tarafında $cd \leq \frac{1}{2}[c^2 + d^2]$ $(c, d \geq 0)$ temel eşitsizliği kullanılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{4}[f^2(ta + (1-t)b) + f^2(1-t)a + tb)$$

$$+g^2(ta + (1-t)b) + g^2(1-t)a + tb)] \tag{4.26}$$

elde edilir. f, g fonksiyonları log −konveks olduğundan

$$[f^2(ta + (1-t)b) + f^2(1-t)a + tb)$$

$$+g^2(ta + (1-t)b) + g^2(1-t)a + tb)]$$

$$\leq \big\{[f(a)]^{2t}[f(b)]^{(2-2t)} + [f(a)]^{(2-2t)}[f(b)]^{2t}$$

$$+[g(a)]^{2t}[g(b)]^{(2-2t)} + [g(a)]^{(2-2t)}[g(b)]^{2t}\big\}$$

$$= \left[f^2(b)\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{2t} + f^2(a)\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{2t}\right.$$

$$\left. +g^2(b)\left[\frac{g(a)}{g(b)}\right]^{2t} + g^2(a)\left[\frac{g(b)}{g(a)}\right]^{2t}\right] \tag{4.27}$$

yazılır. (4.26) ve (4.27) eşitsizliklerinin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t'ye göre integrali alınırsa

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b [f^2(x)+g^2(x)]dx \tag{4.28}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b [f^2(x)+g^2(x)]dx$$

$$\le \left(f^2(b)\int_0^1 \left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{2t} dt + f^2(a)\int_0^1 \left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{2t} dt\right.$$

$$\left. +g^2(b)\int_0^1 \left[\frac{g(a)}{g(b)}\right]^{2t} dt + g^2(a)\int_0^1 \left[\frac{g(b)}{g(a)}\right]^{2t} dt\right)$$

$$= \left(f^2(b)\left[\frac{\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{2t}}{2ln\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)}\right]_0^1 + f^2(a)\left[\frac{\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right]^{2t}}{2ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}\right]_0^1\right.$$

$$\left. + g^2(b)\left[\frac{\left[\frac{g(a)}{g(b)}\right]^{2t}}{2ln\left(\frac{g(a)}{g(b)}\right)}\right]_0^1 + g^2(a)\left[\frac{\left[\frac{g(b)}{g(a)}\right]^{2t}}{2ln\left(\frac{g(b)}{g(a)}\right)}\right]_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f^2(a)-f^2(b)}{2[lnf(a)-lnf(b)]} + \frac{f^2(b)-f^2(a)}{2[lnf(b)-lnf(a)]}\right.$$

$$\left. + \frac{g^2(a)-g^2(b)}{2\left[ln\big(g(a)\big)-ln\big(g(b)\big)\right]} + \frac{g^2(b)-g^2(a)}{2\left[ln\big(g(b)\big)-ln\big(g(a)\big)\right]}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}L(f(a),f(b)) + \frac{f(a)+f(b)}{2}L(f(b),f(a))\right.$$

$$\left. + \frac{g(a)+g(b)}{2}L(g(a),g(b)) + \frac{g(a)+g(b)}{2}L(g(b),g(a))\right)$$

$$= \left\{\frac{f(a)+f(b)}{2}L(f(a),f(b)) + \frac{g(a)+g(b)}{2}L(g(a),g(b))\right\} \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.28) ve (4.29) eşitsizlikleri birleştirilerek (4.25)'deki istenilen eşitsizlik bulunur ve böylece ispat tamamlanır.

4.8. $Quasi$ −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 4.8.1. $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f : I^{\circ} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $quasi -$ konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} [max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}]^{1/q}$$

dır.

İspat: İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $quasi$ $-$konveks fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1 \int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_0^1 max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

olur. Burada

$$\int_0^1 \int_0^1 |s-t|^p dtds = \int_0^1 \left[\int_0^s (s-t)^p dt + \int_s^1 (t-s)^p dt\right] ds = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

ve

$$\int_0^1 \int_0^1 max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}dtds = max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} [max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}]^{1/q}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.8.2. $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda $q \geq 1$ ve $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $quasi$ −konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{3}\left(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır.

İspat: İki katlı integraller için power mean eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t||f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $quasi$ −konveks fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})dtds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada

$$\int_0^1 \int_0^1 |s-t| dtds = \frac{1}{3}$$

ve

$$\int_0^1 \int_0^1 |s-t| (max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}) dtds = \frac{max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}}{3}$$

olduğundan

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)}{3} (max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4.8.1. Özel ortalamalar için uygulamalar

Önerme 4.8.1.1. $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ olsun. Bu durumda her $q > 1$ için

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq n(b-a) \left(\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[max\left\{ a^{q(n-1)}, b^{q(n-1)} \right\} \right]^{1/q}$$

olur.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Teorem 4.8.1'e $f(x) = x^n$ $quasi$ $-$konveks dönüşümü uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.8.1.2. $q > 1$ ve $0 < a < b$ olsun. Bu durumda

$$|L^{-1}(a,b) - A(a^{-1}, b^{-1})| \leq (b-a) \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} [max\{a^{-2q}, b^{-2q}\}]^{1/q}$$

olur.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Teorem 4.8.1'de $f(x) = \frac{1}{x}$ $quasi$ −konveks dönüşümü uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.8.1.3. $q \geq 1$, $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ olsun. Bu takdirde,

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq \frac{n(b-a)}{3}\left[max\{a^{q(n-1)}, b^{q(n-1)}\}\right]^{1/q}$$

dir.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Teorem 4.8.2'de $f(x) = x^n$ $quasi$ −konveks dönüşümü uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.8.1.4. $q \geq 1$ ve $0 < a < b$ olsun. Bu durumda

$$|L^{-1}(a,b) - A(a^{-1}, b^{-1})| \leq \frac{(b-a)}{3}[max\{a^{-2q}, b^{-2q}\}]^{1/q}$$

dir.

İspat: $x \in [a,b]$ olmak üzere Teorem 4.8.2'de $f(x) = \frac{1}{x}$ $quasi$ −konveks dönüşümü uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir.

4.9. s −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 4.9.1. $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $s_1 \in (0,1]$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s_1 −konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s_1+1}\right]^{1/q}$$

dir.

İspat: İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s_1 −konveks fonksiyon olduğundan, $t\in[0,1]$ ve $s_1\in(0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^{s_1}|f'(a)|^q+(1-t)^{s_1}|f'(b)|^q$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1 (t^{s_1}|f'(a)|^q+(1-t)^{s_1}|f'(b)|^q)dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds=\int_0^1\left[\int_0^s (s-t)^p dt+\int_s^1 (t-s)^p dt\right]ds=\frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1 (t^{s_1}|f'(a)|^q+(1-t)^{s_1}|f'(b)|^q)dtds=\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s_1+1}$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s_1+1}\right]^{1/q}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.9.1. Teorem 4.9.1'de $s_1=1$ seçilirse, Teorem 4.9.1'deki eşitsizlik Teorem 3.3.5'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.9.2. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $f:I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q\geq 1$ ve $s_1\in(0,1]$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s_1 −konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{3^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{s_1^2+3s_1+4}{2(s_1+1)(s_1+2)(s_1+3)}\right)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

olur.

İspat: İki katlı integraller için power mean eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1|f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t||f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir.

$|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s_1 $-$konveks fonksiyon olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $s_1 \in (0,1]$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^{s_1}|f'(a)|^q + (1-t)^{s_1}|f'(b)|^q$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|(t^{s_1}|f'(a)|^q + (1-t)^{s_1}|f'(b)|^q)dtds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|dtds = \frac{1}{3}$$

ve

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|(t^{s_1}|f'(a)|^q + (1-t)^{s_1}|f'(b)|^q)dtds$$

$$= \frac{s_1^2+3s_1+4}{2(s_1+1)(s_1+2)(s_1+3)}(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q)$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{s_1^2+3s_1+4}{2(s_1+1)(s_1+2)(s_1+3)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.9.2. Teorem 4.9.2'de $s_1 = 1$ seçilirse, Teorem 4.9.2'deki eşitsizlik Teorem 3.3.6'daki eşitsizliğe indirgenir.

4.9.1. Özel ortalamalar için uygulamalar

Önerme 4.9.1.1. $0 < a < b$ ve $0 < s_1 < 1$ olsun. Bu durumda her $q > 1$ için

$$\left|A(a^{s_1},b^{s_1})-L_{s_1}^{s_1}(a,b)\right| \leq \frac{2s_1(b-a)}{(s_1+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[A\left(a^{q(s_1-1)},b^{q(s_1-1)}\right)\right]^{1/q}$$

olur.

İspat: Teorem 4.9.1'de $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=x^{s_1}$ ikinci anlamda s_1-konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.9.1.2. $0 < a < b$ ve $0 < s_1 < 1$ olsun. Bu takdirde her $q \geq 1$ için

$$\left|A(a^{s_1},b^{s_1})-L_{s_1}^{s_1}(a,b)\right|$$

$$\leq s_1\frac{(b-a)}{3^{1-\frac{1}{q}}}\left(\frac{s_1^2+3s_1+4}{(s_1+1)(s_1+2)(s_1+3)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[A\left(a^{q(s_1-1)},b^{q(s_1-1)}\right)\right]^{1/q}$$

dır.

İspat: Teorem 4.9.2'de $f:[0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^{s_1}$ ikinci anlamda $s_1 -$ konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

4.10. r −konveks ve h −konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 4.10.1. $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde pozitif $r -$konveks fonksiyon ise $L_r(.,.)$, pozitif reel sayıların r. kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalamasını göstermek üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \left[L_r(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)\right]^{1/q}$$

dir.

İspat: İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b) - f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left. + \int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

elde edilir.

$|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde r −konveks fonksiyon olduğundan

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq \begin{cases} (t|f'(a)|^{qr}+(1-t)|f'(b)|^{qr})^{\frac{1}{r}} & r\neq 0 \\ |f'(a)|^{qt}|f'(b)|^{q-qt} & r=0 \end{cases} \tag{4.30}$$

dir. Dolayısıyla, $r=0$ için Teorem 4.7.1'deki durum ortaya çıkar. $r\neq 0,-1$ olsun. Bu durumda $|f'(a)|^q \neq |f'(b)|^q$ için (4.30) dan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1 (t|f'(a)|^{qr}+(1-t)|f'(b)|^{qr})^{\frac{1}{r}} dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$=(b-a)\left[\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\int_{|f'(a)|^{qr}}^{|f'(b)|^{qr}}\frac{(u)^{\frac{1}{r}}}{|f'(b)|^{qr}-|f'(a)|^{qr}}du\right]ds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$=(b-a)\left[\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{r}{r+1}\frac{|f'(b)|^{q(r+1)}-|f'(a)|^{q(r+1)}}{|f'(b)|^{qr}-|f'(a)|^{qr}}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$=(b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}[L_r(|f'(a)|^q,|f'(b)|^q)]^{1/q}$$

yazılır. $|f'(a)|^q=|f'(b)|^q$ için ise benzer şekilde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1 (t|f'(a)|^{qr}+(1-t)|f'(b)|^{qr})^{\frac{1}{r}} dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$= (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}} (|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$= (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} [L_r(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{1/q}$$

elde edilir. Son olarak, $r = -1$ olsun. Bu durumda $|f'(a)|^q \neq |f'(b)|^q$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1\int_0^1 (t|f'(a)|^{-q} + (1-t)|f'(b)|^{-q})^{-1} dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$= (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{\frac{1}{|f'(b)|^q} - \frac{1}{|f'(a)|^q}} \int_{\frac{1}{|f'(a)|^q}}^{\frac{1}{|f'(b)|^q}} u^{-1} du\right] ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[|f'(a)|^q |f'(b)|^q \frac{ln|f'(a)|^q - ln|f'(b)|^q}{|f'(a)|^q - |f'(b)|^q}\right] ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} [L_{-1}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{1/q}$$

bulunur. $|f'(a)|^q = |f'(b)|^q$ için ise benzer şekilde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1\int_0^1 (t|f'(a)|^{qr} + (1-t)|f'(b)|^{qr})^{\frac{1}{r}} dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$= (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}(|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$= (b-a)\left(\frac{2}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}[L_{-1}(|f'(a)|^q,|f'(a)|^q)]^{1/q}$$

elde edilir. Dolayısıyla her durum için istenilen sonuç elde edildiğinden ispat tamamlanır.

Teorem 4.10.2. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında $|f'|^q\in SX(h,I)$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq 2(b-a)\left(\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{2(b-a)}{(p+1)^{\frac{2}{p}}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

İspat: İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak Lemma 3.3.2'den

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)||s-t|dtds\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 |f'(sa+(1-s)b)||s-t|dtds\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q \in SX(h,I)$ olduğundan, $t \in (0,1)$ için

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq h(t)|f'(a)|^q + h(1-t)|f'(b)|^q$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\int_0^1 h(t)|f'(a)|^q + h(1-t)|f'(b)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$= (b-a)\left(\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left[|f'(a)|^q\int_0^1 h(t)dt + |f'(b)|^q\int_0^1 h(1-t)dt\right]ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Burada

$$\int_0^1\int_0^1 |s-t|^p dtds = \int_0^1\left[\int_0^s (s-t)^p dt + \int_s^1 (t-s)^p dt\right]ds = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

ve

$$\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 h(1-t)dt$$

olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= 2(b-a)\left(\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. Ayrıca $p > 1$ için $\frac{1}{(p+1)(p+2)} \leq \frac{1}{(p+1)^2}$ olduğundan

$$2(b-a)\left(\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{2(b-a)}{(p+1)^{\frac{2}{p}}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.10.1. Teorem 4.10.2'de $h(t) = t$ seçilirse, Teorem 4.10.2'deki birinci eşitsizlik Teorem 3.3.5'deki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.10.2. Teorem 4.10.2'de $h(t) = \frac{t}{10}$ seçilirse, Teorem 4.10.2'deki ikinci eşitsizlikteki üst sınır Teorem 3.3.3'deki üst sınırdan ve Teorem 4.10.2'deki birinci eşitsizlikteki üst sınır da Teorem 3.3.5'deki üst sınırdan daha iyi bir üst sınır olur. Ayrıca $a \geq 4$, $a \in N$ olmak üzere $h(t) = \frac{t}{a}$ seçilerek çok daha küçük üst sınırlar elde edilebilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırmanın esasını oluşturan dördüncü bölümde, bazı farklı türden konveks fonksiyonlar için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılarak Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve genelleştirmeler, $log-$konveks fonksiyonlar için Gill et al. tarafından elde edilen eşitsizliklerin genelleştirmeleri ve diğer yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, üçüncü bölümde verilen

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1\int_0^1\{f'(ta+(1-t)b)-f'(sa+(1-s)b)\}(s-t)dtds$$

eşitliğinden, Minkowski, Ters Minkowski ve Young eşitsizlikleri gibi temel eşitsizliklerden faydalanarak dördüncü bölümde elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere benzer yeni eşitsizlikler, genelleştirmeler ya da Jensen tipli eşitsizlikler elde edebilirler.

Dördüncü bölümde ise tanımlanan $E-m-$konvekslik türleri üzerine daha ileri çalışmalar yapılabilir ve bu türden konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard ve Jensen tipli eşitsizlikler elde edilebilir. Ayrıca, $E-m-$konveks fonksiyonlar için $E-$konveks programlamaya benzer şekilde $E-m-$konveks programlama problemi tanımlanabilir ve bu programlama üzerine yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alomari, M., Darus, M. and Kırmacı, U.S., 2010. Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means, Computers and Mathematics with Applications, 59(1), 225-232.

Anton, H., 1994. Elementary Linear Algebra, Jhon Wiley & Sons, Inc.

Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.

Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Bakula, M.K., Özdemir, M.E. and Pečarić, J., M., 2008. Hadamard type inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 9(4).

Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Chen, X., 2002. Some properties of semi$-E-$convex functions, J. Math. Anal. and Appl., 275, 251-262.

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula, Appl. Math. Lett., 11(5), 91-95.

Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., 1999. The Hadamard's inequality for $s-$convex functions in the second sense, Demonstratio Math. 32(4), 687-696.

Dragomir, S.S. and Mcandrew, A., 2005. Refinements of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 6(5), Article 140.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs. [ONLINE : http://ajmaa.org/RGMIA/monographs/hermite_hadamard.html].

Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.

Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 1997. Hadamard's inequality for $r-$convex functions, J. Math. Anal. and Appl., 215, 461-470.

Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkii, Vycislitel. Mat. İ. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskova, 138-142.

Grace, J.S. and Thangavelu, P., 2009. Properties of $E-$convex sets, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 25(1), 1-7.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on $s-$convex functions, Aequationes Math., 48, 100-111.

Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.

Kırmacı, U.S., Bakula, M.K., Özdemir, M.E. and Pečarić, J., 2007. Hadamard-type inequalities for s −convex functions, Appl. Math. Comput., 193, 26-35.

Miheşan, V. G., 1993. A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca (Romania).

Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Niculescu, C. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media, Inc.

Özdemir, M.E., Avcı, M. and Set, E., 2010. On some inequalities of Hermite-Hadamard type via m −convexity, Appl. Math. Lett., 23(9), 1065-1070.

Pachpatte, B.G., 2003. On some inequalities for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6, Supplement, Article 1.
[ONLINE: http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/v6(E).asp].

Pachpatte, B.G., 2005. Mathematical Inequalities, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands.

Pachpatte, B.G., 2005. A note on Hadamard type integral inequalities involving several log −convex functions, Tamkang Journal of Mathematics, 36(1), 43-47.

Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 2000. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, Appl. Math. Lett., 13(2), 51-55.

Pearce, C.E.M., Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions, Academic Press, New York.

Sarıkaya, M.Z., Sağlam, A. and Yıldırım, H., 2008. On some Hadamard-type inequalities for h −convex functions, Journal of Mathematical Inequalities, 2(3), 335-341.

Sarıkaya, M.Z., Set, E. and Özdemir, M.E., 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard's type, submitted.

Set, E., Özdemir, M.E. and Dragomir, S.S., 2010. On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2010, Article ID 148102, 9 pages.

Syau, Y. and Lee, E.S., 2005. Some properties of E-convex functions, Applied Mathematics Letters, 18, 1074-1080.

Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim., Cluj-Napoca (Romania), 329-338.

Toader, G., 1988. On a generalization of the convexity, Mathematica, 30 (53), 83-87.

Varošanec, S., 2007. On h −convexity, J. Math. Anal. and Appl., 326, 303-311.

Yang, X.M., 2001. On $E-$ convex sets, $E-$ convex functions and $E-$ convex programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 109 (3), 699-704.

Youness, E.A., 1999. $E-$ convex sets, $E-$ convex functions and $E-$ convex programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 102 (2), 439-450.

Youness, E.A. and Emam T., 2005. Strongly E −convex sets and strongly E-convex functions, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 8 (1), 107-117.

Youness, E.A. and Emam T., 2005. Semi strongly E −convex functions, Journal of Mathematics and Statistics, 1 (1), 51-57.

Youness, E.A. and Emam T., 2008. Characterization of efficient solutions for multi-objective optimization problems involving semi-strong and generalized semi-strong E −convexity, Acta Mathematica Scientia, 28B (1), 7-16.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Ordu'nun Gölköy ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Gölköy'de, orta ve lise öğrenimini Ordu'da tamamladı. 1999 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2004 yılında birinci olarak mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalında doktora öğrenimine başladı. 2004-2006 yılları arasında Batman ili Kozluk ilçesinde ve 2006-2010 yılları arasında Erzurum ilinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Halen Erzurum Palandöken Güzel Sanatlar ve Spor Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.