T O P O L O J İ K   F A N K T O R L A R

Abdullah BAKIR

Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü'ne
Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi
Olarak Sunulmuştur.

Eylül - 1992

23238

Erciyes Üniversitesi

Fen bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

.6../.11../1992

Başkan: Prof. Dr. Ekrem ÖZTÜRK

Üye : Doç. Dr. Aydın TİRYAKİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet BARAN

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.11./.11./1992

Enstitü Müdürü V.

Doç. Dr. Mehmet GÜNDÜZ

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışma boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen degerli hocam Yrd.Doç.Dr. Mehmet BARAN 'a teş ekkür eder, saygılar sunarım.

Abdullah BAKIR

Ö Z G E Ç M İ Ş

Adı Soyadı: Abdullah Bakır

Baba Adı : Osman

Ana Adı : Hafize

İlk,orta,lise öğrenimini Şanlıurfa'da tamamladı. Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden lisans diploması alarak 1982 yılında mezun oldu.1983-84 yıllarında İstanbul'daki askerlik görevinden sonra 1985-87 yıllarında Kayseri' de öğretmenlık yaptı.1987 de Dicle Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesı İnşaat Bölümüne uzman olarak atandı. Halen bu görevi yürütmektedir.

ÖZET

Bu çalışma klasik topolojik uzaylar kategorisinin genişletilmesi olan topolojik kategorilerin incelenmesi hakkında olup üç bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak bazı topolojik ve kategorik kavramlar verildi.

İkinci bölümde, Herrlich anlamında tanımlanan topolojik fanktorun tanımı verildi. Bazı iyi bilinen kategorilerin topolojik kategori olduğu gösterildi.

Son bölümde ise ikinci bölümde incelenen topolojik kategorilerin diskre ve indiskre yapıları karakterize edildi ve bazı genel teoremler ispat edildi.

ABSTRACT

This study is about topological category which is a generalization of the usual category of topological spaces. It consist of three chapters.

In the first chapter, some basic topological and categorical notions are given for later use.

In the second chapter, definition of topological category in the sence of Herrlich is given and some well-known examples of topological categories are established.

In the last chapter, the characterization of discrete and indiscrete objects of the categories considered in chapter two is given and some basic theorems are proved.

İ Ç İ N D E K İ L E R

BÖLÜM I

BÖLÜM II

BÖLÜM III

GIRIŞ

Topolojik uzay kavramı topolojik kategori kavramına, yakınsak uzayları, limit uzayları, preordered uzayları, bornolojik uzayları içine alacak şekilde Herrlich [2], Kent [3], Wyler [10], Schwarz [9], Nel [8] ve diğerleri tarafından genişletildi.

Bu çalışmada, Herrlich [2] tarafından tanımlanan topolojik fanktorların üzerinde durulacak, bazı iyi bilinen kategorilerin topolojik kategori oldukları gösterilecek, bunların diskre ve indiskre yapıları karakterize edilecek ve topolojik fanktorlar hakkında bazı temel teoremler ifade ve ispat edilecek.

BÖLÜM I

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler ifade edildi.

1.1 KATEGORİ

TANIM 1.1.1 K bir sınıf olsun. K'nın kategori olması için K'-daki tüm nesnelerin (objects) sınıfı, tüm dönüşümlerin (morphisms) sınıfı verilmeli ve ayrıca verilen iki dönüşüm için bunların bileşkesi tanımlanmalıdır. Bu veriler aynı zamanda aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

1. K daki her A nesnesi için $1_A:A\longrightarrow A$ birim dönüşümü vardır öyleki her $f:A\longrightarrow B$ dönüşümü için $fo1_A=f$ ve her $g:B\longrightarrow A$ dönüşümü için $1_Aog=g$ olmalıdır.
2. $f:A\longrightarrow B$, $g:B\longrightarrow C$, $h:C\longrightarrow D$, olmak üzere bileşke "o" işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır. Yani $ho(gof)=(hog)of$ sağlanmalıdır.

Ayrıca $K(A,B)=Hom(A,B)=\{f|\ f:A\longrightarrow B$ dönüşüm$\}$ cümlesi olmak üzere $o:K(A,B)xK(B,C)\longrightarrow K(A,C)$ yazılabilir.

ÖRNEK 1.1.2 K=Sets, Tüm cümlelerin sınıfı bir kategoridir. K nın nesneleri A,B,C...cümleleri ve dönüşümleri de fonksiyonlar olarak verilsin. Bileşke işlemi olarak fonksiyonların bileşkesini alalım.

1. Her A cümlesi için $1_A : A \longrightarrow A$ birim fonksiyonu vardır. Ayrıca her $f: A \longrightarrow B$ fonksiyonu için $f \circ 1_A = f$ ve her $g: B \longrightarrow A$ fonksiyonu için $1_A \circ g = g$ dır.

2. $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ ve $h: C \dashrightarrow D$ olmak üzere fonksiyonlarda $ho(gof)=(hog)of$ birleşme özelliği sağlanır. [7] Dolayısıyla K=Sets bir kategoridir.

TANIM 1.1.3 (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay olmak üzere $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ süreklidir denir ancak ve ancak her $U \in \sigma$ için $f^{-1}(U) \in \tau$, yani $f^{-1}\sigma \subset \tau$ dır.

TEOREM 1.1.4 $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\delta)$ topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \longrightarrow Y$ ve $g: Y \longrightarrow Z$ sürekli fonksiyonlar ise $h=gof$ bi leşik fonksiyonu da süreklidir.[7]

ÖRNEK 1.1.5 K=Top, Tüm topolojik uzayların sınıfı bir kategoridir.

K nın nesneleri $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\delta)$...topolojik uzaylar, dönüşümleri $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ sürekli fonksiyonlar ve bileşke de fonksiyonların bileşkesi olsun.

1. $(X,\tau) \longrightarrow (X,\tau)$ olacak şekilde $1_X: X \longrightarrow X$ birim fonksiyonu vardır ve bu birim fonksiyonu süreklidir.[7] Ayrıca her $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ için $fo1_X=f$ ve her $g:(Y,\sigma) \longrightarrow (X,\tau)$ için $1_X og=g$ dır.

2. $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$, $g:(Y,\sigma) \longrightarrow (Z,\delta)$ ve her $(Z,\delta) \longrightarrow (W,\mu)$ olmak üzere f,g,h fonksiyonları sürekli olduklarından bunların birleşimleri $ho(gof),(hog)of$ de sürekli ve eşittirler. Dolayısıyla Top bir kategoridir.

ÖRNEK 1.1.6 K=Grps; Tüm grupların cümlesi bir kategoridir.

K'nın nesneleri $(G,o),(H,\bullet)$...grupları, dönüşümleri grup homomorfizmi ($(G,o),(H,\bullet)$ iki grup ve $f:G\longrightarrow H$ bir fonksiyon olsun. Her $a,b \in G$ için $f(aob)=f(a)\bullet f(b)$ oluyorsa bu fonksiyona grup homomorfizmi denir.) ve bileşke işlemide fonksiyonların bileşkesi olsun. Kolayca görülürki Grps bir kategoridir.

NOT: Grup homomorfizminin bileşkeside grup homomorfizmidir.

TANIM 1.1.7 1- K bir kategori olsun. Verilen bir C kategorisi için; eğer C'nin nesne ve dönüşümleri K'nın bazı nesne ve dönüşümlerinden oluşuyorsa ve K daki işlem C'ye kısıtlandığında kategori için gerekli şartlar sağlanıyorsa C'ye K'nın alt kategorisi denir.

2-Eğer nesnelerde kısıtlama olupta, dönüşümlerde kısıtlama olmuyorsa C'ye K nın dolgun(full) alt kategorisi denir.

TANIM 1.1.8 K bir kategori, i ve t K'nın nesneleri olsunlar.

1- K'nın her A nesnesi için $K(i,A)=\{$i den A'ya giden dönüşümlerin sınıfı$\}$ tek nokta cümlesi ise i'ye K'nın başlangıç (initial) nesnesi denir.

2- K nın her A nesnesi için $K(A,t)=\{$A dan t ye giden dönüşümlerin sınıfı$\}$ tek nokta cümlesi ise t ye K'nın son (terminal) nesnesi denir.

ÖRNEK 1.1.9 1- K=Sets için başlangıç ve son nesneler sırasıyla $i=\phi$ ve $t=\{x\}=1$ tek nokta cümlesidir. Çünkü her A keyfi cümlesi için $K(\phi,A)$=Boş fonksiyon ve $K(A,t)=\{f \mid f:A\longrightarrow t\}$=sabit fonksiyondur.

2- K=Top için $i=(\phi,\{\phi\})$ ve $t=(\{x\},\{\phi,\{x\}\})$ dır. $f:(A,\tau)\longrightarrow t$ sabit fonksiyon her zaman süreklidir. Çünkü $f^{-1}\{\phi\}=\phi$ ve $f^{-1}(\{x\})=A$ dır.

3- K=Grps da başlangıç ve son nesneler aynıdır, yani i=(e,o)=t dır.

TANIM 1.1.10 K bir kategori ve $A,B \in K$ olsun.

1- $f:A \longrightarrow B$ izomorfizmdir ancak ve ancak $g:B \longrightarrow A$ vardır, öyle-ki $gof=I_A$ ve $fog=I_B$ dır.

2- $f:A \longrightarrow B$ monomorfizmdir ancak ve ancak verilen herhangi bir C nesnesi ve iki dönüşüm $g,h:C \longrightarrow A$ için $fog=foh$ ise $g=h$ dır.

3- $f:A \longrightarrow B$ epimorfizmdir ancak ve ancak verilen herhangi bir C nesnesi ve iki dönüşüm $g,h:B \longrightarrow C$ için $gof=hof$ ise $g=h$ dır.

ÖRNEK 1.1.11 K=Sets veya Grups olduğunda izomorfizm birebir ve örtenliğe denktir. K=Top ise izomorfizm homeomorfizme karşılık gelir.[4] (Mono birebirliğe, epi örtenliğe karşılık gelir.)

1.2 FANKTOR

TANIM 1.2.1 K ve K' iki kategori olsun. Eğer K daki her A nesnesi için F(A) K' nın nesnesi ve K nın her $f:A \longrightarrow B$ dönüşümü için $F(f):F(A) \longrightarrow F(B)$ K' nın bir dönüşümü oluyorsa ve

1- $F(1_A)=1_{FA}$ (her $A \in K$ için)

2- $F(gof)=F(g)oF(f)$ şartları sağlanıyorsa $F:K \longrightarrow K'$ ne bir fanktordur denir.

ÖRNEKLER 1.2.2 1- K bir kategori ve $A \in K$ olsun. Bu durumda $K(A,-):K \longrightarrow$ Sets de, her $B \in K$ için $K(A,B)$= A dan B ye giden dönüşümlerin cümlesi Sets'in elemanıdır ve her $f:B \longrightarrow C$ dönüşümü için $K(A,f)(g)=fog:A \longrightarrow C$ bir dönüşümdür. (Burada $g:A \longrightarrow B$ dır.) Buna göre $K(A,-):K \longrightarrow$ Sets'in bir fanktor olduğunu gösterelim.

a) $1_B:B \longrightarrow B$ olsun.

$K(A,1_B)(f)=1_B of$ (Tanımdan)

$=f$ (Kategori tanımından)

$K(A,1_B)(f)=1_{K(A,A)}(f)$ olduğundan birinci şart sağlanır.

b) $K(A,gof)=K(A,g)oK(A,f)$ olduğunu gösterelim.

$f:B\longrightarrow C$ ve $g:C\longrightarrow D$ fonksiyon olsunlar. Her $h \in K(A,B)$ için $K(A,gof)(h)=(gof)oh$ ve $K(A,g)oK(A,f)(h)=K(A,g)(foh)=go(foh)$ dır.

K bir kategori olduğundan $(gof)oh=go(foh)$ dır. Dolayısıyla $K(A,gof)=K(A,g)oK(A,f)$ olur.

2- $F:Sets\longrightarrow Sets$ ve $S \in Sets$ olsun. Her $X \in Sets$ için $F(X)=XxS$ şeklinde tanımlansın ve her $g:X\longrightarrow Y$ fonksiyonu için $F(g)=gx1_S$, $1_S:S\longrightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde F bir fanktordur Gerçekten,

a) $F(1_X)=1_X x 1_S=1_{XxS}=1_{F(X)}$

b) $F(gof)=gofx1_S=(gx1_S)o(fx1_S)=F(g)oF(f)$

3- $U:Top\longrightarrow Sets$ de $U(X,\tau)=X$ ve $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\sigma)$ için $U(f)=f:X\longrightarrow Y$ olarak tanımlansın. Bu takdirde kolayca görülürki U bir fanktordur.

a) $U(I_{(X,\tau)})=I_{U(X,\tau)}=I_X$

b) $U(gof)=gof$ yine $U(g)=g$ ve $U(f)=f$ olduklarından $U(g)oU(f)=gof$. Dolayısıyla U bir fanktordur. Buna unutkan (forgetful) fanktor denir.

4- $D:Sets\longrightarrow Top$ da her $X \in Sets$ için $DX=(X,PX)$=Diskre topoloji ve her $f:X\longrightarrow Y$ fonksiyonu için $Df=f:(X,PX)\longrightarrow(Y,PY)$ olsun. $Df=f$ süreklidir, çünkü tanım uzayı diskre uzaydır.

a) $D(1_X)=1_{DX}=(X,PX)$

b) (3) deki gibidir. O halde D bir fanktordur ve buna diskre fanktor denir.

5- $D^*:Sets\longrightarrow Top$ da her $X \in Sets$ için $D^*X=(X,\{\phi,X\})$=İndiskre uzayı ve her $f:X\longrightarrow Y$ için $D^*f=f$ süreklidir. Çünkü değer kümesi indiskre topolojik uzaydır. Fanktor olduğu kolayca görülür.

Buna da indiskre fanktoru denir.

TANIM 1.2.3 $F:K \longrightarrow K'$ fanktor olsun.
1- Her $A,B \in K$ ve her $f:FA \longrightarrow FB$ için en az bir $g:A \longrightarrow B$ dönüşümü vardır ve $F(g)=f$ ise F'ye dolgun (full) fanktor denir.
2- F'ye düzenli (faithful) denir, eğer her $A,B \in K$ ve her $f,g:A \longrightarrow B$ dönüşümleri için $F(f)=F(g)$ ise $f=g$ dır.
3- F'ye amnestik denir ancak ve ancak $f:A \longrightarrow A$ için eğer $F(f)=Id$ $=1_{F(A)}$ ve f izomorfizm ise $f=Id_A=1_A$ olmalıdır.
4- F hem düzenli fanktor, hem de amnestik ise F'ye belirli(concrete) denir.

TEOREM 1.2.4 $U:K \longrightarrow K'$ düzenli fanktor ise
1- U epi ve monoyu yansıtır.
2- U, K'deki değişmeli diyagramı yansıtır.

İSPAT: 1- $U:K \longrightarrow K'$ düzenli fanktor ve $f:A \longrightarrow B$ olsun. Her $C \in K$ ve her $g,h:B \longrightarrow C$ dönüşümleri için $gof=hof$ olsun. Göstereceğiz-ki $g=h$ dır.
$U(gof)=U(hof)$ ve U fanktor olduğundan $U(g)oU(f)=U(h)oU(f)$ dır.
$U(f)$ epi olduğundan $U(g)=U(h)$ olur. U'yu düzenli fanktor kabul ettiğimizden $g=h$ olur.
Benzer yolla U'nun monoyu yansıttığı gösterilebilir.
2- $f:A \longrightarrow B$, $g:B \longrightarrow C$, ve $h:A \longrightarrow C$ dönüşümleri için $U(g)oU(f)=U(h)$ olsun, $gof=h$ olduğunu gösterelim.
U fanktor olduğundan $U(g)oU(f)=U(gof)=U(h)$, yine U düzenli olduğundan $gof=h$ yazılabilir. Dolayısıyla U degişmeli diyagramı yansıtır.

1.3 DOĞAL DÖNÜŞÜM

TANIM 1.3.1 K ve K' birer kategori, F ve G, K dan K'ne iki fanktor olsunlar. Eğer her $A \in K$ ve her $f:A \longrightarrow B$ dönüşümü için $G(f) o \alpha_A = \alpha_B o F(f)$ oluyorsa ($\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$, $\alpha_B : F(B) \longrightarrow G(B)$) $\alpha : F \longrightarrow G$ ye bir doğal dönüşüm (Natural transformation) denir.

ÖRNEK 1.3.2 S bir sabit cümle ve X^S de $h:S \longrightarrow X$ bütün fonksiyonların cümlesi olsun. I=birim, $T=(-)^S$ ve $F=-xS:Sets \longrightarrow Sets$ birer fanktor olsunlar. $ev:FoT \longrightarrow I$ yani $ev:(-)^S xS \longrightarrow I$ bir doğal dönüşümdür. Burada her $X \in Sets$ için $ev(x):X^S xS \longrightarrow X$ dönüşümü $ev_x(h,s)=h(s)$ şeklinde tanımlanıyor.

$(-)^S:Sets \longrightarrow Sets$ bir fanktor olduğunu gösterelim.

$A \longrightarrow A^S = \{f \mid f:S \longrightarrow A\}$, $h:A \longrightarrow B$, $h^S:A^S \longrightarrow B^S$ olsun. $h^S(f)=hof$ şeklinde tanımlayalım. $1_A = 1_A of = f = 1_A^S(f)$ (Tanımdan)

$1_A^S(f)$ den $1_A^S = I_A^S$ olur. Bu da $T(1_S)=1_{TS}$ olduğunu gösterir.

Şimdi $(goh)^S = g^S o h^S$ olduğunu gösterelim.

$h:A \longrightarrow B$, $g:B \longrightarrow C$, $h^S:A^S \longrightarrow B^S$, $g^S:B^S \longrightarrow C^S$ olmak üzere

$(goh)^S(f)=(goh)of$ ve $g^S o h^S(f)=g^S(hof)=go(hof)$ dur. Dolayısıyla $(-)^S$ $:Sets \longrightarrow Sets$ bir fanktordur.

Şimdide $f:X \longrightarrow Y$, $ev_x:X^S xS \longrightarrow X$ $ev_y:Y^S xS \longrightarrow Y$ ve $f^S x1_S:X^S xS \longrightarrow Y^S xS$ olmak üzere

$f o ev_x = ev_y o (f^S x1_S)$ olduğunu gösterelim

$g:S \longrightarrow X$ ve $s \in S$ için $f o ev_x(g,s)=fo(g(s))=f(g(s))$

$ev_y o (f^S x1_S)(g,s)=ev_y(fog,s)=fog(s)=f(g(s))$ dır.

Dolayısıyla $ev:FoT \longrightarrow I$ bir doğal dönüşümdür.

ÖRNEK 1.3.3 $U:Top \longrightarrow Sets$ ve $D:Sets \longrightarrow Top$ birer fanktordurlar. [1.2.2 (3) ve (4)] $\eta:I \longrightarrow UoD$ ve $\varepsilon:DoU \longrightarrow I$ doğal dönüşümlerdir. Burada η'ya birim (unit), ε'na (counit) dönüşümü denir.

$f:A \longrightarrow B$ bir dönüşüm olsun. Her $A \in Sets$ için $\eta_A:A \longrightarrow UoD(A)=U(A,PA)=A$ olduğundan $\eta_A=1_A$ ve aynı şekilde

$\eta_B=1_B$ dır. $1_{(UoD)}(f)o\eta_A=1_Bof$ eşitliği $fo1_A=1_Bof$ olur ki kategori tanımından f=f dır. Dolayısıyla η doğal dönüşümdür.

$f:(A,\tau)\longrightarrow(B,\sigma)$ olsun. ($f:A\longrightarrow B$ sürekli) Her $(A,\tau)\in$ Top için $\varepsilon_{(A,\tau)}:(A,PA)\longrightarrow(A,\tau)$ sürekli dönüşüm olsun öyle ki $U(\varepsilon_{(A,\tau)})=1_A$ dır. Her $f:(A,\tau)\longrightarrow(B,\sigma)$ için $fo\varepsilon_{(A,\tau)}=\varepsilon_{(B,\sigma)}o(DoU)(f)$ sağlanmalıdır.

$a\in A$ olsun, $fo(\varepsilon_{(A,\tau)})(a)=f(1_A(a))=f(a)$

$\varepsilon_{(B,\sigma)}o(DoU)f(a)=\varepsilon_{(B,\sigma)}(f(a))=1_B(f(a))=f(a)$ dır.

Dolayısıyla ε bir doğal dönüşümdür.

TANIM 1.3.4 C,B,A kategoriler, $S,T:C\longrightarrow B$, $S',T':B\longrightarrow A$ ve $\tau:S\longrightarrow T$, $\tau':S'\longrightarrow T'$ doğal dönüşüm olsunlar. $S'oS$ ve $T'oT:C\longrightarrow A$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\tau'o\tau:S'oS\longrightarrow T'oT$ doğal dönüşümlerin birleşimi her $c\in C$ için $(\tau'o\tau)(c)=T'\tau co\tau'Sc=\tau'Tco S'\tau c$ ile tanımlanır. [4]

ÖRNEK 1.3.5 1- C=Sets=B, A=Top olsun.

$\tau'o\tau(A)=D\eta(A)=I_Do\eta(A)=T'SAo\tau'SA=DI(A)o1_D(S(A))=DAo1_{DA}=1_{DA}(DA)=1_{DA}$ dır.

2- C=Sets, B=Top=A olsun.

$\varepsilon oD(A)=\tau'o\tau(A)=Io1_D(A)o1_D(A)=1_{DA}o\ (A,PA)=1_{DA}$ dır. [4]

1.4 ADJOINT FANKTORLAR

TANIM 1.4.1 K ve A kategori olsunlar. R ve L fanktorlar olmak üzere $K\underset{L}{\overset{R}{\rightleftarrows}}A$ aşağıdaki şartlar sağlanırsa L'ye R'nin sol adjointi veya R ye L'nin sağ adjointi denir. $L\dashv R$ seklinde gösterilir. Bu şartlar;

1- $\eta:I\longrightarrow RoL$ ve $\varepsilon:LoR\longrightarrow I$ doğal dönüşümler olmalıdır.

2- $L\xrightarrow{L\eta}LRL\xrightarrow{\varepsilon L}L$ de $(\varepsilon L)o(L\eta)=I$ ve

$R\xrightarrow{\eta R}RLR\xrightarrow{R\varepsilon}R$ de $(R\varepsilon)o(\eta R)=I$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

ÖRNEK 1.4.3 Top ve Sets kategorileri verilsin. U ve D fanktorlar olmak üzere $Top \underset{D}{\overset{U}{\rightleftarrows}} Sets$ (U-Unutkan, D-Diskre) ise D'ye U nun sol adjointi, U'ya D'nin sağ adjointi denir.

$\eta: I \longrightarrow UoD$ ve $\varepsilon: DoU \longrightarrow I$ ların doğal dönüşüm oldukları Örnek 1.3.3 de gösterildi.

$\varepsilon DoDn=I$ ve $U\varepsilon o\eta U=I$ olduklarını gösterelim. Örnek 1.3.5 den yararlanarak;

$(\varepsilon DoD\eta)(A)=\varepsilon D(A)oD\eta(A)=\varepsilon D(A)(1_{DA})=1_{DA}o1_{DA}=1_{DA}$ Böylece $\varepsilon DoDn=I$ olur. Burada A bir cümledir.

Benzer şekilde (A,τ) bir topolojik olmak üzere

$(U\varepsilon o\eta U)(A,\tau)=U\varepsilon(A,\tau)o\eta U(A,\tau)=U\varepsilon(A,\tau)(\eta(A))=U\varepsilon(A,\tau)(1_A)$
$=1_A o 1_A=1_A$,

Yani $U\varepsilon onU=I$ olduğu görülür. O halde D U'nun sol adjointi, U'da D'nin sağ adjointidir.

1.5 BAZI TOPOLOJİK KAVRAMLAR

TANIM 1.5.1 $\{(A_i,\tau_i): i\in I\}$ topolojik uzayların herhangi bir topluluğu ve $A \neq \phi$ olsun. $f_i: A \longrightarrow A_i$ fonksiyonlar olmak üzere f_i lerin sürekli olacağı topoloji belirlenmek isteniyor.

Bunun için $S=\bigcup_{i\in I}\{f_i^{-1}(H): H\in\tau_i\}$ alt bazı tarafından meydana getirilen topolojiye üretilen (induced) topoloji denir ve τ_* ile gösterilir.[7] Bu topoloji f_i leri sürekli kılan en küçük topolojidir.

TANIM 1.5.2 $(A_i,\tau_i) \longrightarrow A$ olsun. Bu takdirde $\tau^*=\{U\subset A \mid f_i^{-1}(U)\in\tau_i$ her $i\in I\}$ A üzerinde bir topolojidir. Buna zayıf (coinduced) topoloji denir. Bu topoloji f_i leri sürekli kılan en büyük topolojidir. [7]

TEOREM 1.5.3 $f_i:(A,\tau)\longrightarrow(A_i,\tau_i)$ sürekli fonksiyonlar ailesi olsun. $\tau=\tau_*$ olması için gerek ve yeter şart her (B,σ) topolojik uzayı ve sürekli her $g_i:(B,\sigma)\longrightarrow(A_i,\tau_i)$ fonksiyonlar ailesi için eğer f_i ler, g_i lerin bir çarpanı ise yani $g_i=f_i oh$ olacak şekilde en az bir $h:B\longrightarrow A$ fonksiyonu varsa, h süreklidir.

İSPAT: $\tau=\tau_*$ olsun, h fonksiyonun sürekli olduğunu gösterelim. $U=f_i^{-1}(V_i)$, $V_i\in\tau_i$ alt baz elemanı olarak seçilebilir. Çünkü f^{-1} hem birleşim, hem de arakesit işlemlerini muhafaza eder.
$h^{-1}(U)=h^{-1}(f_i^{-1}(V_i))=(f_i oh)^{-1}(V_i)=g_i^{-1}(V_i)\in\sigma$
olur. Çünkü g_i ler sürekliydi, dolayısıyla $h^{-1}(U)\in\sigma$ dır, yani $h:B\longrightarrow A$ fonksiyonu da süreklidir.

$g_i=f_i oh$ olacak şekilde h fonksiyonun varlığını ve sürekli olduğunu kabul edelim. $\tau=\tau_*$ olduğunu gösterelim. τ_* en küçük olduğundan $\tau_*\subset\tau$ dur. Şimdi $\tau\subset\tau_*$ olduğunu göstermeliyiz.
$(B,\sigma)=(A,\tau_*)$ ve $g_i=f_i$ alalım. $f_i o 1_A=f_i=g_i$ ve
f_i ler sürekli olduğundan hipotezden 1_A da sürekli olur, yani $\tau=I_A^{-1}(\tau)\subset\tau_*$ dır. Dolayısıyla $\tau=\tau_*$ gerçekleşir.

TEOREM 1.5.4 $f_i:(A_i,\tau_i)\longrightarrow(A,\tau)$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. $\tau=\tau^*$ olması için gerek ve yeter şart her (B,σ) topolojik uzayı ve $g_i:(A_i,\tau_i)\longrightarrow(B,\sigma)$ sürekli fonksiyonları için $g_i=hof_i$ ise h fonksiyonuda süreklidir ($h:A\longrightarrow B$ bir fonksiyon).
İSPAT: $\tau=\tau^*=\{U\subset A|\ f_i^{-1}(U)\in\tau_i,\ i\in I\}$ olsun. h'ın sürekli olduğunu gösterelim. g_i ler sürekli olduğundan $g_i^{-1}(V)\in\tau_i$ dır.
$f_i^{-1}(h^{-1}(V))=(hof_i)^{-1}(V)=g_i^{-1}(V)\in\tau_i$ olduğundan ve τ^* ın tanımından $h^{-1}(V)\in\tau$ dır, dolayısıyla h süreklidir.
τ^* en büyük olduğundan $\tau\subset\tau^*$ dır. $\tau^*\subset\tau$ olduğunu gösterelim. $B=A$, $\sigma=\tau^*$ ve $g_i=f_i$ alalım $hof_i=1_A of_i=f_i$ dir. Hipotezden, $h=1_A$ süreklidir. Yani $1_A^{-1}(\tau^*)=\tau^*\subset\tau$ olur. Dolayısıyla $\tau^*=\tau$ dır.

BÖLÜM II

Bu bölümde Herrlich anlamında topolojik kategorinin tanımı verilerek, çok bilinen önemli kategorilerin topolojik kategori oldukları gösterildi ve bunların normalleştirme durumları incelendi.

2.1 TOPOLOJİK FANKTORLAR

TANIM 2.1.1 E ve B kategorileri verilsin. $U:E \longrightarrow B$ fanktoruna topolojik fanktor ya da E'ye B kategorisi üzerinde topolojik kategori denir, eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

1- U belirli (concrete) olmalıdır.

2- U küçük demetlere sahiptir. Yani her $b \in B$ için $U^{-1}(b)$ bir cümledir. Burada $U^{-1}(b)=\{x \in E \mid U(x)=b\}$ şeklinde tanımlanır ve b üzerindeki demet olarak adlandırılır.

3- Her U-kaynağı için yani B de $g_i:b \longrightarrow U(x_i)$ ailesi için E'de $f_i:X \longrightarrow X_i$ ailesi vardır, öyle ki $U(f_i)=g_i$ dır ve eğer $U(h_i:Y \longrightarrow X_i)=kg_i$: $UY \longrightarrow b \longrightarrow U(X_i)$ ise bu takdirde $k:UY \longrightarrow UX$ in en az bir $\bar{k}:Y \longrightarrow X$ kaldırması vardır, yani $U(\bar{k})=k$ dır.

Bu son şartın anlamı her U-kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahiptir. Keyfi bir U-kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı , keyfi U-kavsağı (U-Sink) için bitiş kaldırmasına (final lift) denktir.[2] (Bitiş kaldırma, başlangıç kaldırmanın dualidir.)

TANIM 2.1.2 $U:E\longrightarrow B$ topolojik fanktorunda her $b\in B$ sabiti için $U^{-1}(b)$ tek bir yapıya sahipse bu takdirde U'ya normalleştirilmiş denir.
Burada son nesnenin alt nesneleri sabit olarak adlandırılır. (b sabittir ancak ve ancak $b\subset 1$=son eleman olmalıdır.)

UYARI 2.1.3 $U:E\longrightarrow B$ bir topolojik fanktor olsun. Her $A\in B$ için $U^{-1}(A)=\{(A,\theta)\mid U(A,\theta)=A$ ve $f:(A,\theta)\longrightarrow(A,\Phi)$dönüşümü için $U(f)=1_A\}$ şeklinde tanımlansın. $U^{-1}(A)$ E nin bir alt kategorisidir.

TEOREM 2.1.4 $U:Top\longrightarrow Sets$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

İSPAT: 1- U nun belirli olduğunu gösterelim.
$f,g:(A,\tau)\longrightarrow(B,\tau')$ sürekli iki fonksiyon ve $U(f)=U(g)$ olsun.
Örnek 1.2.2 (3) den $U(f)=f$ ve $U(g)=g$ dır. Böylece $f=g$ olur, dolayısıyla U faithfuldur.
$f:(A,\tau)\longrightarrow(B,\tau')$ sürekli, $U(f)=1_A$ ve f homeomorfizm olsun.
$U(f)=f=1_A$ olduğundan $A=B$ dir. Dolayısıyla $f:(A,\tau)\longrightarrow(A,\tau')$ olur. Bu durumda $\tau=\tau'$ olduğunu göstermeliyiz.
f sürekli olduğundan $f^{-1}(\tau')\subset\tau$ dır. $fof^{-1}(\tau')\subset f\tau$ dan $\tau'\subset f\tau$ olur. $f=I$ idi, böylece $\tau'\subset\tau$ dur.
$g:(A,\tau')\longrightarrow(A,\tau)$ olsun, g sürekli olduğundan $g^{-1}(\tau)\subset\tau'$dur.
$gog^{-1}(\tau)\subset g\tau'$ dan $\tau\subset g\tau'$ olur. $f^{-1}=g=I$ idi, öyleyse $\tau\subset\tau'$ dır.
Böylece $\tau=\tau'$ olur, yani U amnestiktir.
O halde U hem faithful, hem de amnestik olduğundan, belirlidir.

2- $U^{-1}(A)=\{ (A,\tau) | U(A,\tau)=A, \tau\subset PA$ ve $f:(A,\tau)\longrightarrow(A,\tau_1)$ sürekli ve $U(f)=1_A:A\longrightarrow A \}$ ise her $A\in$ Sets için $U^{-1}(A)$ nın bir cümle olduğunu göstereceğiz. $U^{-1}(A)$ Top'un alt kategorisidir. Öte yandan $\Phi=\{\tau | \tau$ A nın bir topolojisi$\}$ olsun. $\theta:U^{-1}(A)\longrightarrow\Phi$ alalım. $\theta(A,\tau)=\tau$ şeklinde tanımlanırsa kolayca görülürki θ birebir ve örtendir. Dolayısıyla $U^{-1}(A)\approx\Phi\subset P^2(A)$dır, yani $U^{-1}(A)$ bir cümledir.

3- Eğer $\{ f_i:A\longrightarrow U(A_i,\tau_i)=A_i,\ i\in I \}$, Sets de herhangi bir U kaynağı ve τ_* üretilen(induced) topoloji olsun. Teorem 1.5.3 ile $f_i:(A,\tau_*)\longrightarrow(A_i,\tau_i)$ verilen kaynağın başlangıç kaldırmasıdır. Yine $\{f_i:U(A_i,\tau_i)=A_i\longrightarrow A,\ i\in I \}$ Sets de herhangi bir U kavşağı(sink) ve τ^* zayıf (coinduced) topoloji olsun. Teorem 1.5.4 ile $f_i:(A_i,\tau_i)\longrightarrow(A,\tau^*)$ verilen kavşağın bitiş kaldırmasıdır. Dolayısıyla U:Top$\longrightarrow$Sets topolojik fanktordur.

Son olarak U nun normalleştirilmiş olup olmadığına bakalım. $1=\{x\}$ tek nokta cümlesi son nesne olduğundan bunun alt nesneleri $b=\phi$ ve $b=\{x\}$ dır.

$U^{-1}(\phi)=(\phi,\{\phi\})$ ve $U^{-1}(\{x\})=(\{x\},\{\phi,\{x\}\})$ dır.

Böylece tek nokta ve boş cümle üzerinde sadece bir tek topoloji olduğundan U:Top$\longrightarrow$Sets normalleştirilmiştir.

O halde topolojik kategori kavramı, topolojik uzaylar kategorisi kavramının genelleştirilmesidir.

2.2 ÖNEMLİ TOPOLOJİK KATEGORİLER

A bir cümle ve $\sigma\subset PA$ olsun. $[\sigma]=\{B |\ B\subset A$, en az bir $C\in\sigma$ vardır, öyle ki $C\subset B \}$ şeklinde tanımlanır.

TANIM 2.2.1 Eğer $[\sigma]=\sigma$ ise $\sigma\subset PA$ ya A üstünde bir yığın (stack) denir.[9] Yani σ süper cümle altında kapalıdır.

F, A üstünde boş olmayan bir yığın ise F'ye A üstünde süzgeç (filter) denir,[9] eğer $B,C \in F$ ise bu takdirde $B\cap C \in F$ dır

α yığının (süzgeç) öz yığın (süzgeç) olması için gerek ve yeter şart $\phi \notin \alpha$ dır, yani $\alpha \neq [PA] = [\phi]$ dır.

A üstünde yığın ve süzgeçlerin cümlesi sırasıyla S(A) ve F(A) ile gösterilir. Görülür ki eğer α ve $\beta \in F(A)$ ise bu takdirde $\alpha\cap\beta = \{ B \subset A | \ B\in\alpha$ ve $B\in\beta \}$ da bir süzgeçtir. Yani $[\alpha\cap\beta]=\alpha\cap\beta$ dır.

$\alpha\cap\beta \subset [\alpha\cap\beta]$ doğrudur, $[\alpha\cap\beta] \subset \alpha\cap\beta$ olduğunu gösterelim.

$B \in [\alpha\cap\beta]$ alalım, en az bir $G \in \alpha\cap\beta$ vardır öyle ki $G \subset B$ dır, $G \in \alpha\cap\beta$ olduğundan $G\in\alpha$ ve $G\in\beta$ dır. α ve β süzgeç olduğundan $B\in\alpha$ ve $B\in\beta$ dır. Böylece $B \in \alpha\cap\beta$ olur.

TANIM 2.2.2 Eğer F, A üstünde en büyük öz süzgeç ise F'ye maksimum süzgeç (ultrafilter) denir ve F aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

A nın her B alt cümlesi için ya $B\in F$, ya da $A-B \in F$ dır.

A bir cümle ve K A üstünde, $K:A \longrightarrow PS(A)$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Her bir $a\in A$ için K(a), A üstünde boş olmayan tüm yığınların cümlesidir.

TANIM 2.2.3 Eğer her $a\in A$ için aşağıdakiler sağlanıyorsa (A,K) çiftine yakınsak yığın uzayı (stack convergence space) denir.

1- $[a] \in K(a)$, $([a]=\{B \subset A| \ a\in B\}$

2 α ve β, A üstünde yığınlar ve $\alpha \subset \beta$ olsun. Eğer $\alpha\in K(a)$ ise $\beta\in K(a)$dır. (A,K) dan (B,L) ye bir dönüşüm demek $f:A \longrightarrow B$ fonksiyon demektir, öyle ki eğer $\alpha\in K(a)$ ise $f\alpha \in L(f(a))$dır, yani f süreklidir.

Burada $[f\alpha]=\{U | U \subset B$ ve en az bir $C\in\alpha$ için $U \supset f(C) \}$ şeklinde tanımlanır.

Nesneleri yakınsak yığın uzaylar ve dönüşümleri yukarıdaki gibi tanımlanan sınıfa yakınsak yığın uzaylar kategorisi denir ve SCO ile gösterilir.[9]

Şimdi SCO'nun bir kategori olduğunu gösterelim.

a) $(A,K) \longrightarrow (A,K)$ olmak üzere $1_A : A \longrightarrow A$ birim fonksiyon vardır ve süreklidir. Her bir $a \in A$ için $[a] \in K(a)$ ve $\alpha \in K(a)$ ise $1_A \alpha = \alpha \in K(a)$ dır. $f:(A,K) \longrightarrow (B,L)$ ve $g:(B,L) \longrightarrow (A,K)$ olmak üzere $1_B o f = f$ ve $g o 1_B = g$ eşitlikleri fonksiyon olarak doğrudur.

Yine $\alpha \in K(a)$ ise $f\alpha \in L(f(a))$ olduğundan f sürekli, $\alpha \in L(a)$ ise $g\alpha \in K(g(a))$ olduğundan g süreklidir.

f ve g sürekli iseler gof de süreklidir.

$f:(A,K) \longrightarrow (B,L)$ ve $g:(B,L) \longrightarrow (C,M)$ olsun. Yakınsak yığın uzaylarda süreklilik tanımından ; $\alpha \in K(a)$ ise $f\alpha \in L(f(a))$ olduğunda f sürekliydi, $\alpha \in L(a)$ ise $g\alpha \in M(g(a))$ olduğunda g sürekliydi. $g(f\alpha) \in M(g(f(a)))$ $gof(\alpha) \in M(g(f(a)))$ olarak yazılabilir ki buda gof nin sürekliliği demektir.

b) $f:(A,K) \longrightarrow (B,L)$, $g:(B,L) \longrightarrow (C,M)$, $h:(C,M) \longrightarrow (D,N)$ olmak üzere $ho(gof) = (hog)of$ dır.

$$
\begin{aligned}
\alpha \in K(a) \text{ ise } \quad [ho(gof)](\alpha) &= [ho(g(f\alpha)] && f\alpha \in L(f(a)) \\
&= [ho(gf\alpha)] && gf\alpha \in M(gf(a)) \\
&= h(gf\alpha)] && h(gf\alpha) \in N(h(gf(a))) \text{ dır.}
\end{aligned}
$$

Yani f,g,h sürekli iseler ho(gof) birleşimide süreklidir. Benzer şekilde sağ tarafda gösterilir, dolayısıyla SCO bir kategoridir.

TANIM 2.2.4 Tanım 2.2.3 de yığın yerine süzgeç kelimesi yazılırsa elde edilen kategoriye yakınsak süzgeç uzaylar (filter convergence space) kategorisi denir ve FCO ile gösterilir.[9]

TANIM 2.2.5 $\alpha, \beta \in F(A)$, $\Phi \in F(B)$ ve $f:A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

$\alpha \cap \beta = \{U \mid U \in \alpha \text{ ve } U \in \beta\}$

$\alpha U\beta=\{U \subset A \mid U \supset V\cap W,\ V\in\alpha \text{ ve } W\in\beta\ \}$

$f^{-1}(\Phi)=\{U \mid$ en az bir $C\in\Phi$ vardır öyle ki $U\supset f^{-1}(C)\ \}$

şeklinde tanımlanırlar. Görülür ki bunların her biri birer süzgeçtirler.[1]

ÖNERME 2.2.6 $\alpha,\beta \in F(A)$ ve $f:A\longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

1- $f(\alpha\cap\beta)=f(\alpha)\cap f(\beta)$

2- $f(\alpha U\beta)\supset f(\alpha)Uf(\beta)$

3- $f^{-1}f\alpha\subset\alpha$ dır.

İSPAT: 1- $U \in f(\alpha\cap\beta)$ olsun. Bu takdirde en az bir $V \in \alpha\cap\beta$ vardır, öyle ki $U\supset f(V)$ dır. Bu da $f(V) \in \alpha$, $f(V) \in \beta$ demektir. Böylece $U \in f\alpha\cap f\beta$ dır, dolayısıyla $f(\alpha\cap\beta)\subset f\alpha\cap f\beta$ dır.

$U \in [f(\alpha)\cap f(\beta)]$ alırsak bu $U\in f(\alpha)$ ve $U\in f(\beta)$ demektir. $U\supset f(V)$ ve $U\supset f(W)$ olacak şekilde $V\in\alpha$, $W\in\beta$ vardır.

$U\supset f(V)Uf(W)=f(VUW) \in \alpha\cap\beta$ olduğundan $U \in f(\alpha\cap\beta)$, yani $f(\alpha)\cap f(\beta) \subset f(\alpha\cap\beta)$ dır. O halde eşitlik gerçekleşir.

2- $U \in [f(\alpha)Uf(\beta)]$ alırsak $U\in f(\alpha)$ veya $U\in f(\beta)$ dır. Buradan $U\supset f(V)$ veya $U\supset f(W)$ olacak şekilde $V\in\alpha$, $W\in\beta$ vardır. Bundan dolayı $U\supset f(V)\cap f(W)\supset f(V\cap W) \in f(\alpha U\beta)$ olur ki $U \in f(\alpha U\beta)$ dır. O halde $f(\alpha U\beta)\supset f(\alpha)Uf(\beta)$ dır.

3- $U \in f^{-1}f\alpha$ alalım, bu takdirde en az bir $V\in f\alpha$ için $f^{-1}(V)\subset U$ olur ve en az bir $C\in\alpha$ vardır öyle ki $f(C)\subset V$ dır.

Buradan $C\subset f^{-1}f(C)\subset f^{-1}(V)$ olur ki bu da $U\in\alpha$ demektir. Böylece $f^{-1}f\alpha\subset\alpha$ dır.

TANIM 2.2.7 1- (A,K) yakınsak süzgeç uzayı olsun. Eğer $\alpha\in K(a)$ olduğunda $\alpha\cap[a] \in K(a)$ ise (A,K) ya yerel(local) yakınsak süzgeç uzayı denir.[8]

2- Eğer α ve $\beta \in K(a)$ olduğunda $\alpha \cap \beta \in K(a)$ ise (A,K) ya limit uzayı denir.[8]

3- (A,K) ya Pseudotopological uzayı denir, eğer α'yı kapsayan bütün maksimum süzgeçler K(a) da ise $\alpha \in K(a)$ da olmalıdır.[8]

4- (A,K) ya Pretopological uzayı denir, eğer K(a) daki bütün süzgeçlerin keşişimi N_a ise $N_a \in K(a)$ olmalıdır.[8]

5- Eğer $N_a \in K(a)$ ve N_a aşağıdaki şartı sağlayan bir B_a bazına sahipse (A,K) ya topolojik uzay denir.

Bu şart: $V \in B_a$ ise her $b \in V$ için $V \in B_b$ olmalıdır.[3]

Bu uzaylar FCO kategorisinin dolgun alt kategorileri olan LFCO Lim,PsT,PrT ve FTop'un nesneleridir. $LFCO \subset FCO$ olduğu kolayca görülür.

Şimdi Lim'in LFCO nun dolgun alt kategorisi olduğunu gösterelim. $(A,K) \in Lim$ olsun, $\alpha \in K(a)$ ve $[a] \in K(a)$dır. (A,K) yakınsak limit uzayı olduğundan $\alpha \cap [a] \in K(a)$, dolayısıyla $(A,K) \in LFCO$ dur.

UYARI 2.2.8 Topolojik uzayların kategorisi Top, süzgeçteki anlamda topolojik uzayların kategorisi FTop'a denktir.[3]

TANIM 2.2.9 (A,K) yakınsak yığın uzayı olsun. Eğer K sabit fonksiyon ise (A,K) ya sabit yakınsak yığın uzayı denir.

Sabit yakınsak yığın uzaylarının kategorisi ConSCO, SCO nun dolgun alt kategorisidir.

TANIM 2.2.10 Sabit yakınsak süzgeç uzaylarının kategorisi ConFCO,FCO nun dolgun alt kategorisidir. Benzer şekilde ConLFCO ConLim, ConPsT, ConPrT, ConFTop sırasıyla LFCO, Lim, PsT, PrT,ve FTop un dolgun alt kategorileridir.

TANIM 2.2.11 (A,K) local yakınsak süzgeç uzayı olsun. Her a,b

$\in A$ için $\alpha \in K(a)$ ve $\alpha \subset [b]$ ise $\alpha \in K(b)$ oluyorsa (A,K) ya simetrik local yakınsak süzgeç uzayı, [9] böyle nesnelerden oluşan kategoriye simetrik local yakınsak uzayı kategorisi denir ve R_oLFCO ile gösterilir. R_oLFCO, LFCO nun dolgun alt kategorisidir.
Benzer şekilde simetrik limit uzayı kategorisi R_oLim, R_oPsT ve R_oPrT kategorileri tanımlanır.

UYARI 2.2.12 Tanım 2.2.11 de verilen simetri kavramı topolojik uzaylardaki klasik simetri kavramının genelleştirilmesidir.
Yani X topolojik uzayı simetridir eğer her bir $x,y \in X$ çifti için $x \in \bar{y}$ ancak ve ancak $y \in \bar{x}$ dır. Burada "-" kapanışı gösterir.

İSPAT: (X,τ) topolojik uzay olsun. Bu uzayın simetri olması demek her $x,y \in X$ için $\alpha \in K(x)$ ve $\alpha \subset [y]$ ise $\alpha \in K(y)$ olmalıydı.
x'i kapsayan her U açığı için $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ olmalıdır. $B_x = \{U \mid U \ni x$ ve U açık$\}$ ve $B_y = \{U \mid U \ni y$ ve U açık$\}$ olsun.
Simetri tanımından $U \in B_x \subset N_x \subset \alpha \subset [y]$ olduğundan $U \in [y]$, yani $y \in U$ dur. Böylece x'i kapsayan her U açığı $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ şartını sağlar, bu da $x \in \bar{y}$ demektir.
Diğer taraftan $U \in B_y$ ise $U \ni y$ açıktır. Yine simetri tanımından $U \in [x]$ ise $x \in U$, böylece $U \cap \{x\} \neq \emptyset$ dir. O halde $y \in \bar{x}$ dır.

TEOREM 2.2.13 2.2.4 - 2.2.11 ve 2.2.13 de tanımlanan kategorilerin tümü normalleştirilmiş topolojik kategorilerdir.

İSPAT: E=SCO, FCO, LFCO, Lim, PsT, PrT, ConSCO, ConFCO, ConLFCO, R_oLFCO... kategorilerinden herhangi birini göstersin.
$U: E \longrightarrow Sets$ in bir fanktor olduğunu gösterelim.
$U(A,K) = A \in Sets$ ve $f:(A,K) \longrightarrow (B,L)$ için $U(f) = f: A \longrightarrow B$ olarak tanımlansın. Bu takdirde

a) $U(I_{(A,K)})=I_{U(A,K)}=I_A$

b) $U(gof)=gof$, $U(g)=g$ ve $U(f)=f$ olduklarından $U(g)oU(f)=gof$ dır.

Dolayısıyla U bir fanktordur (Unutkan fanktor).

Şimdi verilen bu kategorilerin topolojik fanktor olduklarını gösterelim.

1- (A,K), $(B,L) \in E$, $f,g:(A,K)\longrightarrow(B,L)$ ve $U(f)=U(g)$ olsun. Tanımdan $U(f)=f$ ve $U(g)=g$ olduğundan $f=g$ dır, böylece U faithfuldur.

$f:(A,K)\longrightarrow(A,L)$ alalım, öyle ki $U(f)=f=I_A:A\longrightarrow A$ ve f izomorfizm olsun. K=L olduğunu göstereceğiz.

Her $a\in A$ için $\alpha\in K(a)$ olsun, f sürekli olduğundan

$f(\alpha) \in L(f(a))$

$I_A(\alpha) \in L(a)$

$\alpha\in L(a)$ olur ki bu da her $a\in A$ için $K(a)\subset L(a)$ olduğunu gösterir.

Benzer şekilde f^{-1} sürekli olduğundan

$f^{-1}(\alpha) \in K(f^{-1}(a))$

$I(\alpha) \in K(I(a))$

$\alpha\in K(a)$ dan $L(a)\subset K(a)$, böylece K=L olur.

$f=I_{(A,K)}$, yani U nun amnestik olduğu gösterildi. Dolayısıyla U belirlidir.

2- $U^{-1}(A)=\{(A,K)|U(A,K)=A\}$ ve $\Phi=\{K|K\subset(AxPS(A))\}$ olsun. $\theta:U^{-1}(A)\longrightarrow\Phi$ da $\theta(A,K)=K$ şeklinde tanımlansın. θ'nın birebir ve örten olduğu kolayca görülür,dolayısıyla $U^{-1}(A)\approx\Phi$ ve Φ cümle olduğundan her $A \in$ Sets için $U^{-1}(A)$ bir cümledir.

3- (A_i,K_i) E nin nesneleri ve $f_i:A\longrightarrow U(A_i,K_i)=A_i$ $(i\in I)$ Sets'de U-kaynağı olsun. Her $a\in A$ için

$K(a)=\{\alpha|f_i\alpha\in K_i(f_i(a)),\ i\in I\}$ şeklinde tanımlansın; $(A,K) \in E$ olduğunu gösterelim.

E=SCO veya FCO olsun. Her $a\in A$ için $f_i[a]=[f_ia]\in K_i(f_i(a))$ dır. Çünkü $(A_i,K_i) \in E$ dır. K nın tanımından $[a] \in K(a)$ olur.

Yine $\alpha \in K(a)$ ve $\alpha \subset \beta$ olsun,

$f_i\alpha \in K_i(f_i(a))$ ve $\alpha \subset \beta$ olduğundan $f_i\alpha \subset f_i\beta$ dır. $(A_i,K_i) \in E$ olduğundan $f_i\beta \in K(f_i(a))$, K nın tanımından $\beta \in K(a)$ dır.

E=LFCO olsun, her $a \in A$ için $\alpha \in K(a)$ ise $\alpha \cap [a] \in K(a)$ olduğunu göstereceğiz, yani $(A,K) \in$ LFCO olmalıdır.

$f_i\alpha \in K_i(f_i(a))$ ve $f_i[a]=[f_ia] \in K_i(f_i(a))$ dır. $(A_i,K_i) \in$ LFCO olduğundan $f_i\alpha \cap [f_ia] \in K_i(f_i(a))$. Önerme 2.2.6 dan $f_i\alpha \cap [f_ia]=f_i(\alpha \cap [a])$, K nın tanımından $\alpha \cap [a] \in K(a)$ dır.

E=Lim ve her $a \in A$ için $\alpha, \beta \in K(a)$ olsun.

$f_i\alpha$, $f_i\beta \in K_i(f_i(a))$ ve $f_i\alpha \cap f_i\beta \in K_i(f_i(a))$ dır. $(A_i,K_i) \in$ Lim olduğundan ve Önerme 2.2.6 dan $f_i\alpha \cap f_i\beta = f_i(\alpha \cap \beta)$, K'nın tanımından $\alpha \cap \beta \in K(a)$ dır.

E=PrT olsun. Her $\alpha \in K(a)$ için $f_i(N_a)=f_i(\cap\alpha)=\cap f_i(\alpha) \in K_i(f_i(a))$, $(A_i,K_i) \in$ PrT olduğundan $N_a=\cap\alpha \in K(a)$ dır.

E=PsT de benzer şekilde yapılır.

Şimdi $f_i:(A,K)\longrightarrow(A_i,K_i)$ nin $f_i:A\longrightarrow A_i$ nin başlangıç kaldırmasi olduğunu göstereceğiz.

Her $(B,L) \in E$, $(A_i,K_i) \in E$ ve E de herhangi $h_i:(B,L)\longrightarrow(A_i,K_i)$ dönüşüm ailesi için en az bir $k:B\longrightarrow A$ fonksiyonu vardır ve $Uf_iok=Uh_i$ dır.

Göstereceğiz ki en az bir $\bar{k}:(B,L)\longrightarrow(A,K)$ vardır, öyle ki $U(\bar{k})=k$ dır. Yani her $b \in B$ ve her $\alpha \in L(b)$ için $k\alpha \in K(k(b))$ olduğunu göstermeliyiz.

$b \in B$ ve $\alpha \in L(b)$ olsun, h_i sürekli olduklarından $h_i\alpha \in K_i(h_i(b))$dır. Öte yandan $Uf_iok=Uh_i$ olduğundan $f_i(k\alpha)=Uf_i(k\alpha)=h_i\alpha \in K_i(f_i(kb))$ olur. Böylece $f_i(k\alpha) \in K_i(f_i(k(b))$ ve K nın tanımından $k(\alpha) \in K(k(b))$ dır.

Şimdi $f_i:(A,K)\longrightarrow(A_i,K_i)$ nin $f_i:A\longrightarrow A_i$ nin başlangıç kaldırması olduğunu göstereceğiz. (E=R_0LFCO da)

E= SCO, FCO, LFCO için verilen kaynağın başlangıç kaldırmasının olduğunu gösterdiğimize göre bu kaynağın R_o= simetrik şartına sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Yani her $a,b \in A$ için $\alpha \in K(a)$ ve $\alpha \subset [b]$ ise $f_i\alpha \in K_i(f_i(a))$ ve $f_i\alpha \subset [f_ib]$ dır.

(A_i,K_i) simetri şartını sağladığına göre $f_i\alpha \in K_i(f_i(b))$ dır. Böylece K nın tanımıyla $\alpha \in K(b)$ olur.

Son olarak E=ConSCO, ConFCO, ConLFCO, ConLim, ConPsT den birini göstersin. Benzer şekilde $K=\{\alpha | f_i\alpha \in K_i,\ i\in I\}$ şeklinde tanımlanan K nın $f_i : A \longrightarrow U(A_i,K_i)=A_i$ ile verilen U-kaynağının başlangıç kaldırması olduğu gösterilebilir.

Dolayısiyla $U:E \longrightarrow Sets$ bir topolojik fanktordur.

$U:E \longrightarrow Sets$'in normalleştirilmiş olduğunu gösterelim.

$U^{-1}(\phi)=(\phi,\phi)=(\phi,K)$ Yani $K=\phi$ dur.

$U^{-1}(\{x\})=(\{x\},K)$ $K(x)=\{[x],[\phi]\}$ dır.

Dolayısıyla ϕ ve tek nokta cümlesi üzerinde yalniz tek bir yapı vardir. Bundan dolayı $U:E \longrightarrow Sets$ normalleştirilmiştir.

Şimdide bu kategorilerin bitiş kaldırmalarını(final lift) karakterize edelim.

$f_i:(A_i,K_i) \longrightarrow (A,K)$ $i\in I$, epi-kavşağı SCO, FCO ve LFCO da bitiş kaldırmadır ancak ve ancak her $a\in A$ ve $\alpha \in K(a)$ için $\alpha \supset f_k\beta$ olacak sekilde en az bir $a_k \in A_k$ ve β vardir öyle ki $f_k(a_k)=a$ ve $\beta \in K_k(a_k)$. [8]

$f_i:(A_i,K_i) \longrightarrow (A,K)$ $(i\in I)$ epi kavşağı Lim de bitiş kaldırmadır ancak ve ancak her $a\in A$ ve $\alpha \in K(a)$ için

$\alpha \supset f_{i(1)}(\sigma_1) \cap f_{i(2)}(\sigma_2) \ldots \cap f_{i(n)}(\sigma_n)$ olacak şekilde $\sigma_1,\sigma_2,..\sigma_n$ süzgeçlerinin bazı sonlu cümlesi ve $a_k \in A_{i(k)}$ vardir öyle ki $\sigma_k \in K_{i(k)}(a_k)$ ve $f_{i(k)}(a_k)=a$ dır, $(k=1,2,\ldots n)$ [8].

$f_i:(A_i,K_i) \longrightarrow (A,K)$ $(i\in I)$ epi-kavşağı PsT de bitiş kaldırmadır ancak ve ancak her bir $a\in A$ ve A üstünde her α maksimum süzgeci için $\alpha \in K(a)$ ise en az bir σ maksimum süzgeci $K_i(a_i)$ de vardır öyle ki $\alpha=f_i(\sigma)$ ve $f_i(a_i)=a$ dır.[8]

$f_i:(A_i,K_i)\longrightarrow(A,K)$ epi-kavşağı ConSCO ve ConFCO da bitiş kaldırmadır ancak ve ancak $\alpha\in K$ için en az bir $k\in I$ ve $\beta\in K_k$ vardır öyle ki $f_k(\beta)\subset\alpha$ dır $(k=1,2,\dots n)$

TANIM 2.2.14 A bir cümle, $F\subset P(A)$ olsun. (A,F) çiftine aile uzayı denir ve $(A,F)\longrightarrow(A_1,F_1)$ dönüşümü A'dan A_1'e bir f fonksiyonudur öyle ki $B\in F$ ise $f(B)\in F_1$ dır.

Böyle uzaylardan oluşan kategoriye ailelerin kategorisi denir ve Fam ile gösterilir.

TANIM 2.2.15 A bir cümle ve F A'nın alt cümlelerin bir ailesi olsun. $(F\subset PA)$ Eğer F sonlu birleşim altında kapalı ($U_i\in F$ ise $\bigcup_{i=1}^{n} U_i\in F$) ve A'nın bütün boş olmayan sonlu alt cümlelerini içeriyorsa (A,F) çiftine Prebornolojik uzay denir. $F\neq\phi$ ve F kalıtsal (eğer $U\in F$ ve $V\subset U$ ise $V\in F$) ise bu uzaya Bornolojik uzay denir.[5]

$(A,F)\longrightarrow(A_1,F_1)$ dönüşümü A'dan A_1'e bir fonksiyondur öyle ki eğer $C\in F$ ise $f(C)\in F_1$ dır.

Bunlar birer kategori oluştururlar ve sırasıyla PBorn ve Born şeklinde gösterilirler.

$(A,F)\in$ PBorn ve $\phi\notin F$ olsun. Böyle uzaylardan oluşan kategori PBorn* ile gösterilir. [5] PBorn* PBorn'nun dolgun alt kategorisidir.

TEOREM 2.2.16 E=Fam, PBorn, Born veya PBorn* kategorilerinden herhangi birini göstersin. $U:E\longrightarrow$ Sets topolojik fanktordur.

İSPAT: $U:E\longrightarrow$ Sets $U(A,F)=A$ şeklinde tanımlansın, Bu bir fanktordur. $U(A,F)=A\in$ Sets ve $f:(A,F)\longrightarrow(B,L)$ dönüşümü için

$U(f)=f:A\longrightarrow B$ olarak tanımlansın.

a) $U(I_{(A,F)})=I_{U(A,F)}=I_A$

b) $U(gof)=gof$, $U(g)=g$ ve $U(f)=f$ olduklarından $U(g)oU(f)=gof$, dolayısıyla U bir fanktordur.

1- U'nun belirli olduğu kolayca görülebilir.

2- $\Phi=\{ F|\ F\subset PA \}$ olsun, Φ bir cümledir. Çünkü P^2A nın alt cümlesidir. $\theta:U^{-1}(A)\longrightarrow\Phi$ fonksiyonu $\theta(A,F)=F$ şeklinde tanımlansın. Aşikar olarak θ birebirdir, dolayısıyla $U^{-1}(A)\subset\Phi$ dır. Fam'da θ hem birebir hem de örtendir, o halde $U^{-1}(A)=P^2A$ dır. Bu da $U^{-1}(A)$nın bir cümle olduğunu gösterir.

3- (A_i,F_i) Fam, PBorn, Born, PBorn* uzayları olsun.
$f_i:A\longrightarrow U(A_i,F_i)=A_i$ $(i\in I)$ U-kaynağı verilsin ve
$F=\{ B|B\subset A$, her $i\in I$ için $f_iB\in F_i \}$ şeklinde tanımlansın.
$(A,F)\longrightarrow(A_i,F_i)$ nin f'nin bir başlangıç kaldırması olduğunu göstereceğiz. Bundan önce;

E=Fam olsun, $(A,F)\in E$ olduğunu gösterelim. $B\in F$ ise $f_i(B)\in F_i$ dır, çünkü $(A_i,F_i)\in$ Fam olup F nin tanımından $B\in F\subset P(A)$ dır, yani $(A,F)\in$ Fam dır.

E=PBorn olsun, $U_i\in F$ ise $(\bigcup_{i=1}^{n} f_iU_i)\in F_i$ dır, çünkü $(A_i,F_i)\in$ PBorn, fakat F nin tanımından $(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)\in F$ dır.

$C\subset A$ ve C sonlu olsun, f_iC sonludur. Dolayısıyla $f_iC\in F_i$ F'nin tanımından $C\in F$ dır.

E=Born olsun. $U\in F$ ve $V\subset U$ olsun $(A_i,F_i)\in$ Born ve $f_i(V)\subset f_i(U)\in F_i$ olduğundan $f_i(V)\in F_i$ olup F'nin tanımından $V\in F$ dır.

E=PBorn* olsun. Eğer $\phi\in F$ ise $f_i(\phi)=\phi\in F_i$ dır. Bu da çelişkidir, çünkü $(A_i,F_i)\in$ PBorn* dur.

Böylece $\phi\notin F$, yani $(A,F)\in$ PBorn* olur.

Şimdi, her $B\in F_1$ için h_i ler sürekli olduklarından $h_iB\in F_i$, $Uf_iok=Uh_i$ olduğundan $h_iB=Uf_iok(B)=f_i(kB)\in F_i$ (her $i\in I$)

F'nin tanımından $kB\in F$ olur, dolayısıyla $U:E\longrightarrow Sets$ topolojik fanktordur.

$U:E\longrightarrow Sets$ nin bitiş kaldırmalarını karakterize edelim.

1- $f_i:(A_i,F_i)\longrightarrow(A,F)$ $(i\in I)$ kavşağı Born'da bitiş kaldırmadır ancak ve ancak $F=\{B|\,B\subset A$ ve $B\subset\bigcup_{k=1}^{n} f_{i(k)}(M_k),\ M_k\in B_{i(k)}\}$ dır.

2- f_i: $(A_i,F_i)\longrightarrow(A,F)$ $(i\in I)$ kavşağı Fam'da bitiş kaldırmadır ancak ve ancak $F=\{\ f_{i(k)}B\ |\ B\in F_i\ \}$ dır.

UYARI 2.2.17 PBorn* ve Born normalleştirilmiş, PBorn ve Fam normalleştirilmemiştir.

$U:E\longrightarrow Sets$ topolojik fanktorunda E=PBorn* olsun.

$U^{-1}(\phi)$ da $F=\phi$ dır, çünkü $\phi\notin F$ idi.

$U^{-1}(\{x\})=\{(\{x\},F)|\ F-\{\phi\}$ ve $F\subset P\{x\}\ \}$da $F=\{x\}$ olmak zorundadır, dolayısıyla PBorn* normalleştirilmiştir.

E=Born olsun. $U^{-1}(\phi)=\{(\phi,F)|\ F\subset P(\phi)\ \}$ da $F=\{\ \phi,\{\phi\}\ \}$, $U^{-1}(\{x\})$ de $F=\{x\}$ kalıtsal olmadığından alınamaz. $F=\{\ \phi,\{x\}\ \}$ tek yapı olduğundan normalleştirilmiştir.

E=Fam ise $U^{-1}(\phi)$ da $F=\phi$ veya $F=\{\phi\}$ olabilir.

Bir tek nokta cümlesi $\{x\}$ üzerinde $F=\phi$, $\{\phi\}$, $\{x\}$, $\{\phi,\{x\}\}$ gibi dört farklı yapı olduğundan normalleştirilmemiştir.

E=PBorn'da $U^{-1}(\phi)$ da $F=\phi$, $\{\phi\}$, $\{\phi,\{\phi\}\}$ gibi üç farklı yapı ve $U^{-1}(\{x\})$ de $F=\{x\}$ veya $\{\phi,\{x\}\}$ gibi iki farklı yapı olduğundan normalleştirilmemiştir.

TANIM 2.2.18 A bir cümle ve R A cümlesi üzerinde bir bağın- olsun. Bu takdirde (A,R) ye bağıntı uzayı denir ve $(A,R)\longrightarrow(A_1,R_1)$ dönüşümü A'dan A_1'e bir f fonksiyondur öyle ki aRb ise $f(a)R_1f(b)$ dır. Böyle uzaylardan oluşan kategoriye bağıntı uzaylar kategorisi denir ve Rel ile gösterilir.

TANIM 2.2.19 Yansıma özelliğini sağlayan bağıntı uzaylarının kategorisi RRel ile gösterilir. Yani $(A,R) \in$ RRel ise R yansıma özelliğini sağlamak zorundadır. RRel, Rel'in dolgun alt kategorisidir.

TANIM 2.2.20 Preorder uzaylar kategorisi yansıma ve geçişme özelliklerini sağlayan uzayların kategorisidir ve Prord ile gösterilir. Prord, RRel'in dolgun alt kategorisidir.[5]

UYARI 2.2.21 1- Rel bir kategoridir.
2- $U:Rel \longrightarrow Sets$ bir fanktordur.

1- Nesneler: $(A,R),(B,S)\ldots$ $R \subseteq A^2$ $S \subseteq B^2$
Dönüşümler : $Hom((A,R)(B,S))=\{ f:A \longrightarrow B$ fonksiyon her $a,b \in A$ için aRb ise $f(a)Sf(b) \}$
Bileşke olarakda $Hom(A,B)xHom(B,C) \longrightarrow Hom(A,C)$ şeklinde fonksiyonların bileşkesini alalım.
a) $(A,R) \longrightarrow (A,R)$ olmak üzere $1_A:A \longrightarrow A$ birim fonksiyon vardır.
Her $a,b \in R$ için aRb ise $1_A(a)\ R\ 1_A(b)$

$$I(a)\ R\ I(b)$$

$$a\ R\ b$$

Dolayısıyla 1_A süreklidir. $f:(A,R) \longrightarrow (B,S)$ ve $g:(B,S) \longrightarrow (A,R)$ ise $1_B o f=f$, $g o 1_B=g$ olduklarını biliyoruz.
b) Yine fonksiyonlarda $ho(gof)=(hog)of$ sağlandığı aşikardır.
Her $a,b \in A$ için aRb ise $f(a)Sf(b)$ (f sürekli)

$g(f(a))S_1 g(f(b))$ (g sürekli)

$h(gf(a))S_2 h(gf(b))$ (h sürekli)

$ho(gof)S_2 ho(gof)b$ $ho(gof)$ süreklidir

Benzer şekilde $(hog)of$ ninde sürekli olduğu gösterilir. Dolayısıyla Rel bir kategoridir.

2- a) $U(1_{(A,R)})=1_{U(A,R)}=1_A$ olduğu aşikardır.

b) $U(gof)=gof$, $U(g)=g$ ve $U(f)=f$ olduklarından $U(g)oU(f)=gof$, dolayısıyla U bir fanktordur.

TEOREM 2.2.22 E=Rel, RRel veya Prord'dan herhangi biri olmak üzere $U:E \longrightarrow Sets$ topolojik fanktordur.

1- U'nun belirli olduğunu gösterelim.

$(A,R),(B,S) \in E$ $f,g:(A,R) \longrightarrow (B,S)$ ve $U(f)=U(g)$ olsun, tanımdan $U(f)=f$ ve $U(g)=g$ olduğundan $f=g$ dır. Yani U faithfuldur.

$f:(A,R) \longrightarrow (A,S)$ alalım öyle ki $U(f)=f=I_A:A \longrightarrow A$ ve f izomorfizm olsun, $R=S$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $a,b \in A$ için aRb ise f sürekli olduğundan $f(a)Sf(b)$ dır.

$U(f)=f=I$ olduğundan $I_A(a)SI_A(b)$ den aSb olur ki bu da $R \subset S$ demektir.

$f^{-1}:(B,S) \longrightarrow (A,R)$ olsun, aSb ise $U(f^{-1})=f^{-1}=I$ sürekli olduğundan $f^{-1}(a)Rf^{-1}(b)$ den $I(a)RI(b)$, buradan aRb olur. Bu da $S \subset R$ demektir. O halde $R=S$ dır, yani U amnestiktir.

Dolayısıyla U belirlidir.

2- E=Rel ise her $A \in Rel$ için

$U^{-1}(A)=\{(A,R) \mid U(A,R)=A,\ R \subset A^2\} \approx PA^2$ dır.

E=RRel veya Prord ise her $A \in E$ için $U^{-1}(A) \subset PA^2$ dır. PA^2 bir cümle olduğundan her iki durumdada $U^{-1}(A)$ bir cümledir.

3- $(A_i,R_i) \in E$ ve $f_i:A \longrightarrow U(A_i,R_i)=A_i$ $(i \in I)$ U-kaynağı verilsin.

Her $a,b \in A$ için $R=\{(a,b) \mid f_i(a)R_if_i(b)$ her $i \in I\}$ şeklinde tanımlansın.

E=Rel olsun, her $a,b \in A$ için aRb ise $f_i(a)Rf_i(b)$ dır.

Çünkü $(A_i,R_i) \in Rel$, R'nin tanımından aRb dır, yani $(A,R) \in Rel$ dir.

E= RRel olsun, her $a \in A$ için aRa olduğunu göstereceğiz. Her i için $f_ia \in A_i$, $(A_i,R_i) \in RRel$ olduğundan $f_iaR_if_ia$ R'nin tanımından aRa dır.

E=Prord olsun, R için sadece geçişme özelliğini göstermeliyiz. Yani eğer her $a,b,c \in A$ için aRb ve bRc ise aRc dır. Buradan $f_i a\ R_i\ f_i b$ ve $f_i b\ R_i\ f_i c$ olup R_i geçişme özelliğini sağladığından $f_i a\ R_i\ f_i c$ dır, R'nin tanımından aRc olur.

$f_i:(A,R) \longrightarrow (A_i,R_i)$ $f_i:A \longrightarrow A_i$ nin başlangıç kaldırmasıdır.

Her $(B,S) \in E$, $(A_i,R_i) \in E$ ve E'de $h_i:(B,S) \longrightarrow (A_i,R_i)$ dönüşümler ailesi için en az bir $g:B \longrightarrow A$ fonksiyonu vardır öyle ki $Uf_i o g = Uh_i$ dır. g nin sürekli, yani her $a,b \in B$ için aSb ise g(a) R g(b) olduğunu göstereceğiz.

Her $a,b \in B$ için aSb ise h_i ler sürekli olduklarından $h_i(a)\ R_i\ h_i(b)$, $f_i o g = h_i$ olduğundan $f_i g(a)\ R_i\ f_i g(b)$, R'nin tanımından dolayı g(a) R g(b) dır.

Böylece $U:E \longrightarrow Sets$ topolojik fanktordur.

UYARI 2.2.23 Rel normalleştirilmemiştir. Çünkü tek nokta cümlesi iki yapıya sahiptir. Bunlar boş bağıntı ve yansıma bağıntısıdır. Bununla birlikte RRel ve Prord normalleştirilmiştir. Çünkü boş cümle ve tek nokta cümlesi üzerinde sadece bir tek bağıntı vardır. Açık olarak:

E=Rel olsun. $U^{-1}(\phi)$ da $R=\phi$, $U^{-1}(\{x\})$ de $R=\phi$ veya $R=\{x\}^2$ gibi iki bağıntı olduğundan normalleştirilmemiştir.

E=RRel veya Prord ise $U^{-1}(\phi)$ da $R=\phi$ tek bağıntı vardır, $U^{-1}(\{x\})$ de $R \neq \phi$, yani $R=\{x\}^2$ olduğundan yansıma ve geçişme özelliklerini sağlar, dolayısıyla $U:E \longrightarrow Sets$ normalleştirilmiştir.

UYARI 2.2.24 1- $f_i:(A_i,R_i) \longrightarrow (A,R)$ kavşağı Rel ya da RRel'de bitiş kaldırmadır ancak ve ancak her bir $a,b \in A_i$ çifti için $aRb \Longleftrightarrow$ en az bir $k \in I$ ve $c,d \in A_k$ çifti vardır öyle ki

$f_k(d)=b$, $f_k(c)=a$ ve cRd dır.

2- $f_i:(A_i,R_i)\longrightarrow(A,R)$ kavşağı Prord'da bitiş kaldırmadır ancak ve ancak her $a,b\in A$ için $a=a_oRa_1Ra_2R...Ra_n=b$ sonlu zinciri vardır, öyle ki her bir $k=0,1,..(n-1)$ için c_k, $c_k'\in A_{i(k)}$ vardır, $f_{i(k)}(c_k)=a_k$, $f_{i(k)}(c_k')=a_{k+1}$ ve $c_kR_{i(k)}c_k'$dır.[8]

TANIM 2.2.25 A bir cümle ve B A'nın alt cümlesi olsun. $(A,B)\longrightarrow(C,D)$ dönüşümü $f:A\longrightarrow C$ bir fonksiyondur öyle ki $f(B)\subset D$ dir. Bu şekilde tanımlanan (A,B) çiftlerinden oluşan kategoriye çiftler kategorisi denir ve CP ile gösterilir.

TEOREM 2.2.26 $U:CP\longrightarrow Sets$ topolojik fanktordur.

İSPAT: 1- U'nun bir faithful fanktor olduğu kolayca görülebilir. $f:(A,B)\longrightarrow(A,D)$ alalım, öyle ki $U(f)=f:I_A:A\longrightarrow A$ ve f izomorfizm olsun. B=D olduğunu göstermeliyiz.

$f(B)=I(B)=B\subset D$ ve $f^{-1}(D)=I(D)=D\subset B$ olduğundan B=D dır, yani U amnestikdir. O halde U belirlidir.

2- $U^{-1}(A)=\{(A,B)|U(A,B)=A,\ B\subset A\}$ ve $P(A)=\{B|B\subset A\}$ olduğundan $U^{-1}=P(A)$ bir cümledir.

3- $(A_i,B_i)\in CP$ olsun ve $f_i:A\longrightarrow U(A_i,B_i)=A_i$ $(i\in I)$ U-kaynağı verilsin. $B=\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(B_i)$ şeklinde tanımlanırsa $(A,B)\in CP$ olur, çünkü $f_i^{-1}(B_i)\subset A$ ve $B\subset f_i^{-1}(B_i)\subset A$ dır.(Her $i\in I$ için)

$(C,D)\in CP,(A_i,B_i)\in CP$ ve yine CP'de $h_i:(C,D)\longrightarrow(A_i,B_i)$ dönüşümler ailesi için en az bir $k:C\longrightarrow A$ fonksiyonu vardır öyleki $f_iok=h_i$ dır, yani k'nın sürekli olduğunu göstereceğiz.

h_i'ler sürekli olduklarından $h_iD\subset B_i$ dır. $B_i\supset h_iD$ ise

$f_i^{-1}(B_i)\supset f_i^{-1}h_iD=f_i^{-1}f_ikD\supset kD$ dır. $(f_iok=h_i)$

Çünkü $f^{-1}fB\supset B$ idi, buradan $kD\subset f_i^{-1}(B_i)$ yazılabilir. O halde her $i\in I$ için $kD\subset\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(B_i)=B$ dır.

Sonuç olarak $U:CP \longrightarrow Sets$ topolojik fanktordur.

UYARI 2.2.27 $U:CP \longrightarrow Sets$ normalleştirilmemiştir. Çünkü tek nokta cümlesi üzerinde iki farklı yapı vardır, bunlar ϕ ve $\{x\}$ dır.

UYARI 2.2.28 $f_i:(A_i,B_i) \longrightarrow (A,B)$ kavşağı CP'de bitiş kaldırmadır ancak ve ancak $B= \bigcup_{i\in I} f_i(B_i)$ dır.

TANIM 2.2.29 A bir cümle ve S A üstünde bir fonksiyon olsun. Her bir $a\in A$ için $\bar{a}=\{a_n=a\}$ sabit dizi olmak üzere $\bar{a}\in S(a)$ dır. $(A,S) \longrightarrow (A_1,S_1)$ dönüşümü $f:A \longrightarrow A_1$ bir fonksiyondur öyle ki $\{a_n\} \in S(a)$ ise $\{f(a_n)\} \in S_1(f(a))$ dır. Bu şekilde tanımlanan (A,S) çiftlerinden oluşan kategoriye dizi uzaylarının kategorisi denir Seg ile gösterilir.

TEOREM 2.2.30 $U:Seg \longrightarrow Sets$ topolojik fanktordur.

İSPAT: U'nun fanktor olduğu kolayca görülebilir.

1- $(A,S), (A_1,S_1) \in E$ $f,g:(A,S) \longrightarrow (A_1,S_1)$ ve $U(f)=U(g)$ olsun Tanımdan $U(f)=f$ ve $U(g)=g$ olduğundan $f=g$, yani U faithfuldur. $f:(A,S) \longrightarrow (A,S_1)$ alalım öyle ki $U(f)=f=I_A:A \longrightarrow A$ ve f izomorfizm olsun. $S=S_1$ olduğunu göstereceğiz.

$\{a_n\} \in S(a)$ ise $\{f(a_n)\} \in S_1\{f(a)\}$, $f=I$ olduğundan

$\{I(a_n)\} \in S_1\{I(a)\}$ yani $\{a_n\} \in S_1\{a\}$ dır. Bu da $S \subset S_1$ demektir.

$\{a_n\} \in S_1(a)$ ise $\{f^{-1}(a_n)\} \in S\{f^{-1}(a)\}$ dır. $f^{-1}=I$ olduğundan aynı şekilde $\{a_n\} \in S\{a\}$ dır. Bu da $S_1 \subset S$ olduğunu gösterir ki $S=S_1$ dır, yani U amnestikdir. Böylece U belirlidir.

2- $U^{-1}(A)=\{(A,S) \mid U(A,S)=A,\ S:A \longrightarrow P(A^N)\}$

Her $A \in Seg$ için $U^{-1}(A) \subset P(AxP(A^N))$ dır. $P(AxP(A^N))$ bir cümle olduğundan bunun alt cümlesi $U^{-1}(A)$ da bir cümledir.

3- $(A_i,S_i) \in$ Seg ve $f_i:A\longrightarrow U(A_i,S_i)=A_i$ $(i\in I)$ Sets'de U-kaynağı ise bu takdirde her $a\in A$ için

$S(a)=\{\{a_n\} \mid \{f_i(a_n)\} \in S_i(f_i(a)),\ i\in I\}$ şeklinde tanımlansın.

Önce $(A,S) \in$ Seg olduğunu gösterelim. Her $a\in A$ için $\bar{a}\in S(a)$ olduğunu göstermeliyiz. $(A_i,S_i) \in$ Seg olduğundan

$f_i\bar{a}=\overline{f_i a} \in S_i(f_i(a))$, S'nin tanımından $\bar{a} \in S(a)$ olur.

Dolayısıyla $(A,S) \in$ Seg dır.

Şimdi $f_i:(A,S)\longrightarrow(A_i,S_i)$ nin $f_i:A\longrightarrow A_i$ in başlangıç kaldırması oldugunu göstereceğiz.

Her $(B,K) \in$ Seg, $(A_i,S_i) \in$ Seg ve E'de $h_i:(B,K)\longrightarrow(A_i,S_i)$ dönüşümler ailesi için en az bir $k:B\longrightarrow A$ fonksiyonu vardır öyle ki $Uf_i o k=Uh_i$ dır.

Her $\{a_n\} \in K(a)$ için $\{k(a_n)\} \in S(k(a))$ olduğu gösterilmelidir.

$\{a_n\} \in K(a)$ olsun. $h_i\{a_n\}=\{h_i(a_n)\} \in S_i(h_i(a))$ dır.

$h_i=f_i o k$ olduğundan $\{h_i(a_n)\}=\{f_i k(a_n)\} \in S_i(f_i k(a))$, yani k süreklidir. Böylece $U:$Seg$\longrightarrow$Sets topolojik fanktordur.

UYARI 2.2.31 $U:$Seg$\longrightarrow$Sets normalleştirilmiştir. Çünkü tek nokta üzerinde sadece bir yapı vardır. Yani tek nokta üzerinde sabit dizi ve boş cümle üzerinde bir yapı vardır.

$U^{-1}(\phi)=\{(\phi,S) \mid S:\phi \longrightarrow P(\phi^N)=\phi\}$ de $S=\phi$ olur.

$U^{-1}(\{x\})=\{(\{x\},S) \mid S:\{x\}\longrightarrow P\{x\}^N=P(\bar{x})\}$ de ($\bar{x}$=sabit dizi)

$f:N\longrightarrow\{x\}$ e sadece bir fonksiyon vardır. $\bar{x} \in S(x)$ olduğundan $S(x)=\{\bar{x}\}$ olmalıdır. Böylece $\{x\}$ üzerinde tek yapı vardır, dolayısıyla U normalleştirilmiştir.

UYARI 2.2.32 $f_i:(A_i,S_i)\longrightarrow(A,S)$ kavşağı Seg'de bitiş kaldırmadır ancak ve ancak her $a\in A$ için $\{a_n\} \in S(a)$ ise $b_k \in A_k$ ve $\{b_{k(n)}\} \in S_k(b_k)$ vardır öyle ki $f_{i(k)}(b_k)=a$ ve

$\{a_n=f_{i(k)}(b_{k(n)})\}$ dır.
Şimdiye kadar bazı kategorilerin topolojik fanktor olduklarını gösterdik, şimdi de topolojik fanktor olmayan bir kategoriyi vereceğiz.

TANIM 2.2.33 Tüm sıralama bağıntı özelliklerini sağlayan uzayların kategorisine Poset denir. Yani $(A,R) \in$ Poset ise R yansıma, ters simetrik ve geçişme özelliklerini sağlar.

TEOREM 2.2.34 $U:\text{Poset}\longrightarrow\text{Sets}$ topolojik fanktor değildir.

İSPAT: U'nun belirli olduğu ve $U^{-1}(A)\subset PA^2$ küçük demetlere sahip olduğu Teorem 2.2.22 de olduğu gibi gösterilebilir.
U'nun başlangıç kaldırmasının olup olmadığını araştıralım.
$(A_i,R_i) \in$ Poset ve $\{f_i:A\longrightarrow U(A_i,R_i)=A_i,\ i\in I\}$ U-kaynağı verilsin. $R=\{(a,b)\in A^2 \mid f_ia\ R_i\ f_ib$ her $i\in I\}$ şeklinde tanımlansın.
$(A,R) \in$ Poset midir.? Teorem 2.2.22 nin ispatında $(A,R) \in$ Prord idi. Şimdi R'nin ters simetrik özelliğini sağlayıp sağlamadıgını görelim.
Her $a,b \in A$ için aRb ve bRa olsun. $f_ia\ R_i\ f_ib$, $f_ib\ R_i\ f_ia$ ve $(A_i,R_i) \in$ Poset olduğundan $f_ia=f_ib$ dır.$(i\in I)$
Eğer f_i ler birebir ise $a=b$ olur, aksi halde sağlanmaz. Dolayısıyla genel olarak R ters simetrik özelliğini sağlamaz. Bu da $U:\text{Poset}\longrightarrow\text{Sets}$ in topolojik fanktor olmadığını gösterir.

BÖLÜM III

Bu bölümde ikinci bölümde incelenen topolojik kategorilerin diskre ve indiskre yapıları karakterize edildi ve bazı genel teoremler ispatlandı.

3.1 DISKRE VE INDISKRE YAPILAR

TANIM 3.1.1 1- $U : E \longrightarrow B$ topolojik fanktoru bir $D:B \longrightarrow E$ sol adjointine sahiptir ki bu sol adjointe diskre fanktoru denir[6] Yâni $e=DUe$ nesnesi, E de diskre nesne olarak adlandırılır.
2- $U:E \longrightarrow B$ topolojik fanktoru bir $D^*:B \longrightarrow E$ sağ adjointine sahiptir ki bu sağ adjointe indiskre fanktoru denir.[6]
Yani $d=D^*Ud$ nesnesi, E de indiskre nesne olarak adlandırılır.

TEOREM 3.1.2 1- E topolojik kategori olsun, $e \in E$ nesnesi diskredir. Yani $e=DUe$ olması için gerek ve yeter şart her $c \in E$ için her $Ue \longrightarrow Uc$ dönüşümünün, $e \longrightarrow c$ dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.
2- $d \in E$ indiskre, yani $d=D^*Ud$ olması için gerek ve yeter şart her $c \in E$ için her $Uc \longrightarrow Ud$ dönüşümünün, $c \longrightarrow d$ dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.

İSPAT: 1- $\Rightarrow$ e diskre ve her $c \in E$ icin $f: Ue \longrightarrow Uc$ olsun. En az bir $\bar{k}: e \longrightarrow c$ dönüşümünün var olduğunu ve $U(\bar{k}) = f$ olduğunu göstereceğiz.

U topolojik fanktor olduğundan $\bar{f}: \bar{e} \longrightarrow c$, f nin başlangıc kaldırması olsun. Burada $U\bar{e} = Ue$ ve e diskre olduğu için tanım gereği $e \leq \bar{e}$ dır, yani $h: e \longrightarrow \bar{e}$ bir dönüşüm vardır öyle ki $U(h) = \dot{I}d: Ue \longrightarrow U\bar{e} = Ue$ dır. $\bar{k} = \bar{f}oh$ olsun, $U(\bar{k}) = U(\bar{f}oh) = U(\bar{f})oU(h) = foI = f$ olur.

$\Leftarrow$ Her $c \in E$ için her $Ue \longrightarrow Uc$ dönüşümü $e \longrightarrow c$ dönüşümüne kaldırılabilsin. e'nin diskre olduğunu gösterelim.

Özel olarak $Ue = Uc$ ve $\dot{I}d: Ue \longrightarrow Uc$ alalım, hipotezden $\bar{k}: e \longrightarrow c$ ye bir dönüşüm vardır öyle ki $U(\bar{k}) = \dot{I}d$ dır. Bu demet üzerinde alınan her c nesnesi için geçerli olduğundan, e bu demetde en küçük nesnedir. Bu da e'nin diskre olduğunu gösterir.

2- $\Rightarrow$ d indiskre ve her $c \in E$ için $f: Uc \longrightarrow Ud$ olsun, U topolojik fanktor olduğundan $\bar{f}: c \longrightarrow \bar{d}$ f'nin bitiş kaldırması olsun.

Burada $U(d) = U(\bar{d})$ ve d indiskre olduğu için $\bar{d} \leq d$ dır, yani $h: \bar{d} \longrightarrow d$ ye bir dönüşüm vardır, öyle ki $Uh = \dot{I}d: U\bar{d} = Ud \longrightarrow Ud$ dır.

$\bar{k} = ho\bar{f}$ olsun, $U(\bar{k}) = U(ho\bar{f}) = U(h)oU(\bar{f}) = Iof = f$ dolayısıyla $U(\bar{k}) = f$ dır.

$\Leftarrow$ Her $c \in E$ için her $Uc \longrightarrow Ud$ dönüşümü, $c \longrightarrow d$ dönüşümüne kaldırılabilsin. d'nin indiskre olduğunu gösterelim.

Özel olarak $Ud = Uc$ ve $\dot{I}d: Uc \rightarrow Ud$ alalım, hipotezden $\bar{k}: c \longrightarrow d$ dönüşümü vardır, öyle ki $U(\bar{k}) = \dot{I}d$ dır. Bu dönüşüm her c için geçerli olduğundan d bu demetde en büyük nesnedir. Bu da d'nin en büyük olduğunu gösterir, yani d indiskre nesnedir.

Görülürki $e \in E$ diskre nesne kavramı, topolojik uzayların kategorisi Top'daki e diskre topolojik uzayı kavramının genelleştirilmesidir. Çünkü tanım cümlesi diskre uzayı olan her fonksiyon süreklidir.

Önceki bölümde verilen topolojik kategorilerin diskre ve indiskre yapılarını karakterize etmek için Teorem 3.1.2 yi kullanacağız.

3.1.3 1- $(A,K) \in SCO$ olsun. (A,K) nın diskre uzayı olması için gerek ve yeter şart her $a \in A$ için $K(a)=\{\alpha | \alpha \supset [a]\}$ dır.

(A,K) nın indiskre uzayı olması için gerek ve yeter şart her $b \in B$ için $K(b)=S(A)$ olmalıdır.

2- $(A,K) \in ConSCO$ olsun, (A,K) nın diskre uzayı olması için gerek ve yeter şart $K=\{\alpha | \alpha \supset [b]$, bazı $b \in A\}$ olmalıdır.

(A,K) nın indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart $K=S(A)$ olmalıdır.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak;

1- $e=(A,K) \in SCO$, $c=(B,L) \in SCO$ olsun. Eğer $f:A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ise bu takdirde f SCO'da $(A,K) \longrightarrow (B,L)$ dönüşümüne kaldırılabilir, yani $\alpha \in K(a)$ ise $f\alpha \in L(f(a))$ olduğu gösterilmelidir.
$\alpha \in K(a)$ ise $\alpha \supset [a]$ idi. $f\alpha \supset f[a]=[fa] \in L(f(a))$ dan $f\alpha \in L(f(a))$ dır, dolayısıyla f süreklidir.
$d=(A,K) \in SCO$, $c=(B,L) \in SCO$ olsun. Eğer $f:B \longrightarrow A$ bir fonksiyon ise bu takdirde f SCO'da $(B,L) \longrightarrow (A,K)$ dönüşümüne kaldırılabilir. Her $b \in B$ için $\alpha \in L(b)$ ise $f\alpha \in K(f(b))$ olduğunu göstermeliyiz.
$\alpha \in L(b)$ olsun, hipotezden $K(f(b))=S(A)$ idi. $f\alpha \in S(A)$ olduğundan $f\alpha \in K(f(b))$ dır, yani f süreklidir.
2 nin ispatı 1 deki ispatın benzeridir.

3.1.4 1- E=FCO, LFCO, Lim, PsT, PrT, FTop, R_0Lim, R_0LFCO, R_0PsT, R_0PrT veya R_0FTop topolojik kategorilerinden herhangi biri ve $(A,K) \in E$ olsun.

(A,K) nın diskre uzayı olması için gerek ve yeter şart her $a\in A$ için $K(a)=\{ [a],\ PA=[\phi] \}$ dır.

2- (A,K) nın indiskre uzayı olması için gerek ve yeter şart her $a\in A$ için $K(b)=F(A)$ olmalıdır.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak;

1- $e=(A,K) \in E$, $c=(B,L) \in E$ ve $f:A\longrightarrow B$ bir fonksiyon ise f'nin kaldırılabilir olduğunu göstereceğiz.

$\alpha\in K(a)$ ise hipotezden $\alpha=[a]$ veya $[\phi]$ dur. $f\alpha=[f(a)]$ veya $f\alpha=[\phi]$ Her iki halde de $f\alpha \in L(f(a))$dır. Dolayısıyla f kaldırılabilir.

2- $d=(A,K) \in E$, $c=(B,L) \in E$ olsun. $f:B\longrightarrow A$ bir fonksiyon ise f kaldırılabilir.

$\alpha\in L(b)$ olsun. hipotezden $K(b)=F(A)$ idi, $f\alpha \in K(f(b))$ olur. Yani f süreklidir.

3.1.5 1- $(A,K) \in$ ConFCO olsun, (A,K) nın diskre uzayı olması için gerek ve yeter şart her $a\in A$ için $K=\{ [a], PA=[\phi] |\ a\in A \}$ olmalıdır.

2- (A,K) nın indiskre uzayı olması için gerek ve yeter şart $K=F(A)$ olmasıdır.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak;

1- $e=(A,K) \in$ ConFCO, $c=(B,L) \in$ ConFCO olsun. Eğer $f:A\longrightarrow B$ bir fonksiyon ise bu takdirde f ConSCO'da $(A,K)\longrightarrow(B,L)$ dönüşümüne kaldırılabilir. Yani $\alpha\in K$ ise $f\alpha\in L$ olduğu gösterilmelidir.

$\alpha\in K$ olsun $\alpha=[a]$ veya $[\phi]$, buradan $f\alpha=[fa]$ veya $[\phi]$ dur. Dolayısıyla $f\alpha\in L$, yani f süreklidir.

2- $d=(A,K) \in$ ConFCO, $c=(B,L) \in$ ConFCO olsun. Eğer $f:B\longrightarrow A$ bir fonksiyon ise f kaldırılabilir.

$\alpha\in L$ ise $f\alpha\in K$ olduğunu göstermeliyiz. Hipotezden $K=F(A)$ idi.

$\alpha \in L$ olsun, bu durumda $f\alpha \in F(A)$ olur. O halde $f\alpha \in K$ dır.

3.1.6

1- E=ConLFCO, ConLim ve ConPsT den herhangi biri ve $(A,K) \in E$ olsun. (A,K) nın diskre uzay olması için gerek ve yeter şart $K=\{\alpha | \alpha$ A'nın sonlu alt kümesini içerir.$\}$

2- (A,K)nın indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart $K=F(A)$ olmasıdır.

İSPAT: $e=(A,K) \in E$, $c=(B,L) \in E$ olsun. Eğer $f:A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ise bu takdirde f'nin ConLFCO, ConLim, ya da ConPsT de $(A,K) \longrightarrow (B,L)$ dönüşümüne kaldırılabilir olduğunu gösterelim.

Yani $\alpha \in K$ ise $f\alpha \in L$ dir.

Eğer $U \in f\alpha$ ise $f\alpha$ tanımından en az bir $V \in \alpha$ vardır, öyle ki $U \supset f(V)$ dır. Madem ki α A'nın sonlu bir alt kümesini içerir, α da sonlu bir W alt cümlesi vardır, öyle ki $W \subset V$ dır. Bundan dolayı $f(W) \subset f(V) \subset U$ olur.

Görülür ki $[f(W)]=\cap[f(a)] \in L$ dır. ($a \in W$, $[f(W)]$ süzgeçtir.)

W sonlu olduğundan $[f(W)] \in L$, fakat $[f(W)] \subset f\alpha$ olduğundan $f\alpha \in L$ dır.

2- Bunun ispatı (3.1.3) (2) deki gibidir.

3.1.7 E=ConPrT veya ConFTop, $(A,K) \in E$ olsun, (A,K)nın diskre uzay olması için gerek ve yeter şart $K=\{\alpha | \alpha \supset [A]\}=F(A)$ olmasıdır. Yani ConPrT veya ConFTop da diskre ve indiskre uzaylar aynıdır. Çünkü A üstünde herhangi bir α süzgeci A cümlesini içerir.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak;

$e=(A,K) \in E$, $c=(B,L) \in E$ olsun. Eğer $f:A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ise f $(A,K)\longrightarrow(B,L)$ dönüşümüne kaldırılabilir.

$\alpha\in K$ olsun, hipotezden $\alpha\supset[A]$ idi $f\alpha\supset[f(A)]$ olduğundan $f\alpha\in L$ dır.

($[A]=\cap[a]\in K$, $[F(A)]=\cap[f(a)]\in L$, $a\in A$)

Dolayısıyla f süreklidir. Şimdi $K=F(A)$ olduğunu gösterelim.

$F(A)$ maksimum yapı olduğundan $K\subset F(A)$ dır, öte yandan $\alpha\in F(A)$ ise süzgeç tanımından $A\in\alpha$, K'nın tanımından $\alpha\in K$, yani $F(A)\subset K$ dır. Dolayısıyla $K=F(A)$ olur.

Herhangi bir A cümlesi için $U^{-1}(A)$ demetinde sadece tek bir yapı vardır. Bu da gösterir ki Sets ile ConPrT ve ConFTop birbirine denk kategorilerdir.

3.1.8 1- E=(PBorn, PBorn*) veya Born'dan herhangi biri olsun. $(A,F)\in E$'nin diskre uzay olması için gerek ve yeter şart F A'nın bütün (boş olmayan) sonlu alt cümlelerinin cümlesi olmalıdır.

2- $(A,F)\in E$'nin indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart $F=P(A)$ olmalıdır.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak;

1- $e=(A,F)\in E$, $c=(B,L)\in E$ olsun. Eğer $f:A\longrightarrow B$ bir fonksisiyon ise f $(A,F)\longrightarrow(B,L)$ ye kaldırılabilir. $C\in F$ olsun, C sonlu olduğundan $f(C)$ de sonludur. Dolayısıyla $f(C)\in L$ dır.

2- $d=(A,F)\in E$, $c=(B,L)\in E$ olsun. Eğer $f:B\longrightarrow A$ bir fonksiyon ise f $(B,L)\longrightarrow(A,F)$ ye kaldırılabilir, yani $C\in L$ ise $f(C)\in F=PA$ dır.

3.1.9 1- $(A,F)\in$ Fam olsun. (A,F) nin diskre uzay olması için gerek ve yeter şart $F=\{\ \}$ boş aile olmasıdır.

2- (A,F) nin indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart $F=PA$ olmasıdır. Bu sonuçlar açık olarak görülür.

3.1.10 1- E=Rel olsun, (A,R) nin diskre uzay olması için gerek ve yeter şart R=Boş bağıntı=ϕ olmasıdır.

E= RRel veya Prord, (A,R) $\in$ E olsun. (A,R)nin diskre uzayı olması için gerek ve yeter şart her a,b $\in$ A için aRb$\Longleftrightarrow$ a=b dır.

2- (A,R) nin indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart R=A^2 olmasıdır.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak;

1- e=(A,R) $\in$ Rel, c=(B,S) $\in$ Rel olsun. Eğer f:A$\longrightarrow$B bir fonksiyon ise f kaldırılabilir. Rel'de aRb ise f(a)Rf(b) idi, aϕb ise f(a)ϕf(b) dır.

e=(A,R) $\in$ E, c=(B,S) $\in$ E olsun. f:A$\longrightarrow$B bir fonksiyon ise kaldırılabilir, yani aRb $\Longleftrightarrow$ a=b olduğundan f(a)Sf(b)=f(a) dır. S yansıma özelliğini sağlar, yani f süreklidir.

2- E=Rel, RRel, veya Prord'dan herhangi biri ve d=(A,R) $\in$ E, c=(B,S) $\in$ E olsun, f:B$\longrightarrow$A bir fonksiyon ise f kaldırılabilir. Her a,b $\in$ B için aSb ise f(a)Rf(b) olduğundan (f(a),f(b))$\in$ R=A^2 dır.

3.1.11 1- (A,B) $\in$ CP olsun. (A,B) nın diskre uzay olması için gerek ve yeter şart B=ϕ olmasıdır.

2- (A,B) nin indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart B=A olmasıdır.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak

1- e=(A,B) $\in$ CP, c=(K,L) $\in$ CP olsun. f:A$\longrightarrow$K bir fonksiyon ise f kaldırılabilir, yani B $\subset$A ise f(B) $\subset$L olmalıdır.

B=ϕ $\subset$ A olduğundan f(ϕ)=ϕ $\subset$L dır, dolayısıyla f süreklidir.

2- d=(A,B) $\in$ CP, c=(K,L) $\in$ CP olsun. CP'nin tanımından B $\subset$A idi. İndiskre yapıda en büyük alınacağından, CP'de bir indiskre yapı

$B=A$ dır. Yani $(A,A) \in CP$ de indiskre uzaydır.

3.1.12 1- $(A,S) \in Seg$ olsun, (A,S)nin diskre uzay olması için gerek ve yeter şart her $a\in A$ için $S(a)=\{\bar{a}\}$ olmasıdır.

2- (A,S)nin indiskre uzay olması için gerek ve yeter şart her $a\in A$ için $S(a)=A^N$ olmalıdır.

İSPAT: Teorem 3.1.2 den yararlanarak;

1- $e=(A,S) \in Seg$, $c=(B,L) \in Seg$ olsun. $f:A\longrightarrow B$ bir fonksiyon ise f kaldırılabilir. Yani her $a\in A$ için $(s_n) \in S(a)$ ise $(fs_n) \in L(f(a))$ olduğu gösterilmelidir.

Her n için $s_n=a$ olduğundan $f(s_n)=f(a)$, dolayısıyla $\{fs_n\}=\overline{f(a)} \in L(f(a))$ dır.

2- $d=(A,S) \in Seg$, $c=(B,L) \in Seg$ olsun. $f:B\longrightarrow A$ bir fonksiyon ise f kaldırılabilir.

Her $b\in B$ için $\{b_n\} \in L(b)$ olsun, $\{f(b_n)\}$ A'da bir dizidir. Yani $(f(b_n)) \in A^N=S$ (A^N, A daki bütün diziler) O halde f süreklidir.

3.2 TOPOLOJİK FÁNKTOR HAKKINDA BAZI TEOREMLER

TEOREM 3.2.1 1- Eğer $gh:X\longrightarrow Y\longrightarrow Z$ bitiş kaldırma ise bu takdirde g'de bitiş kaldırmadır.

2- Eğer gh başlangıç kaldırma ise bu takdirde h'da başlangıç kaldırmadır.

İSPAT: 1- Kabul edelimki $k:Y\longrightarrow W$ E içinde herhangi bir dönüşüm ve buna bağlı olarak $l:UZ\longrightarrow UW$ dönüşümü olsun, öyle ki $loU(g)=U(k)$ dır. Şimdi madem ki $loU(gh)=U(kh)$ ve gh bitiş kaldırmadır, en az bir $\bar{l}:Z\longrightarrow W$ dönüşümü vardır öyle ki $U(\bar{l})=l$ dır. Bundan dolayı $U(\bar{l}g)=U(\bar{l})oU(g)=loU(g)=U(k)$ dır. Sonuç olarak

$\bar{l}og=k$ dır, çünkü U değişmeli diyağramları yansıtır. [Teorem 1.2.4] Bu nedenle g bir son kaldırmadır.

2- Kabul edelimki $l:W \longrightarrow Y$ E içinde herhangi bir dönüşüm olsun. Bu durumda $k:UW \longrightarrow UX$ vardır, öyle ki $U(h)ok=U(l)$ dır. Madem ki $U(gh)ok=U(gl)$ ve gh başlangıç kaldırmadır, $\bar{k}:W \longrightarrow X$ fonksiyonu vardır, öyle ki $U(\bar{k})=k$ dır.

Bundan dolayı $U(h\bar{k})=U(h)oU(\bar{k})=U(h)ok=U(l)$, sonuç olarak $h\bar{k}=l$ dır. U degişmeli diyağramları yansıtır. [Teorem 1.2.4]

Bu nedenle h başlangıç kaldırmadır.

TEOREM 3.2.2 Kabul edelim ki PBorn, PBorn*, Born, ConLFCO, Con-Lim, ya da ConPsT de bir dönüşüm $f:X \longrightarrow Y$ verilsin. Eğer f sonlu demetlere sahipse, yani her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ sonlu bir cümle ise bu takdirde f diskre yapıyı yansıtır.Başka bir deyimle Y diskre ise bu takdirde X de diskredir.

İSPAT: 1.DURUM- Kabul edelim ki $f:X \longrightarrow Y$ (PBorn,PBorn*) ya da Born'da bir dönüşüm ve $Y=(A_1^{\cdot},F_1)$ diskre olsun. Yani $F_1=\{C| C\ A_1$ in (boş olmayan) sonlu alt cümlesidir.} [3.1.8] Yine kabul edelim ki $X=(A,F)$ ve $W \in F$ olsun. $(A,F) \longrightarrow (A_1,F_1)$ den $f(W) \in F_1$ olur ki $f(W)$ A_1 in sonlu alt cümlesidir. Fakat $f^{-1}f(W)=Uf^{-1}(y)$, $y \in f(W)$ oldugundan [10] $f^{-1}f(W)$ sonludur. Çünkü $f^{-1}(y)$ ve $f(W)$ sonludurlar. Ama $W \subset f^{-1}f(W)$ den W sonlu cümledir, dolayısıyla $X=(A,F)$ diskredir.

2.DURUM- Kabul edelimki 3.1.6 dan ConLFCO, ConLim, ya da ConPsT de bir dönüşüm $f:X \longrightarrow Y$ ve $Y=(B,L)$ diskre olsun.

$L=\{\alpha|\alpha$ B'nin sonlu alt cümlesini içerir.} $\sigma \in K$ ise σ'nın sonlu bir alt cümle içerdiğini göstermeliyiz.

$\sigma \in K$ ise $f\sigma \in L$ ve L diskre oldugundan (3.1.6) B'nin sonlu bir alt kümesi vardır ve $U \in f\sigma$ dır. Böylece en az bir $V \in \sigma$ vardır, öyle ki $U \supset f(V)$ olduğundan $f(V)$ sonludur. 1. durumda olduğu gibi $f^{-1}f(V)$ sonludur ve sonuç olarak V sonludur.

KAYNAKLAR

[1] M. BARAN, Stacks and Filters, Doğa-Tr.J.Math 16 (1992) No 2, 95-108

[2] H. HERRLICH, Topological Functors, Gen.Top.Appl. 4 (1974) 125-142

[3] D.C. KENT, Convergence Quotient Maps, Fund.Math 165(1969) 197-205

[4] S. MACLANE, Categories for Working Mathematician, Springer -Verlag, New York (1971)

[5] M.V. MIELKE, Convenient Categories for Internal Singular Algebraic Topology, Illinois Journal of Math. Vol 27, No 3, (1983)

[6] M.V. MIELKE, Geometric Topological Completions With Universal Final Lifts, Top. and Appl. 9 (1985) 277-293

[7] J.R.MUNKRES, Topology: A First Course, Prentice Hall inc. New Jersey (1975)

[8] L.D. NEL, Initially Structured Categories And Cartesian Closedness, Can. Journal of Math., Vol XXVII No.6 (1975) 1361-1377

[9] F. SCHWARZ, Connections Between Convergence And Nearness, Lecture Notes in Math. No 179, Springer-Verlag (1978), 345-354

[10] O. WYLER, Top. Categories And Categorical Topology, Gen. Top.Appl. 11 (1971), 17-28