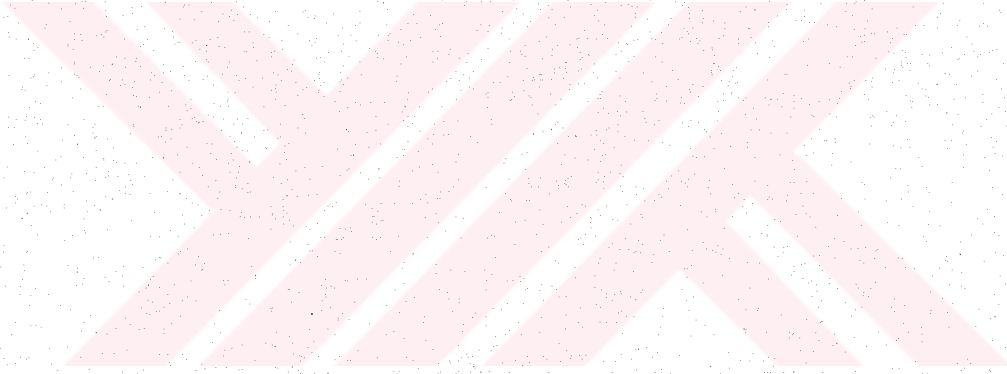


10021

BIOELEKTRİK İŞARETLERİN SAYISAL İŞLENMESİ VE ANALİZİ

BEKİR SAMİ TEZEKİCİ



ERCIYES UNIVERSİTESİ
FENBİLİMLERİ ENSTİTUSU'NE
ELEKTRONİK ANABİLİM DALINDA YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK SUNULMUŞTUR.


AGUSTOS - 1990

Erciyes Universite

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından Elektronik Anabilim Dalı'nda
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

15/8/1990

Başkan : ..Yrd...Doç..Dr...M. Emin...Yıldız 

Uye : ..Yrd...Doç..Dr.... Sedat....Özsoy


Uye : ..Yrd...Doç..Dr...Kemal....Kuyruk 

ONAY :

Yukarıdaki imzaların, adı geçen Öğretim Üyelerine ait olduğunu
onaylarım.

15/8/1990

Doç.Dr. Bekir Sami YILBAŞ Y.
Enstitü Müdürü V.i.


Doç. Dr. Tervik Rıza Kök

OZET

Bu çalışma biomedikal işaretlerin sayısal işlenmesi ve analizi ile ilgilidir. İlk olarak biomedikal işaretin ne olduğu ve niçin bu işaretin işlendiği tartışılacaktır. Birinci bölümde bu genel konular sunuldu.

İkinci bölümde hem sinir hemde kas hücrelerinde hücre seviyesindeki temel bioelektrik olay açıklandı. Hacim iletimi problemi üzerinde kısa bir tartışma, büyük yüzey elektrik işaretleri ile bağlantı kurmak için sunuldu.

Uçuncü bölümde ihtimal teorisinin elemanları rastgele işaretlerin karakterize edilmesi, korelasyon analizi ve gauss işlemi kısaca verildi.

Dördüncü bölümde sayısal işaret işleme ile ilgili örnekleme ve kuantalama problemi tartışıldı. Z transformu verilerek dijital işaret işlemeye uygulandı.

Son bölümde sınırlı zaman tahmini ile ilgili problemler verildi. Tahminlerin bu türlerini içine alan hatalar tartışılarak tahmin ile işaret gürültü oranındaki iyileştirmenin nasıl başarılacağıda açıklandı.

ABSTRACT

This study is concerned with the analysis and the numerical processing of biomedical signals. It is pertinent to discuss first what, in general is a signal, what is a biomedical signal and why process it. A discussion on this general topics have been presented in the first section.

In the second section, the basic bioelectric phenomena on the cell level both in neural cells and in muscle cells has been explained. A brief discussion on the volume condutor problem has been presented to provide a link to the gross surface electric signals.

In the third section, the elements of probobility theory, the random signals characterization, the correlation analysis and the gaussian process have been given briefly.

In the fourth section, the problem of sampling and quantization concerned with the numerical signal processing has been discussed. The Z transform has been introduced and applied to the digital signal processing.

In the last section, the problems associated with finite time estimation has been given. The erross involved with these types of estimators have been discussed, as well as the improvements in signal-to-noise ratio achieved by the estimation.

Ö Z G E Ç M İ Ş

1965 yılında Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise tahsilini Adana'da tamamladı. 1988 yılında Erciyes Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Bölümünden mezun oldu. 1989 yılında E.U. Mühendislik Fakültesi Elektronik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 1988-89 öğretim yılında E.U. Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. Halen E.U. Mühendislik Fakültesi Elektronik Bölümünde Arş. Görevlisi olarak çalışmaktadır.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmalarım boyunca benden yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr.M.Kemal KIYMIK'a, beni bu seviyeye getiren ve benden emegini esirgemeyen bütün hocalarıma sonsuz şükran ve minnet duygularıyla, teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Özet	111
Abstract	1V
Özgeçmiş	V
Teşekkür	v1
İçindekiler	v11

BÖLÜM - 1

1.1. Genel Ölçmeler ve Teşhis ile İlgili Sistemler	1
1.2. İşaretlerin Sınıflandırılması	6
1.3. İşaret İşlemenin Temelleri	10
1.4. Biomedikal İşaretlerin elde edilmesi ve işlenmesi	...	11

BÖLÜM - 2

2.1. Bioelektrik İşaretlerin Kaynağı	14
2.2. Sinir Hücresi	16
2.2.1. Uyarılabilir Hücre Zarı	18
2.2.2. Hareket Potansiyelinin Başlamı ve Yayılması	..	20
2.2.3. Synapse	21
2.3. Kas	23
2.3.1. Kas Yapısı	23
2.3.2. Kas Uzayıp Kısalması	24

2.4. Hacim İletkenleri	25
------------------------------	----

BÖLÜM - 3

Rasgele (Random) İşlemler	26
3.1. Olasılık Teorisinin Elemanları	27
3.1.1.Ortak Olasılık	28
3.1.2.İstatiksel olarak bağımsız olaylar	30
3.1.3.Rasgele Değişkenleri	32
3.1.4.Olasılık Dağılım Fonksiyonları	33
3.1.5.Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları	35
3.2. Rasgele Sinyallerinin Karakterizasyonu	38
3.2.1.Rasgele İşlemler	38
3.2.2.İstatiksel Ortalamalar	41
3.3. Korelasyon Analizi	43
3.3.1.Korelasyon Katsayısı	43
3.3.2.Korelasyon Fonksiyonu	46
3.3.3.Ergodiklik	48
3.4. Gauss İşlemi	50
3.4.1.Merkezi Limit Teoremi	50
3.4.2.Çok Değişkenli Gauss İşlemi	51

BÖLÜM - 4

BİOELEKTİRİK İŞARETLERİN SAYISAL İŞLENMESİ	54
4.1. Sayısal İşaret İşleme	54
4.2. Örneklemeye	55
4.2.1.Düzenli Örneklemeye	57
4.2.2.Düzenli Olmayan Örneklemeye	60

4.2.2.1.Sıfır,birinci ve ikinci dereceli A.Ö.	61
4.2.2.2.Nonuniform Örnekleme	65
4.3. Kuantalama	69
4.3.1.Sıfır Hafızalı Kuantalama İşlemi	70
4.3.2.Kuantalama Gürültüsünün Analizi	75
4.3.3.Rough Kuantalama	78
4.4. Ayırık (Discrete) Medod	82
4.4.1.Z Dönüşümü	82
4.4.2.Fark Denklemleri	83
BÖLÜM - 5	
5.1. Sınırlı Zaman Ortalaması	86
5.2. Ortalama Değerin Sınırlı Zaman Tahmini	88
5.2.1.Sürekli Durum	88
5.2.2.Ayrık Durum	98
5.3. Varyans ve Korelasyonun Tahmini	102
5.3.1.Varyans Tahmini-Sürekli Durum	102
5.3.2.Varyans Tahmini-Ayrık Durum	103
5.3.3.Korelasyonun Tahmini Değeri	105
5.4. Senkronize Ortalama	106
5.4.1.İstatistik Olarak Bağımsız Cevaplar	110
5.4.2.Tamamen Bağımlı Cevaplar	111
5.4.3.Genel Durum	112
5.4.4.Kayıtların Sırası ve Ltencieslerin T.Değeri	116
BÖLÜM - 6	
Sonuç ve Değerlendirme	118
Kaynaklar	120

B Ü L Ü M - 1

Ö L Ç M E L E R V E T E Ş H İ S S İ S T E M L E R İ

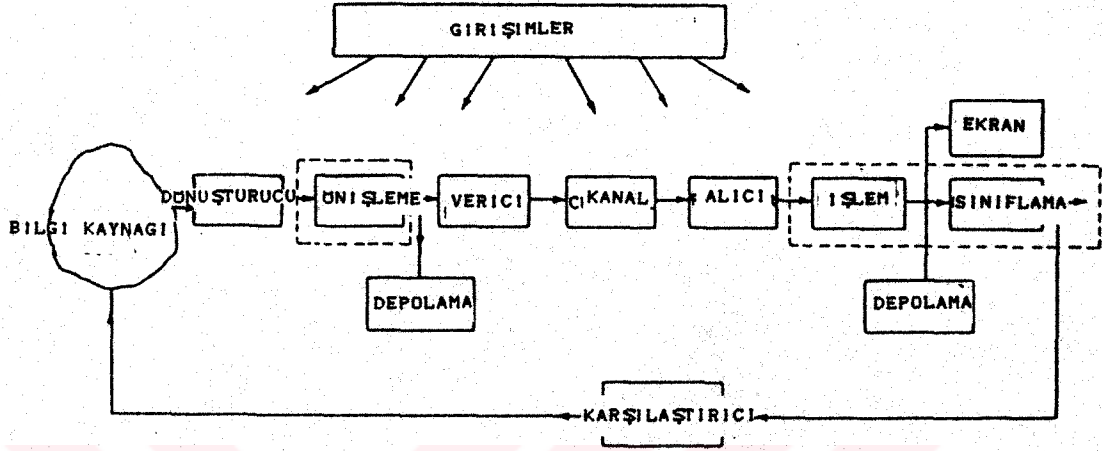
1.1 - GENEL Ö L Ç M E L E R V E T E Ş H İ S İ L E İ L G İ L İ S İ S T E M L E R

Bu tezde biomedikal işaretlerin ne manaya geldiğini, bu işaretlerin analizi ve işlenmesi ile ilgili çalışma yapılmıştır. İlk olarak biomedikal işaretin ne olduğunu ve niçin bu işaretin işlendiğini bu bölümde genel başlıklar altında incelenecektir.

Bir işaret bilgi taşımak için bir vasıtaadır. Bazen bu işaret doğrudan orjinal bilgi kaynağı tarafından üretilir. Bu durumda seçilmiş bilgidan (işaret) kaynağın çalışması veya kaynağın yapısı hakkındaki bilgiler öğrenilmek istenir. Elde edilmiş olan işaret ihtiyaç duyulan bilgiyi doğrudan veremiyebilir. Bu durumda ihtiyaç duyulan bilgiyi güçlendirmek için bu işarete bir takım işlemler uygulanır. Misal olarak, beynin görüntüsel işleme mekanizmasının incelendiğindeki durumu gözönüne alalım. Bir flaş ile gözü hazır duruma getirilebilir ve kafa derisi üzerine yerleştirilmiş elektrodlar vasıtasıyla beyin aktivitesi

görüntülenebilir. Beynin görüntüleme etkinliği ile ilgili olan işaretin içinde gizlendiğini göreceğiz. Bu işarete özel işleme yöntemleri uygulanmalıdır. İşareti işlemek veya gözlemek için elde edildiği noktadan uzaktaki bir yere taşımak isteyebiliriz. Mesela bu, yoğun bakım ünitesindeki tedavi altındaki hastalar hakkındaki bilgilere merkezi görüntüleme istasyonunda ihtiyaç duyulduğundaki veya evdeki bir bakım altındaki hastaya ait bilgiye, hastanede veya evdeki bir bakım altındaki hastaya ait bilgiye, hastanede veya doktorun ofisinde ihtiyaç duyulduğu durum olabilir. Bu durumlarda işaretin işlenmesi iletim kanalının gereksinimleriyle kullanılmak için bilginin depo edilmesi gerekebilir. Bu bilginin minimum miktarda depolama sahası (bilgisayar hafızası, magnetik teyp) ve daha sonra tekrar oluşturulma şeklinde efektif bir depolama gerekir.

Genel ölçüm ve teşhise ait sistem şekil-1.1 de şematik olarak gösterilmektedir. Bu sistem genellikle bilgi kaynağına kuple edilen ve gerekli bilgiyi alan bir dönüştürücüden meydana gelmiştir. Orjinal bilgi (basınç, sıcaklık); işleme, depolama veya taşıma için uygun olmayan formda olabilir. Dönüştürücü çoğu zaman bu bilgiyi elektriksel işarete dönüştürür. Bu günkü teknoloji ile işaretin bu şekli yukarıda teşhis için gerekli olmaktadır. Bu durumda işaretin işlenmesi, işareti verilen bir çok normal veya değişik anormal sınıflardan birine tasnif etmek zorundadır. Tasnifden sonra kaynağı yani bilgiyi aktaran doğru ölçümler yapılabilir [1-5].



Sekil-1.1 Genel ölçme ve teşhis sistemi

İşaret işlemedeki ilk basamak işaretin bölümlere (segmentlere) ayrılmasıdır. Bu işaret zaman süresince onun özelliklerini hızlı bir şekilde değiştirir. O zaman sınırlı bir zaman aralığında işareti gözler ve işleriz. Zaman aralığının uzunluğu işaret kaynağına ve işaret işleminin gayesine bağlıdır. Mesela, elektrokardiyografik görüntüleme yapılırken önceden belirlenmiş tek bir aralık kullanılabilir veya elektroensep halografy de yapıldığı gibi işareti otomatik olarak değişik uzunlukta bölümlere bölmek için bir takım

düzenlere ihtiyaç duyabiliriz.

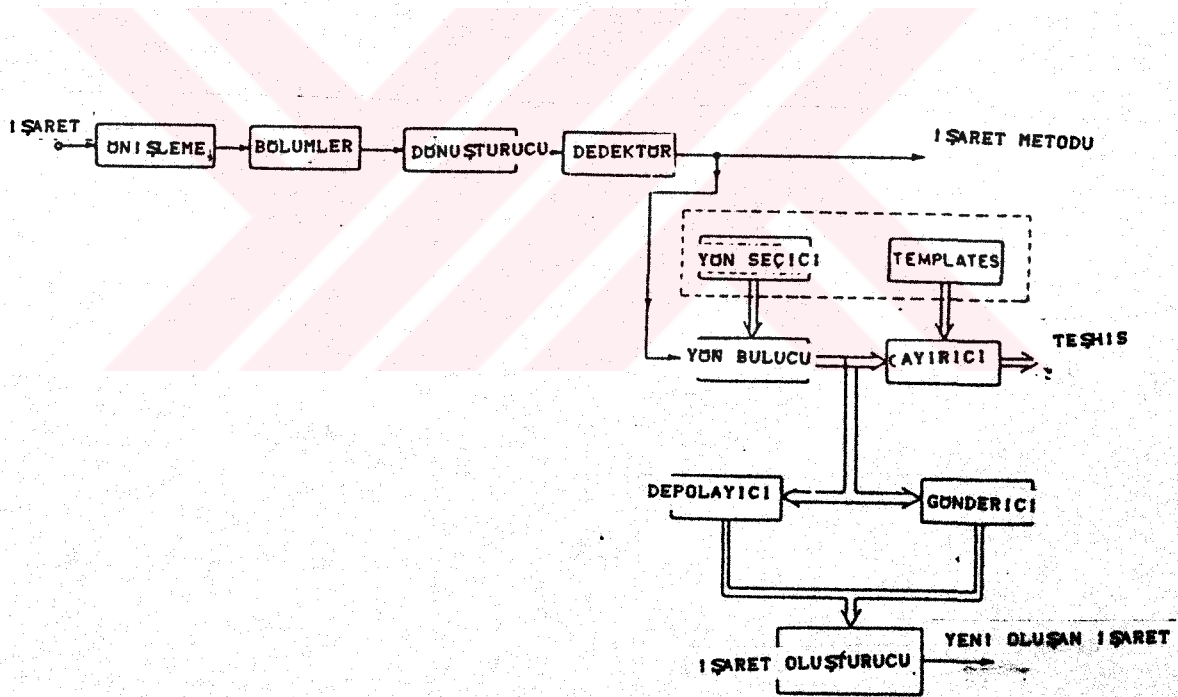
Metodların bir karışımı işaretteki uygun bilginin güçlendirilmesi için kullanılabilir. İşaret ya görüntünün ilavesi veya çarpımı ile bozulmuştur. İhtiyaç duyulan bilginin uygun olmayan kısımları gürültü olarak düşünülen işaretin sadece bir kısmını oluşturmaktadır. Bundan dolayı işaret-gürültü oranını artırmak için gürültü zayıflatmak ve yok etme teknikleri veya işaret güçlendirme teknikleri kullanılır.

Çogu zaman işaret içerisindeki gerekli bilgi sadece genel yapısı ile bilinen bir takım dalga şekillerine sahiptirler. PQRST kompleks'nin genel şeklinin bilindiği elektrokardiyogram güzel bir misaldir. İşarete bulunan dalganın kesin şeklini elde etmek gerekir.

İşaret tarafından taşınılan bütün bilgilerle ilgilenmek işaret tekrarlamalarını (fazlalıklarını) ortaya çıkarabilir. Efektif depolama veya iletim gerektiğinde veyahut işaretin otomatik olarak sınıflandırılması gerektiğinde bu tekrarlamalar (fazlalıklar) elimine edilmek zorundadır. İşaret ihtiyaç duyulan bilgiyi muhteva eden özelliklerin bir topluluğu ile temsil edilebilir. Böylece bu özellikler depolama, iletim ve tasnif için kullanılabilir. İşaretin özelliklerinden işaretin tekrar oluşturulmasına sık sık ihtiyaç duyulur. Bir yanda kullanılan özelliklerin tipleri ve onların dikte edilen sayısı diğer yanda etkili depolama ve iletim için data azaltma oranı

yeniden oluşturma hataları vardır.

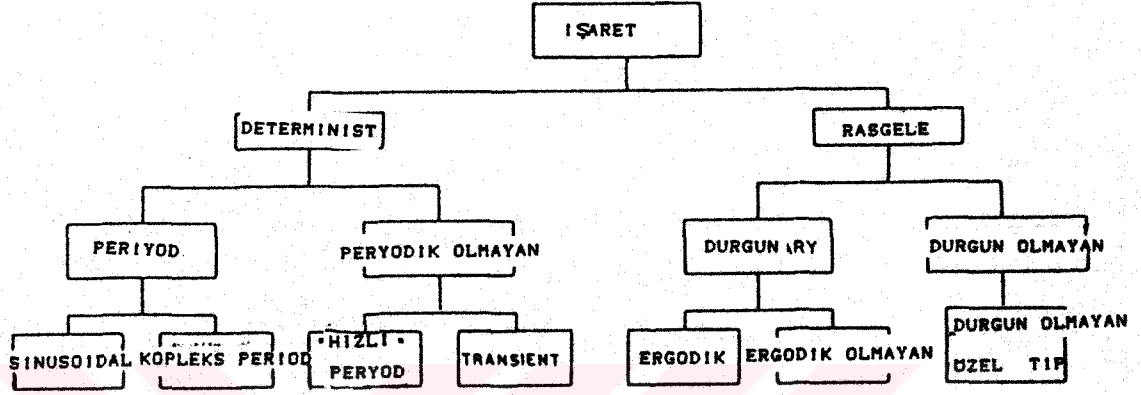
Şekil-1.2 deki bloklarda gösterilen değişik fonksiyonlar bir sonraki bölümlerde verilmektedir. Şekil-1.2 deki işaret işleme sistemi uygulamalardan bağımsız işaret işleme sistemleri için bir genel sistemdir. Mesela, biomedikal işaretlerde olduğu kadar jeofiziksel işaretlerde işaret işleminin aynı genel basamaklarından geçer [6]. Biomedikal işaretlerde özel şekilde kullanılan ilave konular ilerdeki bölümlerde verilecektir.



Şekil-1.2 İşaret işleme

1.2 - İŞARETLERİN SINIFLANDIRILMASI

Biomedikal ve fiziksel sistemlerden elde edilen işaretler değişik özelliklere ve karakteristiklere sahiptir. İşaretin genel karakteristiklerini belirlemek bu yüzden önemlidir. Böylece uygun işaret işleme yöntemleri uygulanabilir.



Şekil-1.3 İşaretlerin Sınıflandırılması

İşaretler iki ana grupta toplanabilir: Bunlar deterministik ve random (rastgele) işaretlerdir. Bunlar Şekil-1.3 de şematik olarak verilmiştir. Deterministik işaretler kesin matematiksel bağlantılarla tarif edilebilenlerdir. Random işaretler ise tam olarak ifade edilemezler. Bu işaretler sadece istatistiksel ortalama ve olasılık terimleri cinsinden tanımlanabilir. Bir deterministik işareti yoksa, bir random işareti olduğu şeklinde mantıklı bir soru akla gelebilir. Gerçekte tam bir matematiksel formülasyon ile kesin olarak belirlenebilen bir işaret bulma mümkün değildir. Bir işaret jeneratöründen gelen bir sinüs dalgası bile bu yönden tam deterministik değildir. Çünkü hiç kimse güç kaybının; sinüs dalgasının komple ortadan kalkmasına sebep olmayacağını veya bir takım jeneratör arızalarından dolayı sinüs dalgasının şeklinin bozulmasına sebep olmayacağını söyleyemez. Diğer yandan gerçekte random işaretlerin oluşmayacağı

tartışılabilir. Bütün işaretler bir takım fiziksel ve kimyasal olayların sonucudur. Bu işaretler bazı kurallar uygulanarak düzenlenirler. Eger bu kurallar bizim tarafımızdan tamamen biliniyorsa o işareti tam olarak ifade edebiliriz ve degerini belirleyebiliriz. ilgi alanımız işaretlerin analizi için işaret işleme metodlarını uygulamak olduğundan bu mantıksal tartışmalara hiç girmeyeceğiz. Bizim için önemli olan verilen bir işaretin random yada deterministik olduğudur.

Mesela; elektrokardiyografik (ECG) işaret analiz edilirken, QRS kompleksinin genel karakteristigi ile ilgilenerak işareti deterministik olarak dikkate alır veya R-R aralığının değişimi ile ilgilenerak onu random bir işaret olarak düşünebiliriz.

Deterministik işaretleri, peryodik ve peryodik olmayan işaretler diye iki gruba ayırabiliriz. Peryodik işaretler $x(t)=x(t + T)$ olan işaretlerdir. Burada T periyotdur. Komple tanımlama için bir periyot yeterli olduğundan, peryodik işaretler uygundur. Frekans domeninde işaretin ifadesi sadece temel frekans ve onun harmoniklerinin yer aldığı fourier serileri ile verilir. Peryodik olmayan işaretler iki sınıftan oluşurlar. Matematiksel yönden peryodik olmayan fakat frekans domeninde ayırık (diskrit) tanımlamaya sahip işaretleri peryodik işaretler olarak sayabilirki. Bu frekans tanımlaması peryodik bir işaretinkinden farklıdır. Söyle ki, tarifte yer alan farklı frekanslar çok sayıda işaretlerin kombinasyonu yaklaşık olarak bir peryodik işaret meydana getirirler.

Sürekli bir işaret daha önce tartışılan özelliklere sahip olmayan deterministik bir işarettir.

Random işaretlerle uğraşmak daha zordur. Random bir işaret, random bir işlemin bir örnek fonksiyonudur. Bir random işlemin bir örnek fonksiyonu zaman bağı tanımlarında bir diğerinden farklıdır. Bununla beraber onlar aynı istatistiksel özelliklere sahiplerdir. Random işlem tarafından üretilen örnek fonksiyonlarının komple bir seti (sınırlı) örnek kümesi olarak isimlendirilir. Random işaretin tanımı ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ile verilir. Stasyoner (duragan) bir işlem (proses) istatistiksel özellikleri zamanın fonksiyonu olmayan işlemlerdir. Mesela bu çeşit bir proses için herhangi bir t zamanında örnek kümesinin tümü üzerinden $x(t)$ değerlerinin ortalamasını alarak beklenen değeri hesaplanabilir. Random işaretlerinin önemli bir grubu ergodik işaretler grubudur. Bu işaretler için örnek kümesi üzerinden alınan istatistiksel ortalama herhangi bir örnek fonksiyonunun zaman eksenini üzerinden alınan ortalamasına eşittir.

Ergodikliğin ve stasyonerliğin pratik işaret işleme metodlarına imkan sağlayan özellikler olduğunu göreceğiz. Stasyoner olmayan (bundan dolayı ergodik'de değil) bir işlemin işaret işleme çok zordur. Önceden işaretin ergodik olduğu hakkındaki kabulün yanlış olduğunu bildiğimiz halde çoğu zaman işaretin ergodik olduğunu kabul etmek zorunda kalırız.

Mesela elektroencepholegraphic (EEG) işareti işlenirken kendi düzenimizdeki bütün örnek kümesine sahip degiliz, sadece bir örnek fonksiyonumuz vardır. Bundan dolayı ergodikliği kabul etmek zorunda kalırız ve zaman ortalamasından gerekli istatikselsel özellikleri tahmin ederiz. Stasyoner olmayan işaretlerin işlenmesindeki yöntemler çok etkili olmadıkları için, çoğu zaman stasyoner olmayan işareti her biri stasyoner kabul edilen bölümlere ayırırız. Bölümlerin uzunluğu stasyoner olamamalığın özelliğine bağlıdır. EEG analizlerinde bölümler bir kaç saniye mertebesinde olabildiği halde konuşma işaretlerinde bölümler 10 ms civarındaki aralıklarla seçilir.

İşaret işleme yönü bakımından büyük önemi olan işaret sınıflandırılması için diğer bir yöntem işaretlerin sürekli veya ayrık olmalarıdır. Genelde sürekli zamanlı işaretler zamanın bütün noktalarında tanımlanabilen işaretlerdir. Bu işaretlerin işlenmesine uygulanan yöntemler Fourier ve Laplace transformları ve diğer analog metodlardır. Hardware bakımından bu işaretler analog sistemlerde (filtreler, amplifikatörler ve bilgisayarlar) işleme tabi tutulurlar. Ayrık işaretler zaman bakımından , sadece verilen noktalarda tanımlanan işaretlerdir. Bu işaretler genellikle genlik olarak örneklenirler. Ayrık işaretler tabi olarak ayrık olabildikleri halde, genellikle bu işaretlerin örneklenmiş ve genliği kuantalanmış sürekli işaretler olduğunu düşünürüz. Bu işaretler Z transformu ve ayrık (Diskrit) Fourier Transformu (DFT) gibi işaret işleme metodlarıyla işlenirler. Hardware bakımından bu işaretler dijital teknolojideki yeni gelişmeler

işaret işleme etkinliklerinin ayrık işaretlerle yapıldığı bir durumu ortaya çıkarmıştır.

1.3 - İŞARET İŞLEMENİN TEMELLERİ

işaret işlemenin en temel yöntemi filtrelemedir. Onun kullanımı en iyi şekilde zaman domeninden ziyade frekans domeninde uygulanmasıdır.

Fourier transformu zaman domenindeki bir $x(t)$ işaretin frekans domenine dönüştüren bir operatördür [7]. Frekans domeninde bir işaret, frekansın fonksiyonu olarak kendi genliği ve fazı ile ifade edilir. Daha pratik bir transform kompleks frekans düzlemine aktaran transformdur. İşaretin spektral özellikleri, işaretlerin kesim frekansı kısımlarını zayıflatmaya yada komple atmaya dizayn edilen filtreler ile şekillendirilebilir.

Komplex Z domenindeki ayrık işaretler için ortaya çıkan aynı metodlar tanımlanıyor. Ayrık filtreler gerektiğinde, ayrık işaretin spektrumunu şekillendirmek için dizayn edilebilir.

Deterministik işaretlerde olduğu gibi random işaretler içinde frekans filtrelemesi faydalı bir yöntemdir. Random işaretler işlenirken, basamaklanmış fonksiyonun kendisinden ziyade otokorelasyon fonksiyonuna fourier transformu uygulanır.

Böylece spektral güç yoğunluğu fonksiyonu ile ilgileniriz. Benzer filtre dizayn teknikleri burada uygulanır.

1.4 - BIOMEDİKAL İŞARETLERİN ELDE EDİLMESİ VE İŞLENMESİ

Canlı biyolojik sistem, henüz tam anlaşılammış biokimyasal, fiziksel ve kimyasal kurallarla yönetilen çok kompleks bir sistemdir. Özellikle genetik kontrolün ve kompleks hiyerarşik kontrolün, sinirsel bitki transferi ve işlenmesi, ve diğer sistemlerin bir çok yönleri hala büyük araştırmalara konu olmaktadır. Analiz ve işleme yöntemlerinde bize yardımcı olması için ilgili işaretin üretilmesini ve sistemi konu olan bir ön bilgiyi çok sık kullanırız. Önemli mekanizma iyi anlaşılmadığı zaman işlemede az etkili olur.

Biyolojik sistemlerin kompleksliği ölçme ve işleme metodlarında sık sık zorluklar ortaya çıkarır. Fiziksel sistemlerin tek başlarına görüntülenebilmesi ve araştırılması şeklinde bir metodla bir birlerinden ayrılamazlar. Alt sistemler arasındaki kompleks hiyerarşik kontrol yüzünden ve çoğu zaman iyi anlaşılammayan geri besleme yollarına bağlı olarak inceleme altındaki biyolojik sistem, gözlem esnasında kendinin tabi ortamında kalmalıdır. Bundan dolayı sistem tarafından üretilen işaret çevresindeki sistemlerin etkinliği ile doğrudan bozulur. Ayrıca bu işaret çevresindeki sistemler tarafından üretilen gürültü ile de tabi olarak bozulur.

Mesela görüntüleme yoluyla uyarılmış potansiyel vasıtasıyla, beyinin görme işaret işlem mekanizmasının aktivitesi gözlenirken görüntü sistemini izole edemiyebiliriz ve kontrol edilmiş şartlar altındaki klinik testleri oluşturamayabiliriz. Göz, gözün pozisyonunu ve gözün duyarlılığı beyin isteyerek yada reflex şeklindeki hareketleri tarafından kontrol edilir. Beynin kendi kendine görüntü işlemesi çoğu zaman bizim kontrolümüz dışında olan çevredeki diğer çok sayıda aktivitelere bağlıdır. Sonuçta elde edilen şudur: İncelenen mekanizmadaki bir takım önemli oluşumları yada ölçme şartlarındaki bir takım değişiklikleri vasıflandırarak, işaretin analizinin nasıl yorumlanacağını hangi şartlar altında işaretin alındığını çoğu zaman tam olarak bilemeyiz.

Biomedikal işaretlerde ortaya çıkan büyük değişimler bizi şiddetli bir şekilde istatiksel metodlar kullanmaya zorlar. İşaretlerde oluşan bu değişimler topluluk içinden ve aynı özellikleri olanlardan elde edilir. Bundan dolayı biomedikal işaret işleme sonucunda elde edilen doğruluk ve güvenilirlik limitleri diğer mühendislik dallarında kullanılanlara göre çok yüksek değildir.

Biomedikal işaretler genellikle canlı organizmalarından ve uygulamaların çoğunluğunda insan vücudundan elde edilir. Bundan dolayı ölçüm sistemleri vücuda zarar vermeyecek ve hiç bir zaman ağrıya sebep olmayacak şekilde dizayn edilmelidir. "Noninvasive" Tehlikesiz teknikler her zaman tercih edilir. Bunun manası çoğu zaman gerekli bilgiyi doğrudan elde

edemeyeceğimiz ve bu bilgiyi tehlikesiz şekilde elde edilebilen işaretlerden çıkarmak zorunda olmamızdır. Ana rahmindeki çocuğun kalbini görüntülemek buna misal olarak gösterilebilir. "Invasive" tehlikeli metodları gerektiren bir metod olan elektrodların, doğrudan ana rahmindeki çocuğun cildine tutturulmasından ziyade, elektrodları annenin karnına yerleştiririz. Böylece elde edilen işaret annenin güçlü ECG leri ve diğer kas aktiviteleri ile yoğun bir şekilde bozulur. Bu işarettten ana rahmindeki çocuğun ECG sini elde etmek çok sayıda işaret işleme aşamalarını gerektirir.

Çok sayıda, önemli biomedikal uygulamalarda ilgilenilen işaretler iki boyutludur. Klasik X-ışını analizleri, bilgisayar tomografi (CT), nükleer magnetik rezonans (NMR) görüntüleme ve ultrasonik görüntüleme bunlara örnektir. Prensipte olarak bir ve iki boyutlu işaretlerin işlenmesi benzerdirler. Bununla beraber pratikte büyük farklılıklar vardır.

Biomedikal işaretler yapı itibariyle mekanik, kimyasal ve elektromagnetiktirler. Şu andaki teknoloji ile kullanılan, aşağı yukarı bütün dönüştürücüler elektriksel çıkış elde ederler. Bundan dolayı işlenecek olan işaret, elektriksel işaret olarak ortaya çıkar. Biomedikal işaretlerin çok önemli bir grubu tabii yapısı elektromagnetik olan bioelektrik işaretler oluşturur. İkinci bölümde bu işaretlerin karakteristiklerini ve kaynaklarını belirlemeye çalışacağız.

B Ö L Ü M - 2

2.1 - BİOELEKTRİK İŞARETLERİN KAYNAĞI

Canlı bir biyolojik sistemde en önemli bilgi işleme mekanizması sinir sistemidir.[8] Biyolojik sistem bilgi transferi için bir çok araca sahiptir. Belkide bunlardan en önemlisi sinirsel bilgi transferidir. Sinirsel fonksiyonların çalışması olan sinir fizyolojisi, biyolojik sistemde iç haberleşmenin ve kontrolün anlaşılması için anahtar alan oluşturmuştur. Temel ve uygulamalı sinir fizyoloji araştırmaları tek bir hücrede veya hücre gruplarında oluşan kimyasal ve elektrokimyasal aktivitelerin ölçülebilmesine önemli oranda bağlıdır.

Sinir ve kas hücrelerin çok sayıda fonksiyonu tabii olarak kimyasaldır. Bununla beraber bu fonksiyonlar elektrotlarla gözlenebilen elektrik alanda değişiklikler oluşturur. Bioelektrik olarak isimlendirilen bu potansiyel sinir fizyolojistlerinin hücre fonksiyonları üzerindeki çalışmalarına yardımcı olur. Kimyasal olayların doğrudan

ölçülmesi (mesela iyon bağlantılarının kesişmesi), özel dönüştürücüler (mesela iyon seçimli elektrod) vasıtasıyla gerçekleştirilebilir.[9] Bununla beraber ölçümleri oluşturmak çok zordur.

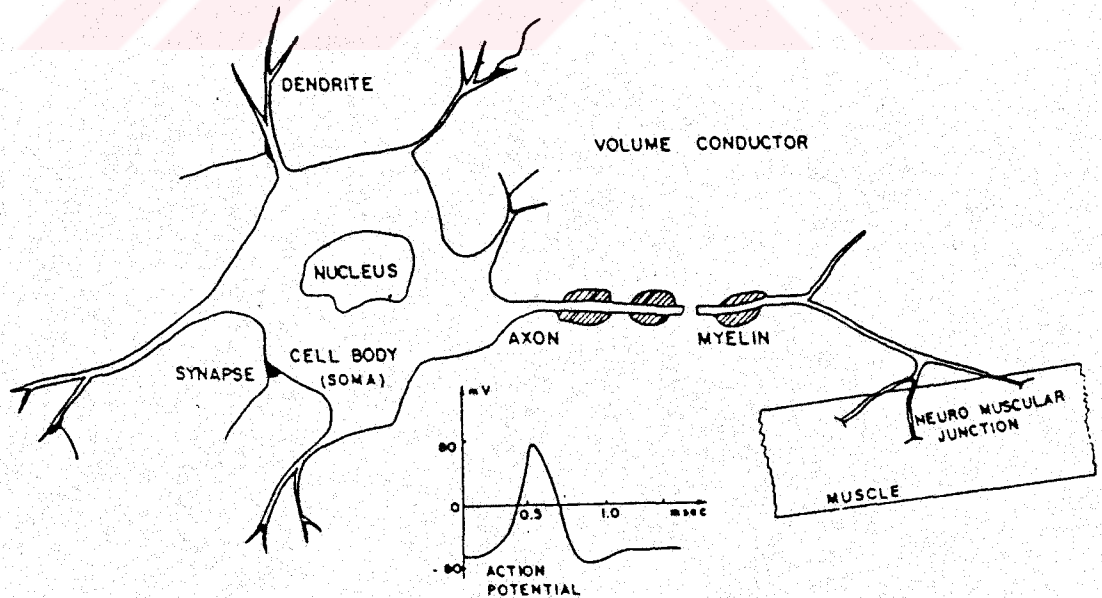
Bununla beraber bunlar tek birinin değilde büyük grupların fonksiyonu şeklinde olabilir. Çevredeki bütün aktif hücrelerin birikmiş etkileri, vücudun değişik dokularından oluşan iletken hacimde yayılan bir elektrik alan üretir. Böylece bir kasın veya bir takım sinirsel devrenin aktivitesi, deri üzerine yerleştirilen elektrodlarla doğrudan ölçülebilir. Bu tip bilginin toplanması kolaydır. Elektrodlar deri üzerine uygun şekilde yerleştirilir. Bununla beraber bu bilginin analiz edilmesi zordur. Bu sinir ve kas aktivitelerinin tamamının bilinmeyen yerleşimli, homojen olmayan bir ortamdan iletilmesi sonucu ortaya çıkar. Bu zorluklara rağmen deri yüzeyinden okunan elektriksel işaretler kliniksel ve fizyolojik olarak büyük öneme sahiptirler. Elektroencephalographic (EEG), electrocardiografik (ECG), elektromiyografik (EMG) ve diğer bu çeşit işaretler klinikteki sinirsel ve kas sistemlerinin teşhisi için sürekli kullanılır.

Bu bölümde sinir ve kas hücrelerindeki hücre seviyesinde temel bioelektrik oluşumları ve hacim iletimi problemi üzerinde bir görüş ile yüzey işaretleriyle bir bağlantı temin etmek maksadıyla verilmiştir.

2.2 - SINIR HÜCRESİ

Sinir fizyoloji sistemindeki temel işlem ünitesi sinir hücresidir (Neuron). Onun görevi bilgi işleme, iletme ve kazanmadır. Bilgi transferi için kullanılan sinir hücreleri genellikle uzundur. Merkezi işaret işlem yapısına ve ondan diğer yerlere bilgi iletimini temin eder. Algılayıcı olarak kullanılan özel sinir hücreleri geliştirilmiştir.

Mekanizmaların farklılığı ve dönüştürücü şekilleri çok sayıda uyarmayı (basınç, ışık ve sıcaklık) elektriksel ve kimyasal işaretlere dönüştürmek için oluşturulur. Merkezi sinir sistemi bilgi işleme ve kontrol vazifeleriyle uğraşır. Çok değişik tipte sinir hücresi olsa bile bu hücrelerin temel yapıları genel olarak şekil-2.1 deki gibi verilir.



Şekil-2.1 Sinir hücresi

Sinir hücrelerinin önemli kısımları hücre gövdesi, sinir hücrelerine giden ince lif ve eksenidir. Hücre gövdesi, bir hücrenin fonksiyonunu yerine getirmek için ihtiyaç duyduğu değişik cisimler muhteva eden hücre sıvısından oluşmaktadır. Sinir hücrelerinin boyutlarında büyük değişiklikler vardır. Çapı birkaç mikron kadar küçük olabilir veya 10 mikron ve biraz daha yukarısı kadar büyük olabilir. Kalınlığı 50 ile 150 Å arasında değişen uyarılabilir bir zarla kaplıdır. Hücre zarı (dendrites) hücre lifi adı verilen kök-benzeri yapıyı oluşturmak için değişik yerlerde genişletilir. Bu genişlemeler diğer sinir hücreleriyle ara bağlantıyı oluşturmak için kullanılır.

Sinir hücrelerinin ince lifi sinir ünitesinin çıkışı olarak davranır ve 50µm civarında (beyin korteksinde) veya birkaç metre (büyük memelilerin çevresel sinirlerinde) civarındaki uzunlukta olabilen bir hücre genişlemesidir. İnce lifin çapı 0.5 µm den küçük değerlerde 1 µm civarındaki (mürekkep balığının büyük sinir fiberlerinde) uzunluk değerlerine sahip olabilir. İnce liflerin (axon) bilgi transferi hızını artıran kesişen ilik muhafazası ile çevrelenmiştir.

Diğer sinir hücrelerinde gelen bilgi hücreye synapse olarak isimlendirilen bir kavşaktan girdirilir. Synapse'ler ince lif üzerine veya hücre vücudu üzerine yerleştirilmiştir. Synapse'ler hücre zarı üzerindeki voltajın azalmasına veya artmasına sebep olabilirler. Hücre fonksiyonu bu potansiyel değişimlerinin integratif (zaman ve uzayda) etkilerine dayanır. İnce lifin uçları synapses den diğer sinir hücrelerine veya özel synapses den aktiveleştirilen kaslara kassal sinir eklemlerine girişler olarak davranır. Dış yüzey sinirleri bir sinir hücresi hortumu içinde birlikte çevrelenmişlerdir. Tek bir sinir hücresinin elektriksel aktivitesi bir sonraki bölümde verilecektir. Sinir hortumundan elde edilen işaretler bu hortum içindeki değişik sinir hücreleri tarafından üretilen elektrik alanının sonucudur.

2.2.1 - Uyarılabilir Hücre Zarı

Hücre zarı hücre içi sıvısıyla hücre dışı sıvısı arasındaki ayırıcı bir ortam olarak düşünülebilir. Bu iki sıvı farklı iyonik konsantrasyonlara sahiptir. Zar sıvı içerisindeki değişik iyonlara karşı farklı geçirgenliğe sahiptir. Difüzyon veya diğer mekanizmalar ile iyon transferinin bir sonucu zar yüzeyinde bir voltaj üretilir.

Eğer sadece üç ana iyonun, Potasyum [K^+], Sodyum [Na^+], Clor [Cl^-] etkisini göz önüne alırsak Nernst eşitliğinde zar gerilimi E' 'yi elde ederiz.

$$E = \frac{RT}{F} \ln \left\{ \frac{P_K [K^+]_O + P_{Na} [Na^+]_O + P_{Cl} [Cl^-]_i}{P_K [K^+]_i + P_{Na} [Na^+]_i + P_{Cl} [Cl^-]_O} \right\} \quad (2.1)$$

Burada R, T ve F sırasıyla üniversal gaz sabiti, mutlak sıcaklık ve faraday sabitidir. P_x çalışmayan zarın X iyonuna karşı geçirgenliğidir. $[X]_O$ ve $[X]_i$, X iyonlarının hücre dışındaki ve hücre içindeki sıvılardaki konsatrasyonlarıdır.

Hesaplanan duran zar yüzey potansiyeli yaklaşık 80 mV civarındadır (hücrenin iç kısmı dışına göre negatiftir). Bu değer sinir fizyolojik ölçümleri ile uyum içindedir.

Bazı zarlar uyarılabilir karakteristiklere sahiptirler. Zar; elektriksel, mekaniksel veya kimyasal bir uyarım tarafından uyarıldığında iyonik geçişler için zarın geçirgenliği bir takım değişmelere uğrar. Bu değişim zarın çalışmadığındaki potansiyelini zamanın kısa bir periyod için pozitif olarak artmasına ve daha sonra zar polarize edildiğinde kendinin dinlenme potansiyeline dönmesine sebep olur. Potansiyel değişiminin zamana bağımlılığı, hareket potansiyeli şekil-2.1 de gösterilmiştir.

Sinir ve kas hücreleri uyarılabilir zarlara sahiptir. Hareket potansiyellerinin zaman süreleri ve şekilleri değişik hücrelerde farklıdır. Kas hareket potansiyelleri bekleme süresi içinde genellikle çok büyüktür.

Ancak ve ancak uyarım sinyali bir eşik seviyesini aşarsa (20 mV civarında) zarın uyarımına sebep olur. Eşik seviyesi

karşılandığında ve hareket potansiyeli temin edildiğinde eşik değişir. Eşik seviyesi sınırsız olduğunda hareket potansiyelinin başlamasını izleyen belli bir periyod (1 ile 2 ms mertebesinde) olur. Bu periyod, hiç bir yeni hareket potansiyelini başlatamadığı için toplam değişmez periyod olarak isimlendirilir. Daha sonra eşik bir takım azalma fonksiyonuna göre kendinin çalışmadığındaki değerine döner. Eşikin kendinin durduğu seviyeye indiği periyod bağıl değişmez periyod olarak isimlendirilir. Bu periyod da uyarımın yüksek eşik seviyesini aşmaya yetecek kadar güçlü olması temin edildiğinde yeni bir hareket potansiyeli sağlanabilir.

2.2.2 - Hareket Potansiyelinin Başlaması ve Yayılması

Bir sinir hücresinin bir hareket potansiyeli oluşturup oluşturmadığı hakkındaki karar, hücrenin aldığı dış girişlerin bir fonksiyonudur. Algılayıcılarda bu, absorbe edilen fotonların miktarı veya uygulanan basıncın değeri olabilir. Düzgün sinir hücrelerinde girişler, diğer sinir hücrelerinin sinir hücresi bitiminde gelir. Her bir synapse sinir hücresinin dinlenme zar potansiyelinde az bir artışa sebep olabilir (söndürücü synapse). Zar potansiyeli zaman ve konum olarak bütün synaptik etkileri entegre ederek belirlenir. Bu toplam etki eşikin aşılmasına sebep olduğunda, bir hareket potansiyeli temin edilir.

Zarın kendine has özellikleri hücre gövdesinden axon boyunca onun sonuna doğru hareket potansiyelinin yayılmasını

garantiler. Bir hareket potansiyeli elde edildiğinde, zarın bitişik kısımlarını uyarmak için oldukça güçlü iç alanlar üretilir. Böylece hareket potansiyeli bir doğrultuda yayılır. Zarın o kısmı yeni aktif hale getirildiği ve eşik seviyesi hâla yüksek olduğu için hareket potansiyeli geriye doğru yayılmaz. \

Hareket potansiyeli axon boyunca yayılırken lokal olarak yeniden üretilir. Bundan dolayı hareket potansiyeli zayıflama olmaksızın yayılır. Sinir hüresi tarafından taşınan bilgi hareket potansiyelinin şeklinde değil fakat iç engelleme aralığıdadır. Sinir hüresi bir uyarım-frekans dönüştürücüsü olarak düşünülebilir. İşaret işleme uygulamalarının çoğunda tek bir hareket potansiyelini gözlemiyoruz fakat buna rağmen liflerin bir hortumuyla üretilen alanı gözlüyoruz. Bundan dolayı sinirsel aktivite ile ilgili işaretlerde genlik ve frekansı buluruz.

2.2.3 - Synapse

Bir sinir hücresinin axon'ı diğer sinir hücrelerinin veya kasların eklemleriyle sonlandırılır. Bir axon bu çeşit eklemlerle çok sayıda sinir hücresine veya kas fiberlerine birleştirilebilir.

Synapse, bir sinir hücresinin axon uçlarının biri ile bir diğerinin dendrite veya soma'sının (hücre gövdesi) arasındaki eklemdir. Ön synaptik bölge axon'ların sonudur. O tam

manasıyla dendrite (veya soma'ya) değmez yaklaşık 200 Å luk synaptic cleft olarak bilinen bir boşluk oluşur. Bu boşluğun diğer yüzündeki dendritedeki (veya soma'daki) bölge, arka synaptik bölge olarak isimlendirilir.

Ön synaptik bölgeye bir hareket potansiyeli ulaştığında, bu zar karakteristiginin değişmesine sebep olur. Bu değişim belli kimyasal maddelerin (vericilerin) ön synaptik bölgeden boşluğa difüzyon edebilme yeteneğini artırır. Boşluğa geçen vericileri arka synaptik bölgedeki toplayıcılar tarafından alınır ve zar potansiyelinin değişmesine sebep olur. Bu değişim serbest bırakılan vericinin tipine bağlı olarak uyarıcı (uyarıcı arka synaptik potansiyel EPSP) veya sönümlendirici (sönümlendirici arka synaptik potansiyel IPSP) olabilir.

gönderici açığa çıkarmamanın komple işlemi, boşluğa geçme ve arka synaptik alınma oldukça yavaştır ve 0.5 msn mertebesindedir. Diğer biyolojik mekanizmalarla (hormonlar) karşılaştırıldığında hızlı oldukları halde elektronik veya optik sistemlerle karşılaştırıldığında bir sinir sisteminden bilgi transferi oldukça yavaş olabilir.

2.3 - KAS

2.3.1 - Kas Yapısı

iskelet kasları uyarılabilir zarlı hücrelerden oluşmaktadır. Bu zar prensip olarak sinir hücre zarına benzerdir. Onun fonksiyonu bilgi iletmek yada işlemek olmadığı halde gerilim üretir. Kas birbirinden ayrı çok fiberden oluşturulur. Bu fiberler actin ve myosin şeklinde iki tür protein lifini içerir. Bunlar, kas uzunluğunun kısaltılmasını sağlayacak şekilde bir diğerinin içinde kayabilen iç içe geçmiş paralel katmanlar şeklinde yerleştirilmişlerdir. Fiberlerin kayması henüz tam olarak anlaşılmamış kimyasal reaksiyonlar tarafından yapılır.

Fiber zarı uyarıldığında kas tarafından hareketin veya gücün üretimi oluşturulur. Bu durumda, fiberin uzama veya büzülmesini sağlayan kimyasal reaksiyonları tetikleyerek, bir hareket potansiyeli fiber zarının yüzeyi boyunca yayılır.

Bir kas büzüldüğünde yada uzadığında hareket potansiyelleri yüzey (deri) elektrodlarıyla gözlenebilen bir elektrik alan üretir. Bu alan, farklı zamanda ve farklı oranda çok sayıda fiberin katkısıyla ortaya çıkar. Bundan dolayı bu yolla gözlenen işaret (EMG) istatistiksel özellikleri kas fonksiyonuna bağlı olan bir random işaret olacaktır.

2.3.2 - Kas Uzayıp Kısalması

Kası aktif hale getiren sinir hücresi motor siniri olarak isimlendirilir. Diğer aktif sinir hücrelerinden farklı olarak motor sinirlerinin axon uçları synapseslere benzerdir. Onlar kas fiberlerine birleştirilmişlerdir. Motor sinir hücres-kas birleşimi neuromuscular birleşim veya son plaka olarak isimlendirilirler.

Son plakada bir verici olarak davranan kimyasal maddeler acetylcholine (ACh) dir. Bir hareket potansiyeli geldiğinde bu madde axon uçlarından serbest bırakılır, kas zarına doğru difüzyon yapar ve kas zarında potansiyel değişmelerine sebep olarak oradaki toplayıcılarla absorbe edilir. Bu değişim yeterince büyük olduğunda ve eşik seviyesi aşıldığında bir hareket potansiyeli üretilir. Böylece kas zarı boyunca yayılır. Kasta vericinin ortaya çıkması difizyon ve toplama işlemleri yaklaşık 0.5 ile 1 msn civarında sona erer. Uzayıp kısılmadaki ilave gecikmeler kasın kendi yapısındaki dinamik özelliklerden kaynaklanmaktadır.

2.4 - HACİM İLETKENLERİ

Bioelektirik işaretlerin kaynağı tek bir sinir hücresi veya kas fiberleri tarafından üretilen hareket potansiyelleridir. Zar aktivitesiyle üretilen akımın yoğunluğu civar ortamdaki akım değişikliğine sebep olur. İndüklenen akım değişmelerinin olduğu çevredeki dokular hacim iletkeni olarak isimlendirilirler.

Çok sayıda klinik uygulamalarında ve sinir fizyolojisi uygulamalarında, bioelektirik kaynağın kendisini değil hacim iletkeninin alanını gözleriz. Bu kesinlikle beyin veya kalp aktivitelerini gözlemek için deri yüzeyi elektrodlarının kullanıldığındaki durumdur. Elektrodların dokuya sokulduğu sinir fizyolojisi çalışmalarında dahi hacim iletkeni etkilerini gözleriz.

Kaba hacim iletkeni ölçümlerinde, önemli bioelektrik kaynağını tam olarak eldedebilmek çok önemlidir. Bununla beraber özellikle komple biyolojik ortamın karakteristikleri göz önüne alındığında bu kompleks bir görevdir. Hacim iletkenindeki akımın akış alanının matematiksel modeli değişik derecelerde geliştirilmiştir.[10]

B Ö L Ü M - 3

RASGELE (RANDOM) İŞLEMLER

Biomedikal sinyallerde rasgelelik iki şekilde ortaya çıkar: Kaynağın kendisi istatistik olabilir. (Bütün bilgi taşıyan sinyallerde olduğu gibi) veya ölçme sistemi, sinyale ek veya çoğullayıcı dış gürültü katkısında bulunabilir. Bir ECG sinyali deterministik ve hatta "hemen hemen" periyodik olarak gözönüne alınabilir.

Olasılık teorisi rasgele sinyallerin analizinde önemli bir rol oynar. Bu sebeple, bu bölümün başlangıcında olasılık teorisinin kısa bir özeti verilmekte. Daha sonra olasılık teorisi kavramları rasgele sinyallerin analizine ve karakterize edilmesine genişletilebilir. Bu bölümdeki esas konu, diğer bölümlerdeki konulara mana bakımından gerekli temel materyali ve tarifleri vermektir [11-13].

3.1 - OLASILIK TEORISININ ELEMANLARI

Bir kaç olaydan birinin olabileceği bir deneyi göz önüne alalım. Deneyin sonucu önceden tahmin edilemeyen pek çok faktörün birleşimine bağlıdır. Böyle bir olayın tam sonucunu önceden tahmin edemeyiz; buna karşılık çok sayıda deneyin ortalama sonucu hakkında yorum yapabiliriz. Atılan bir zarın üzerindeki sayıların olaylar olduğunu kabul edelim. Bu deney iyi bir misal olarak gösterilebilir.

Deneyi N defa yaptığımızı kabul edelim. N deney sonucundan A_i olayı n_i defa oluşmuş olsun. Bağlı frekans f_i 'yi

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda A_i olayının meydana gelme olasılığı $P(A_i)$, bağlı frekansın limiti olarak verilir.

$$P(A_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} (f_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{n_i}{N} \right) \quad (3.2a)$$

Burada $P(A_i)$,

$$1 \geq P(A_i) \geq 0 \quad (3.2b)$$

şeklindedir.

Eğer bir tanesinin varlığı ikisini imkansız kılan iki olay, karşılıklı olarak tek olaylar olarak adlandırılır. Eğer A_i ve A_j karşılıklı olarak tek ise, bu durumda A_i veya A_j 'nin meydana gelme olasılığı

$$P(A_i \text{ veya } A_j) = P(A_i) + P(A_j) \quad (3.3a)$$

ve daha genel olarak, eğer $i=1,2,\dots,M$ olmak üzere A_i rasgele değişkenleri karşılıklı olarak tek ise, bu durumda

$$P(A_1 \text{ veya } A_2 \text{ veya } \dots \text{ veya } A_M) = \sum_{i=1}^M P(A_i) \quad (3.3b)$$

Herhangi bir A olayı için farklı olarak tek olan bir $B = A$ Değil, olayı vardır. Böylece

$$P(A) + P(A \text{ Değil}) = P(\text{kesin olay}) = 1 \quad (3.4)$$

dir.

3.1.1 - Ortak Olasılıklar

Bir deneyin pek çok (birden çok) sonucu olduğunda ortak olasılıklardan bahsederiz. Misal olarak bir kan testinin sonucunu gözönüne alalım. Test sonucu bir kaç parametreden oluşmuştur. Kan testinin sonucunun bütün parametreler için verilen değerlerden birinin olması olasılığı hakkında fikir yürütebiliriz; bu olayın meydana gelmesi olasılığı ortak olasılıktır. A, B, C, \dots, J rastgele değişkenlerinin ortak olasılığını A ve B ve C ve, \dots , ve J 'nin meydana gelmesi olasılığı şeklinde ifade edilen $P(A, B, C, \dots, J)$ sembolü ile gösterilir.

Sık sık bir olayın olasılığı başka bir olaydan etkilenir. Hali hazırda bir başkasının oluşma olasılığı verildiğinde bir olayın meydana gelme olasılığını gözönüne almak isteyebiliriz. Bu olasılık şartlı olasılık olarak adlandırılır. B olayının oluşma olasılığı verildiğine göre, A olayının oluşma olasılığı;

$$P(A|B) = (B \text{ olayının oluşması olasılığı verildiğinde,} \\ A \text{ olayının oluşması) olasılığı} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır.

Bir başka misal olarak, aşağıdaki deneyi gözönüne alalım; Bir iskambil destesinden (kartı desteye geri koymaksızın) arka arkaya iki kart çekilsin ve birincisinin as, ikincisinin kız olma olasılığı araştırılsın. Problem aşağıdaki şekilde ortaya konabilir. Daha önce as çekildiği verildiğinde, kız çekme olasılığı nedir?

Şimdi ortak ve şartlı olasılıklar arasındaki ilişkiyi gözönüne alalım. Sonucu, N defa icra edilen iki aynı olay vasıtasıyla verilen bir deney yapıldığını kabul edelim. n_A sonuçta görülen A olayının sayısını ve n_{AB} ortaya çıkan A ve B olaylarının sayısını ifade etsin. AB ortak olayının olasılığını şu şekilde gösterebiliriz.

$$P(AB) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{n_{AB}}{N} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{n_A}{N} \cdot \frac{n_{AB}}{n_A} \right] \quad (3.6a)$$

Deney sayısının yeterince fazla olduğunu ve dolayısıyla n_A 'nın büyük değerli olduğunu kabul ederek, (3.6a) denklemini

$$P(AB) = P(A) P(B|A) \quad (3.6b)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Bu nedenle,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0 \text{ için}) \quad (3.6c)$$

ve

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0 \text{ için}) \quad (3.6d)$$

böylece,

$$P(A|B) = \frac{P(A) P(B|A)}{P(B)} \quad (3.6e)$$

ve

$$P(B|A) = \frac{P(B) P(A|B)}{P(A)} \quad (3.6f)$$

şartlı olasılıklarını elde ederiz. Son denklemler Bayes kuralı olarak bilinirler.

3.1.2 - İstatiksel olarak bağımsız olaylar

Eğer iki olayın şartlı olasılıkları ilk meydana gelme olasılıklarına eşitse bu iki olay istatiksel olarak bağımsız

olaylardır denir. $P(B|A)$ şartlı olasılığını gözönüne alalım: eğer

$$P(B|A) = P(B) \quad (3.7)$$

ise bu durumda A olayının meydana gelmesi hakkındaki bilgi, B olayının meydana gelmesi hakkındaki bilgiye hiç bir katkıda bulunamayacaktır. Bu iki olayın istatiksel olarak bağımsız oldukları söylenebilir. Denklem (3.7) yi denklem (3.6c) de yerine koyarsak

$$P(AB) = P(A) P(B) \quad (3.8a)$$

elde edilir. Yani istatiksel olarak bağımsız olayların ortak olasılıkları, olayların kendi olasılıklarının çarpımına eşittir. Genelde n tane istatiksel olarak bağımsız A_i olayları için ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad (3.8b)$$

elde edilir. İlave olarak $i < j < k, \dots, \leq n$ olmak üzere i'nin bütün kombinasyonları için şu eşitlikleri yazabiliriz.

$$P(A_i) = P(A_i) P(A_j)$$

$$P(A_i, A_j, A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k)$$

$$\dots \dots \dots \quad (3.8c)$$

$$P(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = P(A_1) P(A_2), \dots, P(A_n)$$

3.1.3 - Rasgele Değişkenleri

Bir deneyin sonucu bir sayı veya olayın diğer bir tanımı olabilir. Deneyin mümkün olan her sonucu gerçel bir sayı veya sayı kümesi olsun. Deneyin bir ayrık sayı kümesi (vektör) vasıtasıyla açıklanacağı durumda, sonuçların tanımı için n ayrık değere sahip olabiliriz. Bu kümeyi ayrık rasgele değişkeni olarak tanımlarız. Diğer durumda, sonucu açıklamak için sürekli değerlere ihtiyaç vardır, bu küme sürekli rasgele değişkeni olarak ifade edilir.

x ayrık rasgele değişkeni gözönüne alalım. x_1, x_2, \dots, x_n , x rasgele değişkenini oluşturan n ayrık değer olsun. x rasgele değişkeninin x_i değerine eşit olduğunu ifade eder. $P_x(x=x_i)$ ifadesi x_i sayısının atandığı olayın olasılığını göstermektedir. Misal olarak, eğer deneyin n sonucu karşılıklı olarak tek ise, bu durumda

$$\sum_{i=1}^n P_x(x = x_i) = 1 \quad (3.9)$$

şeklinde yazılır. Denklem (3.9) ifadesi kesin olayın olasılığını ifade eder. Deneyin sonucu x ve y gibi iki olaydan meydana gelmiş ise, daha önce olduğu gibi, x rasgele değişkeninin x_i değerine ve y rasgele değişkeninin y_j değerine eşit olma olasılığı olan $P_{xy}(x = x_i, y = y_j)$ orta olasılığını tanımlarız. Kesin olay, bütün i ve j 'ler üzerinden yapılan toplama ile ifade edilir. Böylece,

$$\sum_i \sum_j P_{xy}(x = x_i, y = y_j) = 1 \quad (3.10)$$

şartlı olasılıklar ve Bayes kuralı denklemler (3.6)'ya benzerdir.

$$\sum_i P_x(x = x_i | y = y_j) = 1 \quad (3.10a)$$

$$\sum_j P_y(y = y_j | x = x_i) = 1 \quad (3.10b)$$

$$P_x(x = x_i | y = y_j) = \frac{P_{xy}(x = x_i, y = y_j)}{P_y(y = y_j)} \quad (3.10c)$$

$$P_y(y = y_j | x = x_i) = \frac{P_{xy}(x = x_i, y = y_j)}{P_x(x = x_i)} \quad (3.10d)$$

$$P_x(x = x_i | y = y_j) = \frac{P_y(y = y_j | x = x_i) P_x(x = x_i)}{P_y(y = y_j)} \quad (3.10e)$$

3.1.4 - Olasılık Dağılım Fonksiyonları

Şimdi, gerçek rasgele değişkeni x 'in $-\infty \leq x \leq \infty$ reel eksenini üzerindeki herhangi bir değeri alabildiği sürekli durumu gözönüne alalım. Olasılık dağılım fonksiyonu (bazen kümülatif dağılım fonksiyonu olarak da adlandırılır.) $P(x \leq X)$, yani x rasgele değişkeninin X sabitinden az veya eşit bir değer alma olasılığını tanımlayacağız. Açık bir ifadeyle

$$P(x \geq \infty) = P(x \leq -\infty) = 0 \quad (3.11)$$

$$P(x \leq \infty) = 1 \quad (3.12)$$

x rasgele değişkeninin $X_2 < x \leq X_1$ sahasında bir değer alma olasılığı pozitiftir ve

$$P(x \leq X_1) - P(x \leq X_2) = P(X_2 < x \leq X_1) \quad (3.13)$$

şeklinde ifade edilir. Her $X_1 > X_2$ değeri için $P(x \leq X_1) \geq P(x \leq X_2)$ sonucunu çıkarırız ki, böylece olasılık dağılım fonksiyonun pozitif, 0 ve 1 arasında sınırlanan artan fonksiyon olduğu görölür. (Şekil-3.1)

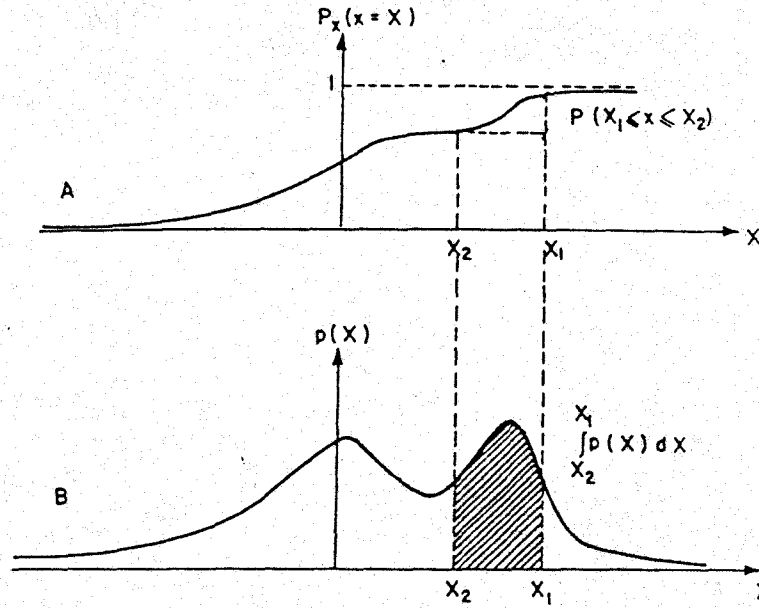
x ve y gibi iki rasgele değişkeninin $(-\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty)$ aralığında değer aldığı iki rasgele değişkenini gözönüne aldığımızda. $P(x \leq X, y \leq Y)$ ortak olasılık fonksiyonunu tanımlayabiliriz. X ve Y 'nin ortak olasılık dağılım fonksiyonu, x rasgele değişkeninin $x \leq X$ değerini alması ve y rasgele değişkeninin $y \leq Y$ değerini alması olasılığıdır. Aşağıdaki ifadeler bunu açıkca göstermektedir.

$$P(x \leq X, y \leq \infty) = P(x \leq X) \quad (3.14a)$$

$$P(x \leq \infty, y \leq Y) = P(y \leq Y) \quad (3.14b)$$

$$P(x \leq -\infty, y \leq Y) = 0 = P(x \leq X, y \leq -\infty) \quad (3.14c)$$

$$P(x \leq \infty, y \leq \infty) = 1 \quad (3.14d)$$



Şekil-3.1 Olasılık fonksiyonları (A) olasılık dağılım fonksiyonu (B) olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF)

3.1.5 - Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

x sürekli rasgele değişkenini ve x 'in X 'e yakın bir değer alması olasılığı olan $P(X-\Delta X \leq x \leq X)$ olasılığını göz önüne alalım ve bu olasılığı $p(X)\Delta X$ ile gösterelim. ΔX 'in sonsuz küçük komşulugunu göz önüne alalım ve

$$p(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X) - P(x \leq X - \Delta X)}{\Delta X} \quad (3.15)$$

denklemini elde etmek için (3.13) denklemini kullanalım. Bu ifade tanım gereği türev operatörüdür. Böylece aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$p(X) = \frac{d}{dX} P(x \leq X) \quad (3.16a)$$

$$P(x \leq X) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (3.16b)$$

Denklem (3.16A) da türevin mevcut olduğunu yada delta fonksiyonlarına göre ifade edilebildiğini kabul ettik [12]. Aşağıdaki ifadeler bunu açıkça göstermektedir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (3.17a)$$

$$P(X_2 < x \leq X_1) = \int_{x_2}^{x_1} p(x) dx \quad (3.17b)$$

Sürekli rasgele değişkenleri için X_0 gibi belirli bir değeri alması olasılığının sıfır olduğunu unutmamak gerekir.

$$P(x = X_0) = 0 \quad (3.17c)$$

Deney birden çok rasgele değişkeninden meydana geldiğinde denklem (3.16)'ya benzer tarzda ortak olasılık fonksiyonu üzerine tanımlanan ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanmak gerekir.

$$P(XY) = \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} P(x \leq X, y \leq Y) \quad (3.18a)$$

$$P(x \leq X, y \leq Y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p(x, y) dx dy \quad (3.18b)$$

Denklem (3.18a) da kısmi türevlerin mevcut olduğu yada delta fonksiyonlarına göre ifade edilebildiğini kabul ettik.

Diger bir rasgele değişkeni üzerindeki bazı şartlar verildiğinde bir rasgele değişkeninin araştırılacağı durumlara incelenecektir. x 'in $X - \Delta X < x \leq X$ sahasında değer aldığı verildiğinde, y rasgele değişkeninin bir Y değerine eşit yada küçük değerler alma olasılığını göz önüne alalım

$$P(y \leq Y | x = X) = \frac{\int_{-\infty}^y p(X, y) dy}{p(X)} \quad (3.19)$$

Denklem (3.19)'u şartlı olasılık dağılım fonksiyonu olarak tanımlıyoruz. Eğer bu fonksiyonun türevleri mevcutsa

$$p(Y | X) = \frac{dP(y \leq Y | x = X)}{dY} \quad (3.20a)$$

$$P(y \leq Y | x = X) = \int_{-\infty}^y p(y | X) dy \quad (3.20b)$$

ile verilen şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlanır. son tanımlamalardan ve önceki ilişkilerden aşağıdaki ilişkiler kolayca elde edilebilir.

$$p(Y | X) \geq 0 \quad (3.21a)$$

$$P(Y_1 < y \leq Y_2 | X) = \int_{Y_1}^{Y_2} p(y | X) dy \quad (3.21b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y | X) dy = 1 \quad (3.21c)$$

$$p(Y|X) = \frac{p(X,Y)}{p(X)} \quad (3.21d)$$

3.2 - RASGELE SİNYALLERİNİN KARAKTERİZYASYONU

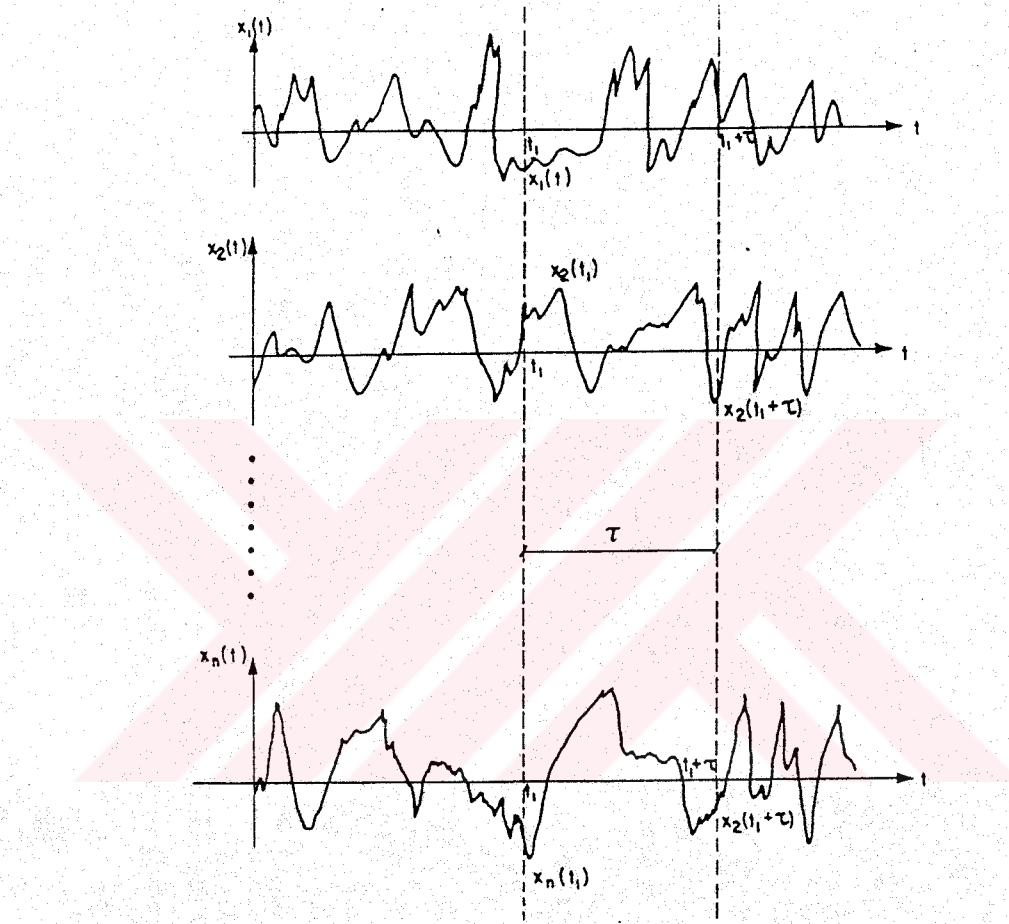
3.2.1 - Rasgele İşlemler

Şimdiye kadar "bir deneyin sonucu" olan rasgele değişkenlerini göz önüne alındı. Şimdi $x(t)$ zaman fonksiyonunu göz önüne alalım. Her hangi bir t_i anındaki fonksiyon değeri olan $x(t_i)$ bir rasgele değişkenidir. Burada göz önüne alınan sinyallerin çoğu zaman-bağımlı sinyaller olduklarından t değişkeni seçildi. Tabiki genelde x uzaklık veya başka bir değişkenin fonksiyonu olabilir.

örnekleme fonksiyonu olarak gösterilen $x(t)$ rasgele fonksiyonunu üreten bir kaynağa sahip olduğumuzu kabul edelim. Kaynak çok sayıda örnek fonksiyon üretir ve örnekler hep birlikte bir küme oluştururlar. Herhangi bir t_i anında, çok sayıda "deney sonucu" almak için bütün örnek fonksiyonların değerlerini gözleyebiliriz. Şekil-3.2 x raslantı işaretinin kümesinden elde edilen örnek fonksiyonları göstermektedir.

Misal olarak, vücut üzerinde belirli bir yere yerleştirilen elektrod yüzeyi vasıtasıyla alınan EEG sinyalini göz önüne alalım. Misal olarak, verilen bir nüfus bölümünde belirli bir yaştaki çocukların sağlığı ile belirli bir yerde kayıtlı bulunan EEG'nin özelliklerini araştırmak istiyoruz. Kayıt edilen EEG'nin özelliklerini araştırmak istiyoruz. Kayıt edilen EEG'nin ortak bir rasgele işlemin örnek bir fonksiyonu

olduğunu hipotez olarak kabul edelim. n örnek fonksiyonu kayıt ettikten sonra her t_i zamanı için $x(t_i)$ rasdele değişkeninin n değerine sahip oluruz. Bu değerleri $x(t_i)$ 'nin olasılık dağılım fonksiyonunu tahmin etmek için kullanabiliriz.



Şekil-3.2 $x(t)$ rasgele işlem kümesi

$x(t)$ 'nin n örnek fonksiyonundan oluşmuş bir kümeye sahip olduğumuzu kabul edelim. Büyük n değeri için $P(x(t) \leq X)$ olasılığını tahmin etmek için bu kümeyi kullanabiliriz. Aynı zamanda $P(x(t_1) \leq X_1, x(t_2) \leq X_2, \dots, x(t_N) \leq X_N)$ ortak olasılığını da tahmin edebiliriz, bunu $P(x_1, x_2, \dots, x_N)$ şeklinde ve $x(t)$ rasgele işleminin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu da $P(x_1, x_2, \dots, x_N)$ şeklinde gösterebiliriz.

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu kolayca gösterebiliriz.

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) \geq 0 \quad (3.22a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1, \dots, dx_N = 1 \quad (3.22b)$$

$$p(x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_N | x_1, x_2, \dots, x_j) = \frac{p(x_1, x_2, \dots, x_N)}{p(x_1, x_2, \dots, x_j)} \quad (3.22c)$$

$x(t)$ ve $y(t)$ şeklinde iki rasgele işleme sahip olduğumuzu kabul edelim. Eğer,

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M) = p(x_1, x_2, \dots, x_N) p(y_1, y_2, \dots, y_M) \quad (3.23)$$

ise bu işlemlerin istatikselsel olarak bağımsız işlemler oldukları söylenir. $x(t)$ 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $t=t_1$ zamanında tahmin edilir. (Şekil-3.2) Başka bir $t=t_1+\tau$ zamanında da ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu tahmin edilir.

Bütün zamanlarda ve bütün N değerleri için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları aynı olan bir işlem, bir sabit işlem (stationary process) olarak adlandırılır.

3.2.2 - İstatiksel Ortalamalar (Beklenen değerler)

Ortak olasılık fonksiyonları verilmiş olan x ve y gibi iki rasgele değişkenini göz önüne alalım. Yeni bir $z = f(x,y)$ rasgele değişkeni bu iki değişkenin tek değerli bir fonksiyonu olsun. $E(z)$ beklentisini

$$E(z) = E\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)p(x,y) dx dy \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlarız. Beklenen değer istatiksel ortalama veya gözlem sonucu ortalama değer olarak da bilinir. Eger, $i = 1,2,\dots,I$ için x rasgele değişkeni x_i değerlerini ve $j = 1,2,\dots,J$ için y rasgele değişkeni y_j değerlerini alan ayrık rasgele değişkenleri ise, bu durumda beklenen değer

$$E(z) = E\{f(x,y)\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f(x_i,y_j)P(x_i,y_j) \quad (3.25)$$

şeklindedir. Beklentinin lineer bir operatör olduğunu göstermek kolaydır.

Misal olarak $z = x^n$ fonksiyonunu göz önüne alalım, x^n nin beklentisi x 'in n .momenti olarak bilinir.

$$E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (3.26)$$

x 'in ilk momentini olan $m = E(x)$ ortalama değer olarak

adlandırılır. Sabit bir işlemede ortalama değer "dc" komplementtir. n.merkezi moment μ_n

$$\mu_n = E\{(x - m)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^n p(x) dx \quad (3.27)$$

şeklinde tanımlanır.

İkinci merkezi moment özel bir öneme sahiptir; bu moment varians olarak adlandırılır ve σ_x^2 ile gösterilir.

$$\sigma_x^2 = \mu_2 = E\{(x - m)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x) dx \quad (3.28)$$

Variansın, karekökü standart sapma olarak adlandırılır. Benzer şekilde (n + k).mertebe ortak moment $E\{x^n y^k\}$ ve ortak merkezi moment μ_{nm} ,

$$E\{x^n y^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m p(x, y) dx dy \quad (3.29)$$

$$\mu_{nm} = E\{(x - m_x)^n (y - m_y)^m\} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n (y - m_y)^m p(x, y) dx dy \quad (3.30)$$

şeklinde tanımlanır. Özel öneme sahip ortak merkezi moment μ_{11} kovaryans olarak adlandırılır.

$$\mu_{11} = E\{(x - m_x)(y - m_y)\} \quad (3.31)$$

3.3 - KORELASYON ANALİZİ

3.3.1 - Korelasyon Katsayısı

x ve y gibi iki rasgele değişkenini göz önüne alalım. İki rasgele değişkeninin bir lineer bağımlılığa sahip olduğunu kabul edelim. Bu şekilde, x - y düzleminde rasgele değişkenlerinin örneklerini çizecek olacak olursak çizilen noktaların dağılım diyagramı

$$y_p = ax + b \quad (3.32)$$

doğrusu çevresinde yayılacaktır. (x,y) rasgele noktaları tam olarak çizgi üzerine $((x,y_p)$ noktaları) düşmeyecektir. Fakat doğrunun çevresinde yayılacaklardır. Rasgele noktalar ve doğru arasındaki ortalama karesel hata ϵ ,

$$\epsilon = E\{(y - y_p)^2\} = E\{(y - ax - b)^2\} \quad (3.33)$$

şeklinde verilir. ϵ 'nu minimum yapacak şekilde dağılım noktalarından geçecek şekilde çizilen en iyi doğru regresyon doğrusu olarak bilinir. Regresyon doğrusunun a ve b parametreleri denklem (3.33)'ü minimum yapacak şekilde verilir.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a} = 0 = -2E\{(y - ax - b)x\} = -2E\{xy\} + 2aE\{x^2\} + 2bE\{x\} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial b} = 0 = -2E\{(y - ax - b)\} = -2E\{y\} + 2aE\{x\} + 2b$$

çözümün sonucu;

$$a = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2} \quad (3.35a)$$

$$b = m_y - \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2} m_x \quad (3.35b)$$

elde edilir.

Böylece regresyon doğrusu

$$y_p = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2} (x - m_x) + m_y \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilir. Doğrunun (m_x, m_y) noktasından geçtiğini not etmek gerekir. Sıfır ortalamalı ve birim varyanslı değişkenlerle çalışmamız dolayısıyla rasgele değişkenin normalize etmek oldukça faydalıdır. Böylece;

$$\xi = \frac{x - m_x}{\sigma_x}; \quad \phi = \frac{y - m_y}{\sigma_y}; \quad \phi_p = \frac{y_p - m_y}{\sigma_y} \quad (3.37)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda regresyon doğrusu (denklem (3.36)) yeni değişkenlere göre;

$$\phi_p = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y} \xi = \rho \xi \quad (3.38)$$

şeklinde yazılabilir. Burada korelasyon katsayısı ρ ,

$$\rho = E(\xi\phi) = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlanır. Korelasyon katsayısı normal ve edilmiş kovaryans olarak da bilinir ve normalize edilmiş değişkenlerin regresyon doğrusunun eğrisidir. Şimdi $E((\xi-\phi)^2)$ ortalama karesel farkını göz önüne alalım. Karesi alınmış bir nicelik olması dolayısıyla mutlaka pozitif olmalıdır.

$$E((\xi - \phi)^2) = E(\xi^2) - 2E(\xi\phi) + E(\phi^2) = 2(1 - \rho) \geq 0 \quad (3.40a)$$

Benzer şekilde

$$E((\xi + \phi)^2) = E(\xi^2) + 2E(\xi\phi) + E(\phi^2) = 2(1 + \rho) \geq 0 \quad (3.40b)$$

Denklem (3.40)'dan korelasyon katsayısı sahasını

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (3.41)$$

şeklinde elde ederiz.

Eğer x ve y rasgele değişkenlerinin korelasyon katsayısı ρ sifıra eşitse bu değişkenlerin ilişkisiz veya lineer olarak bağımsız oldukları söylenir. Denklem (3.39)'dan ilişkisiz değişkenler için

$$\mu_{11} = E(\xi\phi) = 0 = E((x - m_x)(y - m_y)) = E(xy) - E(x)E(y) \quad (3.42a)$$

elde edilir. Böylece

$$E(xy) = E(x) E(y) \quad (3.42b)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3.8A)'ya baş vurarak, denklem (3.42B)'nin istatistiksel olarak bağımsız değişkenler için doğru olduğunu görebiliriz. Bu sebeble istatistiksel bağımsız rasgele değişkenleride ilişkisizdir.

3.3.2 - Korelasyon Fonksiyonu

$x(t)$ ve $y(t)$ gibi iki reel raslantı işlemini göz önüne alalım. $x(t_1)=x_1$ ve $y(t_2)=y_2$ olduğunu kabul edelim. Genelde, $E\{x_1, y_2\}$ ortak beklentisi t_1 ve t_2 nin bir fonksiyonudur ve böylece çapraz korelasyon fonksiyonu olarak adlandırılır. $y(t)=x(t)$ durumunda $E\{x_1, x_2\}$ ortak beklentisi otokorelasyon fonksiyonu olarak adlandırılır. Korelasyon fonksiyonu $r_{xy}(t_1, t_2)$;

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1), y(t_2)\} \quad (3.43)$$

şeklinde verilir. Denklem (3.39) ile tanımlanan korelasyon katsayısına benzer tarzda normalize edilmiş korelasyon fonksiyonu $\rho_{xy}(t_1, t_2)$ yi tanımlarız. Böylece;

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{E\{(x_1 - m_{x1})(y_2 - m_{y2})\}}{\sigma(x_1)\sigma(y_2)} = \frac{r_{xy}(t_1, t_2) - m_{x1}m_{y2}}{\sigma(x_1)\sigma(y_2)} \quad (3.44)$$

elde edilirki, burada $m_{x1} = E\{x(t_1)\}$, $m_{y2} = E\{y(t_2)\}$ ve σ standart sapmadır.

İki rasgele işleminin ilişkisi her birinin otokorelasyonları ve kendi aralarındaki çapraz korelasyonları vasıtasıyla izah edilirler. Bu durum, korelasyon matrisi adı verilen

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} r_x(t_1, t_2) & r_{xy}(t_1, t_2) \\ r_{yx}(t_1, t_2) & r_y(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

şeklinde bir matris formunda yazılabilir. Benzer şekilde, iki işlemin ortak kovaryansını göz önüne alabiliriz.

$$\mu_{xy} = E\{(x(t_1) - m_{x1})(y(t_2) - m_{y2})\} \quad (3.46)$$

Kovaryans matrisi W_{xy} ise

$$W_{xy} = \begin{bmatrix} \mu_x(t_1, t_2) & \mu_{xy}(t_1, t_2) \\ \mu_{yx}(t_1, t_2) & \mu_y(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

şeklinde elde edilir. Eğer rasgele işlemleri sabit ise, beklentiler t_1 ve t_2 gerçek zamanlarının bir fonksiyonu olmayıp sadece $\tau = t_1 - t_2$ zaman farkının fonksiyonudurlar. Böylece sabit işlemler için

$$r_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(t, t - \tau) = R_{xy}(\tau) = E\{x(t)y(t - \tau)\} \quad (3.48a)$$

normal bağıntı ise

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{r_{xy}(\tau) - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.48b)$$

sabit işlemler için birde şu bağıntılar

$$r_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(\tau) = r_{xy}(-\tau) \quad (3.49a)$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau) \quad (3.49b)$$

$$|r_{xy}(\tau)| \leq (r_x(0))^{1/2} (r_y(0))^{1/2} \quad (3.49c)$$

$$|r_x(\tau)| \leq r_x(0) \quad (3.49d)$$

elde edilir.

Ortak olasılıkla yoğunluk fonksiyonları zamandan bağımsız olan, fakat denklem (3.48)'i sağlayan anlamda sabit olmayan rasgele işlemler geniş anlamda sabit işlemler olarak adlandırılır.

Otokorelasyon fonksiyonunun anlamı şekil-3.2 vasıtasıyla gösterilebilir. İlk örnek fonksiyondan $x_1(t_1)$ rasgele işleminin değerini alıp onu τ saniye sonraki örnek fonksiyon değeri ile çarpıyoruz. Çarpımların, t_1 zamanında otokorelasyonu sağlaması için bütün küme üzerinden ortalaması alınır. Eğer işlem sabit ise (geniş anlamda sabit olması yeterlidir.) Bu prosüdür bütün t_1 değerleri için aynı sonucu sağlayacaktır.

3.3.3 - Ergodiklik

Zaman ortalamasını örnek fonksiyon üzerinden alınan ortalama olarak tanımlıyoruz. $z(t) = f(x(t))$ fonksiyonunu göz önüne

alalım; bu durumda $z(t)$ rasgele örnek fonksiyonunun zaman ortalaması;

$$\langle z(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x(t)) dt \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, $x(t)$ nin ilk zaman ortalaması basittir.

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (3.51)$$

$x(t)$ ve $y(t)$ gibi iki rasgele işleminin zaman ortalaması

$$\langle r_{xy} \rangle(t, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y(t) dt \quad (3.52)$$

şeklinde ve zaman çarpaz korelasyonu olarak adlandırılır. Sabit işlemler için, denklem (3.52) sadece τ 'nin fonksiyonudur.

Ergodiklik teoremi, belirli şartlar altında bir sabit rasgele işleminin zaman ortalamasının bir olasılığı ile o işlemin istatistiksel beklentilerine eşit olduğunu ifade eder.

Ergodiklik teoremi büyük bir öneme sahiptir. İstatistiksel analizler farklı beklentilerin tahminlerini gerektirir. Buna

karşılık pratik durumlarda böyle bir ortalamaı gerçekleştirmek için yeterli sayıda örnek fonksiyon almak oldukça zordur. Ergodik işlemler için beklenti, tek bir örnek fonksiyon üzerinden alınan zaman ortalamalarından elde edilebilir. Misal olarak EEG'nin istatistiksel analizini göz önüne alalım. Eğer aynı özelliğe sahip kişilerden benzer şartlar altında kaydedilmiş pek çok örnek varsa bu işlemin beklentilerini tahmin edebiliriz. Bu durumu gerçekleştirmek pratik olarak imkansızdır. Buna karşılık, eğer işlem ergodikse bir kişiden kaydedilen tek bir EEG örnek fonksiyonunu kullanabiliriz ve bu fonksiyon üzerinden zaman ortalamalarını alarak beklentileri tahmin edebiliriz.

3.4 - GAUSS İŞLEMİ

3.4.1 - Merkezi Limit Teoremi

Pratikte, araştırma altındaki işlemlerin olasılık yoğunluk fonksiyonları verilemez. Bu fonksiyonlar uygun örnek fonksiyonlardan tahmin edilmek zorundadır. Çok önemli dağılım gauss veya normal dağılımdır. Eğer x rasgele değişkenine karşı düşen

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (3.53)$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile

$$P(x \leq X) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_x} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx \quad (3.54)$$

dağılım fonksiyonuna sahip ise gauss dağılımına sahip olduğu ifade edilir. Normal dağılım sıkça $N(m_x, \sigma_x)$ ile gösterilir. Yeni bir ξ değişkeni (denklem (3.37)) oluşturmak için x rasgele değişkenini çokça normalize ederiz. Yeni değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $N(0,1)$ olacaktır.

Sonsuz zaman ortalamalı örneğin olasılık dağılımı (istatistiksel olarak bağımsız örnekler için), rasgele değişkeninin olasılık dağılımı ne olursa olsun (örnek sayısı sınırsız arttığından dolayı) gauss olmaya doğru meyleder. Bu durum merkezi limit olarak bilinir. Bu teorem, gerçek sinyal işlemede sıkça karşılaşılan gauss dağılımının sebeplerinden bir tanesidir. Bağımsız rasgele değişkenlerinin toplamı gauss olmaya doğru meylettiklerinden, misal olarak EEG'nin bazı durumlarda birbirlerinden bağımsız olarak çalışan pek çok sinirin aktivitesi nedeniyle oluşturulan alanların toplamı şeklinde düşünülmesidir.

3.4.2 - Çok Değişkenli Gauss İşlemi

n tane x_1, x_2, \dots, x_n raslantı değişkenlerini göz önüne alalım

$$\underline{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (3.55)$$

şeklinde n boyutlu bir \underline{x} vektörünü tanımlayalım. Rasgele değişkenlerinin beklentileri vektör formunda

$$\underline{m}_x^T = E(\underline{x}^T) = [E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_n)] \quad (3.56)$$

şeklinde açıklanabilir. Kovaryans matrisi W_x (denklem 3.47)

$$W_x = E\{(\underline{x} - \underline{m}_x)(\underline{x} - \underline{m}_x)^T\} \quad (3.57)$$

şeklinde verilir. Eger ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |W|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{m}_x)^T W^{-1} (\underline{x} - \underline{m}_x) \right]$$

(3.58)

şeklinde ise bu rasgele değişkenlerinin ortak olarak gauss dağılımlı oldukları söylenir. Burada $|W|$ kovaryans matrisinin determinantıdır.

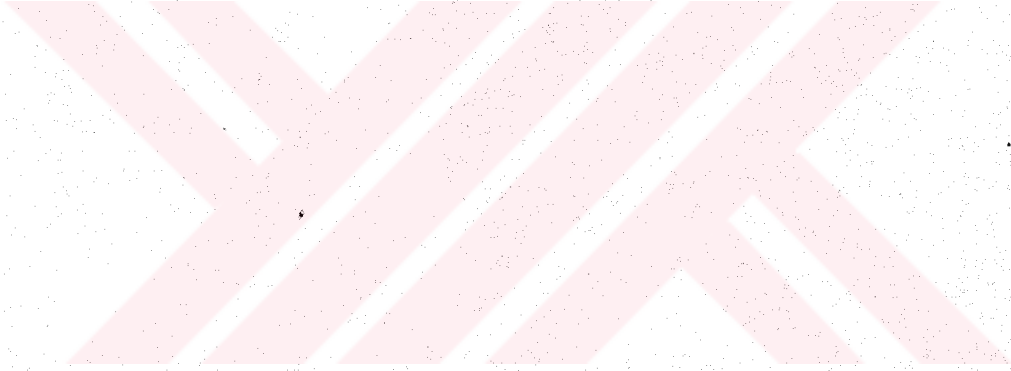
Eger x_i rasgele değişkenleri ilişkisiz ise kovaryans matrisi diyagonaldır. Eğer bütün x_i 'ler sıfır ortalamaya sahipse, bu durumda ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Omega|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \underline{x}^T \Omega^{-1} \underline{x} \right] \quad (3.59)$$

şeklinde olup Ω diagonal kovaryans matrisini göstermektedir.

Gauss rasgele işlemi random bir işlemdir, burada her t_j anlık zaman için $x_i(t_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$ random değişkenleri birbirleriyle bağıntılı olarak gaussdağılımını gösterirler.

Rasgele gauss işleminin lineer transformasyonunun gauss rasgele işlemini vereceğide gösterilebilir. Gauss işleminin bu özelliği işaret işlemede önemlidir. Çünkü herhangi bir lineer kuvvetlendirme ve filtreleme işleminin gauss özelliğini değiştiremeyecektir.



B Ö L Ü M - 4

BİOELEKTRİK İŞARETLERİN SAYISAL İŞLENMESİ

4.1 - Sayısal işaret işleme

Tıpta kullanılan önemli işaretlerin çoğu süreklidir yani analog dur. Kısaca bu işaretler genellikle zamanla değişen bir sürekli saha üzerinde tanımlanır. Bu önemlidir, bununla birlikte ayırık işaretleri ise yalnızca ayırık anlarda tanımlanabilir. Modern sayısal teknolojide, hem donanım hemde program bakımından, analog işaretler üzerinde ayırık zamanlı işlemler yapmak avantajlıdır. Analog (süreklili) işaretleri ayırık bir işarete çevirmek için uygulanabilen ayırık işleme genellikle önemli bir avantajdır. Dönüştürme A/D dönüştürücü sistemleri ile işaretleri ayırık zamanlarda kuantalama ve örnekleme şeklinde yapılır. Genellikle örnekleme düzgün dağılımlı bir şekilde yapılır fakat arasıra düzgün dağılımlı olmayan örnekleme kullanılır.

Sayısal işaret işleminin ana gayelerinden bazıları: filtrelemeye uygulama, değişik işaret parametrelerini belirlemek ve işaretlerin dönüştürülmesini gerçekleştirmektir. Takip eden işaretlerde işleme sonuçlarına hemen ihtiyaç duyulmadığı takdirde, off-line işleme metodu kullanılır.

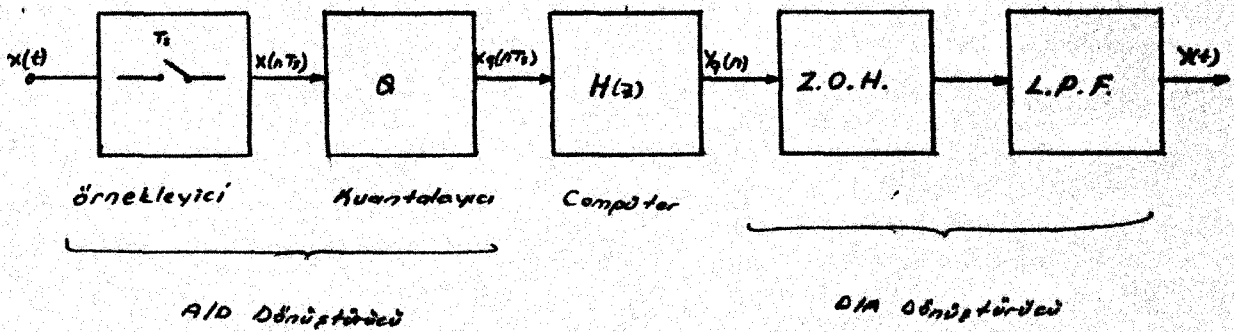
Uygulamaya bağlı olarak, ihtiyaç duyulan hafızanın boyutu ve işlem zamanı sayısal işaret işleme konusunda önemlidir. Off-line işleme metodu genellikle kompüter amaçlı yerlerde kullanılabilir. Real-time işleme metodu ise genellikle özel seçilmiş makinelerde veya sistemlerde, hızlı korelasyon kurucu olarak, tahsis edilmiş fiourier transform makinelerinde, dizi işlemci veya çarpma-toplama hardware sistemlerinde ihtiyaç duyulur. [14-16]

4.2 - ÖRNEKLEME

Genliği $|x(t)| \leq A$ ile sınırlandırılmış, bant sınırlı bir sürekli $x(t)$ işaretini gözönüne alalım. Sınırlı bantlı işaretler $X(w)$ ile belirtilen bir fourier transformuna sahiptir. Böyleki $|w| \geq w_{max}$ için $X(w)=0$ olmalıdır. Genellikle bir sayısal kompüter ile sayısal işleme vasıtasıyla işaretlerin işlenmesi arzu edilir. Sayısal makineler, $x(t)$ gibi sürekli işaretleri $x(k)$ gibi ayırık bir seri dizisine dönüştürülmesine gereksinim duyar. (şekil-4.1) Dönüştürme işleminin ilk basamağı örnekleme veya zaman ayrıklamadır. Örnekleme frekansı $f_s = 1/T_s$ olan T_s aralıklarında düzgün örnekleme yaptığımızı farz edelim. Daha sonra, örneklennmiş bir

dizi datalı $\{x(nT_s)\}$ işaretleri üretelim, burada $n = 0, 1, \dots$. Her örneği not edelim, $x(iT_s)$, $-A \leq x(iT_s) \leq A$ sahasında genlik bakımından süreklidir. Şimdi, ayrık dizilerin gerekli olanlarını almak için bir genlik ayırklamaya ihtiyaç duyulur. Bu metod için bir kuantalama cihazı kullanılır. Örnekleme ve kuantalama işlemleri (A/D) dönüştürme olarak bilinir. Kuantalama işlemini, sürekli şiddetli genliklerin $x(iT_s)$ ayrık sayıdaki genliklere $x_q(iT_s)$ dönüşümü olarak gözönüne alalım.

Temel işleme sistemlerinde, sayısal işaret işleme olayından sonra işaretin bir analog sürekli biçimde olmasına ihtiyaç duyulur. İşlenmiş sayı dizilerini $y_q(n)$ gözönüne alalım. (Şekil-1'e bakınız) Bir analiz işaret elde etmek için (D/A) dönüştürücü kullanırız. D/A dönüştürücü daha çok sıfır dizilerini tutma deyrresinden ibarettir. (ZOH, zero order hold) Bu devreyi ise alçak geçiren bir filtre (LPF, low pass filter) izler.



Şekil-4.1 Analog işaretlerin sayısal işlenmesi

4.2.1 - Düzgün (Uniform) Örnekleme

Şekil-4.1 de açıklanmış ideal örnekleme, her T_s aralıklarında sonsuz kısa bir süre için kapanan bir anahtardan ibarettir. Bu anahtar, bir dizi impuls fonksiyonu $\delta_T(t)$ ile sürülen bir ideal anahtar olarak düşünülebilir.

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (4.1)$$

burada $\delta(t)$ delta veya dirak fonksiyonudur. Örneklenmiş işaret $\delta_T(t)$ dizisi ile sürekli işaret $x(t)$ 'nin çarpımı olarak gözönüne alınır. Ayrık zamanlı örneklenmiş işaret yazılabilir böylece zamanın bir fonksiyonu olarak $X^*(t)$ ile ifade edilir.

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT_s) \quad (4.2)$$

Eğer $x(t)$, sınırlı-bantlı bir işaret ise $X(\omega)$ ile gösterilen bir fourier transformuna sahip olduğu gösterilebilir daha sonra örneklenmiş işaretin fourier transformu olan $X^*(\omega)$,

$$X^*(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n\omega_s) \quad (4.3)$$

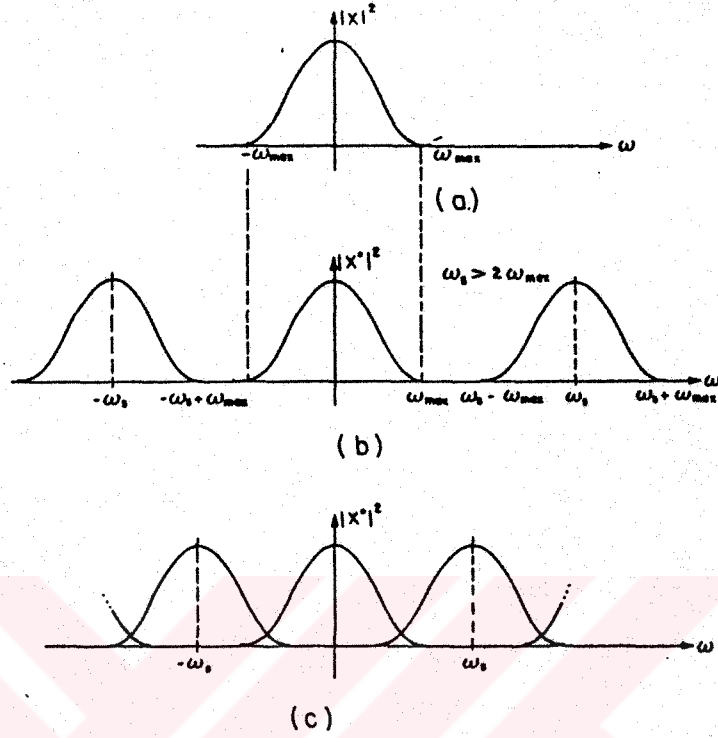
olarak yazılabilir. Burada $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$ şekil-4.2 iki durum için bir transform örneği gösterilir. Şekil-4.2b de örnekleme frekansı $\omega_s > 2\omega_{\max}$ olmak zorundadır burada ω_{\max} , $x(t)$ işaretinin en büyük frekansıdır. Frekans domeninde örneklenen

işarete örtüşüm (nonoverlapping-yakın çakışma) olmadığını belirtelim. İşareti bozmadan $-w_{\max} \leq w \leq w_{\max}$ içerisindeki bütün frekansları geçirebilecek bir alçak-geçiren filtrenin etkisini gözönüne alalım. Bu sahanın dışında bütün frekanslarda sıfırdır. Filtrenin çıkışındaki işaretin fourier transformu, $x(t)$ nin fourier transformuna eşittir. Çünkü fourier transformu tektir. Eğer örnekleme frekansı

$$w_s \geq 2w_{\max} \quad (4.4)$$

Şartını sağlarsa böyle bir alçak-geçiren filtreleme işlemi ile örneklerden esas işareti elde edebiliriz. Bu olay örnekleme teoremi olarak bilinir. (4.4) şartı ise Nyquist oranı isimlendirilir. Şekil-4.2c de ise, örnekleme frekansı, nyquist oranından küçük olması durumundaki örneklenmiş işaretin fourier transformunu gösterir. Bu durumda, frekans domeninde işaretler karışır ve alçak-geçiren filtreleme ile distorsiyonsuz bir şekilde orijinal işaret elde edilemez. Bu çakışma olayı "frekans örtüşmesi" olarak isimlendirilir. Sınırlı bantlı olmayan bir sürekli işaret örneklendirici zaman w_s ne kadar büyük olursa olsun örtüşme her zaman oluşur.

Pratik durumlarda, bir işaret çok büyük bir w_{\max} değerine sahip olduğunda, analog alçak-geçiren filtre ile ön işleme tabii tutularak yüksek frekanslar yok edilir. Böylece örtüşme problemi oluşmaz. Teoride ise işaret en düşük nyquist oranı olan $w_s = 2w_{\max}$ 'da örneklenebilir.



Şekil-4.2 Frekans domeninde örneklenmiş band-sınırlı işaretler. (a) Band sınırlı işaretin spektrumu (b) Örneklenmiş işaretin spektrumu $\omega_s > 2\omega_{max}$ (c) Örneklenmiş işaretin spektrumu $\omega_s < 2\omega_{max}$ örtüşmeye dikkat edilir.

Böyle örneklenmiş bir işaretin tekrar orijinal hale dönüştürülmesi için ideal bir dikdörtgensel alçak-geçiren bir filtreye ihtiyaç duyulur çünkü onun frekansları kaybolmaz. İşaretin tekrar elde edilebilmesi için güvenilir filtreleri kullanma ihtiyacından dolayı işareti, nyquist oranından daha yüksek frekanslarda örnekleme gerekir. ω_{max} ' in 2.5 ila 10 katı frekanslarda örnekleme sıklık kullanılır.

4.2.1 - Düzgün Olmayan (Nonuniform) Örnekleme

Bilgi yalnızca örnek alınan değerlerden oluştuğu için uniform örnekleme oranı yeterlidir. Örnekler T_s aralıkları vasıtasıyla eşit bir şekilde bölündüğü önceden bilindiği için zaman bilgisine ihtiyaç duyulmaz. Ara sıra, bununla birlikte, işaret hızlı değişimin ve oldukça yavaş aralıkların meydana geldiği bazı aralıklardan oluşur. Yavaş (hızlı değişmeyen) aralıklar esnasında azalan örnekleme oranına karşılık, hızlı değişimin olduğu periyodlara yüksek oranda örnekleme meyleder. Bu durum bir adaptif için uniform olmayan örnekleme gerektirir. Mesela ECG işaretinde böyle örnekleme etkili olabilir.

Uniform olmayan kullanım için, adaptif örneklemeyi iki ana sebep ortaya çıkarır. Birincisi etkili depolama ihtiyacı duyulduğu zamandır. Bu problem minimum depolama boyutunu kullanarak işareti depolamak, kalanını verilen bir hata dahilinde işareti tekrar elde etme yeteneğidir. Buradaki problem, transmisyon oranını (saniye başına bit) azaltmak, kalanını verilen bir hata dahilinde alıcı ucunda işareti tekrar elde etme kabiliyetidir.

Transmisyon (iletişim) oranını ve depolama zorunluluklarını azaltmak için değişik data baskı teknikleri haberleşme uygulamaları için geliştirilmektedir. Farklı puls kod modülasyonu (DPCM) çok popüler uygulamalardan biridir. Bir hata işareti üretilir ve uniform olmayan bir şekilde kuantalanır. Kuantalayıcının çıkışında hesaplanan bir işaret ile orijinal işaretin arasındaki fark hatayı verir. Böylece;

yalnızca hata kuantalanır ve azalan bilgi miktarı iletilir. Kuantalayıcının çıkışı uniform (düzgün, tek) olarak örneklenmiştir. Yukarıdaki yorumun daha hassas gelişmesi işarete göre kuantalayıcının adını boyutu q 'yu otomatik olarak ayarlayan bir adaptif kuantalayıcının belirlenmesiyle olur. Adaptif delta modülasyonu (ADM), senkron haberleşme sistemlerinde sık sık kullanılan böyle bir gelişmedir.

Düzgün olmayan örnekleme kullanılarak data baskı tekniğinde önemli bir küçülme elde edilir [17-18]. Kaynak işareti bir eşik seviyesini geçtiği anda sadece bilgi gönderen bir yöntemi gözönüne alalım. Bu durum; yavaş değişimin meydana geldiği yerlerde işarete periyodlara sebep olur. Bununla birlikte not etmek gerekirdi; transmisyon (iletim) şu anda senkron değildir. Çünkü; alıcı zaman eksenindeki örneğin tam yerleşimini önceden bilemez. Depolama uygulamalarında, bilgi örnek zamanını belirlemek için eklenmek zorundadır.

4.2.2.1- Sıfır, birinci ve ikinci dereceli Adaptif Örnekleme

Adaptif örnekleme için üç basit yöntem, Uniform olmayan örnekleme bu bölümde incelendi. ECG uygulamaları birlikte bu üç metodun karşılaştırılması kaydedildi. Sıfır dereceli adaptif metod aynı zamanda voltaj tetiklemeli metod olarak bilinir. t_i zamanında bir örnek gönderildiğini farzedelim daha sonra zamandaki bir örnek zaman olarak t_{i+1} olur. $(x(t_{i+1}) - x(t_i))$ farkının mutlak değeri öncelikle verilen bir eşik seviyesini (R_0) aştığı anda olur. Böylece i. örnekleme

aralığı τ_1 ile verilir. Bu şekilde

$$|\Delta x(t_1, \tau_1)| = |x(t_1 + \tau_1) - x(t_1)| > R_0 \quad (4.5)$$

halini alır. İşaretin w_{\max} ile band sınırlı olduğu kabul edildiği için $w_{\max} = kw_{\max}$ dan daha yüksek bir oranda onu örnekleme yoktur. (burada k , $2 \leq k \leq 10$ sahasında bir sabittir) Denklem (4.5) örnekleme aralığını $\tau_1 < 2\pi / kw_{\max}$ olarak sağlarsa, $\tau_1 = 2\pi / kw_{\max}$ olarak yerleşebilir. Adaptif yöntemin maksimum örnekleme frekansı sürekli olarak kw_{\max} ile sınırlandırılır. ECG ile ilgili voltaj tetiklemeli uniform olmayan örneklemenin bir örneği şekil-4.3 de gösterilmiştir.

Birinci dereceli metod aynı zamanda iki noktalı projection metodu olarak bilinir. Burada, birinci örnek işaretin eğimini tahmin etmede kullanılır. Ard arda gelen örnekler bu eğimin bazı özelleştirilmiş hata bölgesine düşer, bunlar ihmal edilir. Hata toleransının dışında bulunan ilk örnek depolanır (veya iletilir) ve bir sonraki eğimi tahmin etmede kullanılır. t_1 zamanındaki işaretin türevini $\dot{x}(t_1)$ ile ifade edelim. t_1 deki $x(t_1)$ örneğinin depolandığını farz edelim. Depolanan daha sonraki örnek $t_1 + \tau_1$, $x(t_1 + \tau_1)$ zamanındaki örnektir. Eşik seviyesini R_0 ilk geçen eğimin farkının mutlak değeri için,

$$|\Delta \dot{x}(t_1, \tau_1)| = |\dot{x}(t_1 + \tau_1) - \dot{x}(t_1)| > R_0 \quad (4.6)$$

Burada, depolanabilen son noktadaki eğim ile $(t_1 + \tau)$ zamanındaki noktanın eğimini karşılaştırdığımızı belirtelim.

R_1 aşıldığı zaman, $x(t_i + \tau_i)$ örneğini alıyoruz ve bir yeni referans olarak $x(t_i + \tau_i)$ yeni eğimi kullanıyoruz.

İşaretin eğimi önceden belirlenmek (tahmin etmek) zorundadır. $w_s = kw_{\max}$ gibi bir max. oranda işaretin uniform örnekleme hızına gözönüne alalım. ($\{x(nT_s)\}$, $n = 0, 1, \dots$ örneklerini üreten) Eğim,

$$\hat{x}(nT_s) = \frac{x(nT_s) - x((n-1)T_s)}{T_s} \quad (4.7a)$$

ifadesi ile hesaplanır.

İşarete gürültü eklenirse, (4.7a) ifadesi

$$\hat{x}(nT_s) = \frac{\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x((n+j)T_s) - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x((n-j)T_s)}{(M-1)T_s} \quad (4.7b)$$

şeklinde yazılır. Burada, $(2M-1)$ dataları pencerelemeye kullanılan örnek sayısıdır. Eğim, daha sonra her $(2M-1)T_s$ saniyede tahmin edilir. İki noktalı projection metodun ECG'ye uygulanması şekil-4.3 de gösterilmiştir.

İkinci dereceli nonuniform örnekleme metodu ikinci farklar metodu olarak bilinir. Akım örneğinden hemen önce ve ondan hemen sonra eğim incelenir. Eğer, bu iki bitişik eğimin mutlak değeri belirli bir R_2 seviyesinde büyük ise örnek depolanır

(veya alınır). Bu nedenle burada eğimin lokal değişimini gözönüne alıyoruz. Metod aşağıdaki şekilde formüle edilir. Eğer,

$$|\dot{x}(t_1^+) - \dot{x}(t_1^-)| > R_s \quad (4.8)$$

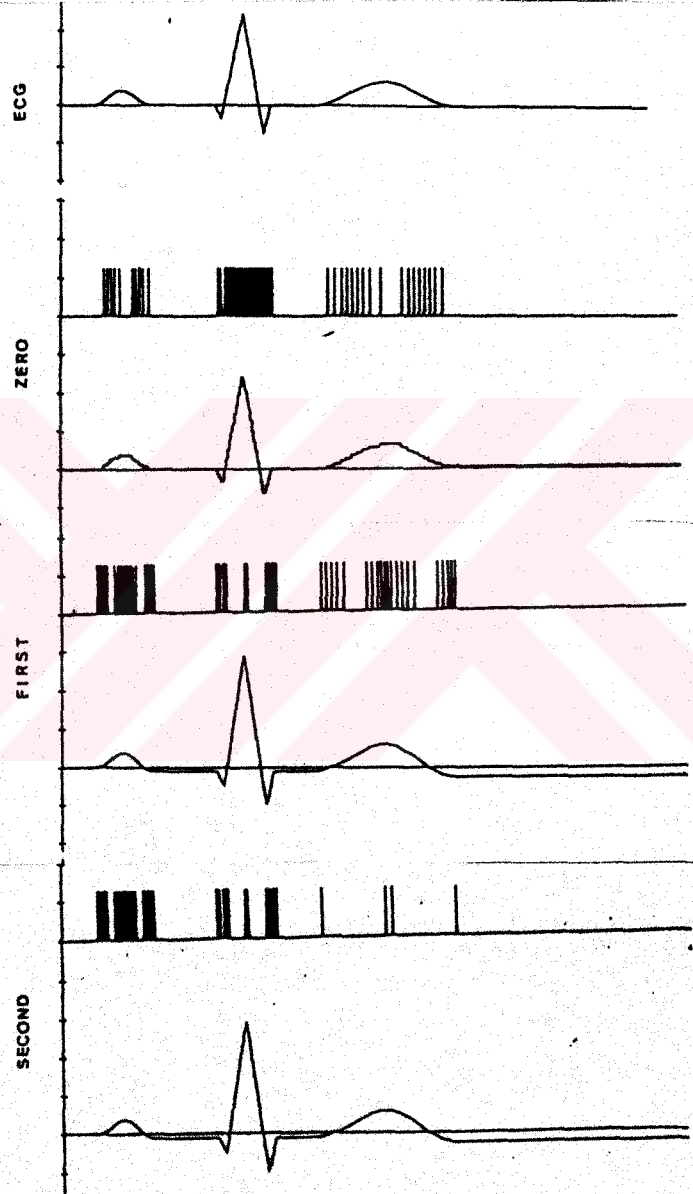
ise, $x(t)$ örneği alınır. Pratikte zamana göre türevleri önceden bilmek (tahmin etmek) zorundayız. Bu ise; bir maximum oranda işareti uniform olarak örnekleme ile tekrar yapılabilir. (4.8) denklemi ile $t_n = nT_s$ zamanındaki $x(nT_s)$ örneğinin incelenmesi (4.7b) eşitliğinde eğim tahminin kullanılarak yapılabilir. Eğer dataları pencerelemek için tekrar $(2M-1)$ örneklerinin bir pencerelemesini seçersek (M 'nin tek olduğu farzedilerek),

$$\hat{x}(t_n^+) = \frac{\frac{2}{M+1} \sum_{j=0}^{(M-1)/2} x\left[\left(n + \frac{M-1}{2} + j\right)T_s\right] - \frac{2}{M+1} \sum_{j=0}^{(M-1)/2} x\left[\left(n + \frac{M-1}{2} - j\right)T_s\right]}{\left[\frac{M-1}{2}\right]T_s} \quad \dots(4.9a)$$

$$\hat{x}(t_n^-) = \frac{\frac{2}{M+1} \sum_{j=0}^{(M-1)/2} x\left[\left(n - \frac{M-1}{2} + j\right)T_s\right] - \frac{2}{M+1} \sum_{j=0}^{(M-1)/2} x\left[\left(n - \frac{M-1}{2} - j\right)T_s\right]}{\left[\frac{M-1}{2}\right]T_s} \quad \dots(4.9b)$$

İkinci farklar metodunun ECG uygulaması Şekil-4.3 de

gösterilir. Voltaj-tetiklemeli ve ikincil farklar metodunun, ECG yi senetic örneklemede ciddi ağızralara sahip olduğunu Blanchard ve Bar ispat etmiştir [19]. Onlar iki noktalı projection metodunun 1:14 civarında ortalama azalma, üretimde işareti en iyi biçimde düzenlemiştir.



Şekil-4.3 ECG'nin uniform olmayan örneklemesi

4.2.1.2 - Nonuniform Örnekleme (Run length Encoding ile)

Uniform olmayan bir biçimde örneklennmiş işaretin asenkron

olacak iletimi sayısal depolama ile karşılaştırılmaz. Örnekler arasındaki zaman aralığını ihtiva eden bilgi sağlanmak zorundadır. Bu yöntemler için çeşitli metodlar geliştirilmiştir. Burada Mark ve Todd tarafından başarılmış bir metodu inceleyeceğiz [17]. Bu medodda zaman aralıkları, run lengths (yürüyen uzunluklardır) anlamında kodlanır. Bir eşik seviyesinde aştığı her zamanda işareti örnekleyen bir nonuniform örnekleme kod çözücü (NSE) uygularız NSE: işaretin dinamik sahası $\pm A$ yı eşit aralıklı eşik seviyelerine böler ve eşik seviyelerin biri aşıldığı her zamanda bir örneği iletir. Her örnek için kodu çözülen bilgi son seviye aşılışından sonraki zaman aralığındadır ve aşma yönündedir.

i. aşma zamanını t_i ile ifade edersek, i. ve (i-1). aşmalar arasındaki zaman aralığı $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ ile ifade edilir. Zaman kuantumu t_q olacak şekilde zaman eksenini kuantalayacağız. i. aralığın kuantalanışı τ_i^q :

$$\tau_i^q = \begin{cases} t_q & \text{eger } \tau_i \leq t_q \\ m_i t_q & \text{eger } t_q < \tau_i \end{cases} \quad (4.10)$$

şeklinde belirlenir. Burada $m_i = [\tau_i / t_q + 0.5]$ olarak argümana eşit veya ondan daha küçük tam sayı olacak. Her örnek için kod çözme işlemi aşağıdaki gibi yapacağız. (00) olan sıfırların bir çifti ile τ_i^q deki her bir zaman kuantalamayı t_q ile, (01) ile yukarı (üst) aşmayı ve (10) ile aşağı (alt) aşmayı ifade

edelim. Aşma kodu vasıtasıyla sıfırların çiftini (bir çift eksik) yerleştirme ile yeni bir dijital kelime üretilir. mesela, önceki aşmaktan sonra $3t_q$ saniyede oluşan bir alt aşma 00 00 10 ile gösterilir. Şimdi bu kelimeyi bir tek bit (aşağı aşma için bir ve yukarı aşma için sıfır) ile izlenen sıfırlar çiftinin sayısı beş dijite olacak şekilde kodlayacağız. Yukarıdaki misal için kodlanmış 101 sayısını alacağız. Bu kodlama, başlangıçtaki kelimenin yürüyen uzunluğudur. Misaldeki kodlanan kelimenin uzunluğu yani şiddeti $n=3$ bit'tir. Bu aralık kaydetmede iki dijite müsaade eder. nt_q periyodunda hiçbir aşma olmazsa, n . zamanda bir kelime (00) üretilir. ($n=3$ için bu kelime 3 grup "00" ı ifade eden 110 a kodlanır.) Hiç bir seviye aşmaları olmayan uzun aralıklarla bölünmüş periyodlar bir dizi 110 kelimesine kodlanır.

Metod vasıtasıyla üretilen sıkıştırma oranını gözönüne alalım. Alt aşmanın ihtimalini üst aşmanın ihtimaline eşit olduğu farz edilirse,

$$P(01) = P(10) = \frac{1}{2}(1 - P(00)) \quad (4.11)$$

elde edilir. Çünkü $P(01)+P(10)+P(00) = 1$ olduğu kesindir.

Eğer ilerde NSE çıkış dizisinin bağımsız ve benzer dağılımlı olduğu farz edilirse ortalama data uzunluğu \bar{l} ,

$$\bar{l} = 2 \frac{1 - P^m(00)}{1 - P(00)} \text{ bits} \quad (4.12)$$

dir. Burada $m=2^{n-1}$ yani n bitin blok uzunluğu ile kodlanabilen zaman kuantum sayısıdır. Bilgi oranı, saniyeye düşen bit'ler ile verilir. Kodlanan bilgi oranı r_c ile gösterilirse,

$$r_c = \frac{\bar{l}}{m t_q} \quad (4.13)$$

Şimdi, işaretin örnekleme frekansı $f_s = 1/T_s$ ile düzgün olarak örneklendiği durumu gözönüne alalım ve her örnek N bit uzunluklu bir kelime ile açıklansın. Bilgi oranı r ,

$$r = \frac{N}{T_s} = N f_s \quad (4.14)$$

Kodlama uzunluklu nonuniform örnekleme ile sıkıştırma (compression) oranı ;

$$\frac{r_c}{r} = \frac{\bar{l}}{m N} \frac{T_s}{t_q} = \frac{\bar{l}}{m N} \beta \quad (4.15a)$$

elde edilir. Burada, $f_q = 1/t_q = \beta f_s$ dir.

$P(00)$ 'in ihtimali, $P(01) = P(10)$ ' in ihtimalinden çok büyük olduğu içindirki, $P(00)$ bire yaklaştığı anda sıkıştırma oranını kontrol etmek önemlidir. Bu değerın limitlenmesi,

$$\lim_{p(x) \rightarrow 1} \left(\frac{r_c}{r} \right) = \frac{2}{N} \beta \quad (4.15b)$$

Belirli kabuller altında, düzgün spektrumlu bant sınırlı bir gaus dağılımı bir işaret için β üzerinde bir limitin oluştuğunu Mark ve Todd ispatlamıştır [17].

$$\beta > \frac{\sigma_x}{d} \frac{8\pi}{(3)^{1/2}} \quad (4.16)$$

Burada σ_x işaretin standart sapması d , eşik seviyeleri arasındaki uzaklığıdır. Yukarıdaki kabuller ışığında on (10) dan daha büyük ortalama sıkıştırma oranı elde edilebilir.

Burada açıklanan nonuniform yöntem etkilidir. Çünkü oldukça basit yorumlar ile önemli sıkıştırma üretir. Dijital sayıcılar vasıtasıyla run-length kodlama kolaylıkla belirlenir. Aynı zamanda bu metodun kodlanmış bloklar için senkron iletim kullandığını not etmeliyiz. Method, ileride nonuniform eşik seviyeleri ve tahmini kodlama uygulanarak geliştirilebilir.

4.3 - KUANTALAMA

Örnekleme işleme, zaman ekseninin bölünmesini sağlar. A işaretin genlik sınırı olmak üzere, her örnek $|x(nT_s)| \leq A$ sahasında genlikle sürekli olarak değişir. Dijital devreler ve kompütürler yalnızca sanki kelime uzunlukları kullanabildikleri için, genliklerin ayrılmasına ihtiyaç duyulur. Genlik kuantalanması : işaret örneklerinin analog değerlerini, mücade edilen sonlu bir takım değerlerden yaklaşık değerleri ile değiştirilme işlemidir. Kuantalayıcı hafıza iletimi ve işleme olayı için bir dizi analog örnekleri,

dijital sistem ile uygun bir dizi binary işarete dönüştüren lineer olmayan bir birimdir. Binary işareti n bit ise, kuantalanan işaret kuantalayıcının çıkışında oluşan 2^n işarettten biri olabilir.

En yaygın kuantalayıcı, her örneğin anında kodunun çözüldüğü zero memory quantizer (sıfır hafıza kuantalayıcı) dır. Daha ayrıntılı olan diğer bir kuantalayıcı blok kuantalayıcıdır. Bu ise giriş örneklerinin dizisine bakar ve kuantalanmış sembollerle ilgili bir dizi elde eder. Ardışıl kuantalayıcılar bir giriş örneği hakkında biraz bilgi depolar ve tekrar gelen örnekler vasıtasıyla elde edilen yalnızca ilave bilgiyi kuantalar, Delta Modülasyonu (DM), farklı puls kod modülasyonu (DPCM) ve diğer benzer yöntemler bu tip kuantalayıcılara aittir.

Bu bölümdeki inceleme sıfır (hafıza kuantalayıcıları üzerinde yoğunlaşacaktır. Daha sonra, bazı uygulamalar ile kabaca kuantalama işleminin tanıtılması ile kuantalama işleminin tanıtılması ile kuantalama gürültüsü incelenecektir.

4.3.1-Sıfır hafızalı kuantalama işlemi

N noktalı bir sıfır hafızalı kuantalama, x_1, \dots, x_{n-1} gibi $N-1$ seviyeli bir dizi, $x_{q1}, x_{q2}, \dots, x_{qN}$ gibi N çıkış noktalı bir dizi ve onları ilgilendiren bir $Q(x)$ operatörü, tanımlama yolu ile açıklanır.

Çeşitli tip sıfır hafızalı kuantalayıcılar Şekil-4.4 de

gösterilmiştir. Şekil-4.4a-4.4b'deki kuantalayıcılar uniform (düzgün) kuantalayıcılardır. Çünkü kuantalama adımları (q) eşit boyuttadır. Şekil-4a $N=7$ ile bir midtreod uniform kuantalayıcıyı gösterir. Burada kuantalama operasyonu $Q(x)$,

$$Q(x) : \begin{cases} x_q = -3q; & x \leq -\frac{5}{2}q \\ x_q = mq; & \frac{2m-1}{2}q < x \leq \frac{2m+1}{2}q \\ x_q = 3q; & \frac{5}{2}q < x \end{cases} \quad (4.17a)$$

ile verilir. $m=-2, -1, 0, 1, 2$ gibi bir tam sayıdır.

Şekil-4.4b, $N=6$ olarak bir ortaya toplayıcı (merdiven şeklinin dik kısmı) uniform kuantalayıcıyı gösterir.

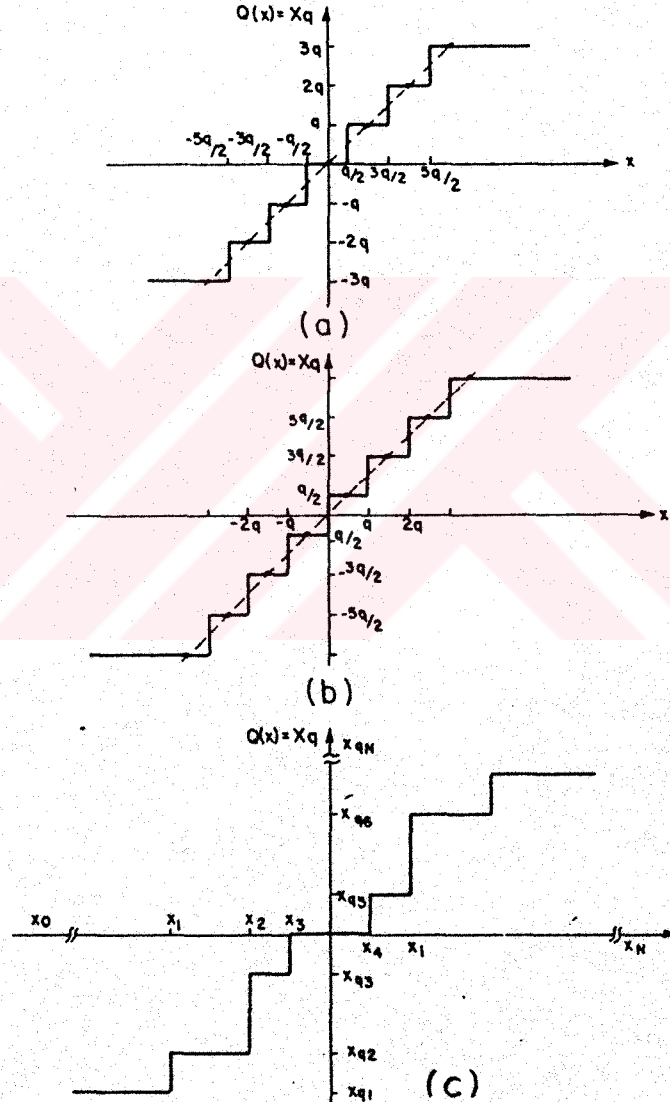
$$Q(x) : \begin{cases} x_q = -\frac{7}{2}q; & x \leq -3q \\ x_q = \frac{2m-1}{2}q; & (m-1)q < x \leq mq \\ x_q = \frac{7}{2}q; & 3q < x \end{cases} \quad (4.17b)$$

olarak verilir. $m=-2, -1, 0, 1, 2, 3$ gibi bir tam sayıdır.

İki örneğe dikkat edilirse kuantalama adımının ortalama eğimi

bir'dir. Genelde x veya x_q skalasını değiştirme ile ortalama egim herhangi bir pozitif miktarda yapılabilir. Aynı zamanda ortalama çizgi orijinin ortasından gezer. Genellikle, ortalama çizgiyi orijinden kaydırmak için "bias" kavramı tanıtılır.

şekil-4.4c bir nonuniform kuantalayıcıyı açıklar, burada kuantalama adımının boyutu x 'in bir fonksiyonudur.



şekil-4.4 Sıfır hafıza kuantantalayıcı

Burada tanımlanan kuantalayıcılar, doğrusal olmayan hafızasız bir sistem olarak karakteristikleri $Q(x) = x_q \cong ax$ fonksiyonuna bir merdiven yaklaşımları olarak görülür.

Kuantalayıcıyı gürültü operatörü olarak gözönüne alalım,

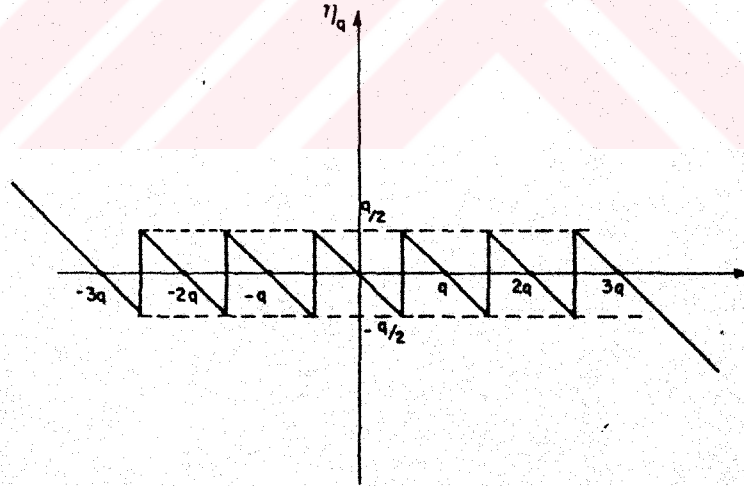
$$Q(x) = x_q = ax \cdot n_q \quad (4.18)$$

buradaki n_q , işaretin genliğine bağımlı kuantalama ilave gürültüsüdür. Kuantalama gürültüsü; şekil-4.5 de gösterildiği gibi x 'in bir fonksiyonu olarak şekil-5.4a daki "midtread" kuantalayıcıdan oluşur. $|x| < 7/2 q$ de kuantalama gürültüsü $|n_q| \leq q / 2$ ile sınırlanır. Bu sahanın dışında, gürültü x ile lineer olarak artacaktır. Nonuniform kuantalayıcı durumunda, gürültü nonuniform kuantalama seviyeleri ($q_i/2$) ile sınırlanacak ve değişen genlik ile bir testere dalga biçiminde benzer davranış gösterecektir.

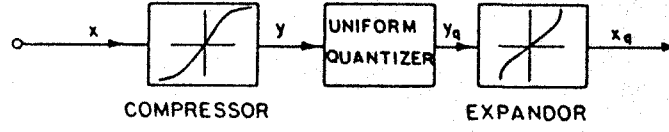
Test altındaki kuantalayıcının sınırsız olduğunu farz edelim. Yani şekil-4.4c deki gibi $x_0 = -\infty$, $x_N = \infty$ olsun. Bu geçerli bir kabuldür, çünkü $x(t)$ işaretin genliği $|x(t)| \leq A$ ile sınırlı ve A kuantalayıcının saturasyon seviyelerinden daha küçük olması şartı ile her durum için doğru olarak düşünülebilir. Eger $N=2^n$ ise, her çıkış noktası ile bir tek n bitlik ikili sayıyı birleştirebiliriz. Daha sonra "bir n -bitlik kuantalayıcı" kuantalayıcı olarak isimlendiririz.

Verilen bir n bit kuantalayıcı için kuantalama seviyelerinin dağılımının nasıl dizayn edileceği sorusu sıklıkla ortaya çıkar. Sezgi ile; uniform kuantalayıcının her zaman en iyi olmadığı ve bunun seviye dağılımının, giriş işareti $x(t)$ nin ihtimal dağılımına göre dizayn edilmesi gerektiği aşıkardır.

İşaretin genliğinin daha yüksek olacağı ihtimalli bölgeler daha az ihtimalli bölgeye göre daha hassas seviyelerle kuantalanmak zorundadır. Eğer, bir hafızasız nonlinear eleman ile işareti ön işleme tabii tutuyor isek hala bir uniform kuantalayıcı kullanılabilir. Sıkıştırma karakteristikleri, girişin ihtimal dağılımına bağlı olarak en iyi tarzda belirlenir. Uniform kuantalamadan sonra, orijinal girişin kuantalanmış örneklerini elde etmek için, kuantalanmış işaret inverse(ters) hafızasız bir linear olmayan transformasyona tabii tutulur. Bu işlem companding olarak isimlendirilir ve haberleşme sistemlerinde sık sık kullanılır. Şekil-4.6 companding sistemin blok diyagramını gösterir.



Şekil-4.5 Midread uniform kuantalayıcı için kuantalama gürültüsü



Şekil-4.6 Companding sistemin blok diyagramı

4.3.2 - Kuantalama Gürültüsünün Analizi

Çok geniş bir sayıda küçük kuantalama adımlarına sahip olan kuantalayıcılar yaklaşık olarak beyaz gürültüye eşit olan kuantalama gürültüsü üretirler. Yaklaşık olarak beyaz gürültü olan kuantalama gürültüsü için ve aynı zamanda sadece az çok korelasyonlu olabilecek ardışıl giriş işareti örneklerine ihtiyaç duyulur.

Olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x)$ ile, verilen bir giriş işareti $x(t)$ için kuantalayıcının hatasının karesinin ortalaması σ_n^2 yi gözönüne alalım.

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [Q(x) - x]^2 p(x) dx \quad (4.19a)$$

aynı zamanda;

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_{qi} - x)^2 p(x) dx \quad (4.19b)$$

yazılabilir. (4.19a) ve (4.19b) denklemlerinin kuantalama gürültüsünün varyansını tanımladığını not etmek gerekir.

Şu anda, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ aralığında kuantalama adımının $p(x) \approx p(x_{qi})$ gibi küçük olduğu farzedilirse; q_i adımını $q_i = x_i - x_{i-1}$ şeklinde ifade edilirse (4.19) eşitliği,

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 \approx & \frac{1}{12} \sum_{i=2}^{N-1} p(x_{pi}) q_i^3 + \int_{-\infty}^{x_1} (x_{q1} - x)^2 p(x) dx \\ & + \int_{x_{N-1}}^{\infty} (x_{qN-1} - x)^2 p(x) dx \end{aligned} \quad (4.20a)$$

ile hesaplanabilir

(4.20a) eşitliğinin sağ tarafındaki son iki terim saturasyondan dolayı kuantalayıcının kısımlarıdır. (4.20a) eşitliğinde $x_0 = -\infty$ ve $x_N = \infty$ farzedildi. Genelde, giriş işaretini $x > x_{N-1}$ ve $x < x_1$ için $p(x) \approx 0$ olarak ayarlarız. Böylece (4.20a) nın son iki terimi sıfır olur ve

$$\sigma_n^2 \approx \frac{1}{12} \sum_{i=2}^{N-1} p(x_{qi}) q_i^3 \quad (4.20b)$$

elde edilir.

En yaygın kuantalayıcılar $q_i = q$, $i=2, \dots, N-1$ için uniform kuantalayıcılardır. Daha ileride, bu kuantalayıcılarda gürültü varyansı için tanımlama yapabiliriz.

$$\sigma_n^2 = \frac{q^2}{12} \sum_{i=2}^{N-1} p(x_{q_i}) q \approx \frac{q^2}{12} \quad (4.21)$$

burada

$$\sum p(x_{q_i}) q \approx \int p(x) dx = 1$$

dır.

(4.21) denklemi ile verilen kuantalama gürültü varyansı için yaklaşık değer çok sık kullanılan 1 (bir)dir. Küçük kuantalama adımı q ile ve önemsenmeyecek saturasyon seviyesi ile uniform kuantalayıcılar; $\sigma_n^2 = q^2/12$ varyansı ile $-q/2 \leq n_q \leq q/2$ aralığında düzgün dağılmış gürültüye sahiptir.

Saturasyon etkisinin ihmal edilebileceği kabulünü doğrulamak için, extreme kuantalama seviyeleri x_1 ve x_{N-1} in giriş işareti varyanslarının çarpımları olduğundan emin olmalıyız.

Simetrik uniform kuantalayıcılar için loading faktörünü tanımlıyalım.

$$L_q = \frac{x_{N-1}}{\sigma_x} = \frac{-x_1}{\sigma_x} \quad (4.22)$$

Burada σ_x ; giriş işaretinin rms olarak standart sapmasını gösterir. Loading faktörü için ortak bir seçim $L_q=4$ (dört sigma loading) Böyle bir kuantalayıcı için, $-4\sigma_x \leq x \leq 4\sigma_x$ aralığında $N-2$ seviyeye sahibiz. Bu sebeble;

$$q = 8\sigma / (N - 2) \quad (4.23)$$

İşaret-gürültü oranı SNR kuantalayıcı için,

$$\text{SNR} = 10 \log (\sigma_x^2 / \sigma_n^2) \quad (4.24)$$

tanımlanır. (4.21) ve (4.23) eşitliğini (4.24) de yerine yazılırsa simetrik uniform kuantalayıcının SNR'si

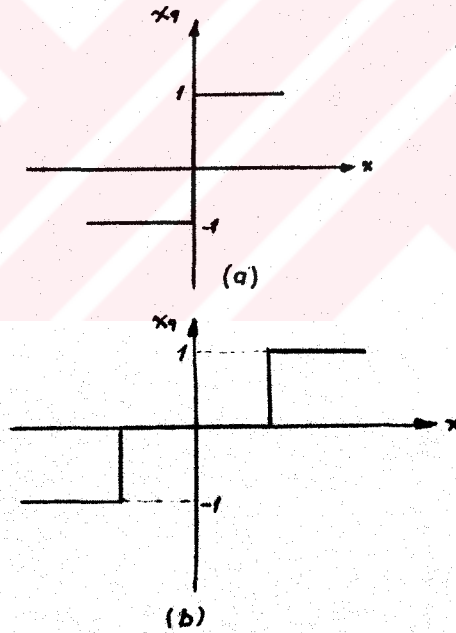
$$\text{SNR} = 10 \log ((N-2)^2 \cdot 1875) \approx 20 \log N - 7.3 \approx 6n - 7.3 \quad (4.25)$$

eşitliği ile verilir. (4.25) eşitliğinde $N \gg 2$ kabulünü ve $N=2^n$ bağıntısını kullandık. Pratik durumlarda, 50 db'den daha yüksek bir SNR'yi verecek bir 10-bitlik kelime kullanabiliriz.

4.3.3 - Rough (basitçe) Kuantalama

Önceki bölümlerde, kuantalama seviyeleri sayısının yüksek olduğu ve kuantalama adımının küçük olduğu şartı altında kuantalama gürültüsü analiz edildi. Çoğu uygulamada bu şartlar geçersizdir. Bu sebeble basitçe (kabaca) kuantalama hakkında açıklama edinilir. Basit kuantalama ile üretilen gürültü için

daha detaylı analize ihtiyaç duyulur. Şekil-4.7 iki basit kuantalayıcıyı göstermektedir. Birincisi bir bitlik bir kuantalayıcıdır ($N=2$). Burada kuantalanan örnekler girişin sing fonksiyonudur, yani $x_q = \text{sgn}(x)$ tir. İkinci kuantalayıcıda ($N=3$ ile) kuantalanan çıkışın tanımlanması için 2 bite ihtiyaç duyulur. Aynı zamanda kısıyıcı olarak bilinen bu iki basitce kuantalayıcının önemi, kuantalanan datanın işlenmesi oldukça basittir. Mesela; bu kuantalayıcılar ile kuantalanan işaretlerin sayısal korelasyonu çarpma işlemine ihtiyaç duymaz. Böyle korelatörler önerilir ve biyomedikal işaret işlemede kullanılır [20].



Şekil-4.7 Basit kuantalayıcılar (kısıyıcılar)

Basit (kaba) uniform kuantalama gürültüsünün istatistik analizi Widrow tarafından verilmektedir [21] Widrow bazı durumlarda Nyquist örnekleme teoremine benzer kuantalama

teoremini ispat etmiştir. $x(t)$ nin zaman örnekleri, sürekli genlikli olasılık yoğunluk fonksiyonu $p(x)$ 'e sahiptir. Kuantalanan çıkış x_q sadece ayırık genlikleri kabul eder ve böylece ayırık olasılık yoğunluk fonksiyonu olan $p_q(x_q)$ e sahiptir. Bu fonksiyon düzgün dağılımlı impuls'ların bir serisinden ibaret olup, her biri bir kuantalama bölgesinde toplanır. Şekil-4.8 iki yoğunluklu fonksiyonunu göstermektedir.

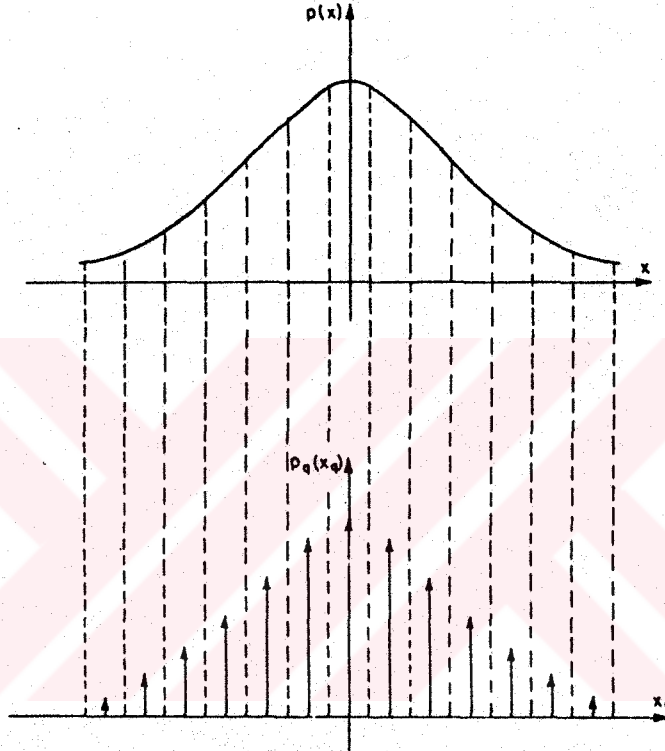
Widrow çıkış yoğunluk fonksiyonunu, giriş yoğunluk fonksiyonunun örneklenmiş bir biçimi olarak ele alınır. Eğer giriş yoğunluğu $p(x)$ frekans ile sınırlandırılmış ise (yani onun fourier dönüşümü $p(u)$ bütün $|u| \geq u_{max}$ için $p(u)=0$ özelliğine sahip ise) $q \leq q_m$ kuantalama seviyeleri ile kuantalanan işaretler gibi q_m gibi bir kuantalama seviyesi oluşur. orijinal dağılım $p(x)$ üzerindeki bütün bilgileri ihtiva eder. Diğer deyimle; kuantalanan birinden giriş işaretinin orijinal olasılık yoğunluk fonksiyonunu üretebiliriz, ele alınan kuantalayıcı kuantalama kanunu $q \leq q_m$ ye itaat eder. Olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerindeki bütün bilgilere sahip olabilmek için kuantalama kanunu, kuantalama adımının

$$q \leq q_m = \pi/u_{max} \quad (4.26)$$

eşitliğini sağlamasının zorunlu olduğu açıktır.

Kuantalanan işaretin olasılık yoğunluk fonksiyonunun genişletilmesi gürültü istatistikleri (varyans ve korelasyon gibi) genelde hesaplanabilir. (4.21) denkleminin kuantalanmış

gürültüsünün varyansı widrow ile verilen genel sonucun özel bir durumudur.



Şekil-4.8 olasılık yoğunluk fonksiyonu. Üsteki işaret: raslantı değişkeni x 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu. Altdaki işaret: kuantalanmış raslantı değişkeni x_q nin olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

4.4 - AYRIK (DISCRETE) METOD

4.4.1 - Z Dönüştürme

(4.2) eşitliği ile verilen örneklenmiş işaret $x^*(t)$ yi gözönüne alalım. Eğer onun tek yanlı laplas dönüşümü $X^*(s)$ ise;

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \exp(-nTs) \quad (4.27)$$

yazılabilir. Burada T örnekleme aralığı ve s ise kompleks frekanstır.

Yani bir Z gibi kompleks değişken tanımlanırsa;

$$Z = \exp(sT) \quad (4.28)$$

ve bunun Z transformu $X(Z)$;

$$Z\{x\} = X(z) = X^*(s) \Big|_{\exp(sT)=z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) Z^{-n} \quad (4.29)$$

Denklem (4.29) tek yanlı Z transformu olarak bilinir. Burada işaretin $t < 0$ için $x(t)=0$ olduğu farzedildi. Z transformunun lineer bir operatör olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu transformun çeşitli önemli özellikleri, örneklenmiş örneklenmiş data sistemlerinin analizinde ve fark eşitliğinin çözümünde bu operatörü önemli hale getirir.

Önemli özelliklerinden birisi kayma özelliğidir. Kolaylıkla

$$Z\{x(t+mT)\} = Z^m X(Z) - Z^m x(0) - Z^{m-1} x(T) - \dots - Z x(mT-T) \quad (4.30)$$

mesela ; $m=-1$ için (4.30) eşitliğini örneklenmiş işaret $x(nT)$ nin Z transformu bakımından,

$$Z\{x(t-T)\} = Z^{-1} X(Z) - Z^{-1} x(0) \quad (4.31)$$

burada $x(0)$ başlangıç şartları olup $t=0$ daki işaretin değeridir.

(4.29) eşitliği seri olarak Z transformunu tanımladığına dikkat edilmelidir..

$$X(Z) = x(0) + x(T)Z^{-1} + x(2T)Z^{-2} + \dots + x(nT)Z^{-n} + \dots \quad (4.32)$$

Ters transform $x(nT)$ geriden gelme (yansıma) ile bulunur. Ters transform aynı zamanda kompleks düzlemdeki bir intgrasyon vasıtasıyla residue teoremi ile analitik olarakda belirlenebilir.

4.4.2 - Fark Denklemleri

Sadece $t=kT$ ayrık anlarda tanımlanan $u(t)$ girişli $y(t)$ çıkışlı zamanla değişmeyen bir lineer sistem bir farkl denklemleri ile açıklanabilir.

$$y(kT) + a_1 y(kT-T) + a_2 y(kT-2T) + \dots + a_p y(kT-pT) =$$

$$b_0 u(kT) + b_1 u(kT-T) + \dots + a_q u(kT-qT) \quad (4.33)$$

Fark denklemi (4.33); laplace transformunda çözüldüğü gibi benzer bir tarzda Z transformu şeklinde çözülebilir. $Z\{y(t)\} = Y(Z)$, $Z\{u(t)\} = U(Z)$ olarak ifade edelim ve kayma özelliğini kullanarak (4.33) denkleminin her iki yanını Z domenine dönüştürülür. Başlangıç şartlarının hepsini sıfır kabul ederek, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_p Z^{-p}) Y(Z) = (b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_q Z^{-q}) U(Z) \quad (4.34a)$$

veya

$$Y(Z) = H(Z)U(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_q Z^{-q}}{1 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_p Z^{-p}} U(Z) \quad (4.34b)$$

Çıkış işareti iki polinomun oranı ile Z domeninde verilir. $H(Z)$ (Z domeninde transfer fonsiyonu) sistemi tanımlar. $U(Z)$ ise girişin Z dönüşümünü belirtir. (4.34b) denkleminin ters dönüşüm uygulayarak zaman domeninde ihtiyaç duyulan işareti verir.

$H(Z)$ tranfer fonksiyonu, bazı durumlarda kaliteyi geliştirmek için $u(t)$ işareti üzerinde bir dijital filtreleme operasyonu hazırlayabilir. Bu durumlarda, bir beyaz gürültü kaynağı olarak $u(t)$ ile sürülen bir lineer sistemin çıkışı olarak $y(t)$ kabul edilir. $H(Z)$ belirlenir ve $y(t)$ işaretini temsil etmek için a_i ve b_i parametreleri kullanılır.



B Ö L Ü M - 5

5.1 - SINIRLI ZAMAN ORTALAMASI

Sadece sınırlı zaman örnek fonksiyonu verilen rastgele bir işlemin, istatistiksel özelliklerini tahmin etmek çoğu zaman gerekli olmaktadır. Mesela böyle bir durumla zar potansiyelinin yüksek giriş empedanslı amplifikatör ve elektrodları ile ölçülmesi sırasında karşılaşılabilmektedir. Kayıt edilen işaret esas işareti bozan ek sıfır ortalama gürültü ile zar işaretine tekabül eden sabit (veya genelde sabit) bir voltaj olarak düşünülebilir. Bozucu sinyal, amplifikatör gürültüsünün bir sonucudur. Sabit zar voltajını gürültü işaretinden kurtarabilmek için, bu işaretin ortalaması sınırlı zaman örneğinden tahmin edilmelidir.

Diğer uygulamalar varyansın tahmini değerine otokorelasyona veya kroskorelasyona ve diğer istatistik parametrelerine gerek duyar. Sınırlı zaman örneğinden istatistik parametreleri tahmin etme ihtiyacı aşağıda verilen bir veya iki zorunlu ihtiyaçtan dolayıdır.

1-Uzun kayıtların muteber olması: Birçok durumda işlem için kısa zaman kayıtları yeterlidir. Bu durum şu gerçek yüzündendir; gözlenen olay yalnız kısa bir zaman aralığında olur veya sistem verilen bir kısa zaman aralığında düzgün bir kayıt yapabilir.

2-Sabitlik : Çoğunlukla işlenecek işaretler sabit değildir. Ancak sabitliği kabul etmek uygun bir durumdur. Böylece çok güçlü (sabit) işaret işleme teknikleri kullanılabilir. Bundan dolayı sinyal parçalara bölünür. Şöyleki herbiri sabit olarak düşünülür. Sabit olmayan sinyalin istatistikini tahmin etmekten ziyade şimdiki problem sınırlı zaman parçaları ile gösterilen bir kaç sabit işaretin istatistikini tahmin etmektir.

Bu bölümde sınırlı zaman tahmini ile ilgili problemler işlenecektir. Tahminlerin bu türlerini içine alan hatalar tartışılacak, aynı zamanda tahmin ile işaret-gürültü oranındaki iyileştirmenin nasıl başarılacağıda açıklanacaktır [22].

İşlenecek işaret tekrarlı bir işaret olduğu durum önemli bir durumdur ve bu durum analiz edilecektir. Bu durumda, sekronize işaretin ortalama dalga şeklini tahmin etmek için kullanılır. EEG ve EP işaretleri senkroniz ortalama ile işlenecek işaretlere klasik bir misaldir. Sınırlı zaman ortalama teknikleri, kompütürler ve özel dijital devreler vasıtasıyla yapılır. Pratikte bütün işaret işleme zamanı sınırlıdır [23-24]

5.2 - ORTALAMA DEĞERİN SINIRLI ZAMAN TAHMİNİ

5.2.1 - Sürekli Durum

$\{x(t)\}$ sabit ergodik rasgele (random) işleminden tek bir $x(t)$ örnek kaydını düşünelim. $t \in (0, T)$ zamanı için kayıt verilsin. Genellikle, kaybı olmaksızın işlemin aşağıdaki gibi verildiği farz edilebilir.

$$x(t) = \mu_x + n(t) \quad (5.1)$$

Burada μ_x , $\{x(t)\}$ nin beklenen değeridir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mu_x = E \{x(t)\} \quad (5.2)$$

$n(t)$ ise sabit sıfır ortalama bir işlemin örnek kaydıdır.

Verilen sınırlı zaman kaydı ile μ_x tahminine gerek vardır. Tahmin aşağıdaki gibi tarif edilir.

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (5.3)$$

Açıkça görüldüğü gibi

$$E(\hat{\mu}_x) = \mu_x \quad (5.4)$$

dir. Böylece (5.3) tahmini biaslanmamış tahmindir. Tahminin varyansı ortalama kare hatasını verir yani

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x] = E((\hat{\mu}_x)^2) - \mu_x^2 \quad (5.5)$$

(5.5) denkleminin sağ tarafındaki birinci terim denklem (5.3) kullanılarak yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E((\hat{\mu}_x)^2) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E(x(\xi)x(\eta)) d\xi d\eta \quad (5.6)$$

Korelasyon fonksiyonunun tarifinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$E(x(\xi)x(\eta)) = r_x(\eta - \xi) = r_x(\tau) \quad (5.7)$$

Burada $\tau = \eta - \xi$ dir. $r_x(\tau)$ sabit olarak farz edildiği için η ve ξ bağımsızdır. $\tau = 0$ da maksimuma sahiptir ve τ nun çift fonksiyonudur. τ yeni değişkenine göre (5.6) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E((\hat{\mu}_x)^2) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_{-\xi}^{T-\xi} r_x(\tau) d\tau d\xi \quad (5.8)$$

Denklem (5.8) deki integralin şekil-5.1 de gösterilen bölge üzerinden τ ve ξ değişkenlerine göre alınacağına dikkat edilmelidir.

$$\frac{1}{T^2} \int_{-T}^T (T - |\tau|) d\tau = 1 \quad (5.10)$$

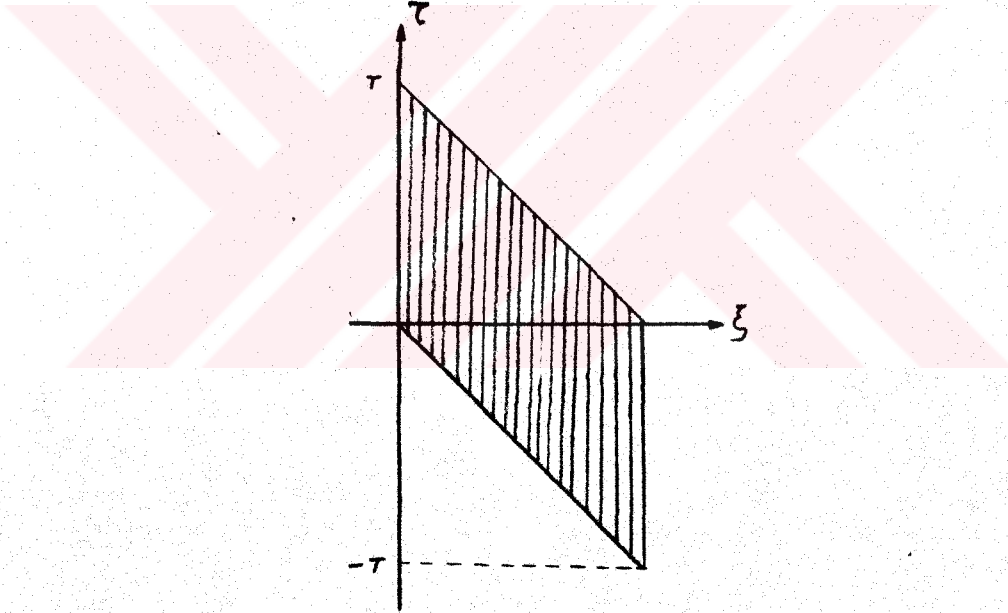
olduğu için (5.8) integralinin sınırları değiştirildiğinde aşağıdaki ifade elde edilir.

$$E((\hat{\mu}_x)^2) = \frac{1}{T^2} \left[\int_{-T}^0 \int_{-T}^T r_x(\tau) d\xi d\tau + \int_{\tau}^T (T-\tau) r_x(\tau) d\tau \right] =$$

$$\frac{1}{T^2} \int_{-T}^T (T - |\tau|) r_x(\tau) d\tau \quad (5.9)$$

(5.5), (5.9) ve (5.10) denklemlerinden aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x] = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) (r_x(\tau) - \mu_x^2) d\tau \quad (5.11)$$



Şekil-5.1 Integral Sınırları

μ_x tahmin miktarına ve ortalama kare hatasına sahip olabilmek için, $r_x(\tau)$ otokorelasyonuna sahip olmak gerekir. Fakat bu fonksiyon genellikle mevcut değildir. Denklem (5.1) kullanıldığında aşağıdaki ifadeye sahip olabiliriz.

$$r_n(\tau) = r_x(\tau) - \mu_x^2 \quad (5.12)$$

Burada $r_n(\tau)$ gürültü işleminin otokorelasyon fonksiyonudur. Böylece

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x] = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) r_n(\tau) d\tau \quad (5.13)$$

elde edilir. Birçok fiziksel rasgele işlemleri ve gaus işlemleri için denklem (5.3) uygun bir tahmindir. Şimdi ilk önce iki genel durumu inceleyelim.

1- *Kısa Gözlem Zamanı* : Bu durumda verilen kayıt çok kısadır. Bu yüzden aşağıdaki yaklaşıklık kullanılır.

$$r_n(\tau) \cong r_n(0); \quad \tau \in (0, T) \text{ nin hepsi için} \quad (5.14)$$

(5.13) deklemini çözmek için (5.14) yaklaşık ifadesini kullanarak

$$\lim_{T \rightarrow 0} \text{Var}[\hat{\mu}_x] = r_n(0) = r_x(0) - \mu_x^2 = \text{Var}[n(t)] \quad (5.15)$$

elde edilir, bu ifade çok kısa gözlem zamanları için önemsiz bir sonucu belirtir. Tahmin edilen miktarın varyansı kayıt edileninkine eşittir. Böylece işaret-gürültü oranında bir iyileştirme elde edilememektedir.

2- *Uzun Gözlem Zamanı* : Gürültü otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki denkleme uyduğunu farz edelim,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |r_n(\tau)| d\tau = 0 \quad (5.16)$$

Böylece uzun gözlem zamanı için (5.13) denkleminde

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var} [\hat{\mu}_x] \cong \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} r_n(\tau) d\tau \quad (5.17)$$

elde edilir.

İşaret-gürültü oranı $\text{Var}[x(t)]$ varyansı $E\{x(t)\} = \mu_x$ (işaret) beklenen değer arasındaki oran olarak tarif edilebilir. Böylece işaretin işaret-gürültü oranı

$$\text{SNR}_i = \frac{\mu_x}{\text{Var}[x(t)]} = \frac{\mu_x}{\text{Var}[n(t)]} \quad (5.18)$$

olarak ifade edilir. Beklenen değer için işaret-gürültü oranı ise

$$\text{SNR}_0 = \frac{\mu_x}{\text{Var}[\hat{\mu}_x]} \quad (5.19)$$

olarak ifade edilir. SNR (signal-to-noise ration) arasındaki oran beklenen için figür olarak düşünülebilir.

Böylece çok geniş gözlem zamanları için beklenen iyileştirme (5.3) tahmini ile aşağıdaki deklemler yoluyla başarılabilir.

$$\frac{\text{SNR}_0}{\text{SNR}_i} \cong \frac{\text{Var}[n(t)]}{\frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) r_n(\tau) d\tau} \quad (5.20)$$

Uzun gözlem zamanları için, SNR deki iyileştirme sonsuza yaklaşır.

misal olarak, hücre zarının dinlenme potansiyeli şekil-5.2 de verilen sistem ile tahmin edilebilir. Hücre zar potansiyeli iki yüksek empedanslı cam elektrod ve amplifator ile ölçülür. $s(t)$ işareti amplifike edilmiş zar potansiyelidir, $n(t)$ gürültüsü elektrodların ve amplifikatörlerin gürültüsüdür (çıkışa bakılarak). Gürültü elektrodlar tarafından kaldırılır. İlave gürültünün otokorelasyon fonksiyonuyla sıfır ortalama olduğunu kabul edelim.

$$r_n(\tau) = \sigma_n^2 \text{Exp}(-\alpha|\tau|) \quad (5.21)$$

(5.13) denklemleri kullanılarak, $\hat{\mu}_x$ 'nin varyansı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x] = \frac{2\sigma_n^2}{\alpha T} \left[1 - \frac{1}{\alpha T} (1 - \text{Exp}(-\alpha T)) \right] \quad (5.22)$$

ve (5.20) denklemleri kullanılarak işaret-gürültü oranı iyileştirmesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\text{SNR}_o}{\text{SNR}_i} = \frac{\alpha T}{2 \left[1 - \frac{1}{\alpha T} (1 - \text{Exp}(-\alpha T)) \right]} \quad (5.23)$$

Çok uzun gözlem zamanı için, bu iyileştirme aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{SNR}_o}{\text{SNR}_i} = \frac{\alpha T}{2} \quad (5.24)$$

T geniş gözlem zamanları için SNR'deki iyileştirme lineer olur. Denklem (5.3) deki beklenen değer sınırlı zaman integrali kullanır. Uzun gözlem zamanları için denklem (5.3)

integralini hesaplamak çok zordur. Bunun yerine $h(t)$ impals cevabı ile alçak-geçiren filtre düşünülür. Bu filtre integralin yerine geçer, öyleki denklem (5.2) de $\hat{\mu}_x$ miktarının beklenen değeri aşağıdaki gibi verilir.

$$\hat{\mu}_x(T) = \int_0^T h(t)x(T-\tau) d\tau \quad (5.25)$$

Yeni bir $h(t)$ filtre impals cevabı tarif edilir. Bu filtrenin impals cevabı bütün gözlem aralığında, alçak-geçiren filtrenin impals cevabına eşittir, diğer yerlerde sıfırdır. Böylece aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$h(t, T) = \begin{cases} h(t); & 0 \leq t \leq T \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.26)$$

(5.26) denklemi (5.25) de yerine konularak

$$\hat{\mu}_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, T)x(T-\tau) d\tau \quad (5.27)$$

elde edilir.

Beklenen değerin ortalama kare hatası araştırılmak istenirse, biaslanmış filtre çıkışının beklenen değeri

$$E\{\hat{\mu}_x\} = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, T) d\tau \quad (5.28)$$

olarak verilir. Bu ifadenin karesinin beklenen değeri

$$E\{(\hat{\mu}_x)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v, T) h(u, T) r_x(u-v) dvdu \quad (5.29)$$

olarak verilir. Böylece varyans

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x] = E\{(\hat{\mu}_x)^2\} - [E\{\hat{\mu}_x\}]^2 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v, T) h(u, T) [r_x(u-v) - \mu_x^2] dvdu \quad (5.30)$$

$\tau = u - v$ ifadesi yerine konularak ve

$$r_h(\tau, T) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v, T) h(v+\tau, T) dv \quad (5.31)$$

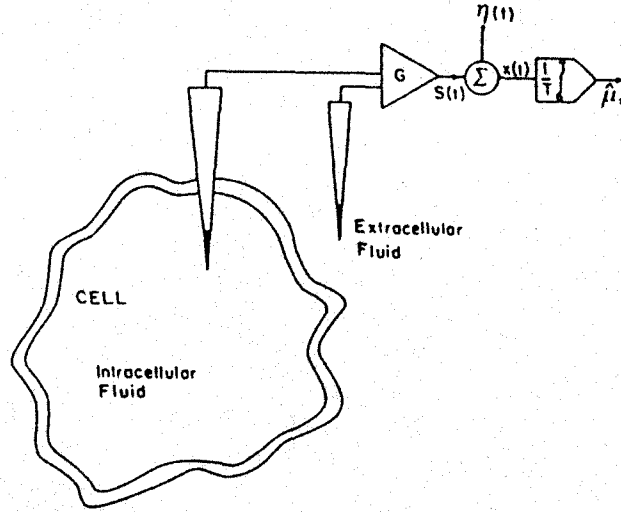
kullanılarak (5.30) denkleminde aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x] = \int_{-\infty}^{\infty} r_h(\tau, T) [r_x(\tau) - \mu_x^2] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r_h(\tau, T) [r_n(\tau)] d\tau \quad (5.32)$$

(5.32) ve (5.12) denklemleri karşılaştırıldığında şu durum görülür. ideal integratör kullanıldığında, varyans .

$$\frac{1}{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right)$$

ağırlık fonksiyonuyla $r_n(\tau)$ nun integre edilmesiyle hesaplanmıştır. Burada ise alçak-geçiren filtre ile ağırlık fonksiyonu $r_h(\tau, T)$ olur.



Şekil-5.2 Zar potansiyeli için ölçme sistemi

Önceki misaldeki tartışılan problemi integratörün yerine basit RC alçak-geçiren filtre ile tekrarlırsak,

$(RC)^{-1} = \beta$ olarak gösterilsin, filtre için impuls cevabı aşağıdaki gibi verilir.

$$h(t) = \beta \exp(-\beta t); \quad t \geq 0 \quad (5.33)$$

Bu durum için $r_h(\tau, T)$ ağırlık fonksiyonu,

$$r_h(\tau, T) = \begin{cases} 0; & \tau > T \\ \int_0^{T-\tau} h(v)h(v+\tau) dv; & 0 \leq \tau \leq T \\ \int_{-\tau}^T h(v)h(v+\tau) dv; & -T \leq \tau \leq 0 \\ 0; & \tau < -T \end{cases} \quad (5.34)$$

olarak ifade edilir. (5.33) deklemini yerine konularak

$$r_h(\tau, T) = \frac{1}{2} \begin{cases} 0; & \tau > T \\ \beta \exp[-\beta\tau] - \exp[-\beta(2T-\tau)]; & 0 \leq \tau \leq T \\ \beta \exp[\beta\tau] - \exp[-\beta(2T+\tau)]; & -T \leq \tau \leq 0 \\ 0; & \tau < -T \end{cases} \quad (5.35)$$

elde edilir.

Tekrar gürültünün eksponansiyel bir korelasyona sahip olduğu farz edilirse (denklem 5.21), denklem (5.32) den

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x] = \sigma_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} r_h(\tau, T) \exp[-\alpha|\tau|] d\tau$$

yazılabilir. Aşağıdaki boyutsuz parametre tanımlanarak

$$\psi = \alpha/\beta \quad \text{ve} \quad \phi = T\beta \quad (5.36)$$

İşaret-gürültü oranındaki iyileştirme aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{SNR_o}{SNR_i} = \begin{cases} \frac{(\psi^2 - 1)}{(\psi - 1)(1 - \exp[-\phi(\psi + 1)]) - (\psi + 1)\exp(-2\phi)(1 - \exp(-\phi(\psi - 1)))} & \psi \neq 1 \\ \frac{1}{0.5 - \exp[-2\phi](0.5 + \phi)} & \psi = 1 \end{cases} \quad (5.37)$$

uzun gözlem zamanları için (5.37) dekleminde aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{SNR_o}{SNR_i} = \psi + 1 = \frac{\alpha}{\beta} + 1 \quad (5.38)$$

(5.24) ve (5.38) deklemleri karşılaştırıldığında, şuna dikkat etmeliyiz; işaret-gürültü oranı integratör ile sonsuz derecede iyileştirilebilirken alçak-geçiren filtre tahmini kullanıldığında bu orandaki iyileştirme sınırlıdır. Aynı zamanda şu durumda dikkat edilmelidir. Her iki durumdada iyileştirme lineer olarak α gürültü korelasyon eksponensiyel faktörü ile orantılıdır.

5.2.2 - Ayrik Durum

Denklem (5.1) deki $x(t)$ işaretinin ayrik formda verildiğini düşünelim. $x(t = k\Delta t)$ yi x_k ile gösterelim

$$x_k = \mu_x + n_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

burada x_k işaretin n_k da gürültünün örnek dizileridir.

$k\Delta t$ zamanında μ ortalamasının tahmini değeri $M - 1$, önceki örnekler ve akım üzerindeki ortalama olarak tarif edilir.

$$\hat{\mu}_x(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{k-i}; \quad k \geq M - 1 \quad (5.40)$$

Tahmini değer açıkça görüldüğü gibi biaslanmamıştır. Tahmini değer (denklemler (5.5)) varyansı aşağıdaki şekilde verilir.

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x(k, M)] = \frac{1}{M^2} E \left\{ \left[\sum_{i=0}^{M-1} x_{k-i} \right]^2 \right\} - \mu_x^2 = \quad (5.41)$$

$$\frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} E \{ x_{k-i} x_{k-j} \} - \mu_x^2$$

x_t sabit işlem olarak farz edilirse, son denklem $r_\tau = E\{x_k x_{k+\tau}\}$ korelasyon fonksiyonuna göre ifade edilebilir.

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x(M)] = \frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} r_{j-i}^x - \mu_x^2 \quad (5.42)$$

simetrik $(M \times M)$ korelasyon matrisi düşünüldüğünde aşağıdaki matris yazılabilir.

$$R_x = \begin{bmatrix} r_0^x & r_1^x & r_2^x & \dots & r_{M-1}^x \\ r_{-1}^x & r_0^x & r_1^x & \dots & r_{M-2}^x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1-M}^x & \dots & \dots & \dots & r_0^x \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Korelasyon katsayıları olan elemanlar denklem (5.42) nin sağ tarafındaki birinci terimde kullanılmıştır. Böylece bu terim matris elemanlarının toplamıdır. Matrisin simetri olmasından dolayı, varyans aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x(M)] = \frac{1}{M} \left[r_0^x + \frac{2}{M} \sum_{\tau=1}^{M-1} (M - \tau) r_{\tau}^x \right] - \mu_x^2 \quad (5.44)$$

(5.12) denklemi ayırık formda, bu ifadede yerine konulursa

$$\text{Var}[\hat{\mu}_x(M)] = \frac{1}{M} \left[r_0^n + \frac{2}{M} \sum_{\tau=1}^{M-1} (M - \tau) r_{\tau}^n \right] \quad (5.45)$$

son denklem ayırık durum için (5.13) denklemin eşdeğeridir.

Ayrık durum için SNR deki iyileştirme aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\frac{\text{SNR}_o}{\text{SNR}_i} = \frac{\text{Var}[n_k]}{\frac{1}{M} \left[r_0^n + \frac{2}{M} \sum_{\tau=1}^{M-1} (M - \tau) r_{\tau}^n \right]} \quad (5.46)$$

A kısmında verilen problemi tekrar düşünelim, $x(t)$ gürültü işaretinin $\{x_k\}$: $t = k - M + 1, k - M + 2, \dots, k - 1, k$ şeklinde sınırlı örnekler dizisine göre verildiğini farz edelim.

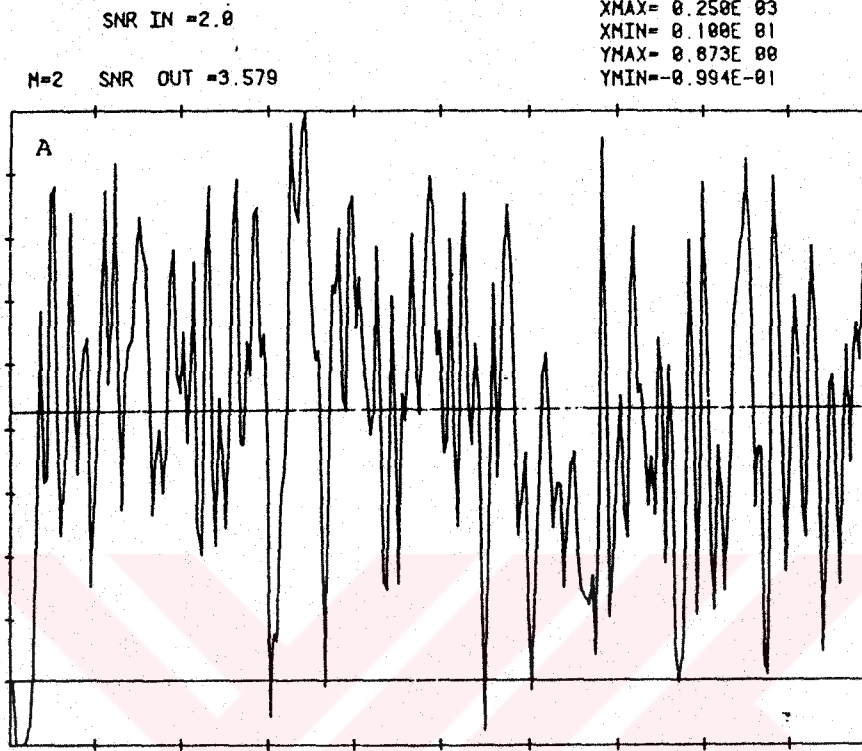
Gürültü işleminin ilk kısımdaki problemde olduğu gibi, exponansiyel korelasyon fonksiyonuna sahip olduğunda kabul edelim. (denklem (5.21)) Denklem (5.18), (5.19) ve (5.46) dan, (5.40) denkleminde verilen tahmini değerden dolayı işaret-gürültü oranındaki iyileştirmeyi elde ederiz.

$$\frac{SNR_o}{SNR_i} = \frac{M}{1 + 2 \sum_{\tau=1}^{M-1} (1 - \tau/M) \exp(-\alpha\tau)} \quad (5.47)$$

Uzun gözlem zamanları için denklem (5.47) aşağıdaki şekile dönüşür.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{SNR_o}{SNR_i} = M \frac{1 - \exp(-\alpha)}{1 + \exp(-\alpha)} \quad (5.48)$$

İşaret-gürültü oranındaki iyileştirme, A kismindaki problemde olduğu gibi M gözlem zamanı ile doğrusal orantılıdır. Şekil-5.3, denklem (5.40) daki beklenen değer ile rasgele işlemin beklenen değeri tahmin etmenin etkisini gösterir.



Şekil-5.3 Zar voltajının sınırlı zaman ortalaması

5.3 - VARIYANS VE KORELASYONUN TAHMİNİ

5.3.1 - Variyans Tahmini - Sürekli Durum

Denklem (5.1) de verilen ergodik rasgele işlemden örnek kayıtlarını düşünelim. Sınırlı gözlem zamanı verilen $\{x(t)\}$ nin varyansını tahmin etmek için buna ihtiyaç vardır.

Arzu edilen varyansı aşağıdaki gibi S_x ile gösterelim.

$$S_x = E \left\{ \left[x(t) - E(x(t)) \right]^2 \right\} \quad (5.49)$$

$\hat{S}_x(T)$ sınırlı zaman tahmini aşağıdaki gibi verilir.

$$\hat{S}_x(T) = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \hat{\mu}_x)^2 dt \quad (5.50)$$

burada $\hat{\mu}_x$ denklem (5.3) ile verilen $\{X(t)\}$ nin beklenen değeri için tahmini değerdir. (5.8) ve (5.12) denklemleri kullanılarak (5.50) de verilen tahmini değer, beklenen değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E(\hat{S}_x) = S_x - \frac{2}{T^2} \int_0^T \xi r_n(\xi) d\xi \quad (5.51)$$

Variyans tahmini değeri (denklem (5.50) biaslanmış tahmini değerdir. Ancak bir çok pratik durumda gürültü işlemi aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \xi r_n(\xi) d\xi = 0 \quad (5.52)$$

böyle durumlar için biaslama terimi geniş gözlem zamanları için sifıra yaklaşır.

Beklenen değer (denklem (5.50)) varyansı, $\{x(t)\}$ işleminin dördüncü momentinin bir fonksiyonudur ve böylece bunun hesabı sınırlandırılmış pratik bir değerdir.

5.3.2 - Variyans Tahmini Değeri - Ayrik Durum

Şimdi ayrik durumu düşünelim, bu durumda $\{x(t)\}$ nin varyansı aşağıda verilen sınırlı örnek dizisinden tahmin edilecektir.

$$\{x_t\}; t = k - M + 1, k - M + 2, \dots, k - 1, k$$

Variyans tahmini değeri aşağıdaki gibi tarif edilsin

$$\hat{S}_x(M) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} (x_{k-i} - \hat{\mu}_x(k-i))^2 \quad (5.53)$$

burada $\hat{\mu}_x$ denklem (5.40) ile verilen $E\{x(t)\}$ nin ayrık tahmini değeridir.

(5.53) denklemi ile verilen tahmini değer beklenen değeri aşağıdaki gibidir.

$$E\{\hat{S}_x(M)\} = \frac{1}{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} E\{(x_{k-i} - \hat{\mu}_x(k-i))^2\} =$$

$$S_x - \frac{2}{M(M-1)} \sum_{\tau=0}^{M-1} \tau \Gamma_n(\tau) \quad (5.54)$$

denklem (5.54), denklem (5.51) in ayrık eşdeğeridir. Tahmini değer biaslanmış bir değeridir. Ancak birçok pratik gürültü işlemi için denklem (5.54) deki biaslama terimi uzun gözlem zamanları için sıfıra yaklaşır. Sürekli durumda olduğu gibi beklenen değer varianansı (denklem (5.53)) işlemin dördüncü momentine bağlıdır. Böylece bunun hesabı çok sınırlı pratik bir değerdir.

Korelasyon olmayan gürültü işlemleri için hem sürekli beklenen değer (denklem (5.50)) hemde ayrık değer biaslanmamış olduğuna dikkat edilmelidir.

5.3.3 - Korelasyonun Tahmini Değeri

$r_{xy}(\tau)$ fonksiyonu ve $\{x(t)\}$ ergodik işleminin $r_x(\tau)$ otokorelasyon fonksiyonu işaret işleminde çok büyük öneme haiz olan fonksiyonlardır. $r_{xy}(\tau)$ fonksiyonu iki ergodik işlem olan $\{x(t)\}$ ve $\{y(t)\}$ arasındaki kros korelasyon fonksiyonudur. Sık sık işlemlerin yalnız sınırlı örnek fonksiyonları verilen korelasyon fonksiyonlarını tahmin etmeye ihtiyaç vardır.

$x(t)$ ve $y(t)$ örnek fonksiyonları, $t \in (0, T+\tau)$ sınırlı aralığında verildiğinde kroskorelasyon için tahmini değer aşağıdaki gibi tarif edilir.

$$r_{xy}(\tau, T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (5.55)$$

Tahmini değer beklenen değeri ise aşağıdaki şekildedir.

$$E \{ \hat{r}_{xy}(\tau, T) \} = r_{xy}(\tau) \quad (5.56)$$

Böylece, tahmini değer (denklem (5.55)) $r_{xy}(\tau)$ korelasyon fonksiyonunun biaslanmamış tahmini değeridir. Ortalama kare hatası tahmini değer variansı ile verilir. Variyans işlemlerin dördüncü momentine bağlıdır.

Sıfır ortalama ile gaus işlemleri için variansın aşağıdaki şekilde olduğu gösterilebilir.

$$\text{Var} [\hat{r}_{xy}(\tau, T)] = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(1 - \frac{|\xi|}{T} \right) r_x(\xi) r_y(\xi) + r_{xy}(\xi + \tau) r_{xy}(\xi - \tau) \right] d\xi \quad (5.57)$$

Eğer $r_x(\xi)$, $r_y(\xi)$ ve $r_{xy}(\xi)$ $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak değer olarak integrale edilebilirse, gözlem zamanı artarken tahmini değerlerin varyansı sifira yaklaşır. Böylece böyle durumlar için beklenen değer diğerlerine uygun bir değerdir.

Otokorelasyon fonksiyonun tahmini değeri (x) ile yerdeğiştiren (y) ile (5.56) ve (5.57) denkleminde verilen sonuçlarla benzer şekilde hesaplanır. Korelasyon fonksiyonu verimli şekilde dolaylı yoldanda tahmin edilebilir. Güç spektrum yoğunluk fonksiyonu ilk önce tahmin edilir ve bu tahmini değer korelasyon tahmini değeri vermesini için invers FFT yoluyla hesaplanır.

5.4. - SENKRONİZE ORTALAMA (CAT-COMPUTER AVERAGED TRANSIENTS)

Bir çok biomedikal uygulamasında çoğunlukla gürültü ile bozulan tekrarlı rasgele işlemlerin dedekte edilme problemi vardır. Genellikle sebebin kontrol edilmesiyle işlemi gerçek şekliyle elde etmek mümkündür. EEG deki EP (uyandırma potansiyeli) analizinde böyle bir durum olabilir. Uyarmalar bilinen zamanlarda tekrarlanabilir ve bu uyarmalara karşı cevabı bu bölümde tartışılacak metodlarla analiz edilebilir.

i.ninci uyarmaya karşı sınırlı stokastik cevabı aşağıdaki şekilde gösterilsin.

$$S_i(t - t_i) = \begin{cases} S_i(\tau); & 0 \leq \tau < T_i \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

burada t_i i.ninci uyarmanın başlangıç zamanıdır ve T_i i.ninci cevabın uzunluğudur.

Analiz edilecek olan gözlenen $z(t)$ işareti bozan gürültü ile birlikte $s_i(t)$ cevaplarının bir serisi olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t - t_i) + n(t) \quad (5.58)$$

burada $n(t)$, $S_i(t)$ den)statistik olarak bağımsız olan sıfır ortalama işlemidir. $z_i(t)$ gözlemi aşağıdaki gibi tarif edilsin.

$$z_i(t) = s_i(t - t_i) + n_i(t - t_i); \quad t_i \leq t \leq t_i + T \quad (5.59)$$

burada $n_i(t) = n(t)$; $t \in [t_i, t_i + T]$ ve T en uzun cevap uzunluğuna eşit veya ondan daha büyük bir değerdir.

$$T \geq \text{Max} (T_i) \quad (5.60)$$

Gürültünün otokorelasyon fonksiyonunun aşağıdaki denklemede uyduğu farz edilir.

$$r_n(T_j - T_i) = 0; \quad \text{bütün } i \text{ ve } j \text{ ler için} \quad (5.61)$$

N tane uyarma üzerinde $S(N,t)$ ortalama cevabı tahmin etmek istediğimizde aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$S(N,t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \{ S_i(t - t_i) \} \quad (5.62)$$

İhtiyaç olan ortalama cevabın tahmini değeri aşağıdaki gibi olsun.

$$\hat{S}(N,t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_i(t-t_i) + n_i(t-t_i)) \quad (5.63)$$

σ_n^2 varyansı ile sabit sıfır ortalama gürültü işlemini farz edelim, tahmin değerinin beklenen değeri aşağıdaki gibi olur.

$$E \{ \hat{S}(N,t) \} = S(N,t) \quad (5.64)$$

Tahmini değerinin varyansı σ_n^2 aşağıdaki gibi verilir.

$$\sigma_n^2 = E \{ \hat{S}^2(N,t) \} - (E \{ S(N,t) \})^2 =$$

$$\frac{1}{N^2} \left[E \left\{ \sum_{i=1}^N z_i^2(t-t_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N z_i(t-t_i) z_j(t-t_j) \right\} \right] - (E \{ S(N,t) \})^2 \quad (5.65)$$

Genelde $S_i(t)$ cevaplarının biri diğerine bağlıdır. Bu durum öğrenme olayındaki duruma benzer (EP analizin de olduğu gibi).

$r_x(\tau, t)$ sabit olmayan uzaysal kroskorelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın

$$r_{\bullet}(\tau, t) = E\{S_i(t - t_i) S_j(t - t_j)\} \quad (5.66)$$

$$\tau = j - i$$

Cevabın beklenen değeri aşağıdaki şekilde gösterilsin.

$$E\{S_i(t - t_i)\} = m(t); \quad \text{bütün } i \text{ ler için} \quad (5.67)$$

ve bu ifadenin varyansı;

$$\sigma_{\bullet}^2 = E\{S_i^2(t - t_i)\} - m^2(t); \quad \text{bütün } i \text{ ler için} \quad (5.68)$$

aşağıdaki ifadelere dikkat edilmelidir.

$$r_{\bullet}(0, t) = E\{S_i^2(t - t_i)\} = \sigma_{\bullet}^2 + m^2(t) \quad (5.69)$$

ve

$$E\{z_i^2(t - t_i)\} = r_{\bullet}(0, t) + \sigma_n^2 \quad (5.70)$$

ve

$$\sum_{\substack{i, j=1 \\ \tau \neq 0}}^N r_{\bullet}(\tau, t) = \sum_{\tau=1}^{N-1} (N - \tau) r_{\bullet}(\tau, t) \quad (5.71)$$

Bu ifadelerden aşağıdaki eşitlik gösterilebilir.

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N} (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) + \frac{2}{N^2} \sum_{\tau=1}^{N-1} (N - \tau) [r_s(\tau, t) - m^2(t)] \quad (5.72)$$

Denklem (5.72) gürültü ve cevap arasındaki istatistik bağımsızlık tahmini ile genel durumdaki tahmini değerin varyansını verir. Şimdi iki önemli durumu inceleyim.

5.4.1 - İstatistik olarak bağımsız cevaplar

Mesela EP analizi için, Eğer öğrenme etkisinde olduğu gibi uyarma N sayısı ihmal edilebilirse bu kabul yapılabilir. Böylece yukarıdaki kabul $N \leq N_{\max}$ için geçerlidir.

Bu durum için, $N \leq N_{\max}$ için aşağıdaki eşitliğe sahibiz.

$$r_s(k, \tau) = \begin{cases} E(S_i^2(t - t_i)); & k = 0 \\ m^2(t); & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.73)$$

böylece denklem (5.72) için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N} (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) = \frac{1}{N} \sigma_s^2; \quad N \leq N_{\max} \quad (5.74)$$

bu ifade şunu belirtir: tahmini değerin varyansı, ortalama penceresinde bulunan cevapların sayısının artırılması ile ihtiyaç olunan küçüklükte yapılabilir. Bir çok pratik durumda varyans N üzerindeki kısıtlama yüzünden sıfır yapılamaz.

$z_i(t)$ gözleminin işaret-gürültü oranı, ortalama cevabın (işaretin) gözlemin varyansına oranı olarak aşağıdaki gibi tarif edilebilir.

$$\text{SNR}_z = \frac{S(N, t)}{\sigma_z^2} \quad (5.75)$$

benzer olarak tahmini değerin işaret-gürültü oranı

$$\text{SNR}_s^{\wedge} = \frac{S(N, t)}{\sigma_s^{\wedge 2}} \quad (5.76)$$

olarak verilir. (5.74), (5.75) ve (5.76) denklemleri kullanılarak, işaret-gürültü oranlarındaki iyileştirme aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\text{SNR}_s^{\wedge}}{\text{SNR}_z} = N; \quad N \leq N_{\max} \quad (5.77)$$

iyileştirmenin $z(t)$ gözleminin işaret-gürültü oranında bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

5.4.2 - Tamamen bağımlı cevaplar

Bu durumda $S_i(t) = S(t)$ olduğu kabul edilir, yani bütün cevaplar aynı rastgele işlemin örnekleridir. Böylece denklem (5.66) aşağıdaki ifadeye dönüşür.

$$r_{\bullet}(\tau, t) = E\{S_i(t-t_i) S_j(t-t_j)\} = E\{S_i^2(t-t_i)\} \quad (5.78)$$

Denklem (5.78) denklem (5.72) de yerine konulduğunda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sigma_s^2 = \sigma_s^2 + \frac{1}{N} \sigma_n^2 \quad (5.79)$$

Bu durumda tahmini değerin birbirine uygun bir tahmini değer olmadığına dikkat edelim. Bunun varyansı yalnız işlemin varyansına yaklaşır; N sonsuza yaklaşırken varyans sıfıra yaklaşmayacaktır.

Bu durumda işaret-gürültü oranlarındaki iyileştirme aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\text{SNR}_s}{\text{SNR}_z} = N \frac{\rho + 1}{N\rho + 1} \quad (5.80)$$

burada $\rho = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}$, $Z_1(t)$ de işaret ve gürültünün varyanslarının oranıdır. Bu durumda şuna dikkat edilmelidir. İyileştirme gözlemin işaret-gürültü oranına bağlıdır. İyileştirme genellikle 1'den büyüktür. Çok gürültülü gözlemler (ρ sıfıra yaklaşırken) için, iyileştirme N'e yaklaşır.

5.4.3 - Genel Durum

Bazı uygulamalarda, en son bölümde yaptığımız temel kabulleri farz etmek mümkün olmayabilir.

Işıklı uyarıma karşı ER (Evoked Response: uyandırma cevabı, çok uzun ritmik bir dalga şeklinde devam etmiş olabilir. Böyle durumlarda (5.80) denkleminde yapılan kabul geçerli değildir. Mesela EP analizinde gürültünün ana kaynağı beynin daha önceki olaylarla etkilenmesi sonucu bu olaylardan sonra alınan EEG

sinyalleridir. EEG ve EP nin bağımsız olduğu kabulü genellikle geçerli değildir. Deney altındaki obje, bir uyarıya maruz kalacağını bekler, tahmin eder ve kendisi üzerinde deney yapılacağını farkına vardığında EEG ve EP arasında bir korelasyon ortaya çıkar.

Bu bölümde tarif edilen senkronize ortalama metodu, T zaman penceresinde uzanan cevapları kabul eden ortalama cevabı tahmin eder. Büyük bir çoğunlukla cevapların uyarı ile tam senkronize olduğu söylenemez, ama τ gibi yapılan uyarıya karşı fiil haline geçmemiş bir cevaba sahiptir ve bu durum aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$Z_i(t) = S_i(t - \tau_i - t_i) + n_i(t) \quad (5.81)$$

burada τ_i i. cevabın fiili duruma geçmemiş halidir. Denklem (5.63) deki ortalama işlemi t_i bilinen uyarı zamanına göre senkronize etmenin manası şudur: ortalama cevaplar uygun bir şekilde biri diğeri ile sıralanamaz. Böylece tahmini değer cevabı doğru bir şekilde vermeyecektir. Bu problemin üstesinden gelebilmek için bir metod aşağıdaki bölümde incelenecektir.

Bazı uygulamalarda (5.62) denklemdeki ortalama cevabın bilinmesi yeterli değildir. Böyle durumlarda tek bir EP'yi analiz etmek ihtiyacı vardır. Karmaşık adaptif filtreleme ve dalga formunu dedeksiyonu gibi teknikler uygulanabilir.

(5.63) tahmini değeri, arzu edilen $S(n,t)$ miktarına eşit olan ortalama ile rastgele bir değişkendir. Beklenen değer

ihtimal dağılımı bilinmiyorsa; ancak bir çok, çok iyi bilinen kısıtlamaların kullanılması ile, güvenilirlik kısıtlamaları senkronize ortalamanın dizaynı için kullanılabilir.

Aşağıdaki verilen chebychev eşitsizliğini düşünelim.

$$\text{Prob}[m(t) - k\sigma_{\hat{s}} \geq \hat{S}(N,t) \geq (m(t)+k\sigma_{\hat{s}})] \leq \frac{1}{k^2} \quad (5.82)$$

Bu eşitsizlik şu durumu ifade eder. $m(t)$ ortalamasından $\pm k\sigma_{\hat{s}}$ sahasının dışında olacak olan tahmini değerin ihtimalinin $1/k^2$ ye eşit veya ondan daha düşük bir değere eşit olacağını belirtir. $\pm 3\sigma_{\hat{s}}$ sahasının dışında bir tahmini değere sahip olma ihtimali 0.11'e eşit veya ondan daha düşük bir değere eşittir. 0.889 (≈ 0.9 veya % 90) luk bir ihtimal (güvenirlilik) ile, tahmindeki hata $\approx 3\sigma_{\hat{s}}$ sahasında olacaktır. Deneysel metodu şu şekilde olacabilir. % 90 lık bir kesinlik ile ihtiyac olan N deneme sayısı belirlenir, tahmin değerindeki hata $\approx \epsilon$ 'a eşit veya bu değerden düşük olacaktır. İstatistik olarak bağımsız cevaplar için aşağıdaki ifadeye sahip olunur. (denklem (5.74))

$$3\sigma_{\hat{s}} = 3 \frac{\sigma_z}{(N)^{1/2}} \leq \epsilon; \quad N \leq N_{\max} \quad (5.83)$$

İhtiyaç olan denemelerin sayısı aşağıdaki şekilde verilir.

$$\frac{\text{SNR}_{\hat{s}}}{\text{SNR}_z} = N \geq \frac{9\sigma_z^2}{\epsilon^2} = \frac{9}{\epsilon^2} (\sigma_s^2 + \sigma_n^2); \quad N \leq N_{\max} \quad (5.84)$$

Cevapların istatistik olarak bağımlı olduğu ikinci durum için aşağıdaki ifadeyi elde etmede denklem (5.79) kullanılır.

$$3\sigma_s^2 = 3|\sigma_s^2 + \frac{1}{N} \sigma_n^2|^{1/2} \leq \epsilon$$

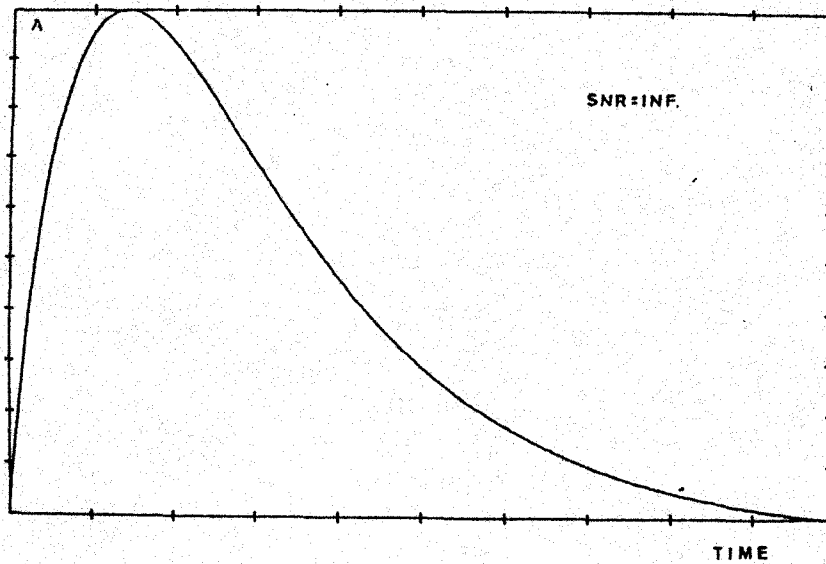
$$\frac{SNR_s}{SNR_z} = N \geq \frac{\sigma_n^2}{\frac{1}{9}\epsilon^2 - \sigma_s^2}; \quad N \leq N_{max} \quad (5.85)$$

Senkronize ortalama ile işaret-gürültü oranının artırılması yani iyileştirilmesi simülasyon ile gösterilir. $S_i(t) = S(t)$ tekrarlama işareti aşağıdaki ifade ile üretilmiştir.

$$S(t - t_i) = A \exp(-\alpha(t - t_i)) + B \exp(-\beta(t - t_i));$$

$$0 \leq (t - t_i) \leq T \quad (5.86)$$

$z(t)$ gözlem işareti yani form olarak dağılmış Pseudo rastgele gürültüsünün toplanması ile üretilmiştir. Şekil-5.4 değişik N değerleri için tahmini değerlerin çıkışını ve ($SNR = \infty$), ve $s(t)$ işaretini gösterir.



Şekil-5.4 Senkronize ortalama

5.4.4 - Kayıtların sırası ve Ltencieslerin tahmini değeri

Denklem (5.81) ile tarif edilen latenci problemini tekrar düşünelim eğer bilinmeyen τ_i latencileri büyük bir varyansa sahip iseler ortalama cevap yeterli olmayacaktır. Latencileri tahmin için adaptif bir metodun uygulanması gerekir. Bu metod bazen woody filtrelemesi olarak bilinir.

Biz şimdi düzenli ortalama metodu (denklem (5.63)) uygulayacağız. Ortalama cevabı $\hat{S}_o(N, t)$ ile gösterelim böylece

$$\hat{S}_o(N, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i(t-t_i) + n_i(t-t_i)) \quad (5.87)$$

yazılabilir.

$\hat{S}_o(N, t)$ yi ortalama cevabın, birinci tahmin değeri olarak kullanabiliriz. Bu tahmin değerini daha iyi tahmin edebilmek için N tane cevabın her biri tahmini değeri ile kroskoralasyona tabi tutulacaktır. i. cevabın koralasyonunu aşağıdaki şekilde düşünelim

$$R_{sz_i}^{(o)}(\lambda) = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{T+t_i} \hat{S}_o(Nt) z_i(t-\lambda) dt \quad (5.88)$$

kroskoralosyonun maksimum olduğu λ_i zamanını bulmaya çalışıyoruz.

$$\text{Max}(R_{sz_i}^{(o)}(\lambda)) = R_{sz_i}^{(o)}(\lambda_i) \quad (5.89)$$

ortalama cevabın tahmini değeri ile z_i gözlemini en iyi bir şekilde sıraya düzmek için ihtiyaç olan zaman kaydırmadır. Böylece $z_i(t)$ gözlemini bu miktar kadar kaydırmamız gerekir. Ortalama için bir sonraki tahmini değer aşağıdaki gibi verilir.

$$\hat{S}_i(N, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i(t-t_i-\lambda_i) + n(t-t_i-\lambda_i)) \quad (5.90)$$

$\hat{S}_0(N, t)$ nin yeni $\hat{S}_i(N, t)$ tahmini değerle yerdeğiştirmesi ile (5.88) denkleminin korelosyon iş-lemi tekrar edilir. Yeni $R_{sz_i}^{(1)}(\lambda)$ tahmini değeri ile bütün N tane cevabın korelosyonu yeniden bir sıralama için yeni λ_i tahmini değerlerini verecektir. Bu işlem duraklama kriteri ile karşılaşınca kadar devam edecektir. Böyle bir kriter iki ardışık korelosyon altındaki alanlardaki farklılık olarak tarif edilir ve aşağıdaki gibi verilir.

$$\left| \int_0^{\infty} R_{sz_i}^{(j+1)}(\lambda) d\lambda - \int_0^{\infty} R_{sz_i}^{(j)}(\lambda) d\lambda \right| \leq \epsilon \quad (5.91)$$

İyi huylu gürültü ve korelosyon fonksiyonu için şu durum gösterilebilir. Yukarıdaki işlem asimtotik olarak kararlı tahmini bir değerle sonuçlanır. Diğer durumlarda işlem keyfi sayıdaki iterasyondan sonra durdurulur ve datanın gözle izlenmesi tavsiye edilir.

B Ö L Ü M - 6

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Yapılan bu çalışmada biomedikal ölçmeler ve teşhis ile ilgili sistemler için çok önem taşıyan bioelektriksel işaretlerin işlenmesi, işaret işleme tekniklerine bağlı olarak geniş şekilde verilmiştir. Bu gaye ile ilk iki bölümde genel ölçmeler, teşhis ile ilgili sistemler ve bioelektrik işaretlerin fizyolojik kaynağı hakkında bilgi verilmektedir. Bununla ilgili olarak, biyolojik sistemde en önemli bilgi işleme mekanizması olan sinir sisteminin çalışması, sinirsel bilgi transferi ve sinirsel haberleşme ile bunların kontrol mekanizmaları incelenmektedir. Ayrıca hücre gruplarında oluşan kimyasal ve elektrokimyasal aktivitelerinin ölçülebilir metodları kısaca verilmektedir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde sırasıyla, elde edilen bioelektriksel sinyallerin değerlendirilmesi için gerekli olan

işaret işlemeyle ilgili, Rasgele işlemler hakkında olasılık dağılım, yoğunluk fonksiyonları ve istatistiksel olarak bağımsız olaylara bağlı olarak gerekli matematiksel bilgiler verilmektedir. Buna bağlı olarak bioelektrik işaretlerin sayısal işlenmesiyle ilgili matematiksel analiz yapılmaktadır. Bu analiz ile ilgili örnekleme, kuantalama ve ayrık zaman işlemleri hakkında bilgi verilmektedir.

Son bölümde ise bioelektrik işaretin sağlıklı bir biçimde değerlendirilmesi için gerekli olan sınırlı zaman tahmini ile ilgili problemler işlenmektedir. Tahmin türlerini içine alan hatalar tartışılmakta ve tahmin ile işaret gürültü oranındaki iyileştirmenin nasıl gerçekleştirileceği sürekli ve ayrık durum için açıklanmıştır. Sürekli durum için iyileştirmenin lineer olarak α gürültü korelasyon exponansiyel faktörü ile orantılı olduğu gözlenmektedir. Ayrık durumda ise işaret gürültü oranındaki iyileştirme sürekli durumda olduğu gibi M gözlem zamanı ile doğrusal orantılı olduğu 5.bölümde verilmektedir. Ayrıca bu bölümde sürekli ve ayrık durumda, varyans ve korelasyon tahmini senkronize ortalama ile ilgili matematiksel analizler verilmektedir.

Sonuç olarak yapılan çalışma bioelektrik işaretlerin sayısal işlenmesi ve matematiksel analizi bioişaret örnekleriyle verilerek, bu alandaki ileri çalışmalara temel oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

1. DeMarre, D.A. and Michales, D., Bioelectronic Measurements. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983
2. Geddes, L.A. and Baker, L.E., Principles of Applied Biomedical Instrumentation, John Wiley & Sons, New York 1968
3. Strong, P., Biophysical Measurements, Tektronix, 1970
4. Webster, J.G., Ed., Medical Instrumentation Application and Design, Houghton Mifflin, Boston, 1978
5. Cromwell, L., Weibell, F.J., Pfeiffer, E.A., and Usselman, I. B., Biomedical Instrumentation and Measurements, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J., 1973
6. Robinson, E.A. and Treitel, S., Geophysical Signal Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980
7. Bracewell, R. N., The Fourier Transform and its applications, McGraw-Hill, New York, 1978
8. Katz, B., Nerve, Muscle and Synapse, McGraw-Hill, New York, 1966
9. Geddes, L. A., Electrodes and the Measurement of Bioelectric Events, Wiley-Interscience, New York. 1972
10. Plonsey, R., Bioelectric Phenomena, McGraw-Hill New York. 1969
11. Paoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic. McGraw-Hill, New York, 1965

12. Davenport, W. B. and Root, W.L., An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1958
13. Bendat, J.S. and Piersol, A.G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures. Wiley-Interscience, New York, 1971
14. Beauchamp. K. G. and Yuen, C.K., Digital Methods for Signal Analysis, George Allen and Unwin. Ltd. London, 1979
15. Tretter, S.A., INToduction to Discrete Time Signal Processing, John Wiley . Sons. New York, 1979
16. Oppenheim, A. V., Ed., Application of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1978
17. Mark, J.W. and Todd, T.D., A nonuniform sampling approach to data compression, IEEE Trans. Commun., 29. 24. 1981
18. Plotkin, E., Roytman, L., and Swamy, M.N.S., Nonuniform sampling of band limited modulated signals. Signal Process 4, 295, 1982
19. Blanchard, S.M. and Barr, R.C., Zero, first and second order adaptive sampling from ECG's, in Proc of the 35th ACEMB, Philadelphia, 1982, 209.
20. Cohen, A. and Landsberg, D., Adaptive real-time wavelet detection. IEEE Tranzs. Biomed ENG., 30.332, 1983
21. Widrow, B., A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theory, IRE Trans. 11.266.1956
22. Bendat, J.S. Nd Pierson, A.G., Random Data Analysis and Measurements Procedures. Wiley-Interscience. New York 1971

23. Shiavi, R. and Green, N., Ensemble averaging of locomotor EMG patterns using interpolations. Med.Biol. Eng. Comput., 21,152,1983
24. Volkers, A.C.W., Van de Schee, E.J. and Grashuis, J.L., Electrogastrography in the dog: waveform analysis by a coherent averaging technique. Med.Biol.Eng.,21,56,1983
25. Gethner, J.S., Woodin, R.L., Rabinowitz, P., and Kaldor, A., Multiparameter matrix signal averaging Rev.Sci.1982
26. Thomas, C.W., Rzeszutarski, M.S., and I Senstein, B.S., Signal averaging by paralel digital filters, IEEE Trans Acoust. Speech Signal Process., 30,338,1982