8435

FOURIER SERİLERİNİN TOPLANABİLİRLİĞİ HAKKINDA

Himmet CAN

Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü'ne
Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi
olarak sunulmuştur

Aralık-1989

Erciyes Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

23./.1../1990

Başkan:..Prof. Dr. Ekrem Özdemir..

Üye:..Doç. Dr. Hüseyin BOR..

Üye:..Doç. Dr. M. Ali Sarıgöl..

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

15../12./1990

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Bekir Sami Yılbaş

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç.Dr.M.Ali Sarıgöl'e ve ayrıca yardımlarından dolayı bölümümüzün diğer hocalarına teşekkür ederim.

Himmet CAN

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı Himmet CAN
Baba Adı İsmail
Ana Adı Nazlı
Doğum Yeri ve Yılı: Burdur-03.01.1964

İlk öğrenimini Aziziye Köyü'nde, Orta ve Lise öğrenimini Isparta Gönen Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 1981 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı ve 1985 yılında mezun oldu. 1986 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nın açmış olduğu öğretmenlik imtihanını kazanarak Elazığ'da bir yıl öğretmenlik yaptı. 1987 yılında Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi imtihanını kazanarak "Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi" Anabilim Dalı'na atandı. Halen bu görevi yürütmektedir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ

J.B.J.Fourier, daha sonraları kendi adıyla anılacak olan "Fourier Serileri" hakkındaki ilk makalesini 1807 de ve tatbikatını da içine alan katı cisimlerde ısının iletkenliği hakkındaki ünlü eserini de 1811 de yazmıştır. Daha sonraları, 1870 lerde G.Cantor, 1874 lerde P. du Bois-Reymond Fourier serilerini değişik yönleriyle incelemişlerdir. Ne yazık ki, bugüne kadar Lebesgue anlamında integrallenebilen periyodik bir f fonksiyonunun Fourier serisinin yakınsak ve toplamının f(x) olması için gerek ve yeter şartların ne olduğu bilinmemektedir. Fakat, L.Fejér 1904 de aritmetik ortalama fikrini Fourier serilerine uygulayarak söz konusu serilere yeni bir manâ kazandırmış ve böylece çok geniş bir uygulama sahası da açılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, Fourier serilerinin yakınsaklık problemini değil, toplanabilme problemini değişik şartlar altında incelemektir.

B İ R İ N C İ   B Ö L Ü M

1. TRİGONOMETRİK SERİLER VE FOURIER SERİLERİ

Bu bölümde, üçüncü bölümdeki çalışmalarımızda faydalanacağımız temel tanım, teorem ve kavramları vereceğiz. Bu bölümdeki çalışmamıza,ilk olarak periyodik fonksiyon kavramıyla başlayalım:

Her x için $f(x+\lambda)=f(x)$ olacak şekilde bir $\lambda>0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna periyodik bir fonksiyon ve λ sayısına da f nin periyodu denir. Bundan başka, eğer $f_1,f_2,\ldots,f_k$ lar her biri λ periyotlu periyodik fonksiyonlar ve c_k lar sabit değerler ise, bu takdirde

$$c_1f_1+c_2f_2+\ldots+c_kf_k$$

fonksiyonu da λ periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

Bilindiği gibi, sinx ve cosx trigonometrik fonksiyonları 2π periyotlu,periyodik fonksiyonlardır. Öyleyse her $\nu\in\mathbb{N}$ için, a_ν ve b_ν ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x$$

fonksiyonu 2π periyotlu, periyodik bir fonksiyondur. Aynı durum, ν nin değişik değerlerine karşılık gelen bu tür birçok ifadelerin toplanmasından meydana gelen her fonksiyon için de geçerlidir. Daha genel olarak, a_ν ve b_ν sabitleri her ν için tanımlı iseler ve eğer

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu x+b_\nu \sin\nu x)$$

serisi her x için yakınsak ise (örneğin Σa_ν ve Σb_ν serilerinin her ikisinin de mutlak yakınsak olması halinde böyledir) bu seri 2π periyotlu bir fonksiyon temsil eder. Dolayısıyla bu seriye sabit bir terim ilave edildiğinde, elde edilen fonksiyon da 2π periyotlu olacaktır. Daha sonra açıklayacağımız sebepten dolayı bu terimi a_0 değil ve fakat $\frac{1}{2}a_0$ almamız daha uygun olacaktır[2]. Artık aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 1.1. x bir reel değişken ve $a_0,a_1,b_1,\ldots$ ler de x den bağımsız katsayılar olmak üzere

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu x+b_\nu \sin\nu x) \tag{1.1}$$

şeklindeki seriye bir trigonometrik seri denir[1]

(1.1) serisinin bütün terimleri 2π periyotlu olduğundan trigonometrik seri çalışmaları için 2π uzunluğundaki bir aralık yeterlidir. Örneğin bu aralık $(0,2\pi)$ veya $(-\pi,\pi)$ olabilir. Şimdi $z=e^{ix}$ birim çemberi üzerinde

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu-ib_\nu)z^\nu \tag{1.2}$$

kuvvet serisini göz önüne alalım. (1.1) serisi, (1.2) nin reel kısımlarından meydana gelen seridir. Diğer taraftan

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \sin\nu x-b_\nu \cos\nu x) \tag{1.3}$$

serisi (sıfır sabit terimiyle) (1.2) nin imaginer kısımlarından meydana gelen seridir ki, bu seriye (1.1) in konjüge serisi denir. Eğer S, (1.1) serisi ise S nin konjügesini $\tilde{S}$ ile göstereceğiz. Ayrıca,

$$T(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos\nu x+b_\nu \sin\nu x)$$

sonlu trigonometrik toplamına n ninci merteben bir trigonometrik polinom denir[1]. (1.1) serisi $[-\pi,\pi]$ aralığında düzgün yakınsak olacak şekilde a_ν ve b_ν katsayıları kolayca seçilebilirler. Örneğin Σa_ν ve Σb_ν serilerinin her ikisinin de mutlak yakınsak olması halinde durum böyledir. Şimdi kabul edelim ki (1.1) serisi $[-\pi,\pi]$ aralığında düzgün yakınsak ve bu serinin bu aralıkta temsil ettiği sürekli fonksiyon f olsun. Yani, her $x\varepsilon[-\pi,\pi]$ için,

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x) \qquad (1.4)$$

olsun. Sağ taraftaki serinin düzgün yakınsak olmasından faydalanarak a_ν ve b_ν katsayılarını bulmaya çalışalım. (1.4) eşitliğinin her iki tarafının $[-\pi,\pi]$ aralığında integralini alalım:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a_0dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)dx,$$

sağ taraftaki seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim integrali alınabilir. Öyleyse,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0\pi+\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)dx=a_0\pi$$

olur. Buradan,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

bulunur.

Şimdi (1.4) eşitliğinin her iki tarafını $\cos\nu x$ ile çarpıp, $[-\pi,\pi]$ aralığında integralini alalım.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\nu x dx=\frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos\nu x dx+\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\nu x\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)]dx$$

bulunur. Diğer taraftan, her ν, $k\varepsilon\mathbb{N}$ için,

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos\nu x\sin kx dx=0, \\[2ex]
\text{(ii)} & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos\nu x\cos kx dx=\begin{cases}0; & k\neq\nu \text{ ise}\\ \pi; & k=\nu \text{ ise}\end{cases} \\[2ex]
\text{(iii)} & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin\nu x\sin kx dx=\begin{cases}0; & k\neq\nu \text{ ise}\\ \pi; & k=\nu \text{ ise}\end{cases}
\end{array}\right\} \qquad (1.5)$$

olduğundan,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x dx = a_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\nu x dx = a_\nu \pi$$

olur.

Böylece,

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\nu x dx \qquad (1.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde (1.4) eşitliğinin her iki yanını $\sin\nu x$ ile çarpıp $[-\pi,\pi]$ aralığında integralini alırsak

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\nu x dx \qquad (1.7)$$

eşitliği elde edilir. İşte (1.6) denkleminin $\nu=0$ için de doğru kalmasını temin için verilen trigonometrik serinin başlangıç terimine $\frac{1}{2}a_0$ şeklini vermek âdet olmuştur. Yukarıdaki hesapladığımız (1.6) ve (1.7) eşitliklerindeki a_ν ve b_ν katsayılarına Fourier katsayıları, denklemlere de Euler-Fourier formülleri denir. Eğer f(x) bir çift fonksiyon ise

$$a_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos\nu x dx, b_\nu = 0,$$

ve eğer f(x) bir tek fonksiyon ise,

$$a_\nu = 0, \quad b_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin\nu x dx$$

olacaktır. Şimdi, daha önce yaptıklarımızın tersine olarak, başlangıçta bir trigonometrik seri değil de, $[-\pi,\pi]$ aralığında integrallenebilen bir f fonksiyonunun verildiğini kabul edelim. Bu takdirde her $\nu \in \mathbb{N}$ için $f(x)\cos\nu x$ ve $f(x)\sin\nu x$ çarpımları da $[-\pi,\pi]$ aralığında integrallenebilirdir. Dolayısıyla (1.6) ve (1.7) formülleri yardımıyla f fonksiyonundan

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \text{ ve } (b_1, b_2, \ldots)$$

gibi sonsuz iki sayı dizisi elde edilir ki, bu dizilerin terimlerine f fonksiyonunun Fourier katsayıları denir[2].

Tanım 1.2. f, $[-\pi,\pi]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve a_ν, b_ν de f den elde edilen Fourier katsayıları olmak üzere

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

trigonometrik serisine f tarafından meydana getirilen yahut f fonksiyonuna ait Fourier serisi denir ve sembolik olarak

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

şeklinde gösterilir[12].

Diğer taraftan f tarafından meydana getirilen Fourier serisi S[f] ile ve S[f] nin konjüge serisi $\tilde{S}[f]$ ile gösterilecektir[1].

Şimdi S[f] ve $\tilde{S}[f]$ nin kısmi toplamları için gerekli olan formülleri elde edelim. Yalnız, buna geçmeden önce bu formülleri elde etmede kolaylık sağlayan iki lemma vermemiz uygun olacaktır.

Lemma 1.3. Eğer f, 2π periyotlu bir fonksiyon ise her $\lambda\in\mathbb{R}$ için,

$$\int_{\lambda-\pi}^{\lambda+\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

dir.

İspat:

$$\int_{\lambda-\pi}^{\lambda+\pi}f(t)dt=\int_{\lambda-\pi}^{-\pi}f(t)dt+\int_{-\pi}^{\lambda+\pi}f(t)dt$$

yazılabilir. f, 2π periyotlu bir fonksiyon olduğundan, her α, $\beta\in\mathbb{R}$ için $t=x-2\pi$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt=\int_{\alpha+2\pi}^{\beta+2\pi}f(x-2\pi)dx=\int_{\alpha+2\pi}^{\beta+2\pi}f(x)dx=\int_{\alpha+2\pi}^{\beta+2\pi}f(t)dt$$

olacağından,

$$\int_{\lambda-\pi}^{\lambda+\pi}f(t)dt=\int_{\lambda-\pi+2\pi}^{-\pi+2\pi}f(t)dt+\int_{-\pi}^{\lambda+\pi}f(t)dt=\int_{\lambda+\pi}^{\pi}f(t)dt+\int_{-\pi}^{\lambda+\pi}f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

elde edilir. Özel olarak $\lambda=\pi$ seçilirse, f, 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\int_{0}^{2\pi}f(t)dt$$

olduğu görülür.

Şimdi aşağıdaki iki seriyi göz önüne alalım.

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu x, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\nu x \ .$$

Bu serilerin n ninci kısmi toplamlarını sırasıyla $D_n(x)$ ve $\tilde{D}_n(x)$ ile gösterelim. Bu gösterimlerle ilgili oldukça kullanışlı iki formülü aşağıdaki lemmada verelim.

Lemma 1.4. Her $k\in\mathbb{Z}$ için $x\neq 2k\pi$ olmak üzere, her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$D_n(x)=\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})x}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x}, \quad \tilde{D}_n(x)=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}x-\operatorname{Cos}(n+\frac{1}{2})x}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x}$$

dir[1].

İspat:

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{Cos}\nu x$$

eşitliğinin her iki tarafını $2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned}2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x\, D_n(x) &= \operatorname{Sin}\frac{1}{2}x+\sum_{\nu=1}^{n}2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x\operatorname{Cos}\nu x\\ &= \operatorname{Sin}\frac{1}{2}x+\sum_{\nu=1}^{n}[\operatorname{Sin}(\nu+\frac{1}{2})x-\operatorname{Sin}(\nu-\frac{1}{2})x\ ]\\ &= \operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})x\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$D_n(x)=\frac{\operatorname{Sin}(n+\frac{1}{2})x}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\tilde{D}_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{Sin}\nu x$$

eşitliğinin her iki tarafını yine $2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}x$ ile çarparsak

$$2\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,x\,\tilde{D}_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}2\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,x\mathrm{Sin}\nu x$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}[\mathrm{Cos}(\nu-\frac{1}{2})x-\mathrm{Cos}(\nu+\frac{1}{2})x]$$

$$=\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,x-\mathrm{Cos}(n+\frac{1}{2})x$$

bulunur ki, buradan

$$\tilde{D}_n(x)=\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\,x-\mathrm{Cos}(n+\frac{1}{2})x}{2\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,x}$$

dır.

$D_n(x)$ ve $\tilde{D}_n(x)$ polinomlarına sırasıyla Dirichlet çekirdeği ve Konjüge Dirichlet çekirdeği denir. Ayrıca, bu formüller $D_n(x)$ ve $\tilde{D}_n(x)$ nın her $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Gerçekten, $D_n(x)$ ve $\tilde{D}_n(x)$ bu aralıklarda mutlak değer olarak cosec $\frac{1}{2}\,\varepsilon$ dan daha küçüktürler. Bu arada şunu da ilâve edelim ki, ileride kullanacağımız birçok trigonometrik ifadeler paydalarında 2Sin $\frac{1}{2}$ x veya 2tan $\frac{1}{2}$ x terimlerine sahiptir, Bu tür ifadelerde sık sık

$$\sin x\leqslant x,\ \sin x\geqslant\frac{2}{\pi}\,x,\ \tan x\geqslant x\ \ (0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$$

eşitsizliklerinden faydalanacağız[1].

Artık, lemma 1.3 ve lemma 1.4 den faydalanarak $S[f]$ ve $\tilde{S}[f]$ nin kısmi toplamlarını kolaylıkla hesaplayabiliriz. f, 2π periyotlu ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. f nin Fourier katsayıları

$$a_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos\nu t\,dt,\ \ b_\nu=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin\nu t\,dt$$

olmak üzere,

$$S[f]=\frac{1}{2}\,a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),\ \ \tilde{S}[f]=\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\sin\nu x-b_\nu\cos\nu x)$$

serilerini dikkate alalım. Bu takdirde $S[f]$ nin kısmi toplamını, $S_n[f]$ veya $S_n(x;f)$ ya da basit olarak $S_n(x)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak,

$\tilde{S}[f]$ nin kısmi toplamını da $\tilde{S}_n[f]$, $\tilde{S}_n(x;f)$ veya $\tilde{S}_n(x)$ ile göstereceğiz.

a_ν, b_ν Fourier katsayıları dikkate alınırsa,

$$a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\nu t\,dt\right)\cos\nu x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\nu t\,dt\right)\sin\nu x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos\nu t\cos\nu x+\sin\nu t\sin\nu x)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\nu(t-x)dt$$

olduğundan,

$$S_n(x)= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\nu(t-x)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu(t-x)\right\}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)dt \qquad (1.8)$$

bulunur. Benzer olarak

$$\tilde{S}_n(x)= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu(t-x)\right\}dt= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\tilde{D}_n(t-x)dt \qquad (1.9)$$

olacaktır. Demekki, $S[f]$ ve $\tilde{S}[f]$ serilerinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart, (1.8) ve (1.9) daki integrallerin $n\to\infty$ için belli bir sayıya yakınsamasıdır. Bu problemle ilgili birçok kriter mevcut, fakat bu kriterlerin hepsi de sadece yeter şartları ihtiva etmektedir. Yani, bu integrallerin yakınsak olması için bazı yeter şartları ihtiva eden kriterler mevcuttur. Bunlardan bazıları, Dirichlet-Jordan kriteri, Dini kriteri ve Lebesgue kriteridir. Biz burada, sadece bu kriterlerin isimlerinden bahsetmekle yetineceğiz. Bu arada şunu da belirtelim ki, integrallenebilen bir f fonksiyonunun Fourier serisinin yakınsak ve toplamının f(x) e eşit olması için gerek ve yeter şartlar şimdilik mevcut değildir. Hattâ f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli dahi olsa f nin Fourier serisinin yakınsak ve toplamının $f(x_0)$ olması için gerek ve yeter şartların ne olduğu bugün bile bilinmemektedir. Görüldüğü gibi, Fourier serileri teorisinin problemleri, integrasyon fikri ile kapalı olarak ilişkilidir. Bu çalışmada aksi durumlar hariç, integraller daima Lebesgue integralidir.

Ayrıca $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında integrallenebilen her f fonksiyonunun bir Fourier serisi vardır. Bunun için f nin $(-\pi,\pi)$ de hemen her yerde tanımlı olması yeterlidir, yani sıfır ölçümlü bir cümle hariç her yerde tanımlı olması yeterlidir. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları hemen her yerde eşit iseler bu takdirde, bunlara denktirler diyeceğiz ve denk fonksiyonlar arasında bir ayırım yapmayacağız. Diğer taraftan f_1 ve f_2 fonksiyonları hemen her yerde eşit iseler aynı Fourier serisine sahiptirler. Bundan başka, sürekli bir fonksiyonun Fourier serisinden bahsettiğimizde, fonksiyonun daima $(-\infty,\infty)$ da sürekli ve 2π periyotlu olduğunu kastedeceğiz. Ayrıca, cümle ve fonksiyonlari daima ölçülebilir olarak kabul edecek ve bir E cümlesinin (özel olarak aralığın) Lebesgue ölçümünü $|E|$ ile göstereceğiz [1].

(1.8) ve (1.9) daki $S_n(x)$ ve $\tilde{S}_n(x)$ için u=t-x dönüşümü yapılır ve lemma 1.3 dikkate alınırsa,

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du,\quad \tilde{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\tilde{D}_u(u)du$$

formülleri de elde edilir. Şimdi sabit bir x noktası ve değişmeyen bir f için,

$$\varphi(t)=\varphi_x(t)=\varphi_x(t;f)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\} \tag{1.10}$$

$$\psi(t)=\psi_x=\psi_x(t;f)=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\} \tag{1.11}$$

yazalım. Bu gösterimleri çalışmamızda sık sık kullanacağız. Bununla birlikte,

$$D_n(-u)=D_n(u) \text{ ve } \int_0^{\pi} D_n(t)dt=\frac{\pi}{2}$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_u(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,D_u(t)dt$$

ve ayrıca

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,D_n(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2f(x)D_n(t)dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,D_n(t)dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)D_u(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

bulunur. Benzer olarak $\tilde{D}_u(-u)=-\tilde{D}_u(u)$ olduğundan

$$\tilde{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\tilde{D}_n(t)dt=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_x(t)\tilde{D}_n(t)dt$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_x(t)\,\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

elde edilir. Ayrıca, $\tilde{S}[f]$ konjüge serisi için, toplanabilme probleminde

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\phi_x(t)}{2\tan\frac{1}{2}t}\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\tan\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (1.12)$$

integrali bize yardımcı olacaktır. Burada, bu integral $\varepsilon\to+o$ için

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\phi_x(t)}{2\tan\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (1.13)$$

ifadesinin limiti (eğer bu limit mevcutsa) gibi düşünülmektedir. (1.12) ifadesinin değeri mevcutsa bu $\tilde{f}(x)$ ile gösterilir ve $\tilde{f}$ fonksiyonuna, f nin konjügesi denir. Ayrıca (1.13) ifadesi de $\tilde{f}(x;\varepsilon)$ ile gösterilecektir. Yani,

$$\tilde{f}(x,\varepsilon)=-\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\phi_x(t)}{2\tan\frac{1}{2}t}\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\,tdt \qquad (1.14)$$

dır[1].

Teorem 1.5. Eğer f integrallenebiliyorsa, bu takdirde hemen her x için $h\to+o$ iken

$$\int_0^h |f(x\pm t)-f(x)|dt=o(h) \qquad (1.15)$$

dır[3].

(1.15) i gerçekleyen x lerin cümlesine f nin Lebesgue cümlesi denir. (1.10) ve (1.11) i dikkate alarak

$$\left.\begin{aligned} \Phi(h) &= \Phi_{x_0}(h) = \int_0^h |\varphi_{x_0}(t)|dt, \\ \Psi(h) &= \Psi_{x_0}(h) = \int_0^h |\psi_{x_0}(t)|dt \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

yazalım. Bu notasyonları sistematik olarak kullanacağız. Şimdi teorem 1.5 den faydalanarak bu notasyonlarla ilgili aşağıdaki sonucu verelim:

Sonuç 1.6. Hemen her x için $h\to+0$ iken,

$$\Phi_x(h) = o(h) \text{ ve } \Psi_x(h) = o(h) \qquad (1.17)$$

dır[1].

Şimdi Fourier katsayıları ile ilgili aşağıdaki teoremleri verelim:

Teorem 1.7. Eğer f, $[-\pi, \pi]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon, a_ν ve b_ν de Fourier katsayıları ise bu takdirde

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2+b_\nu^2) \qquad (1.18)$$

serisi yakınsaktır[4].

İspat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)-\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu t+b_\nu \sin\nu t)]^2 dt \geqslant 0$$

dır. O halde,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)]^2dt=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt$$

$$-2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)]^2dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt-2\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos\nu t dt-2\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin\nu t dt$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)]^2dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt-2\pi\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)+\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)]^2dt\geqslant 0$$

bulunur. Diğer taraftan yukarıdaki son toplam için (1.5) dikkate alınırsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt-2\pi\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)+\pi\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\geqslant 0$$

olacaktır. Buradan da

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt$$

elde edilir. Dolayısıyla söz konusu pozitif terimli serinin kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır. O halde (1.18) serisi yakınsaktır.

Bu teoremden faydalanarak Fourier katsayılarının önemli bir özelliğini verelim.

Sonuç 1.8. $[-\pi,\pi]$ aralığında integrallenebilen bir f fonksiyonunun Fourier katsayıları birer sıfır dizisidir[4].

İspat: (1.18) serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz. Yakınsak bir serinin genel terimi sıfıra yakınsayacağından

$$\lim(a_\nu^2+b_\nu^2)=0 \text{ ise } \lim a_\nu=\lim b_\nu=0$$

dır. Yani (a_ν) ve (b_ν) birer sıfır dizisidir.

Son olarak, daha sonraki bölümlerde faydalanacağımız aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.9. $k=1,2,\ldots,n$ için $U_k=u_1+u_2+\ldots+u_k$ olmak üzere

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} U_\nu (v_\nu - v_{\nu+1}) + U_n v_n \tag{1.19}$$

Abel kısmi toplam formülünü göz önüne alalım. Eğer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ler non-negatif ve artmayan ise bu takdirde

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu \right| \leqslant v_1 \max_k |U_k|$$

dır[1].

İ K İ N C İ   B Ö L Ü M

2. NÜMERİK SERİLERİN TOPLANABİLİRLİĞİ

Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum_n a_n$ serisi verilmiş olsun. Eğer birtakım yeni metotlar yardımıyla (s_n) dizisine bir s sayısı karşılık getirilebiliyorsa, (s_n) dizisi s-değerine limitlenebilir veya Σa_n serisi s-değerine toplanabilir denir. İşte bu tip metotlara limitleme veya toplanabilme metotları denilmektedir. Bu metotların amacı, daha önce bilinen yakınsaklık kriterleri yardımiyle karekteri tayin edilemeyen sonsuz serilerin karekterlerini tayin etmek veya belirsiz anlamda ıraksak olan bazı serilere, belli bir s sayısı karşılık getirerek, bu serilere bir manâ kazandırmaktır.

Biz, bu bölümde sadece bu metotlardan (C,α) toplanabilme metodunu ve Abel toplanabilme metodunu inceleyeceğiz. Ayrıca çok kısa olarak ıraksak integraller teorisine de temas edeceğiz.

Yalnız, bu metotları incelemeye geçmeden önce aşağıdaki temel kavramları vermek yerinde olacaktır.

Tanım 2.1. F reel veya kompleks sayıların bir cismi ve $\nu=0,1,2,\ldots$; $n=0,1,2,\ldots$ için $a_{n\nu} \in F$ olmak üzere $M=(a_{n\nu})$ bir sonsuz matris ve (s_n) de F de bir dizi olsun. Bu takdirde (s_n) dizisinden (σ_n) dizisine bir dönüşüm,

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlansın. (σ_n) dizisine (s_n) dizisinin M-dönüşüm dizisi denir ve M ye de diziden-diziye bir dönüşüm denir. Bu dönüşümün var olması için (2.1) deki toplamın her n için yakınsak olması gerekir.

Tanım 2.2. Bir $M=(a_{n\nu})$ matrisi verilmiş olsun. Eğer M matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa, M matrisine regülerdir denir[5].

Şimdi bir matrisin regülerliğini karakterize eden ve Silverman-Teoplitz teoremi adı verilen aşağıdaki teoremi verelim. Fakat bu arada,

$M=(a_{n\nu})$ verilen bir matris olmak üzere, her n için

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \quad , \quad A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$$

diyelim. Artık bu gösterimlere bağlı kalarak teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.3. Bir $M=(a_{n\nu})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların gerçekleşmesidir:

(i) her v için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu}=0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=1$,

(iii) her n için, $B_n \leqslant K$ olacak şekilde n den bağımsız bir K pozitif reel sayısı vardır[5].

Eğer $M=(a_{n\nu})$ matrisinin bütün terimleri non-negatif ise (iii) şartı (ii) nin bir sonucudur. Ayrıca böyle matrislere pozitif matrisler denir. Bundan başka, $n < \nu$ için $a_{n\nu}=0$ ise M matrisine üçgensel matris, her n için ve yalnızca sonlu sayıdaki ν ler için $a_{n\nu}\neq 0$ ise M matrisine satır-sonlu matris denir.

Tanım 2.4. Reel ya da kompleks terimli bir $N=(b_{n\nu})$ sonsuz matrisi ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verilmiş olsun.

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{n\nu} a_\nu \tag{2.2}$$

olacak şekilde tanımlanan (σ_n) dizisine, Σa_n serisinin N-dönüşüm dizisi denir ve N ye seriden-diziye bir dönüşüm adı verilir. Bu dönüşümün tanımlı olması için (2.2) deki toplamın her n için yakınsak olması gerekir.

Tanım 2.5. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum\limits_n a_n$ serisi verilmiş olsun. $\sum\limits_n a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin $M=(a_{n\nu})$ matrisi yardımıyla (σ_n) dönüşüm dizisi,

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$$

olarak tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ ise $\sum_n a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s-değerine M-toplanabilirdir denir. Ayrıca σ_n e, (s_n) dizisinin M matrisiyle elde edilen lineer ortalaması denir[1].

Tanım 2.6. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum_n a_n$ serisi verilmiş olsun. $\sum_n a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin $M=(a_{n\nu})$ matrisi ile (σ_n) dönüşüm dizisi,

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$$

olarak tanımlansın. Eğer $(\sigma_n) \in BV$ ise $\sum_n a_n$ serisine veya (s_n) dizisine mutlak M-toplanabilir ya da $|M|$-toplanabilir denir. Eğer bir $\sum_n a_n$ serisi $|M|$-toplanabilir ise $\sum_n a_n \in |M|$ veya $(s_n) \in |M|$ şeklinde gösterilir[6].

Tanım 2.7. A ve B verilen iki toplanabilme metodu olsun. Eğer A-toplanabilen herhangi bir dizi, aynı değere B-toplanabiliyorsa, A ya B yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir [7].

Teorem 2.8. $(p_0, p_1, \ldots)$ ve $(q_0, q_1, \ldots)$ verilen iki dizi ve her n için $q_n > 0$, $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$, $Q_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n$, $Q_n \to \infty (n \to \infty)$ olsun. Bu şartlar altında, eğer $\frac{p_n}{q_n} \to s (n\to\infty)$ ise bu takdirde $\frac{P_n}{Q_n} \to s (n\to\infty)$ dir[1].

İspat:

$$s_\nu = \frac{p_\nu}{q_\nu} \text{ ve } \sigma_n = \frac{P_n}{Q_n} \text{ olsun. Bu takdirde}$$

$$\sigma_n = \frac{p_0 + p_1 + \ldots + p_n}{Q_n} = \frac{q_0 s_0 + q_1 s_1 + \ldots + q_n s_n}{Q_n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q_\nu}{Q_n} s_\nu$$

yazılabilir. Burada dönüşüme karşılık gelen $M=(a_{n\nu})$ matrisinin elemanları

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \frac{q_\nu}{Q_n} ; & \nu \leq k \text{ ise} \\ 0 ; & \nu > k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Teoremin hipotezi dikkate alınırsa M matrisinin pozitif olduğu açıktır. Şimdi kabul edelim ki $s_\nu \to s(\nu\to\infty)$ olsun. Bu takdirde göstermek istiyoruz ki $\sigma_n \to s(n\to\infty)$ dır. Bunun için M matrisinin regüler olduğunu göstermemiz yeterlidir. Gerçekten,

(i) her ν için $\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_\nu}{Q_n} = 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{Q_n} \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$,

(iii) M matrisi pozitif olduğundan her n için $B_n=1$ dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır. Eğer özel olarak teorem 2.8 de her ν için $q_\nu=1$ alırsak, Cauchy'nin klasik sonucunu elde ederiz. Yani, eğer $s_\nu \to s(\nu\to\infty)$ ise bu takdirde $(s_0+s_1+\ldots s_n)/(n+1)\to s(n\to\infty)$ dır. Artık (C,α) toplanabilme metodunu inceleyebiliriz:

Teorem 2.9. $(s_0,s_1,s_2,\ldots)$ verilen bir dizi olmak üzere, her $k=0,1,2,\ldots$ için $(S_0^k,S_1^k,S_2^k,\ldots)$ dizisini

$$S_n^0=s_n,\ S_n^k=S_0^{k-1}+S_1^{k-1}+\ldots+S_n^{k-1}\quad (k=1,2,\ldots,n=0,1,2,\ldots)$$

şartları sağlanacak şekilde tanımlayalım. Benzer şekilde $k=0,1,2,\ldots$ için $A_0^k,A_1^k,A_2^k,\ldots$ sayılarının dizisini

$$A_n^0=1,\ A_n^k=A_0^{k-1}+A_1^{k-1}+\ldots+A_n^{k-1}\quad (k=1,2,\ldots,n=0,1,2,\ldots)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} S_n^k/A_n^k=s$$

ise $(s_0,s_1,s_2\ldots)$ dizisi [veya kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan seri] s-limitine k ıncı aritmetik Cesáro ortalaması ile toplanabilirdir veya kısaca (C,k) toplanabilirdir denir[1]. $(C,0)$ toplanabilirlik adî anlamda yakınsaklıktır. Bir dizinin (C,k) toplanabilirliği, dizinin aynı limite $(C,k+1)$ toplanabilirliğini gerektirir. Bunun için teorem 2.8 de $p_n=S_n^k$, $q_n=A_n^k$ almak yeterlidir.

Şimdi A_n^k nın nümerik değerini bulmak için aşağıdaki önermeden faydalanalım:

Eğer, her n için $A_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$ ve $|x|<1$ ise bu takdirde $\sum_n a_nx^n$ ve $\sum_n A_nx^n$ serilerinden birisinin yakınsak olması kaydıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \tag{2.3}$$

dır. Gerçekten, eğer $\Sigma A_n x^n$ yakınsak ise

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1}$$

$$= a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dır. Aksine olarak eğer $|x|<1$ ve $\Sigma a_n x^n$ yakınsak ise bu takdirde kuvvet serilerinin Cauchy çarpımından dolayı,

$$(1-x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} x^{n-\nu} a_\nu x^\nu\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

dır ve böylece $\Sigma A_n x^n$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla benzer düşünceyle; $|x|<1$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_0^{k-1} + A_1^{k-1} + \ldots + A_n^{k-1}) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (A_0^{k-1} x^n + x A_1^{k-1} x^{n-1} + \ldots + x^n A_n^{k-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu A_\nu^{k-1} x^{n-\nu}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-1} x^n\right)$$

$$= (1-x)^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-1} x^n\right)$$

$$= (1-x)^{-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-2} x^n\right) = \ldots = (1-x)^{-k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 x^n\right)$$

$$= (1-x)^{-k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = (1-x)^{-(k+1)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n=(1-x)^{-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-1}x^n\Big)=(1-x)^{-2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-2}x^n\Big)=\ldots=(1-x)^{-k}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{o}x^n\Big)$$

elde edilir.

Bu ise, bize tanımımızı aşağıdaki gibi ifade etmemizi sağlar: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. S_n^α ve A_n^α ,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n=(1-x)^{-\alpha-1},\\
&\sum_{n=0}^{\infty} S_n^\alpha x^n=(1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n\\
&\qquad=(1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_n)x^n\\
&\qquad=(1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(u_0x^n+xu_1x^{n-1}+\ldots+x^nu_n)\\
&\qquad=(1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu u_\nu x^{n-\nu}\Big)\\
&\qquad=(1-x)^{-\alpha}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n\Big)=(1-x)^{-\alpha-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n\Big)
\end{aligned}\right\}\quad(2.4)$$

formülleri ile verilmiş olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha}=s \qquad (2.5)$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi veya (s_n) dizisi s-limitine (C,α) toplanabilirdir denir ve $(C,\alpha)\ \sum_{0}^{\infty} u_n=s$ veya $(C,\alpha)\lim s_n=s$ şeklinde gösterilir[1].

Ayrıca, eğer (σ_n^α) sınırlı ise (s_n) dizisine (C,α) sınırlıdır denir. Artık bu yeni tanımlarda α non-negatif bir tamsayı olmak zorunda değildir. Fakat $\alpha\neq -1,-2,-3,\ldots$ yalnızca bir sınırlandırmadır. Aksi takdirde α negatif bir tamsayı ise (2.4) nın ilk formülünde, Binom teoreminden dolayı, sağ taraf sonlu bir toplama eşit olacağından, katsayıların eşitliğinden $n>-\alpha-1$ için $A_n^\alpha=0$ olacaktır. Dolayısıyla $\sigma_n^\alpha=S_n^\alpha/A_n^\alpha$ anlamını kaybeder. O halde α yı negatif tamsayılardan farklı almalıyız, bununla beraber yalnızca $\alpha>-1$ durumu uygundur. Gerçekten de şimdi $\alpha>-1$ şartının gerektiğini gösterelim:

Kabul edelim ki, $p>0$ tam olmayan bir sayı olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = (1-x)^{-p}$$

olsun. $|x|<1$ için,

$$(1-x)^{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} \, .x^n$$

olduğundan

$$u_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}$$

olacaktır. Σu_n serisi Raabe kriteri gereğince ıraksaktır. Ayrıca pozitif terimli ıraksak bir seri olduğundan $\Sigma u_n = \infty$ dur. Öte yandan, $|x|<1$ için,

$$(1-x)^{-1} \sum u_n x^n = (1-x)^{-p-1} \text{ ise } \Big(\sum_0^{\infty} x^n\Big) \Big(\sum_0^{\infty} u_n x^n\Big) = (1-x)^{-p-1}$$

olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)^{-p-1}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.4) deki ikinci formülden

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\alpha} x^n = (1-x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\alpha} x^n = (1-x)^{-\alpha-p-1}$$

elde edilir. Özel olarak $\alpha = -p-1$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{-p-1} x^n = (1-x)^{0} = 1$$

olacaktır. Demek ki $\Sigma S_n^{-p-1} x^n$ serisi yakınsak ve toplamı 1 dir. Diğer taraftan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{-p-1} x^n = S_0^{-p-1} + S_1^{-p-1} x + \ldots + S_n^{-p-1} x^n + \ldots = 1$$

olduğundan $S_0^{-p-1}=1$, $n>0$ için $S_n^{-p-1}=0$ olur. Dolayısiyle Σu_n serisi sıfıra $(C,-p-1)$ toplanabilirdir. Demek ki α sınırlandırılmazsa, pozitif terimli ıraksak bir seriye sabit bir sayı karşılık tutulmuş olur ki,bu çok uygunsuz bir neticedir. Bu sebeple genel olarak $\alpha > -1$ almak uygundur [8]. Yukarıdaki tanımımıza tekrar dönersek, şu kavramları da bu arada zikredebiliriz:

S_n^{α} ve σ_n^{α} sayılarına sırasıyla (s_n) dizisinin $(\Sigma u_n$ serisinin) α ıncı mertebeden Cesáro toplamları ve Cesáro ortalamaları denir. Ayrıca A_n^{α} lara da α ıncı mertebeden Cesáro sayıları adı verilir.

Şimdi (2.4) deki A_n^{α} ve S_n^{α} nın tanımları göz önüne alınırsa, α, β, $\alpha+\beta+1$ negatif tamsayılar olmamak üzere $|x|<1$ için,

$$(1-x)^{-\beta-1}.(1-x)^{-\alpha-1} = (1-x)^{-\alpha-\beta-2}$$

olduğundan ve kuvvet serilerinin Cauchy çarpımından,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\beta} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta}\, x^{n-\nu}\, A_{\nu}^{\alpha} x^{\nu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta}\, A_{\nu}^{\alpha} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha+\beta+1} x^n$$

bulunur. Katsayıların eşitliğinden

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{\beta}$$

elde edilir. Şimdi, (2.4) deki ikinci formülde α yerine $\alpha+\beta+1$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\alpha+\beta+1} x^n = (1-x)^{-\alpha-\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

$$= (1-x)^{-\beta-1}.(1-x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\beta} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\alpha} x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta} \, x^{n-\nu} \, S_{\nu}^{\alpha} x^{\nu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} S_{\nu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{\beta} \, x^{n}$$

bulunur. Yine katsayıların eşitliğinden

$$S_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} S_{\nu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{\beta}$$

olacaktır. Sonuç olarak her α ve β için,

$$\text{(i) } A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{\beta}, \text{(ii) } S_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^{n} S_{\nu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{\beta} \tag{2.6}$$

yazabiliriz. Özel olarak α yerine $\alpha-1$ ve β yerine 0 alırsak,

$$A_n^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\alpha-1}, \quad S_n^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n} S_{\nu}^{\alpha-1} \tag{2.7}$$

elde edilir.

Öte yandan,

$$A_n^{\alpha} - A_{n-1}^{\alpha} = A_n^{\alpha-1} \quad ; \quad S_n^{\alpha} - S_{n-1}^{\alpha} = S_n^{\alpha-1} \tag{2.8}$$

olduğu açıktır. Bununla birlikte (2.8) deki ikinci formülde $\alpha=1$ alır ve önceden verdiğimiz notasyonları dikkate alırsak, $S_n^1 - S_{n-1}^1 = S_n^0 = s_n$ olup,

$$u_n = s_n - s_{n-1} = S_n^{-1}$$

bulunur. Şimdi de (2.6) daki (ii) formülünde β yerine $\beta-1$ ve α yerine 0 alırsak,

$$S_n^\beta = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^0 A_{n-\nu}^{\beta-1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} \sum_{j=0}^{\nu} u_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} u_j \sum_{\nu=j}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} = \sum_{j=0}^{n} u_j (A_0^{\beta-1} + A_1^{\beta-1} + \ldots + A_{n-j}^{\beta-1})$$

$$= \sum_{j=0}^{n} u_j \sum_{\nu=0}^{n-j} A_\nu^{\beta-1} = \sum_{j=0}^{n} u_j A_{n-j}^\beta = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^\beta u_\nu$$

eşitliğini yani

$$S_n^\beta = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^\beta u_\nu \qquad (2.9)$$

formülünü elde ederiz. Böylece $\sigma_n^\beta = S_n^\beta / A_n^\beta$ den

$$\sigma_n^\beta = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^\beta} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_{n-\nu}^\beta}{A_n^\beta} u_\nu \qquad (2.10)$$

olduğu görülür. Şu halde (C,α) $(\alpha > -1)$ ortalamasının matrisinin elemanları

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \; ; & \nu \leq n \quad \text{ise} \\ 0 \; ; & \nu > n \quad \text{ise} \end{cases} \qquad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi (2.4) deki ilk formülü göz önüne alalım. Biliyoruz ki $\alpha > -1$ olmak üzere $|x| < 1$ için $f(x) = (1-x)^{-\alpha-1}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ komşuluğundaki Taylor serisi

$$(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} x^n$$

dır. Ayrıca

$$(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n$$

olduğundan, katsayıların eşitliğinden $\alpha > -1$ olmak üzere

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\ (\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} = \binom{n+\alpha}{n}$$

elde edilir. Yalnız bu ifadeyi, Stirling formülünden faydalanarak, bir başka formda vermek daha uygun olacaktır:

Yeter derecede büyük reel x ler için,

$$\log\Gamma\ (x+1)=(x+\frac{1}{2})\ \log x-x+\frac{1}{2}\ \log\ 2\pi+O(1/x)$$

(Stirling formülü) dır[8].

Bu formülü

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1/2}e^{-x}\ \sqrt{2\pi}\quad e^{O(1/x)}$$

olarak da ifade edebiliriz. $n\in\mathbb{N}$ için

$$n! = \Gamma(n+1)=n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}\quad e^{O(1/n)}$$

veya

$$\frac{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}}{n!}\ e^{O(1/n)}=1$$

olur. Bu son eşitlikte $n\to\infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\ \frac{(\frac{n}{e})^n.\ \sqrt{2\pi n}}{n!}=1$$

olur. Diğer taraftan $\alpha>-1$ için,

$$\Gamma(n+\alpha+1)=(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$$

olduğundan,

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}\ \Gamma(\alpha+1) = A_n^\alpha\Gamma(\alpha+1)$$

bulunur. Stirling formülünde $x=n+\alpha$ alınırsa

$$\Gamma(n+\alpha+1)=(n+\alpha)^{n+\alpha+1/2}e^{-(n+\alpha)}\sqrt{2\pi}\quad eO(\frac{1}{n+\alpha})$$

$$=n^n(1+\frac{\alpha}{n})^n n^{\alpha+1/2}(1+\frac{\alpha}{n})^{\alpha+1/2}e^{-\alpha}\ e^{-n}\sqrt{2\pi}\quad eO(\frac{1}{n+\alpha})$$

$$=(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}\quad n^\alpha\ \frac{(1+\frac{\alpha}{n})^n}{e^\alpha}\ (1+\frac{\alpha}{n})^{\alpha+1/2}\ eO(\frac{1}{n+\alpha})$$

olacaktır. Bu eşitliğin her iki tarafını $n!n^\alpha$ ile bölersek

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\ n^\alpha}=\frac{(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}}{n!}\ (1+\frac{\alpha}{n})^n\ e^{-\alpha}(1+\frac{\alpha}{n})^{\alpha+1/2}\ eO(\frac{1}{n+\alpha})$$

bulunur. Yukarıdaki $\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$ ifadesinin değerini bu son eşitlikte yerine koyar ve $n\to\infty$ için limite geçersek,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n^\alpha\ \Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha}=1$$

elde edilir. Demek ki,

$$A_n^\alpha\simeq\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

dır.

O halde $\alpha>-1$ için,

$$A_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)\ (\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}=\binom{n+\alpha}{n}\simeq\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\tag{2.12}$$

yazabiliriz. Ayrıca A_n^α için,

$$\lim_{n\to\infty}A_n^\alpha=\begin{cases}0 & ;\ -1<\alpha<0\quad \text{ise}\\ 1 & ;\quad \alpha=0\quad \text{ise}\\ \infty & ;\quad \alpha>0\quad \text{ise}\end{cases}$$

olduğu (2.12) den açıktır. Diğer taraftan, eğer α pozitif bir tamsayı ise

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\alpha)}{\alpha!} \qquad (2.13)$$

olduğunu da söylemek yerinde olacaktır. Şimdi A_n^α ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.10. A_n^α, $\alpha > -1$ için pozitif, $\alpha > 0$ için artan (n nin bir fonksiyonu olarak), $-1 < \alpha < 0$ için azalan ve her n için $A_n^0 = 1$ dir[1].

İspat:

(i) $\alpha > -1$ için

$$\frac{(\alpha+1)\ (\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}$$

ifadesinin bütün çarpanları pozitif olduğundan $A_n^\alpha > 0$ dır.

(ii) $\alpha > 0$ için,

$$\frac{A_{n+1}^\alpha}{A_n^\alpha} = \frac{\alpha+n+1}{n+1} = 1 + \frac{\alpha}{n+1} > 1$$

olup dolayısiyle A_n^α artandır.

(iii) $-1 < \alpha < 0$ olsun. Bu takdirde $\alpha + n+1 < n+1$ olduğundan,

$$\frac{A_{n+1}^\alpha}{A_n^\alpha} = \frac{\alpha+n+1}{n+1} < 1$$

olup dolayısiyle A_n^α azalandır.

(iv) Her n için, tanımdan dolayı $A_n^0 = 1$ dir.

Teorem 2.11. $\alpha > -1$ olmak üzere, eğer bir $\sum_0^\infty u_\nu$ serisi s-değerine (C,α) toplanabiliyorsa, bu takdirde her $h > 0$ için verilen seri s-değerine aynı zamanda $(C,\alpha+h)$ toplanabilirdir[1].

İspat: Kabul edelim ki, $\alpha > -1$ olmak üzere Σu_ν serisi s-değerine (C,α) toplanabilir olsun. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha = s$$

olsun. Bu takdirde σ_n^α, Σu_ν serisinin α ıncı merteden Cesàro ortalamasıdır. Diğer taraftan (2.6) daki (ii) ifadesinde $\beta+1=h$ alırsak

$$S_n^{\alpha+h} = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{h-1}$$

elde edilir. Ayrıca $S_\nu^\alpha = A_\nu^\alpha \sigma_\nu^\alpha$ olduğundan

$$\sigma_n^{\alpha+h} = \frac{S_n^{\alpha+h}}{A_n^{\alpha+h}} = \Big(\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{h-1} S_\nu^\alpha\Big)/A_n^{\alpha+h}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{h-1} A_\nu^\alpha}{A_n^{\alpha+h}} \sigma_\nu^\alpha$$

bulunur. Böylece $\sigma_n^{\alpha+h}$, (σ_n^α) dizisinin lineer ortalamasıdır. Burada dönüşüme karşılık gelen $M=(a_{n\nu}$ matrisinin elemanları,

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-\nu}^{h-1} A_\nu^\alpha}{A_n^{\alpha+h}} & ; \ \nu \leqslant n \ \text{ ise} \\ 0 & ; \ \nu > n \ \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Öyleyse $\alpha>-1$ ve her $h>0$ için M matrisinin regüler olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Şimdi sırasıyla M matrisinin regülerliğin şartlarını gerçeklediğini gösterelim:

(i) (2.12) ifadesi dikkate alınırsa, her ν için

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-\nu}^{h-1} A_\nu^\alpha}{A_n^{\alpha+h}} = A_\nu^\alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{A_{n-\nu}^{h-1}\Gamma(h)}{(n-\nu)^{h-1}} \cdot \dfrac{(n-\nu)^{h-1}}{\Gamma(h)}}{\dfrac{A_n^{\alpha+h}.\Gamma(\alpha+h+1)}{n^{\alpha+h}} \cdot \dfrac{n^{\alpha+h}}{\Gamma(\alpha+h+1)}}$$

$$= A_\nu^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+h+1)}{\Gamma(h)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-\nu)^{h-1}}{n^{\alpha+h}}$$

dır. Diğer taraftan $0 \leqslant n-\nu \leqslant n$ olduğundan

$$0 \leqslant \left(\frac{n-\nu}{n}\right)^{h-1} \leqslant 1$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-\nu)^{h-1}}{n^{\alpha+h}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-\nu}{n}\right)^{h-1} \frac{1}{n^{\alpha+1}} = 0$$

dır. Dolayısıyla her ν için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0$ dır.

(ii) (2.6) daki (i) eşitliğinde $\beta+1=h$ alırsak

$$A_n^{\alpha+h} = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{h-1}$$

olduğundan,

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = \frac{1}{A_n^{\alpha+h}} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{h-1} = 1$$

dır.

Öyleyse $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1$ olacaktır.

(iii) Son olarak her n için (B_n) nin sınırlı olduğunu gösterelim. $\alpha > -1$ ve $h > 0$ olduğundan teorem 2.10 dan dolayı M pozitif bir matristir. Dolayısıyla her n için $B_n = A_n = 1$ olup (B_n) dizisi sınırlıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki, teorem 2.11 de, özel olarak $\alpha=0$ ve $h=\alpha$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.12. Eğer $\alpha > 0$ ise bu takdirde (C,α) metodu regülerdir. Yani,

$$\sum_{0}^{\infty} u_\nu = s \text{ ise } (C,\alpha) \sum_{0}^{\infty} u_\nu = s$$

dir[8].

İspat: $(C,0)$ adî anlamda yakınsaklığa karşılık geldiğinden

$$(C,0) \sum u_\nu = \sum u_\nu = s \text{ ise } (C,\alpha) \sum u_\nu = s$$

dır.

Şimdi (C,1) metodu ile ilgili bazı pratik sonuçlar ve teoremler verelim [1].

Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum_0^{\infty} u_\nu$ serisi verilmiş olsun. Bu takdirde (s_n) dizisinin birinci aritmetik ortalaması σ_n olmak üzere,

$$\sigma_n = \frac{s_0+s_1+\ldots s_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(n+1-\nu)u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)u_\nu \qquad (2.14)$$

yazabiliriz.

Ayrıca,

$$\Delta_n = s_n - \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu u_\nu}{n+1} = \frac{u_1+2u_2+\ldots nu_n}{n+1} \qquad (2.15)$$

farkını göz önüne alalım. Eğer Σu_ν serisi s-değerine (C,1) toplanabiliyor ve $\Delta_n \to 0$ ise bu takdirde Σu_ν yakınsak ve toplamı s dir. Gerçekten de $\Delta_n \to 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n-\sigma_n)=0$ olup $\lim\limits_{n} s_n = \lim\limits_{n} \sigma_n = s$ yani

$$\sum u_\nu = s$$

dır. Diğer taraftan, eğer Σu_ν serisi s-değerine (C,1) toplanabiliyor ve terimleri $u_\nu = o(\frac{1}{\nu})$ şartını sağlıyorsa bu takdirde $\Sigma u_\nu = s$ dır. Gerçekten $u_\nu = o(\frac{1}{\nu})$ ise $\nu u_\nu = o(1)$ olup,

$$\Delta_n = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu u_\nu}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} o(1) = o(1)$$

dır. Dolayısıyla yukarıdaki ilk düşünceden iddia açıktır.

Eğer $u_\nu = O(1/\nu)$ ve Σu_ν serisi (C,1) sınırlı ise bu takdirde serinin, (s_n) kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$u_\nu = O(1/\nu)$ ise her ν için $|\nu u_\nu| \leqslant K_1$ olacak şekilde bir $K_1 > 0$ sayısı vardır. Aynı şekilde seri (C,1) sınırlı olduğundan her n için $|\sigma_n| \leqslant K_2$ olacak şekilde bir $K_2 > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan her n için,

$$|\Delta_n| = \left|\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu u_\nu}{n+1}\right| \leqslant K_1$$

dır. Fakat $\Delta_n = s_n - \sigma_n$ olup $s_n = \Delta_n + \sigma_n$ dır. Buradan her n için,

$$|s_n| = |\Delta_n+\sigma_n| \leqslant |\Delta_n| + |\sigma_n| \leqslant K_1 + K_2$$

elde edilir ki, bu (s_n) nin sınırlı olması demektir. Benzer şekilde, (2.15) ifadesi dikkate alınarak Σu_ν yakınsak olduğunda $u_1+2u_2+\ldots+nu_n=o(n)$ olduğu açıktır.

Yukarıda gösterdik ki, $u_\nu=o(1/\nu)$ ise $\Delta_n \to o(n\to\infty)$ dır. Şimdi şöyle bir soru aklımıza gelebilir: $\Delta_n \to o$ şartı, $u_\nu=o(1/\nu)$ dışındaki durumlarda da sağlanabilir mi? Şimdi bu soruya olumlu cevap olarak, aşağıdaki iki durumu verelim:

(a) $\sum\limits_{1}^{\infty} \nu|u_\nu|^2=M$, M sonludur.

(b) q birden büyük bir sabit olmak üzere, eğer ν indisi $\frac{n_{k+1}}{n_k} > q$ şartını sağlayan pozitif tamsayıların artan bir(n_k)dizisinin terimi değilse $u_\nu=0$ olacak şekilde, (u_ν) bir sıfır dizisi olsun.

Şimdi ilk olarak kabul edelim ki (a) sağlansın. Bu takdirde göstermek istiyoruz ki, $\Delta_n \to o(n\to\infty)$ dır.

Schwarz eşitsizdiğinden dolayı,

$$|\Delta_n|=|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu u_\nu}{n+1}| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{1/2}|u_\nu|\nu^{1/2} \leqslant \frac{1}{n+1} (\sum_{\nu=1}^{n} \nu|u_\nu|^2)^{1/2}(\sum_{\nu=1}^{n}\nu)^{1/2}$$

$$\leqslant (\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu|u_\nu|^2)^{1/2}=M^{1/2}$$

elde edilir. Öyleyse $\limsup |\Delta_n| \leqslant M^{1/2}$ dir.

Eğer $k\in\mathbb{N}$ için, $u_1,u_2,\ldots,u_k$ ların her birinin yerine sıfır alırsak, lim sup tanımından dolayı $\limsup |\Delta_n|$ nun değeri değişmez. Dolayısıyla k yı yeteri kadar büyük alarak, M yi yeteri kadar küçük yapabiliriz. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n=0$ elde edilir.

İkinci olarak, kabul edelim ki, (b) sağlansın. Bu takdirde yine göstermek istiyoruz ki $\Delta_n \to 0(n\to\infty)$ dır. Öyleyse, $|u_{n_\nu}|=\varepsilon_\nu$ ve $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ olsun.

Bu takdirde,

$$|\Delta_n| = |\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu u_\nu}{n+1}| \leqslant (n+1)^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu\ |u_\nu| \leqslant (n_k+1)^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu\ |u_\nu|$$

$$= (n_k+1)^{-1}\{ n_1|u_{n_1}| + n_2|u_{n_2}|+\ldots+ n_k|u_{n_k}|\}$$

$$= (n_k+1)^{-1} \sum_{\nu=1}^{k} n_\nu|u_{n_\nu}| = (n_k+1)^{-1} \sum_{\nu=1}^{k} n_\nu\varepsilon_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{n_\nu}{n_k+1}\varepsilon_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} (\frac{n_\nu}{n_k})\varepsilon_\nu$$

bulunur. Ayrıca $\frac{n_k}{n_{k+1}} < \frac{1}{q}$ olduğundan,

$$\frac{n_\nu}{n_k} = \frac{n_\nu}{n_{\nu+1}} \cdot \frac{n_{\nu+1}}{n_{\nu+2}} \cdot \frac{n_{\nu+2}}{n_{\nu+3}} \cdots \frac{n_{k-1}}{n_k} < (\frac{1}{q})^{k-\nu} = q^{\nu-k}$$

olacaktır. Buradan da,

$$|\Delta_n| \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} \varepsilon_\nu \quad q^{\nu-k}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikteki sağ taraftaki toplam (ε_ν) dizisinin lineer ortalamasıdır. Bu dönüşüme karşılık gelen $M=(a_{k\nu})$ matrisinin elemanları

$$a_{k\nu} = \begin{cases} q^{\nu-k} & ; \nu \leqslant k \quad \text{ise} \\ 0 & ; \nu > k \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Diğer taraftan her ν için $\varepsilon_\nu = |u_{n_\nu}|$ olduğundan (ε_ν) bir sıfır dizisidir. Şimdi, amacımız olan $\Delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğunu göstermek için, M matrisinin teorem 2.3'ün (i) ve (iii) şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir:

(i) her ν için, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k\nu} = \lim\limits_{k\to\infty} q^{\nu-k} = 0$,

(ii) her k için $B_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{k\nu}| = \sum_{\nu=1}^{n} q^{\nu-k} \leqslant \frac{q}{q-1}$

dır. Demek ki, eğer Σu_ν serisi s-değerine (C,1) toplanabiliyor ve eğer (a) ya da (b) şartı sağlanıyorsa bu takdirde, Σu_ν serisinin yakınsak ve toplamının s olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan (b) durumu aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir. Ancak buna geçmeden önce ihtiyaç duyacağımız bir tanımı ifade etmek yerinde olacaktır.

Tanım 2.13. n, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, eğer $n < \nu \leq m$ için $u_\nu = 0$ ise Σu_ν serisi bir (n,m) boşluğuna sahiptir denir[1].

Teorem 2.14. Eğer kısmi toplamı s_n olan bir Σu_ν serisi, $\frac{m_k'}{m_k} \geq q > 1$ olacak şekilde sayılabilir sonsuz çoklukta (m_k, m_k') boşluklarına sahip ve s-değerine (C,1) toplanabiliyorsa bu takdirde $s_{m_k} \to s$ ve aynı zamanda $s_{m_k'} \to s$ dir[1].

İspat: Amacımıza uygun olarak ispatı ilk önce s=0 için ve daha sonra da $s \neq 0$ için yapacağız. Kabul edelim ki, s=0 olsun. Her (m_k, m_k') boşluğunda $m_k < \nu \leq m'_k$ için $u_\nu = 0$ olduğundan

$$s_{m_k} = \sum_{\nu=0}^{m_k} u_\nu$$

$$s_{m_k+1} = \sum_{\nu=0}^{m_k+1} u_\nu = s_{m_k}$$

$$s_{m_k+2} = \sum_{\nu=0}^{m_k+2} u_\nu = s_{m_k}$$

$$\vdots$$

$$s_{m_k'-1} = \sum_{\nu=0}^{m_k'-1} u_\nu = s_{m_k}$$

yazabiliriz. Burada taraf tarafa toplama geçersek

$$(m_k' - m_k) s_{m_k} = s_{m_k} + s_{m_k+1} + \ldots + s_{m_k'-1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_n = (n+1)\,\sigma_n$$

olduğundan dolayı,

$$(m_k' - m_k) s_{m_k} = (s_0 + s_1 + \ldots + s_{m_k-1} + s_{m_k} + \ldots + s_{m_k'-1}) - (s_0 + s_1 + \ldots + s_{m_k-1})$$

$$= m_k' \sigma_{m_k'-1} - m_k \sigma_{m_k-1}$$

yazabiliriz.

Şimdi,

$$m'_k\,\sigma_{m'_k-1} - m_k\sigma_{m_k-1} = o(m'_k-m_k)$$

olduğunu gösterelim:

$$\frac{m'_k}{m'_k-m_k}\sigma_{m'_k-1} - \frac{m_k}{m'_k-m_k}\sigma_{m_k-1} = \left(1+\frac{m_k}{m'_k-m_k}\right)\sigma_{m'_k-1} - \frac{m_k}{m'_k-m_k}\sigma_{m_k-1}$$

$$= \sigma_{m'_k-1} + \frac{m_k}{m'_k-m_k}(\sigma_{m'_k-1}-\sigma_{m_k-1}) = o(1)+O(1)\,o(1)=o(1)$$

dır. Burada, $\frac{m'_k}{m_k} \geqslant q > 1$ olduğundan $m'_k \geqslant q\,m_k$ olup,

$$m'_k-m_k \geqslant qm_k-m_k=m_k(q-1)$$

ve

$$0 < \frac{m_k}{m'_k-m_k} \leqslant \frac{m_k}{m_k(q-1)} = \frac{1}{q-1}$$

dır. Öyleyse

$$(m'_k-m_k)\,s_{m_k} = o(m'_k-m_k)$$

yani $s_{m_k}=o(1)$ dir. Diğer taraftan, $s_{m'_k}=s_{m_k}$ olduğundan $s_{m'_k}=o(1)$ dir.

Şimdi de $s\neq 0$ olsun, yani $\sigma_n \to s$ olsun. Bu takdirde $\sigma_{m'_k-1}\to s$ ve $\sigma_{m_k-1}\to s$ dır.

Diğer taraftan,

$$(m'_k-m_k)s_{m_k} = m'_k\sigma_{m'_k-1} - m_k\sigma_{m_k-1} = o(m'_k-m_k)$$

olduğundan

$$(m'_k-m_k)(s_{m_k}-s+s) = m'_k\sigma_{m'_k-1} - m_k\,\sigma_{m_k-1}$$

yazabiliriz. Buradan da

$$(m'_k-m_k)(s_{m_k}-s)=m'_k\sigma_{m'_k-1}-m_k\sigma_{m_k-1}-s(m'_k-m_k)$$

$$=m'_k(\sigma_{m'_k-1}-s)-m_k(\sigma_{m_k-1}-s)$$

$$=o(m'_k-m_k)$$

elde edilir. Böylece $s_{m_k}\to s$ ve $s_{m'_k}=s_{m_k}$ olduğundan $s_{m'_k}\to s$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, Hardy Teoremi diye bilinen teoremi vermeden önce, bu teoremi anlamamızda yardımcı olan, kaydırılmış ortalamadan söz etmek yerinde olacaktır. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir Σu_ν serisi verilmiş olsun. k pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$\sigma_{n,k}=\frac{s_n+s_{n+1}+\ldots s_{n+k-1}}{k}$$

$$=\frac{(s_0+s_1+\ldots s_{n-1}+s_n+s_{n+1}+\ldots s_{n+k-1})-(s_0+s_1+\ldots+s_{n-1})}{k}$$

$$=\frac{(n+k)\sigma_{n+k-1}-n\,\sigma_{n-1}}{k}=(1+\frac{n}{k})\,\sigma_{n+k-1}-\frac{n}{k}\,\sigma_{n-1} \tag{2.16}$$

ifadesini göz önüne alalım,

Buradan;

$$\sigma_{n,k}=\frac{1}{k}\{s_n+s_{n+1}+\ldots\ s_{n+k-1}\}$$

$$=\frac{1}{k}\{s_n+(s_n+\sum_{\nu=n+1}^{n+1}u_\nu)+(s_n+\sum_{\nu=n+1}^{n+2}u_\nu)+\ldots+(s_n+\sum_{\nu=n+1}^{n+k-1}u_\nu)\}$$

$$=\frac{1}{k}\{k\ s_n+\sum_{\nu=n+1}^{n+1}u_\nu+\sum_{\nu=n+1}^{n+2}u_\nu+\ldots+\sum_{\nu=n+1}^{n+k-1}u_\nu\}$$

$$=\frac{1}{k}\{k\ s_n+(k-1)u_{n+1}+(k-2)u_{n+2}+\ldots+u_{n+k-1}\}$$

$$=s_n+(1-\frac{1}{k})\,u_{n+1}+(1-\frac{2}{k})\,u_{n+2}+\ldots+\frac{1}{k}\,u_{n+k-1}$$

$$=s_n+\sum_{\nu=n+1}^{n+k-1}(1-\frac{\nu-n}{k})\,u_\nu \tag{2.17}$$

elde edilir. Eğer k=1 ise (2.17) nin sağ tarafındaki toplamı sıfır olarak kabul ediyoruz. Eğer, k,n ile birlikte ∞ a giderken $\frac{n}{k}$ sınırlı ise,bu takdirde $\sigma_{n,k}$ dönüşümü (C,1) metodundan daha kuvvetli bir toplanabilme metodu tanımlar. Gerçekten, eğer $\sigma_n \to s$ $(n\to\infty)$ ise $\sigma_{n,k}\to s$ dır. Bu durum, $\varepsilon_\nu \to 0$ olmak üzere $\sigma_\nu = s+\varepsilon_\nu$ alınırsa (2.16) dan görülür. İşte bu $\sigma_{n,k}$ dönüşümüne kaydırılmış birinci aritmetik ortalama denir. Bu metod bazı uygulamalarda faydalıdır. Diğer taraftan $\sigma_{n,n}=2\sigma_{2n-1}-\sigma_{n-1}$, $\sigma_{n,1}=s_n$ ve $\sigma_{o,n}=\sigma_{n-1}$ olduğu da açıktır. Artık, Hardy teoremini ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 2.15. Eğer $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ serisi, (C,1) toplanabiliyor ve $u_\nu = O(1/\nu)$ ise bu takdirde Σu_ν serisi yakınsaktır[1].

İspat: Kabul edelim ki, $\sigma_\nu \to s$ ve $\nu=1,2,\ldots$ için $|u_\nu| \leqslant \frac{A}{\nu}$ olacak şekilde $A>0$ sayısı mevcut olsun. Bu takdirde (2.17) dan,

$$|\sigma_{n,k}-s_n| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} |u_\nu| \leqslant A \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} \frac{1}{\nu} < A.\frac{k-1}{n}$$

elde edilir. Şimdi, ε pozitif bir sayı ve herhangi bir x reel sayısının tam kısmı $[x]$ ile gösterilmek üzere $k=[n\varepsilon]+1$ olsun. Ayrıca $[x] \leqslant x < [x]+1$ olduğunu da dikkate alırsak

$$|\sigma_{n,k}-s_n| < A\,\frac{k-1}{n} = A.\frac{[n\varepsilon]}{n} \leqslant A\,\frac{n\varepsilon}{n} = A\varepsilon$$

ede edilir.

Diğer taraftan, $\frac{n}{k} < \frac{n}{n\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$ olup $\frac{n}{k}$ sınırlıdır. O halde, $\sigma_\nu \to s$ olduğundan, $\sigma_{n,k}\to s$ dir. Fakat

$$|s_n-s| = |s_n-\sigma_{n,k}+\sigma_{n,k}-s| \leqslant |\sigma_{n,k}-s_n| + |\sigma_{n,k}-s|$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\lim\sup |s_n-s| \leqslant A\varepsilon$$

elde edilir. Böylece ε keyfi olduğundan, $\lim s_n=s$ dir, yani Σu_ν serisi yakınsaktır.

Bu kısımda, Abel toplanabilme metodunu tanımlayarak, daha önce verdiğimiz (C,α) metoduyla ve serinin karekteriyle ilişkilerini inceleyeceğiz.

Tanım 2.16. $\sum_0^\infty u_\nu$ verilen bir seri olmak üzere, eğer $|x|<1$ için, $\sum_{\nu=0}^\infty u_\nu x^\nu$ serisi $f(x)$ toplamına yakınsak ve x reel eksen boyunca 1 e soldan yaklaşmak üzere

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu = \lim_{x\to 1^-} f(x)=s \qquad (2.18)$$

ise, bu takdirde $\sum_0^\infty u_\nu$ serisi s-değerine, Abel Metodu ile toplanabilir veya A-toplanabilir denir[1]. Ayrıca (2.3) dikkate alınırsa, bir (s_ν) dizisinin A-toplanabilirliği

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu$$

limitinin varlığı olarak da tanımlanabilir.

Teorem 2.17. $\alpha>-1$ olmak üzere, eğer $\sum_0^\infty u_\nu$ serisi s-değerine (C,α) toplanabiliyorsa, bu takdirde s e A-toplanabilirdir[1].

İspat: Kabul edelim ki Σu_ν s-değerine (C,α) toplanabilir, yani $\sigma_n^\alpha \to s(n\to\infty)$ olsun. Diğer taraftan, soldan 1 e yaklaşan reel eksen üzerindeki noktaların herhangi bir dizisi (x_n) ve $f(x)=\sum_{\nu=0}^\infty u_\nu x^\nu$ olsun. Bu takdirde, (2.4) deki ikinci eşitlikten dolayı

$$f(x_n)=\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu^\alpha x^\nu = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu^\alpha A_\nu^\alpha x_n^\nu$$

bulunur. Burada sağ taraftaki ifade (σ_ν^α) dizisinin lineer ortalamasıdır. Bu dönüşüme terimleri $a_{n\nu}=A_\nu^\alpha(1-x_n)^{\alpha+1}x_n^\nu$ olan bir M matrisi karşılık gelir, üstelik bu matris pozitif bir matristir. O halde, M matrisinin teorem 2.3 nin şartlarını sağladığını göstermek ispat için yeterlidir:

(i) Her ν için, $\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=\lim_{n\to\infty} A_\nu^\alpha(1-x_n)^{\alpha+1}x_n^\nu=0$,

(ii) (2.4) deki ilk eşitlikten, $\sum_{\nu=0}^\infty A_\nu^\alpha x_n^\nu=(1-x_n)^{-\alpha-1}$ olduğundan,

$$A_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}=(1-x_n)^{\alpha+1}\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha x_n^\nu=1$$

olup, $\lim_{n\to\infty} A_n=1$,

(iii) M pozitif bir matris olduğundan her n için, $B_n=A_n=1$ yani (B_n) sınırlıdır. O halde M matrisi regüler bir matris olduğundan $f(x_n)\to s$ dır. Öyleyse Σu_ν serisi s-değerine A-toplanabilirdir.

Teorem 2.18. $\alpha > -1$ olmak üzere, eğer $\sum_0^\infty u_\nu$ serisi bir sonlu s-değerine (C,α) toplanabiliyorsa, bu takdirde birim çemberin x=1 noktasından geçen iki krişi arasında kalan herhangi bir L yolu boyunca $x\to 1$ iken (2.18) sağlanır[1].

Burada 1 noktasının komşuluğunda L yolu

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} \leqslant \text{sabit} \qquad (2.19)$$

eşitsizliği ile karekterize edilir[4].

İspat: Bir L yolu boyunca 1 e yaklaşan noktaların herhangi bir dizisi (x_n) olsun. Bu takdirde, teorem 2.17 nin ispatında olduğu gibi $f(x_n)$, (σ_ν^α) dizisinin M matrisiyle meydana getirilen lineer ortalamasıdır. Burada da yine $M=(a_{n\nu})$ matrisinin elemanları $a_{n\nu}=A_\nu^\alpha(1-x_n)^{\alpha+1}x_n^\nu$ şeklinde tanımlıdır. O halde M matrisinin regüler olduğunu göstermek ispatı tamamlar. (i) ve (ii) şartları teorem 2.17 nin ispatında olduğu gibidir. M matrisi pozitif bir matris değildir, fakat her n için,

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha\ |1-x_n|^{\alpha+1}|x_n|^\nu$$

$$= |1-x_n|^{\alpha+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha\ |x_n|^\alpha$$

$$= |1-x_n|^{\alpha+1} / (1-|x_n|)^{\alpha+1}$$

olup, (2.19) den dolayı (B_n) sınırlıdır. O halde $f(x_n)\to s$ dir.

Teorem 2.19. Terimleri $o(1/n)$ olan bir $\sum_n u_n$ serisinin sırasıyla Abel ortalamasını ve kısmi toplamını $f(x)$ ve s_n ile gösterelim. Bu takdirde, eğer $N=[1/(1-x)]$ ise $x\to 1^-$ iken,

$$f(x)-S_N \to o \qquad (2.20)$$

dır. Özel olarak, serinin Abel toplanabilir olması için gerek ve yeter şart yakınsak olmasıdır. Eğer $u_n=o(1/n)$ şartı yerine $u_1 + 2u_2+\ldots+nu_n=o(n)$ alınırsa (2.20) bağıntısı yine sağlanır[1].

Bu teoreme Tauber teoremi adı verilir.

İspat: İlk olarak kabul edelim ki $\xi_n=nu_n\to 0$ olsun.

$$f(x)-S_N = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n - \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{1}^{N} u_n(x^n-1)+\sum_{N+1}^{\infty} u_n x^n = P+Q$$

diyelim. $N=[1/(1-x)]$ olduğundan $N\leqslant \frac{1}{1-x} < N+1$ dir. Ayrıca $1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})$ ve $|x|<1$ olması nedeniyle $1-x^n \leqslant n(1-x)$ olduğu açıktır. O halde,

$$|P| \leqslant \sum_{1}^{N} |u_n|\ |x^n-1| = \sum_{1}^{N} \left|\frac{\xi_n}{n}\right|\ |1-x^n| \leqslant (1-x)\sum_{1}^{N} |\xi_n|$$

$$\leqslant N^{-1}\sum_{1}^{N} |\xi_n| \to o\ (N\to\infty)$$

ve

$$|Q| \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|\xi_n|}{n} x^n \leqslant (N+1)^{-1} \max_{n>N} |\xi_n| \sum_{N+1}^{\infty} x^n$$

$$\leqslant (N+1)^{-1} \max_{n>N} |\xi_n| \sum_{0}^{\infty} x^n$$

$$= \frac{1}{(N+1)(1-x)} \max_{n>N} |\xi_n| \to o\ (N\to\infty)$$

elde edilir. Böylece $N\to\infty$ için $p+Q\to o$ olup $x\to 1^-$ iken $f(x)-S_N\to o$ olduğu görülür.

İkinci olarak, kabul edelim ki $\nu_0=0$ ve $n>0$ için $\nu_n=u_1+2u_2+\ldots nu_n=o(n)$ olsun. Abel kısmi toplam formülünden,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k - \nu_{k-1}}{k}$$

$$= u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sum_{i=1}^{k} (\nu_i - \nu_{i-1}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\nu_i - \nu_{i-1})$$

$$= u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\nu_k}{k(k+1)} + \frac{\nu_n}{n}$$

$$= u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{k(k+1)} + \frac{\nu_n}{n+1}$$

elde edilir. $\nu_n = o(n)$ olduğundan $\sum_0^\infty u_k$ ve $u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{k(k+1)}$ serilerinin yakınsak durumları aynıdır.

Bundan dolayı, eğer t_n ve $g(x)$ sırasıyla ikinci serinin kısmi toplamı ve Abel ortalaması ise

$$S_N - t_N \to o, \quad f(x) - g(x) \to o \text{ dır.}$$

Fakat ikinci serinin terimleri $o(1/n)$ olduğundan bir önceki durum nedeniyle $x \to 1^-$ iken $g(x) - t_N \to 0$ dır. Bu ve bundan önceki iki bağıntı dikkate alınırsa

$$|f(x) - S_N| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - t_N| + |t_N - S_N|$$

olduğundan

$x \to 1^-$ iken $f(x) - S_N \to o$ dır. Bu ise, ispatı tamamlar.

Iraksak seriler teorisine paralel olarak, ıraksak integraller teorisini de kurmak mümkündür. Burada, örnek olarak, daha önce seriler için verdiğimiz (C,1) metodunun benzerini söz konusu teori için tanımlayacağız:

Tanım 2.20. $A(u)$, $u \geq 0$ için tanımlı ve her $0 \leq u \leq u_0$ sonlu aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$u \to \infty \quad \text{iken,} \quad u^{-1} \int_0^u A(\nu) d \to s \tag{2.21}$$

ise, birinci aritmetik ortalama metodu ile $u \to \infty$ iken $A(u) \to s$ dir denir ve

$(C,1) \lim_{u\to\infty} A(u)=s$ şeklinde gösterilir[1].

Açık olarak, eğer $u\to\infty$ iken $A(u)\to s$ ise, bu takdirde (2.21) sağlanır. Gerçekten de $u\to\infty$ iken $A(u)\to s$ olsun. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ için, G yeteri kadar büyük bir sayı olmak üzere her $u>G$ için $|A(u)-s|<\varepsilon$ dur. Öyleyse her $u>G$ için,

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u A(\nu)d\nu-s\right| = \left|\frac{1}{u}\int_0^u A(\nu)d\nu-\frac{1}{u}\int_0^u s\,d\nu\right|$$

$$= \left|\frac{1}{u}\int_0^u (A(\nu)-s)d\nu\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{u}\int_0^u |A(\nu)-s|d\nu < \frac{1}{u}\int_0^u \varepsilon\, d\nu=\varepsilon$$

dur. Öyleyse $u\to\infty$ iken (2.21) sağlanır.

Şimdi, $a(\nu)$, her $0\leqslant\nu\leqslant\nu_0$ sonlu aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty a(\nu)d\nu \tag{2.22}$$

integralini göz önüne alalım. Eğer, $A(u)=\int_0^u a(\nu)d\nu$ kısmi integralleri (2.21) yi sağlıyorsa, bu takdirde (2.22) s-değerine (C,1) toplanabilir denir ve

$$(C,1)\int_0^\infty a(\nu)d\nu=s \tag{2.23}$$

şeklinde gösterilir. Eğer (2.22) s-değerine yakınsak yani $u\to\infty$ iken $A(u)\to s$ ise bu takdirde (2.23) nin sağlanacağı açıktır. Şimdi bu duruma ilişkin aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.21. $x\neq 0$ veya $x=0$ durumuna göre

$$\int_0^\infty e^{ix\nu}\,d\nu$$

integrali ix^{-1} değerine veya $+\infty$ a (C,1) toplanabilirdir. Gerçekten, $a(\nu)=e^{ix\nu}$ dersek, $x\neq 0$ ise,

$$A(u) = \int_0^u e^{ix\nu}\, d\nu = \frac{i}{x}\,(1-e^{ixu})$$

olup,

$$\frac{1}{u}\int_0^u A(\nu)d\nu = \frac{i}{x} - \frac{e^{ixu}}{x^2u} + \frac{1}{x^2u} \to ix^{-1}(u\to\infty\ )$$

bulunur, yani

$$(C,1\ )\int_0^\infty e^{ix\nu}\, d\nu = ix^{-1}$$

dır.

Eğer x=0 ise,

$$A(u) = \int_0^u e^{ix\nu}\, d\nu = u$$

olup,

$$\frac{1}{u}\int_0^u A(\nu)d\nu = \frac{1}{u}\int_0^u \nu d\nu = \frac{u}{2} \to +\infty\ (u\to\infty)$$

bulunur. Dolayısıyla x=0 için,

$$\int_0^\infty e^{ix\nu}\, d\nu$$

integrali $+\infty$ (C,1) toplanabilirdir.

Şimdi bir $\sum\limits_0^\infty a_n$ serisini göz önüne alalım. Bu takdirde, $A_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$ kısmi toplam fikrini genelleştirerek,

$$A(u) = \sum_{n\leq u} a_n \qquad (u\geq 0)$$

formülü ile A(u) toplam fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece $n \leq u < n+1$ için, $A(u)=A_n$ olacak şekilde A(u) bir merdiven fonksiyonudur. u=n noktasında A(u), a_n kadar sıçrama yapar. Artık, A(u) toplam fonksiyonu fikrinden faydalanarak serilerin ve integrallerin (C,1) toplanabilirliği arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verebiliriz:

Teorem 2.22. Bir $\sum_0^\infty a_n$ serisinin, sonlu bir s-değerine (C,1) toplanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$(C,1)\lim_{u\to\infty} A(u)=s$$

olmasıdır[1].

İspat: Kabul edelim ki, $n\leqslant u<n+1$ olsun. Bu takdirde s_n, Σa_n serisinin kısmi toplamı olmak üzere,

$$\frac{1}{u}\int_0^u A(t)dt=\frac{1}{u}\left\{\int_0^1 A(t)dt+\int_1^2 A(t)dt+\ldots+\int_{n-1}^n A(t)dt+\int_n^u A(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{u}\left\{\int_0^1 s_0dt+\int_1^2 s_1dt+\ldots+\int_{n-1}^n s_{n-1}dt+\int_n^u s_ndt\right\}$$

$$=\frac{s_0+s_1+\ldots s_{n-1}+(u-n)s_n}{u}$$

$$=\frac{n}{u}\sigma_{n-1}+\frac{u-n}{u}s_n \tag{2.24}$$

yazabiliriz. Eğer $\sigma_n\to s(n\to\infty)$ ise bu takdirde $(n+1)\sigma_n-n\sigma_{n-1}=s_n$ ve $(1+\frac{1}{n})\sigma_n-\sigma_{n-1}=\frac{s_n}{n}$ olduğundan $s_n=o(n)$ dır. Diğer taraftan $n\leqslant u<n+1$ olduğundan $0\leqslant u-n<1$ ve $0\leqslant(u-n)n<n$ olup

$$0\leqslant\frac{(u-n)n}{u}<\frac{n}{u}\leqslant 1$$

dır. Ayrıca,

$$\frac{u-n}{u}s_n=\frac{(u-n)n}{u}\frac{s_n}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

dır.

Bundan başka $1\leqslant\frac{u}{n}<1+\frac{1}{n}$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\frac{u}{n}=1$ dır. Böylece, eğer $n\to\infty$ iken $\sigma_n\to s$ ise (2.24) deki ifadenin sağ tarafı s-değerine yakınsar. Bu ise

(C,1) $\lim_{u\to\infty} A(u)=s$ demektir. Aksine olarak $u\to\infty$ iken

$$\frac{1}{u}\int_0^u A(t)dt \to s$$

olsun. Bu takdirde (2.24) de u=n alırsak $n\to\infty$ iken $\sigma_n \to s$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Dikkat edilirse, bu bölümde incelediğimiz toplanabilme metotlarında hep nümerik terimli serileri göz önüne aldık. Fakat, benzer sonuçlar fonksiyon serileri içinde geçerlidir. Örneğin; $\alpha>-1$ olmak üzere, eğer $\Sigma u_\nu(t)$ serisi t noktalarının bir E cümlesi üzerinde düzgün (C,α) toplanabiliyorsa bu takdirde E üzerinde, düzgün olarak A-toplanabilirdir ve $\beta>\alpha$ için düzgün (C,β) toplanabilirdir. İşte biz, bu ve benzeri konuları bir sonraki bölümde incelemeyi uygun bulduk.

Ü Ç Ü N C Ü B Ö L Ü M

S[f] VE $\tilde{S}$[f] SERİLERİNİN TOPLANABİLİRLİĞİ

Adî anlamda yakınsak olmayan bir çok sonsuz serilere, toplanabilme metotları olarak adlandırılan yeni metotlar sayesinde yeni bir manâ verilmiş ve böylece bir takım uygulama sahaları da açılmıştır. Bunlardan en önemlisi, Fransız Matematikci L.Fejér tarafından 1904'de (C,1) metodunun Fourier serilerine uygulanmasıdır. Birinci bölümde belirttiğimiz gibi, integrallenebilen bir f fonksiyonunun Fourier serisinin yakınsak ve toplamının f(x) e eşit olması için gerek ve yeter şartlar bilinmemektedir. Fakat Fourier serileri için yakınsaklık problemi yerine toplanabilmeyi alırsak, problem oldukça basit bir hale indirgenmiş olur.

İşte biz bu son bölümde birer değişken terimli seri olan S[f] ve $\tilde{S}$[f]nın değişik şartlar altında (C,1) ve (C,α) toplanabilirliği üzerinde duracağız. Ancak bu konuya girmeden önce, kullanacağımız bazı notasyonları vermek ve ayrıca S[f] ve $\tilde{S}$[f] nın toplanabilirliği hakkında aşağıdaki genel gözlemleri yapmak yerinde olacaktır[1]. Şimdi, (s_n) verilen sınırlı bir dizi ve $M=(a_{nk})$ de regüler bir matris olsun. Bu takdirde (s_n) dizisinin M matrisiyle elde edilen

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k \tag{3.1}$$

lineer ortalamasını göz önüne alalım. Eğer (s_n) bir $\sum_{0}^{\infty} u_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ise ve (3.1) de $s_k= \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu$ yazılırsa, bu takdirde mutlak yakınsak serilerde terimlerin yerleri istenildiği gibi değiştirilebildiğinden,

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \sum_{k=\nu}^{\infty} a_{nk}$$

elde edilir. Diğer taraftan, her n, $k\epsilon|N$ için,

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{n\nu}$$

dersek,

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}u_k \tag{3.2}$$

olacaktır. Burada (3.2) ifadesine Σu_k serisinin lineer ortalaması da denir.

Bu çalışmada, bizi ilgilendiren bütün durumlarda α_{nk} lar her n için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| < \infty \tag{3.3}$$

şartını sağlar ve bundan böyle bunu kabul edeceğiz. Burada şunu da ilave edelim ki, (s_n) dizisinin sınırlı olması şartı altında (3.1) den (3.2)ye geçiş mümkün olmaktadır. Eğer, özel olarak M matrisi satır-sonlu ise(s_n) dizisi üzerine konulan sınırlılık şartı kaldırılabilir ki, bu durumda (3.1) den (3.2) ye geçiş aşikâr olarak doğrudur. Ayrıca, M matrisi satır-sonlu ise (3.3) otomatik olarak sağlanır. Görüldüğü gibi (3.2) formu (3.1) den çok daha doğal ve basittir. Bu bölümdeki çalışmalarımızda(3.2) yi yeni bir başlama noktası olarak göz önüne alacak ve bu fikri Fourier serilerine uygulayacağız.

Şimdi,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt \tag{3.4}$$

$$\sum^{\infty} \sin kt \tag{3.5}$$

serilerini göz önüne alalım. Birinci bölümden biliyoruz ki, bu iki serinin sırasıyla Dirichlet çekirdeği ve Konjüge Dirichlet çekirdeği denen n ninci kısmi toplamları

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} \text{ ve } \tilde{D}_n(t)= \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

idi. Dolayısıyla $D_n(t)$ ve $\tilde{D}_n(t)$ dizilerinin her n için sınırlı olduğu açıktır. Diğer taraftan, çalışmalarımızda yukarıdaki iki temel serinin lineer ortalamaları çok önemli rol oynar. Bu iki serinin lineer ortalamalarını sırasıyla,

$$K_n(t) = \frac{1}{2}\alpha_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\cos kt \tag{3.6}$$

$$\tilde{K}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \sin kt \tag{3.7}$$

ile gösterelim. Bunlar, her ikisi de sürekli ve sırasıyla t nin çift ve tek fonksiyonlarıdır. Eğer bu lineer formlar sırasıyla (3.1) formunda verilirse, bu takdirde açık olarak

$$K_n(t)= \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}D_k(t)= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\sin(k+\frac{1}{2})t, \tag{3.8}$$

$$\tilde{K}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \tilde{D}_k(t)= A_n \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t - \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\cos(k+\frac{1}{2})t \tag{3.9}$$

olacaktır. (3.9) ifadesindeki $A_n= \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ dır. Ayrıca, (3.4) serisinin lineer ortalamasına M metoduna karşılık gelen çekirdek, (3.5) serisinin lineer ortalamasına da Konjüge çekirdek denir. a_k, b_k $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilen 2π periyotlu bir f fonksiyonunun Fourier katsayıları olmak üzere, S[f] ve $\tilde{S}[f]$ nın lineer ortalamaları sırasıyla

$$\sigma_n(x)= \sigma_n(x;f)= \frac{1}{2} a_0\alpha_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\cos kx+b_k\sin kx)\alpha_{nk} \tag{3.10}$$

$$\tilde{\sigma}_n(x)= \tilde{\sigma}_n(x;f)= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\sin kx-b_k\cos kx)\alpha_{nk} \tag{3.11}$$

olsun. (3.10) da a_k, b_k Fourier katsayılarını yerine koyarsak,

$$\sigma_n(x)=\alpha_{n0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\ \{(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt dt)\cos kx$$

$$+(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt dt)\sin kx\}$$

$$=\alpha_{n0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\ [\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx]dt$$

$$=\alpha_{n0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k(t-x)dt$$

bulunur.

Diğer taraftan (3.3) dikkate alınırsa Weierstrass Kriteri gereğince, $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\cos k(t-x)$ serisi $[-\pi,\pi]$ aralığında düzgün yakınsak ve bu aralıkta serinin terimleri t ye göre sürekli olduğundan, son eşitlikte toplam ile integralin sırasını değiştirebiliriz. Dolayısıyla Lemma 1.3 de dikkate alınırsa

$$\sigma_n(x)=\alpha_{n0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f((t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\cos k(t-x)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\frac{1}{2}\alpha_{n0}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\cos k(t-x)]\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_n(t-x)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_n(t)dt \qquad (3.12)$$

elde edilir. Benzer olarak, (3.11) de a_k, b_k Fourier katsayıları yerine yazılır ve (3.3) dikkate alınırsa (3.11) ifadesi de

$$\tilde{\sigma}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\tilde{K}_n(t)dt \qquad (3.13)$$

biçiminde yazılır.

Şimdi, aşağıda vereceğimiz şartlar altında S[f] nin toplanabilirliğini inceleyelim:

I. Daima, n=0,1,2,... için

$$\alpha_{n0} = 1 \qquad (3.14)$$

olduğunu kabul edeceğiz ve (3.14) e (A) şartı diyeceğiz. Aynı zamanda (A) şartını

$$(A)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$$

biçiminde de ifade edebiliriz. Gerçekten de (3.3) dikkate alınır ve(3.6) eşitliğinin her iki tarafının $-\pi$ den π ye kadar integrali alınırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{2}\alpha_{n0}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\cos kt\Big)dt = \pi\alpha_{n0}$$

elde edilir. Buradan da, her n=0,1,2,... için

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \alpha_{n0} = 1$$

olacaktır. Eğer (A) şartı sağlanıyorsa, bu takdirde,

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)-f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,K_n(t)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+t)-f(x)]\,K_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,K_n(t)dt\end{aligned}$$

bulunur. Burada ilk integralde t=-u dönüşümü yapar ve $K_n(t)$ nin çift olduğunu göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)-f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x-t)-f(x)]\,K_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,K_n(t)dt\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,K_n(t)dt\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi_x(t)K_n(t)dt \qquad (3.15)\end{aligned}$$

yazabiliriz.

II. Eğer, her n için, $K_n(t)$ (A) şartını sağlıyor ve her n için,

$$(B)\ K_n(t) \geq 0$$

ise $K_n(t)$ ye pozitif bir çekirdektir diyeceğiz.

III. C, n den bağımsız bir sabit olmak üzere, eğer, sadece

$$(B')\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|dt \leq C$$

ise $K_n(t)$ çekirdeğine quasi-pozitiftir diyeceğiz. (A) şartından görüldüğü gibi her pozitif çekirdek quasi-pozitiftir. Şimdi, aşağıda vereceğimiz teorem (3.12) nin bir sonucu olmaktadır.

Teorem 3.1 . Eğer $K_n(t)$ pozitif bir çekirdek ise bu takdirde, $m \leq f \leq M$ şartını sağlayan herhangi bir f fonksiyonu için

$$m \leq \sigma_n(x;f) \leq M \tag{3.16}$$

dır. Eğer $K_n(t)$ quasi-pozitif ve $|f| \leq M$ ise bu takdirde

$$|\sigma_n(x;f)| \leq CM \tag{3.17}$$

dir. Buradaki C sabiti, (B') şartındaki aynı sabittir[1].

İspat:

(i) $K_n(t)$ pozitif bir çekirdek ve f de $m \leq f \leq M$ şartını sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $m \leq f(x+t) \leq M$ ve her n için $K_n(t) \geq 0$ olduğundan

$$mK_n(t) \leq f(x+t)K_n(t) \leq MK_n(t)$$

dır. Buradan ise

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} mK_n(t)dt \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} MK_n(t)dt$$

elde edilir ki, bunun anlamı $m \leq \sigma_n(x;f) \leq M$ dir.

(ii) Şimdi de $K_n(t)$ quasi-pozitif ve $|f| \leqslant M$ olsun. Bu takdirde (3.12)den

$$|\sigma_n(x;f)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\ |K_n(t)|dt \leqslant M\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|dt \leqslant CM$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

Şimdiye kadar göz önüne aldığımız (A), (B) ve (B') şartlarına ilave olarak, şimdi bir (C) şartı daha verelim:

IV. $$\mu_n(\delta) = \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi}|K_n(t)|, \quad (0<\delta\leqslant\pi) \qquad (3.18)$$

olsun.

$0 < \delta \leqslant \pi$ olmak üzere, eğer her δ sabiti için

$$\text{(C)} \quad \mu_n(\delta) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ise $K_n(t)$ çekirdeği (C) şartını sağlıyor diyeceğiz.

Eğer (C) şartı sağlanıyorsa, bu takdirde $t=0$ ın bir keyfi küçük komşuluğu dışında (3.4) serisi sıfıra düzgün M-toplanabilirdir. Gerçekten de her $\delta > 0$ sabiti için $\mu_n(\delta) \to 0 (n\to\infty)$ ise bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) \varepsilon |N$ vardır. Öyle ki her $n > n_0$ ve her $t \varepsilon [\delta, \pi]$ için $|\mu_n(s)| < \varepsilon$ dur. Diğer taraftan (3.18) den her n ve her $t\varepsilon[\delta, \pi]$ için $|K_n(t)| \leqslant \mu_n(\delta)$ olduğundan her $n > n_0(\varepsilon)$ ve her $t\varepsilon[\delta, \pi]$ için $|K_n(t)| < \varepsilon$ dur. Öyleyse (3.4) serisi sıfıra düzgün M-toplanabilirdir.

Artık, yukarıdaki verdiğimiz şartları göz önüne alarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.2. Kabul edelim ki, $K_n(t)$ çekirdeği (A), (B)[veya (B) nin yerine (B')] ve (C) şartlarını sağlasın. İntegrallenebilir herhangi bir f fonksiyonu için, eğer $f(x_0 \pm 0)$ sayıları mevcut ve sonlu ise bu takdirde $n \to \infty$ iken,

$$\sigma_n(x_0) \to \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x-0)] \qquad (3.19)$$

dır.

Özel olarak, eğer x_0 noktasında f sürekli ise bu takdirde $n\to\infty$ iken

$$\sigma_n(x_0) \to f(x_0) \tag{3.20}$$

dır.

Eğer f bir $I= [\alpha,\beta]$ kapalı aralığının her noktasında sürekliyse bu takdirde (3.20) bağıntısı $x_0 \varepsilon I$ ya göre düzgün olarak sağlanır. Özel olarak, eğer f her yerde sürekliyse bu takdirde (3.20), x_0 noktasına göre düzgün olarak sağlanır[1].

İspat:

(i) İlk olarak, kabul edelim ki $K_n(t)$ çekirdeği (A), (B) ve (C) şartlarını sağlasın. Ayrıca f integrallenebilir bir fonksiyon ve $f(x_0 \pm 0)$ sayıları mevcut ve sonlu olsun. Şimdi bir g yardımcı fonksiyonunu,

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] & ; \quad x=x_0 \text{ ise} \\ f(x) & ; \quad x\neq x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde f ve g fonksiyonları hemen her yerde eşit ve f integrallenebilir olduğundan aynı Fourier serisine sahiptirler. Yani $S[f] =S[g]$ dir. Dolayısıyla, açık olarak $S[f]$ ve $S[g]$ nin de lineer ortalamaları aynı olacaktır, yani

$$\sigma_n(x;f) = \sigma_n(x;g)$$

dir.

Diğer taraftan;

$$\varphi x_0(t)= \frac{1}{2}\{ g(x_0+t)+g(x_0-t)-2g(x_0) \}$$

$$= \frac{1}{2}\{ f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0) \}$$

olur. $f(x_0 \pm 0)$ mevcut ve sonlu olduğundan, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(x_0+t)=f(x_0+0)$ ve $\lim\limits_{t\to 0^+} f(x_0-t)=$ (x_0-0) olup, $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi x_0(t)=0$ dır. Öyleyse verilen bir $\varepsilon>0$ için, en az bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ bulabiliriz, öyle ki,

$0 < t < \delta = \delta(\varepsilon)$ için,

$$|\varphi x_0(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{3.21}$$

dır. Diğer taraftan,

$$|\sigma_n(x_0;g)-g(x_0)| = |\sigma_n(x_0;f)-\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]|$$

dır. Öyleyse (3.15) den dolayı

$$|\sigma_n(x_0;g)-g(x_0)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\varphi x_0(t)|\,K_n(t)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}|\varphi x_0(t)|K_n(t)dt+\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi x_0(t)|K_n(t)dt$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\delta}K_n(t)dt+\frac{2\mu_n(\delta)}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi x_0(t)|dt$$

$$< \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)dt+\frac{2\mu_n(\delta)}{\pi}\int_0^{\pi}|\varphi x_0(t)|dt$$

$$= P+Q \tag{3.22}$$

elde edilir.

Burada (A) şartından ve $K_n(t)$ çift olduğundan dolayı

$$P = \frac{1}{2}\varepsilon \tag{3.23}$$

bulunur. Ayrıca (C) şartından dolayı da

$$Q \to 0 \; (n \to \infty) \tag{3.24}$$

olacaktır. Böylece her $n > n_0$ için

$$P+Q < \varepsilon \tag{3.25}$$

bulunur. Bunun anlamı ise $n \to \infty$ iken,

$$\sigma_n(x_0;f)\to \frac{1}{2}\,[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$$

dır. Eğer f, x_0 noktasında sürekli ise f=g olup, aşikâr olarak (3.20) sağlanır.

Şimdi de f fonksiyonu $I=[\alpha,\beta]$ aralığının her noktasında sürekli (f nin $x=\alpha$ da soldan ve $x=\beta$ da sağdan sürekli olduğunu farz ediyoruz) olsun. Öyleyse f, I da düzgün süreklidir. Dolayısıyla her $x_0 \in I$ için (3.21) sağlanacak şekilde x_0 dan bağımsız bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ bulabiliriz. O halde, önceki gibi (3.23) elde edilir. Diğer taraftan Q daki integral,

$$2\int_0^{\pi} |\varphi_{x_0}(t)|dt \leqslant \int_0^{\pi} (|f(x_0+t)|+|f(x_0-t)|+2|f(x_0)|)dt$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+\pi} |f(t)|dt+\int_{x_0-\pi}^{x_0} |f(t)|dt+2\pi|f(x_0)|$$

$$=\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} |f(t)|dt+2\pi|f(x_0)|=\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt+2\pi|f(x_0)|$$

olduğundan (3.24) I da düzgün olarak sağlanır. Sonuç olarak, (3.25) I da düzgün olarak sağlanır. Dolayısıyla (3.20) $x_0 \in I$ ya göre düzgün olarak sağlanır. Özel olarak, eğer f her yerde sürekli ise bu takdirde (3.20) nin x_0 noktasına göre düzgün olarak sağlanacağı da açıktır.

(ii) İkinci olarak, kabul edelim ki, $K_n(t)$ çekirdeği (A), (B') ve (C) şartlarını sağlasın. Bu takdirde, yukarıdaki yaptığımız işlemlerde yalnızca küçük değişiklikler yapmak gerekmektedir. Gerçekten de (3.22) de ($K_n(t)$ yerine $|K_n(t)|$ alırsak, $K_n(t)$ çift olduğundan

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |K_n(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}\,C$$

olup, önceki notasyonlarla

$$P \leqslant \frac{1}{2}\,C\pi \ , \ Q\to 0(n\to\infty)$$

olacaktır ve önceki gibi takip edilen netice elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$(\tilde{\sigma}_n(x))$ nın yakınsaklığının incelenmesi, teorem 3.2 kadar basit değildir. Fakat, her n için (3.9) da $A_n=1$ kabul edersek,

$$H_n(t) = \tilde{K}_n(t) - \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t$$

farkı (3.8) deki $K_n(t)$ ile bazı benzerlikler gösterir. Bu durumda,

$$\tilde{\sigma}_n(x) - \tilde{f}(x;1/n) = \tilde{\sigma}_n(x) - \{ -\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\,\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t\,dt\}$$

hakkında elde edilecek sonuçların, $\sigma_n(x)$ hakkındaki sonuçlarla bazı benzerlikler göstereceğini söyleyebiliriz. Bu benzerlikler çalışma ilerledikçe yer yer görülecektir.

Şimdi, birinci aritmetik ortalama metodu ile S[f] ve $\tilde{S}$[f] nın toplanabilirliğini incelemek istiyoruz. Ancak, burada şunu da söyleyelim ki, bundan sonraki çalışmalarımız yukarıdaki düşüncelerle bir paralellik arz edecektir. İlk olarak S[f] nin (C,1) toplanabilirliğini inceleyeceğiz: (3.4) serisi için, (C,1) metoduna tekabül eden çekirdek,

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sin(\nu+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} \qquad (3.26)$$

dır. Burada, sağ taraftaki son toplamın önündeki ifadenin pay ve paydasını $2\sin\frac{1}{2}t$ ile çarpalım.

$$2\sin(\nu+\frac{1}{2})t\,\sin\frac{1}{2}t = \cos\nu t - \cos(\nu+1)t$$

olduğundan

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)t}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2} = \frac{2}{n+1}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right\}^2 \qquad (3.27)$$

bulunur. Böylece (C,1) çekirdeği pozitiftir. Burada (C,1) metoduna karşılık gelen $K_n(t)$ çekirdeğine Fejér çekirdeği de denir. Diğer taraftan $K_n(t)$ çekirdeği aşağıdaki özelliklere sahiptir:

I. (A) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$

dir. (A) şartını (3.26) dan elde edebiliriz.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu(t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu(t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_\nu(t)dt$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \cos kt\right)dt$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\nu}\pi = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1$$

dır.

II. $K_n(t)$ pozitif olduğundan,

$$\text{(B)} \quad K_n(t) \geq 0$$

dır.

III. $\mu_n(\delta) = \max\limits_{\delta \leq t \leq \pi} K_n(t)$ $(0 < \delta \leq \pi)$ olmak üzere her $0 < \delta \leq \pi$ için,

$$\text{(C)} \quad \mu_n(\delta) \to 0 \ (n \to \infty)$$

dır. Gerçekten, (3.27) yi göz önüne alırsak, $0 < \delta \leq \pi$ olmak üzere

$$\mu_n(\delta) = \max_{\delta \leq t \leq \pi} K_n(t) = \max_{\delta \leq t \leq \pi}\left\{\frac{2}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right]^2\right\}$$

$$\leq \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{1}{2}\delta}$$

olduğundan (C) şartı gerçeklenmektedir. Böylece, önceki terminoloji ile $K_n(t)$; (A), (B) ve (C) şartlarını sağlayan bir çekirdektir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem, teorem 3.1 ve teorem 3.2 nin bir sonucudur. Ayrıca S[f] nin (C,1) ortalamasının da

$$\sigma_n(x)=\sigma_n(x;f)=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right\}^2 dt \tag{3.28}$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.3. Her x_0 noktasında $f(x_0\pm 0)$ limitleri mevcut ise bu takdirde

$$\sigma_n(x_0)\to\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$$

dır. Özel olarak f nin sürekli olduğu her noktada $\sigma_n(x_0)\to f(x_0)$ dır. f nin sürekli olduğu noktaların her kapalı aralığı üzerinde $(\sigma_n(x_0)), f(x_0)$ a düzgün yakınsaktır. Özel olarak, eğer f her yerde sürekli ise $(\sigma_n(x))$ $f(x)$ e düzgün yakınsaktır.

Eğer, her x için $m\leqslant f(x)\leqslant M$ ise bu takdirde,

$$m\leqslant\sigma_n(x)\leqslant M \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

dır[9].

Bu teoreme Fejér teoremi adı verilir.

Şimdi de, değişik bir şart altında S[f] nin (C,1) toplanabilirliğini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.4. $h\to 0^+$ iken $\Phi_x(h)=\int_0^h|\varphi_x(t)|dt=o(h)$ olmak üzere, her x noktasında (özel olarak, hemen her yerde) S[f] f(x) e (C,1) toplanabilirdir [3].

İspat:

$$D_\nu(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\nu}\cos kt$$

olduğundan, $\nu=0,1,\ldots n$ için, $|D_\nu(t)|\leqslant \nu+\frac{1}{2}<n+1$ dir. Diğer taraftan, (3.26) dan,

$$K_n(t)=|K_n(t)|\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|D_\nu(t)|<n+1$$

dır. Ayrıca $0<t\leqslant\pi$ olmak üzere, (3.27) yi göz önüne alalım. Birinci bö-

lümden $0 \leqslant u \leqslant \pi/2$ için $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi} u$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse $0 < t/2 \leqslant \pi/2$ için $2\sin\frac{1}{2}t \geqslant \frac{2}{\pi}t$ olup

$$\frac{1}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{t^2} \tag{3.29}$$

dır.

Dolayısıyla,

$$K_n(t) = \frac{2}{n+1}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right\}^2 \leqslant \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{(n+1)t^2} = \frac{A}{(n+1)t^2}$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu iki ifadeyi birlikte

$$K_n(t) < n+1, \quad K_n(t) \leqslant \frac{A}{(n+1)t^2} \quad (0 < t \leqslant \pi, A \text{ bir sabit}) \tag{3.30}$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan, (3.15) den,

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_x(t) K_n(t)\,dt \tag{3.31}$$

olduğunu biliyoruz. O halde (3.30) ifadesini (3.31) de kullanırsak,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\varphi_x(t)| K_n(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{1/n} |\varphi_x(t)| K_n(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi} |\varphi_x(t)| K_n(t)\,dt$$

$$\leqslant \frac{2(n+1)}{\pi}\int_0^{1/n} |\varphi_x(t)|\,dt + \frac{2A}{\pi}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|\varphi_x(t)|}{(n+1)t^2}\,dt$$

$$= P + Q \tag{3.32}$$

olacaktır. $h \to 0^+$ iken $\Phi_x(h) = o(h)$ olduğundan

$$P \leqslant (n+1)\,\Phi_x(1/n) \leqslant 2n\Phi_x(1/n) \to 0 \,(n \to \infty) \tag{3.33}$$

dır.

Kısmi integrasyon metoduyla,

$$Q=\frac{2A}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}\frac{|\varphi x(t)|}{(n+1)t^2}\,dt=\frac{2A}{\pi(n+1)}\left[\Phi_x(t)t^{-2}\right]_{1/n}^{\pi}+\frac{4A}{\pi(n+1)}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\Phi_x(t)}{t^3}\,dt$$

$$\leq \frac{2A}{\pi^3(n+1)}\Phi_x(\pi)+\frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi}o(1/t^2)dt=o(1) \qquad (3.34)$$

bulunur. Böylece $P+Q=o(1)$ dır. Öyleyse $\Phi_x(h)=o(h)$ olacak şekilde her x için, S[f], f(x) e (C,1) toplanabilirdir. Ayrıca, hemen her x için, $h\to 0^+$ iken $\Phi_x(h)=o(h)$ olduğundan, bu durumda da S[f], f(x) toplamına (C,1) toplanabilirdir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi de ikinci olarak $\tilde{S}[f]$ nın (C,1) toplanabilirliği üzerinde duralım: (3.5) serisi için (C,1) metoduna tekabül eden Konjüge Fejér çekirdeği,

$$\tilde{K}_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\tilde{D}_\nu(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\cos(\nu+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} \qquad (3.35)$$

dır. Burada sağ taraftaki son toplamın önündeki ifadenin pay ve paydasını $2\sin\frac{1}{2}t$ ile çarpalım.

$$2\sin\frac{1}{2}t\cos(\nu+\frac{1}{2})t=\sin(\nu+1)t-\sin\nu t$$

olduğundan,

$$\tilde{K}_n(t)=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t-\frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)t}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2}$$

$$=\frac{(n+1)2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t-\sin(n+1)t}{(n+1)(2\sin\frac{1}{2}t)^2}$$

$$=\frac{(n+1)\sin t-\sin(n+1)t}{(n+1)(2\sin\frac{1}{2}t)^2} \qquad (3.36)$$

bulunur. Diğer taraftan her n için

$$\sin(n+1)t \leqslant (n+1)\sin t$$

olduğundan, $0 < t < \pi$, $n=1,2,\ldots$ için

$$\tilde{K}_n(t) \geqslant 0 \tag{3.37}$$

diyebiliriz. Ayrıca $\tilde{S}[f]$ nın (C,1) ortalaması

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_n(x)=\tilde{\sigma}_n(x;f) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\tilde{K}_n(t)dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\,\tilde{K}_n(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x+t)\,\tilde{K}_n(t)dt\Big] \\ &= -\frac{1}{\pi}\Big[-\int_{\pi}^{0} f(x-u)\tilde{K}_n(-u)du + \int_{0}^{\pi} f(x+t)\tilde{K}_n(t)dt\Big] \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\,[\,f(x+t)-f(x-t)]\,\tilde{K}_n(t)dt \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\phi_x(t)\tilde{K}_n(t)dt \end{aligned} \tag{3.38}$$

dır.

Teorem 3.5. $\Psi_x(h)=\int_0^h|\phi_x(t)|dt=o(h)$ $(h\to 0^+)$ olmak üzere her noktada (özel olarak hemen her yerde)

$$\tilde{\sigma}_n(x)-\tilde{f}(x;1/n)\to o\,(n\to\infty) \tag{3.39}$$

dır [1].

İspat:

$\tilde{K}_n(t) - \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t - H_n(t)$ olsun. (3.35) den,

$$|\tilde{K}_n(t)|\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|\tilde{D}_\nu(t)|\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\nu = \frac{1}{2}n$$

dır.

Diğer taraftan, $0 < t \leqslant \pi$ olmak üzere,

$$H_n(t) = \frac{1}{n+1}\,\frac{\sin(n+1)t}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2}$$

ifadesini göz önüne alalım. (3.29) dikkate alınırsa,

$$|H_n(t)| < \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1)t^2} < \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)t^2} = \frac{A}{(n+1)t^2}$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu iki eşitsizliği birlikte yazarsak,

$$|\tilde{K}_n(t)| \leq \frac{1}{2}n, \quad |H_n(t)| \leq \frac{A}{(n+1)t^2} \quad (0 < t \leq \pi) \tag{3.40}$$

olur.

Diğer taraftan;

$$\tilde{\sigma}_n(x)-\tilde{f}(x;1/n) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\tilde{K}_n(t)dt - \{-\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}\psi_x(t)\,\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t\,dt\}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{1/n}\psi_x(t)\tilde{K}_n(t)dt - \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}\psi_x(t)[\,\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t - H_n(t)dt\}]$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}\psi_x(t)\,\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\{\int_0^{1/n}\psi_x(t)\tilde{K}_n(t)dt - \int_{1/n}^{\pi}\psi_x(t)H_n(t)dt\}$$

olacaktır. (3.40) göz önüne alırsak,

$$|\tilde{\sigma}_n(x)-\tilde{f}(x;1/n)| = \frac{2}{\pi}|\int_0^{1/n}\psi_x(t)\tilde{K}_n(t)dt - \int_{1/n}^{\pi}\psi_x(t)H_n(t)dt|$$

$$\leq \frac{n}{\pi}\int_0^{1/n}|\psi_x(t)|dt + \frac{2A}{\pi(n+1)}\int_{1/n}^{\pi}\frac{|\psi_x(t)|}{t^2}dt$$

$$= I_1 + I_2$$

elde edilir. Açık olarak, $h\to 0^+$ iken $\Psi_x(h)=o(h)$ olduğundan

$$I_1 < n\,\Psi_x(1/n) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

dır. Kısmi integrasyon metoduyla,

$$I_2 = \frac{2A}{\pi(n+1)} \int_{1/n}^{\pi} \frac{|\psi_x(t)|}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{2A}{\pi(n+1)} \left[\Psi_x(t)t^{-2}\right]_{1/n}^{\pi} + \frac{4A}{\pi(n+1)} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\Psi_x(t)}{t^3}\,dt$$

$$\leq \frac{2A}{\pi^3(n+1)}\Psi_x(\pi) + \frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi} o(1/t^2)dt = o(1)$$

bulunur.

Bu iki sonuç birleştirilirse $I_1+I_2=o(1)$ dır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Son olarak, S[f] ve $\tilde{S}$[f] nın (C,α) toplanabilirliği hakkında iki teorem verelim:

Teorem 3.6. Teorem 3.3 de (son cümle hariç) ve teorem 3.4 de, eğer(C,1) toplanabilirliği yerine $\alpha > 0$ olmak üzere, (C,α) alınırsa bu teoremler yine gerçeklenir[10].

İspat: S[f] nin $\alpha > 0$ olmak üzere, (C,α) çekirdeğini $K_n^\alpha(t)$ ve (C,α) ortalamasını $\sigma_n^\alpha(x)=\sigma_n^\alpha(x;f)$ ile gösterelim. Bu takdirde,

$$K_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} D_\nu(t)/A_n^\alpha \tag{3.41}$$

$$\sigma_n^\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n^\alpha(t)dt \tag{3.42}$$

olacaktır. Diğer taraftan;

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n^\alpha(t)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} D_\nu(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi\,\frac{1}{A_n^\alpha}\cdot\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} = \frac{1}{A_n^\alpha}\cdot A_n^\alpha = 1$$

olduğundan $K_n^\alpha(t)$ (A) şartını sağlamaktadır.

Dolayısıyla;

$$\sigma_n^\alpha(x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n^\alpha(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n^\alpha(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t)-f(x)]\ K_n^\alpha(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [f(x+t)-f(x)]\ K_n^\alpha(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+t)-f(x)K_n^\alpha(t)dt$$

yazabiliriz. Son eşitlikteki ilk integralde $t=-u$ dönüşümü yapar ve $K_n^\alpha(t)$ nin çift olduğunu göz önüne alırsak,

$$\sigma_n^\alpha(x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x-t)-f(x)]\ K_n^\alpha(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+t)-f(x)]\ K_n^\alpha(t)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\ [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\ K_n^\alpha(t)dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi_x(t)\ K_n^\alpha(t)dt \tag{3.43}$$

bulunur. $\alpha>0$ olduğundan, eğer $\alpha=1$ ise bu $(C,1)$ toplanabilirliği olup, bu durumu zaten teorem 3.3 ve teorem 3.4 de inceledik. Eğer $\alpha>1$ ise, teorem 2.11 gereğince ispat açıktır. O halde, ispat için $0<\alpha<1$ durumunu incelemek yeterlidir. $0<t\leqslant\pi$, $n=1,2,\ldots$ için,

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } |K_n^\alpha(t)| < n+1 \leqslant 2n \\[2mm] \text{(ii) } A_\alpha,\ \text{yalnızca } \alpha \text{ ya bağlı bir sabit olmak üzere,} \\ |K_n^\alpha(t)| \leqslant A_\alpha n^{-\alpha}\, t^{-(\alpha+1)}\end{array}\right\} \tag{3.44}$$

olduğunu göstereceğiz. Bu eşitsizlikler (3.30) a benzemektedir. Bir kere teorem 3.4 ün (C,α) ya genişletilmesinin ispatına geçmeden önce (3.44) deki eşitsizlikleri tesis edeceğiz. Bundan sonraki işlemler teorem 3.4 nin ispatının, (3.31) den sonrasının bir benzer tekrarıdır. Bunun gibi, teorem 3.3 nin (C,α) ya genişletilmesinde $K_n^\alpha(t)$ çekirdeğinin (B') ve (C) şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumların her ikisi de (3.44) ün sonuçlarıdır. Gerçekten,

$$\int_0^\pi |K_n^\alpha(t)dt = \int_0^{1/n} |K_n^\alpha(t)|dt + \int_{1/n}^{\pi} |K_n^\alpha(t)|dt$$

$$< 2n\int_0^{1/n} dt + A_\alpha n^{-\alpha}\int_{1/n}^{\pi} t^{-\alpha-1}dt < 2+\frac{A_\alpha}{\alpha}$$

ve $0 < \delta \leqslant \pi$ olmak üzere, her δ sabiti için,

$$\mu_n(\delta) = \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} |K_n^\alpha(t)| \leqslant A_\alpha n^{-\alpha}\delta^{-(\alpha+1)} \to 0(n\to\infty)$$

dır. Dolayısıyla $K_n^\alpha(t)$ çekirdeği (B') ve (C) şartlarını sağlamaktadır. Şimdi geriye (3.44) deki eşitsizlikleri ispatlamak kalıyor.

(i) için, $|D_\nu(t)| \leqslant \nu + \frac{1}{2} < n+1$ olduğundan (3.41) göz önüne alınırsa, teorem 2.10 dan $\alpha > -1$ için A_n^α pozitif olduğundan,

$$|K_n^\alpha(t)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} |D_\nu(t)| < n+1 \leqslant 2n$$

elde edilir.

(ii) için, yine (3.41) göz önüne alacağız.

$$D_\nu(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \cos kt = \frac{\sin(\nu+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\, \text{İm}[\, e^{i(\nu+\frac{1}{2})t}\,]$$

olduğundan;

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\, \text{İm} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} e^{i(\nu+1/2)t}$$

$$= \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\, \text{İm} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\alpha-1} e^{i(n-\nu+1/2)t}$$

$$= \text{İm}\, \frac{e^{i(n+1/2)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}$$

$$= \text{İm}\left\{\frac{e^{i(n+1/2)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}\right]\right\}$$

$$= \text{İm}\left\{\frac{e^{i(n+1/2)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\left[(1-e^{-it})^{-\alpha} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}\right]\right\} \tag{3.45}$$

elde edilir. Teorem 2.10 den, $A_\nu^{\alpha-1}$ monoton azalarak sıfıra gittiğinden dolayı $0 < t \leqslant \pi$ için (3.45) deki son seri Dirichlet kriteri gereğince yakınsaktır. Diğer taraftan, $0<\alpha<1$ olduğundan $-1<\alpha-1<0$ için $A_\nu^{\alpha-1}$ pozitif ve artmayan olup, teorem 1.9 dan dolayı

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}\right| \leqslant 2A_{n+1}^{\alpha-1}\left|1-e^{-it}\right|^{-1} \tag{3.46}$$

dır.

Gerçekten, $k=n+1,n+2,\ldots,m$ için,

$$U_k = \sum_{\nu=n+1}^{k} e^{-i\nu t} = \frac{e^{-i(n+1)t}-e^{-i(k+1)t}}{1-e^{-it}}$$

olduğundan, $|U_k| \leqslant 2|1-e^{-it}|^{-1}$ dır. Dolayısıyla

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{m} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}\right| \leqslant A_{n+1}^{\alpha-1} \max_k |U_k| \leqslant 2A_{n+1}^{\alpha-1}|1-e^{-it}|^{-1}$$

olup, $m\to\infty$ için, (3.46) elde edilir.

Böylece, $|\operatorname{imz}| \leqslant |z|$ olduğundan, $0<t\leqslant\pi$ için (3.45) den

$$|K_n^\alpha(t)| \leqslant \left|\frac{e^{i(n+1/2)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\left[(1-e^{-it})^{-\alpha} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}\right]\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\left\{|1-e^{-it}|^{-\alpha}+2A_{n+1}^{\alpha-1}|1-e^{-it}|^{-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\left\{(2\sin\tfrac{1}{2}t)^{-\alpha}+2A_{n+1}^{\alpha-1}(2\sin\tfrac{1}{2}t)^{-1}\right\}$$

$$= (2\sin\tfrac{1}{2}t)^{-\alpha-1}\frac{1}{A_n^\alpha} + \frac{2A_{n+1}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}(2\sin\tfrac{1}{2}t)^{-2}$$

bulunur. Diğer taraftan, $0\leqslant u\leqslant\pi/2$ için $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi}u$ olduğundan, $0<t/2<\pi/2$ için,

$$(2\sin\tfrac{1}{2}t)^{-\alpha-1} \leqslant (\tfrac{\pi}{2})^{\alpha+1}t^{-\alpha-1} \quad \text{ve} \quad (2\sin\tfrac{1}{2}t)^{-2} \leqslant (\tfrac{\pi}{2})^{2}t^{-2}$$

olur. Ayrıca (2.12) yi kullanırsak, $0<\alpha<1$ olduğundan

$$\frac{1}{A_n^\alpha} \leqslant K\alpha\,\Gamma(\alpha)n^{-\alpha} \text{ ve } \frac{A_{n+1}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \leqslant K'\alpha\; n^{-1}$$

olacak şekilde, K ve K' pozitif reel sayılar vardır. Dolayısıyla,

$$|K_n^\alpha(t)| \leqslant (\tfrac{\pi}{2})^{\alpha+1}K\alpha\,\Gamma(\alpha)n^{-\alpha}\; t^{-\alpha-1}+2(\tfrac{\pi}{2})^2K'\alpha\; n^{-1}t^{-2}$$

olup,

$$A\alpha = \max\,\{(\tfrac{\pi}{2})^{\alpha+1}K\alpha\;\Gamma(\alpha),2(\tfrac{\pi}{2})^2K'\alpha\}$$

dersek,

$$|K_n^\alpha(t)| \leqslant A\alpha\;\{n^{-\alpha}\;t^{-\alpha-1}+n^{-1}t^{-2}\} \qquad (3.47)$$

elde edilir. Eğer $nt \geqslant 1$ ise bu takdirde,

$$nt^2 = (nt)^{1-\alpha}\,n^\alpha t^{\alpha+1} \geqslant n^\alpha t^{\alpha+1}$$

olup, (3.47) eşitsizliği,

$$|K_n^\alpha(t)| \leqslant 2A_\alpha n^{-\alpha}t^{-\alpha-1}$$

şeklini alır ki, bu (3.44) ün, (ii) kısmıdır. $0 < t \leqslant \frac{1}{n}$ için (3.44) ün (ii) kısmı (i) nin bir sonucudur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. Aşağıdaki teorem, teorem 3.5 in (C,α) toplanabilirliğine genişletilmesidir.

Teorem 3.7. $0 < \alpha < 1$ olsun. $h \to 0^+$ iken

$$\Psi_x(h) = \int_0^h |\phi_x(t)|dt = o(h)$$

olmak üzere, her x noktasında,

$$\tilde{\sigma}_n^\alpha(x) - \tilde{f}(x;1/n) \to 0$$

dır[11].

Bu teoremin ispatı, teorem 3.5 nin ispatıyla bazı benzerlikler göstermektedir.

İspat: $\tilde{S}[f]$ nın (C,α) konjüge çekirdeği $\tilde{K}_n^\alpha(t)$ ve (C,α) ortalaması $\tilde{\sigma}_n^\alpha(x) = \tilde{\sigma}_n^\alpha(x;f)$ olsun. Bu takdirde,

$$\tilde{K}_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\tilde{D}_\nu(t)/A_n^\alpha, \tag{3.48}$$

$$\tilde{\sigma}_n^\alpha(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi_x(t)\tilde{K}_n^\alpha(t) \tag{3.49}$$

dır. $\tilde{D}_\nu(t)$ nın tanımından,

$$\tilde{K}_n^\alpha(t) = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t - \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\frac{\cos(\nu+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$= \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t - H_n^\alpha(t) \tag{3.50}$$

olacaktır.

Şimdi, $0 < \alpha < 1$ için,

$$|\tilde{K}_n^\alpha(t)| \leqslant n \ , \ |H_n^\alpha(t)| \leqslant A\alpha n^{-\alpha}t^{-(\alpha+1)} , (n^{-1} \leqslant t \leqslant \pi) \tag{3.51}$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Burada ilk eşitsizlik için, $|\tilde{D}_\nu(t)| \leqslant \nu \leqslant n$ hesabı ve (3.48) göz önüne alınırsa, teorem 2.10 dan $\alpha > -1$ için A_n^α pozitif olduğundan,

$$|\tilde{K}_n^\alpha(t)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n}\frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}|\tilde{D}_\nu(t)| \leqslant n$$

bulunur.

(3.51) deki ikinci eşitsizlik için, (3.50) yi göz önüne alırsak,

$$H_n^\alpha(t) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \frac{\cos(\nu+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$= \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t} \operatorname{Re} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} e^{i(\nu+\frac{1}{2})t}$$

$$= \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t} \operatorname{Re} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\alpha-1} e^{i(n-\nu+\frac{1}{2})t}$$

$$= \operatorname{Re} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}$$

$$= \operatorname{Re}\{\frac{e^{i(n+1/2)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t} [\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}]\}$$

$$= \operatorname{Re}\{\frac{e^{i(n+1/2)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t} [(1-e^{-it})^{-\alpha} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}]\}$$

bulunur ki, bu (3.45) de İm yerine Re alınmış halidir. Dolayısıyla $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$ olduğu dikkate alınır ve (3.45) den sonraki benzer işlemler tekrar edilirse, $n^{-1} \leqslant t \leqslant \pi$ için, (3.51) in ikinci kısmı elde edilir.

$$\tilde{\sigma}^\alpha_n(x) - \tilde{f}(x;1/n) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \phi_x(t)\tilde{K}_n^\alpha(t)dt - [-\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi} \phi_x(t)\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t\, dt]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{1/n} \phi_x(t)\tilde{K}_n^\alpha(t)dt + \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi} \phi_x(t) H_n^\alpha(t)dt \tag{3.52}$$

olacaktır.

Buradan da; (3.51) dikkate alınırsa,

$$|\tilde{\sigma}_n^\alpha(x) - \tilde{f}(x;1/n)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{1/n} |\phi_x(t)|\,|\tilde{K}_n^\alpha(t)|dt + \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi} |\phi_x(t)|\,|H_n^\alpha(t)|dt$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} n \int_0^{1/n} |\phi_x(t)|dt + \frac{2A_\alpha}{\pi n^\alpha}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|\phi_x(t)|}{t^{\alpha+1}} dt$$

$$= P+Q \tag{3.53}$$

bulunur. $h \to 0^+$ iken $\Psi_x(t)=o(h)$ olduğundan

$$P < n\,\Psi_x\left(\frac{1}{n}\right) \to o \quad (n\to\infty)$$

dır. Ayrıca Q için kısmi integrasyon metodunu uygularsak

$$Q = \frac{2A\alpha}{\pi n^\alpha}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|\phi_x(t)|}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

$$= \frac{2A\alpha}{\pi n^\alpha}\left[\Psi_x(t)t^{-(\alpha+1)}\right]_{1/n}^{\pi} + \frac{2(\alpha+1)A\alpha}{\pi n^\alpha}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$$

$$\leq \frac{2A\alpha}{\pi^{\alpha+2}n^\alpha}\Psi_x(\pi) + \frac{1}{n^\alpha}\int_{1/n}^{\pi} o\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)dt = o\,(1)$$

elde edilir. Bu iki sonuç birleştirilirse

$$P+Q = o\,(1)$$

olur ki, bu ise ispatı tamamlar.

REFERANSLAR

[1] ZYGMUND,A., *Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge,1959.*

[2] MANGOLDT-KNOPP,K.,Çev.YURTSEVER,B., *Yüksek Matematiğe Giriş, Ank. Üniv.Fen Fak.yay.Ankara,1973.*

[3] LEBESGUE,H., *Recherches sur la convergence des séries de Fourier, M.A. 61(1905),251-80.*

[4] KNOPP,K., *Theory and Application of Infinite Series, Blackie,1944.*

[5] PETERSEN,G.M., *Regular Matrix Transformation, McGraw-Hill Publishing Company Limited,London,1966.*

[6] DAS,G., *Tauberian theorems for absolute Nörlund Summability, Proc. London Math.Soc.(3) 19(1969),357-94.*

[7] KAYASHIMA,I., *On Relations between Nörlund and Riesz means, Pasific J.Math.,Vol.49,No.2,1973,391-96.*

[8] HARDY,G.H., *Divergent Series, Oxford,1973.*

[9] FEJER,L., *Untersuchungen über Fouriersche Reihen, M.A. 58(1904),501-69.*

[10] RIESZ,M., *Sur la sommation des Séries de Fourier, A.S.,1(1923)104-13.*

[11] ZYGMUND,A., *Sur la sommation des Séries Conjuguées aux séries de Fourier, B.A.P.(1924) pp.251-8.*

[12]GOLDBERG,R.R., *Methods of Real Analysis, John Wiley and Sons,Inc., New York,1976.*

[13] ROGOSINSKI,W., *Fourier Series, Chelsea Publishing Company,New York, 1950.*