TOPOLOJİK ROUGH UZAYLAR

Kadirhan POLAT

Y. Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Tamer UĞUR
2010

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Y. LİSANS TEZİ

TOPOLOJİK ROUGH UZAYLAR

Kadirhan POLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2010

Yrd. Doç. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Kadirhan POLAT tarafından hazırlanan bu çalışma 19/07/2010 tarihinde aşağıdaki jüriler tarafından Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU İmza

Üye : Doç. Dr. Abdullah KARAMAN İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tamer UĞUR İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK ROUGH UZAYLAR

Kadirhan POLAT

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada, ilk olarak Pawlak'ın Rough Küme Teorisi takdim edilmiştir. Daha sonra tahmin uzayı ile üretilen topolojik uzaylara ve bu uzaylar üzerindeki dönüşümlere yer verilmiştir. Ayrıca Wu'nun topolojik rough uzay kavramı ve bu uzayın bazı özellikleri verilmiştir. Pawlak'ın rough küme modeline nazaran daha genel olan Zhu ve Wang'ın örtü tabanlı rough küme modeline yer verilmiştir. Son olarak topolojik rough uzayda yerel sonlu aile ve inceltilmiş kavramları sunulmuştur; buna bağlı olarak parakompakt rough uzay kavramı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

2010, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Rough Küme, Topolojik Rough Uzay, Rough Homeomorfizm, Örtü Tabanlı Rough Küme, Parakompakt Rough Uzay

ABSTRACT

MS Thesis

TOPOLOGICAL ROUGH SPACES

Kadirhan POLAT

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Tamer UĞUR

In this study, firstly, Pawlak's Rough Set Theory is introduced. Then the topological spaces induced by an approximation space and the maps between such two topological spaces are submitted. Also, Wu's the definition topological rough space and its some properties are given. More general in comparison with Pawlak's ones, Zhu and Wang's covering-based rough set model is presented. Finally, the notions of local finite family and refinement are given meaning in topological rough space; accordingly, paracompact rough space is defined and its some properties are investigated.

2010, 53 pages

Keywords: Rough Set, Topological Rough Space, Rough Homeomorphism, Covering-Based Rough Set, Paracompact Rough Space

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez hazırlama sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Tamer UĞUR'a teşekkürlerimi arz ederim.

Tez çalışmamın hemen her aşamasında her türlü desteği gösteren arkadaşlarım Sayın Birol GÜNDÜZ ve Sayın Rıdvan ŞAHİN'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Her zaman için bana tam destek veren ve güvenlerini hissettiren aileme sonsuz minnettarlığımı dile getirmek isterim.

Kadirhan POLAT
Temmuz 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{A} = (E, R)$	Tahmin uzayı
$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$ tahmin uzayındaki tüm birleşik kümelerin ailesi
$\underline{R}X$	X kümesinin R bağıntısına göre alt tahmin kümesi
$\overline{R}X$	X kümesinin R bağıntısına göre üst tahmin kümesi
$SnrX$	X kümesinin sınırı
$\underline{Knr}X$	X kümesinin iç kenarı
$\overline{Knr}X$	X kümesinin dış kenarı
$-X$ veya X^t	X kümesinin tümleyeni
$\underline{\in}$	Güçlü üyelik bağıntısı
$\overline{\in}$	Zayıf üyelik bağıntısı
$\underline{\mu}(X)$	X rough kümesinin iç ölçümü
$\overline{\mu}(X)$	X rough kümesinin dış ölçümü
$\eta(X)$	X rough kümesinin tahmin doğruluğu
$\overline{\sim}$	Rough-alt denklik
$\underline{\sim}$	Rough-üst denklik
$\approx$	Rough denklik
$\underline{\mathcal{A}^*}$	$\mathcal{A}$ tahmin uzayının alt genişlemesi
$\overline{\mathcal{A}^*}$	$\mathcal{A}$ tahmin uzayının üst genişlemesi
$\mathcal{A}^*$	$\mathcal{A}$ tahmin uzayının genişlemesi
$\underset{\sim}{\subseteq}$	Rough alt-kapsanma
$\tilde{\subset}$	Rough üst-kapsanma
$\underset{\sim}{\tilde{\subseteq}}$	Rough kapsanma
$P_{\underline{\mathcal{A}}}(X)$	$\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesinin rough alt kuvvet kümesi
$P_{\overline{\mathcal{A}}}(X)$	$\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesinin rough üst kuvvet kümesi
$P_{\mathcal{A}}(X)$	$\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesinin rough kuvvet kümesi

$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\cong$	Rough homeomorfluk
1_X	X den X e birim dönüşüm
$Mt(x)$	x noktasının minimal tanımı
$Maxt(\boldsymbol{C})$	$\boldsymbol{C}$ örtüsünün bütün maksimal tanımlarının ailesi
$N(x)$	x noktasının ayırt edilemez komşuluğu
$CN(x)$	x noktasının yakın komşuluğu
$\underline{\boldsymbol{C}}X$	X kümesinin örtülü alt tahmini
$\overline{\boldsymbol{C}}_1X$	X kümesinin birinci tip örtülü üst tahmini
$\overline{\boldsymbol{C}}_2X$	X kümesinin ikinci tip örtülü üst tahmini
$\overline{\boldsymbol{C}}_3X$	X kümesinin üçüncü tip örtülü üst tahmini

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Pawlak tarafından tanımlanan rough küme teorisi sonlu bir evrensel küme üzerindeki bir denklik bağıntısına dayanır. Polonyalı matematikçi Zdzislaw Pawlak'ın sunmuş olduğu bu teori dünya çapında birçok araştırmacı ve bilim adamının dikkatini çekmiştir. Özellikle bilgisayar biliminde araştırmacılar ve bilim adamları tarafından bu teori geliştirilmiş ve uygulama alanları genişletilmiştir. Bu uygulama alanlarına makine öğrenimi, bilgi edinimi, karar analizi, veritabanlarından bilgi keşfi örnek olarak verilebilir.

Pawlak (1982) "Rough Sets" isimli makalesinde kümeler üzerinde alt ve üst tahmin kümelerini, kümelerin rough kapsamalarını tanımlamıştır. Yine Pawlak (1985) rough küme ile fuzzy küme kavramlarını karşılaştırarak kavramlar arasındaki farkları göstermiştir. Ayrıca rough bağıntı ve rough fonksiyon kavramları tanımlanmıştır (Pawlak 1986, 1987).

Iwinski (1987) rough kümelere cebirsel bir yaklaşım sunmuştur. Bu çalışmadan başka rough küme teorisini cebirsel açıdan ele alan çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Dubois ve Prade (1990) fuzzy-rough küme ve rough-fuzzy küme kavramlarını tanımlamıştır. Sonrasında yayımlanan birçok çalışma bu çalışmayı temel almıştır. Polkowski (1993) sayılabilir tahmin uzayı ile üretilen topolojiye göre rough kümeler üzerinde metrik uzayları çalışmıştır. Diğer yandan Düntsch (1997) rough kümeler için önermeler mantığını çalışmıştır.

Liu (2004) rough kümelerin topolojik özelliklerini çalışmıştır; ayrıca tahmin uzayı ve sonlu bir küme arasında kurulan bir dönüşümün sonlu küme üzerinde bir denklik bağıntısı üretebildiğini göstermiştir. Ayrıca dönüşümün iki topolojik uzay arasındaki bir dönüşüm olması durumunda dönüşümün sürekli olduğunu göstermiştir. Bunun dışında dönüşüm bire-bir ve örten ise açık ve sürekli olduğunu göstermiştir.

Rough küme teorisi esasen denklik bağıntısını temel alır. Zhu ve Wang (2007), Pawlak'ın bağıntı ile üretilen tahmin kümelerine kıyasla üç tip örtülü tahmin kümelerinin özelliklerini incelemişlerdir.

Wu (2008), verilen bazı yeni tanım ve teoremlerle rough kümeler üzerinde topolojik uzaylar, topolojik dönüşümler, homeomorfizm ve özellikleri üzerine çalışmıştır.

Sunulan bu tez, Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntemler, Araştırma Bulguları ve Sonuç bölümlerinden oluşmaktadır.

Kuramsal Temeller bölümünde, rough kümelerle ilgili temel tanım ve özelliklerin yanı sıra sonraki bölümlerde kullanılacak bazı topolojik kavramlar verilmiştir.

Materyal ve Yöntemler bölümünde, rough kümeleri topolojik açıdan ele alan çalışmalara yer verilmiştir. Rough küme üzerinde tanımlanan topolojik rough uzay kavramı ve topolojik rough uzayın özellikleri verilmiştir. Daha sonra iki topolojik rough uzay arasında rough homeomorfizm ve bunun yardımıyla topolojik rough uzaydaki bazı invaryantlar verilmiştir. Ayrıca bir tahmin uzayındaki denklik bağıntısı ve bu tahmin uzayından sonlu bir kümeye tanımlı bir dönüşüme göre bu sonlu küme üzerinde yeni bir denklik bağıntısı üretilmiştir. Elde edilen iki tahmin uzayının ürettikleri topolojiye göre mevcut dönüşümün özellikleri incelenmiştir. Son olarak rough kümelerin belirlenmesinde rol oynayan denklik bağıntılarının aksine örtü kavramını kullanan çalışmalar sunulmuştur. Rough kümelerde üst tahmin küme kavramı için üç farklı tanıma yer verilerek bu tanımların özellikleri ve birbirleri ile olan ilişkileri verilmiştir.

Araştırma Bulguları bölümünde, Wu (2007)'nun çalışmasında tanımladığı rough topolojik uzay üzerinde inceltilmiş aile, yerel sonlu aile ve parakompaktlık kavramları tanımlanmıştır ve parakompakt rough uzayların özellikleri ve diğer bazı uzaylarla olan ilişkisi üzerine bir çalışma yapılmıştır.

Sonuç bölümünde, bir önceki bölümde incelenen kavramlar ve bu kavramlara ilgili bazı gerçekler özet halinde verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1: X bir topolojik uzay olsun. X kümesindeki herhangi bir farklı nokta çifti için her bir nokta diğer noktayı ihtiva etmeyen bir açık kümeye ait ise yani $a, b \in X$ herhangi bir nokta çifti olmak üzere

$$a \in G, b \notin G \text{ ve } b \in H, a \notin H$$

olacak şekilde G ve H açık kümeleri mevcut ise X topolojik uzayına T_1-uzayı denir (Lipschutz 1968).

Tanım 2.1.2: X bir topolojik uzay olsun. X kümesindeki her farklı nokta çifti ayrık açık kümelere ait ise yani $a, b \in X$ herhangi bir nokta çifti olmak üzere

$$a \in G, b \in H \text{ ve } G \cap H = \emptyset$$

olacak şekilde G ve H açık kümeleri mevcut ise X topolojik uzayına Hausdorff uzay veya T_2-uzayı denir (Lipschutz 1968).

Tanım 2.1.3: X bir topolojik uzay, $F \subset X$ bir kapalı küme ve $p \in X$ $(p \notin F)$ olsun. $F \subset G$ ve $p \in H$ olacak şekilde G ve H ayrık ve açık kümeleri mevcut ise X topolojik uzayına regüler uzay denir. Regüler T_1-uzayına T_3-uzayı denir (Yüksel 1998).

Tanım 2.1.4: X bir topolojik uzay, $F_1, F_2 \subset X$ ayrık ve kapalı kümeler olsun. $F_1 \subset G$ ve $F_2 \subset H$ olacak şekilde G ve H ayrık ve açık kümeleri mevcut ise X topolojik uzayına normal uzay denir. Normal T_1-uzayına T_4-uzayı denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.5: X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye indirgenebiliyorsa A kümesine kompakt küme denir (Bülbül 1994).

Tanım 2.1.6: X bir topolojik uzay olsun. X kümesindeki her nokta bir kompakt komşuluğa sahip ise X topolojik uzayına lokal kompakt uzay denir (Munkres 1975).

Tanım 2.1.7: $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{W}$ iki örtü olsun. $\forall W \in \mathcal{W}$ için $W \subset U$ olacak şekilde bir $\exists U \in \mathcal{U}$ oluyorsa $\mathcal{W}$ örtüsüne $\mathcal{U}$ örtüsünün inceltilmişi denir (Willard 1970).

Tanım 2.1.8: X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}, X$ in alt kümelerinin bir ailesi olsun. X kümesinin her noktası $\mathcal{U}$ ailesinin en fazla sonlu sayıda elemanı ile arakesiti boştan farklı olan bir açık komşuluğa sahip ise $\mathcal{U}$ ailesine yerel sonlu aile denir (Willard 1970).

Tanım 2.1.9: X bir topolojik uzay olsun. X in her açık örtüsü bir açık ve yerel sonlu inceltilmişe sahip ise X e parakompakt uzay denir (Jeffrey 2010).

2.2. Rough Küme Teorisi

2.2.1. Temel kavramlar

Tanım 2.2.1.1: E boştan farklı sonlu bir küme, R de E kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. E kümesine evrensel küme, R bağıntısına ayırt edilemezlik bağıntısı ve $\mathcal{A} = (E, R)$ ikilisine de tahmin uzayı denir. $x, y \in E$ ve $(x, y) \in R$ ise x ve y noktalarının $\mathcal{A}$ tahmin uzayında ayırt edilemez olduğunu söyleyeceğiz. R bağıntısının her bir denklik sınıfına $\mathcal{A}$ da temel küme veya kısaca temel küme (atom) denir. $\mathcal{A}$ tahmin uzayındaki bütün atomların kümesi E/R ile gösterilir (Pawlak 1982).

Boş kümenin de her $\mathcal{A}$ tahmin uzayında bir temel küme olduğunu varsayacağız.

Tanım 2.2.1.2: $\mathcal{A}$ tahmin uzayındaki temel kümelerin her sonlu birleşimine $\mathcal{A}$ da birleşik küme veya kısaca birleşik küme denir. $\mathcal{A}$ tahmin uzayındaki tüm birleşik kümelerin ailesi $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ile gösterilir (Pawlak 1982).

Açıkça görülür ki $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ailesi kümelerin birleşimi, arakesiti ve tümleyeni altında kapalıdır.

Tanım 2.2.1.3 (Üst Tahmin): $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. X kümesini ihtiva eden $\mathcal{A}$ tahmin uzayındaki en küçük birleşik küme $\mathcal{A}$ da X kümesinin üst tahmini olarak adlandırılır ve $\overline{R}X$ ile gösterilir (Pawlak 1982). Küme gösterimi olarak

$$\overline{R}X = \{x : [x] \cap X \neq \emptyset\}$$

veya buna denk olarak

$$\overline{R}X = \bigcup \{[x] : [x] \cap X \neq \emptyset\}$$

yazılır.

Tanım 2.2.1.4 (Alt Tahmin): $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. X kümesi tarafından ihtiva edilen $\mathcal{A}$ tahmin uzayındaki en büyük birleşik küme $\mathcal{A}$ da X kümesinin alt tahmini olarak adlandırılır ve $\underline{R}X$ ile gösterilir (Pawlak 1982). Küme gösterimi olarak

$$\underline{R}X = \{x : [x] \subseteq X\}$$

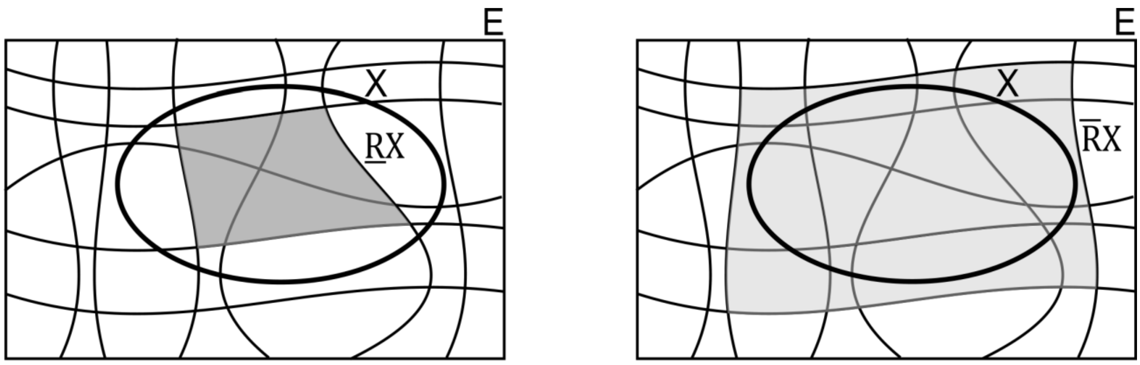
veya buna denk olarak

$$\underline{R}X = \bigcup \{[x] : [x] \subseteq X\}$$

yazılır.

Tanım 2.2.1.5: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $SnrX = \overline{R}X - \underline{R}X$ kümesine $\mathcal{A}$ da X kümesinin sınırı denir. $\underline{KnrX} = X - \underline{R}X$ ve $\overline{KnrX} = \overline{R}X - X$ kümeleri sırasıyla $\mathcal{A}$ da X kümesinin iç kenarı ve dış kenarı olarak adlandırılır (Pawlak 1982).

$SnrX = \overline{KnrX} \cup \underline{KnrX}$ olduğu kolayca görülür.



Şekil 2.1. X kümesinin $\underline{R}X$ alt tahmin kümesi ve (sağda) $\overline{R}X$ üst tahmin kümesi

Tanım 2.2.1.6 (Rough Küme): $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\underline{R}X = \overline{R}X$ ise X kümesine tam küme, $\underline{R}X \neq \overline{R}X$ ise X kümesine rough küme denir. Bundan sonra bir X rough kümesi $\left(\underline{R}X, \overline{R}X\right)$ ikilisi ile gösterilecektir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.1.7: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $-X = \left(-\overline{R}X, -\underline{R}X\right)$ kümesine X kümesinin rough tümleyeni denir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.1.8: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı olsun. Her $X \subseteq E$ için $\underline{R}X = \overline{R}X$ ise $\mathcal{A} = (E, R)$ tahmin uzayına diskret tahmin uzayı denir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.1.9: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun.

$$x \underline{\in} X \Leftrightarrow [x] \subseteq X$$
$$x \overline{\in} X \Leftrightarrow [x] \cap X \neq \emptyset$$

olarak tanımlanan $\underline{\in}$ ve $\overline{\in}$ üyelik fonksiyonlarına sırasıyla güçlü ve zayıf üyelik denir. $x \underline{\in} X$ ise x kesinlikle $\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesine ait iken $x \overline{\in} X$ ise x in $\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesine ait olması muhtemeldir (Pawlak 1982).

Elbette

$$\underline{R}X = \{x : x \underline{\in} X\}$$
$$\overline{R}X = \{x : x \overline{\in} X\}$$

olur (Pawlak 1982).

Örnek 2.2.1.10: X nesnelerin kümesi, A nesne özelliklerinin kümesi, V_a $a \in A$ özelliğinin değer kümesi, $V = \bigcup V_a$, $\rho : X \times A \rightarrow V$ bir bilgi fonksiyonu olmak üzere $S = (X, A, V, \rho)$ sıralı dörtlüsüne bir bilgi sistemi denir. "$x, y \in X$ için $xRy \Leftrightarrow \forall a \in A$ için $\rho(x, a) = p(y, a)$ olmasıdır." şeklinde tanımlanan R bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda R bir ayırt edilemezlik bağıntısı $\mathcal{A} = (X, R)$ bir tahmin uzayı olarak alınabilir.

Çizelge 2.1. Altı hasta ile ilgili veri çizelgesi

Hasta	**Baş ağrısı (b)**	**Kas ağrısı (k)**	**Sıcaklık (s)**	**Grip (g)**
h1	hayır (h)	evet (e)	yüksek (y)	evet (e)
h2	evet (e)	hayır (h)	yüksek (y)	evet (e)
h3	evet (e)	evet (e)	çok yüksek (ç)	evet (e)
h4	hayır (h)	evet (e)	normal (n)	hayır (h)
h5	evet (e)	hayır (h)	yüksek (y)	hayır (h)
h6	hayır (h)	evet (e)	çok yüksek (ç)	evet (e)

Yukarıda hasta ve hastanın belirtileri ile ilgili bir çizelge verilmiştir. Bu durumda yukarıdaki bilgi sistemi tanımına göre nesnelerin kümesini $X = \{h1, h2, h3, h4, h5, h6\}$, nesnelerin özelliklerinin kümesini $A = \{b, k, s, g\}$, b özelliğinin değer kümesi $V_b = \{e, h\}$, k özelliğinin değer kümesi $V_k = \{e, h\}$, s özelliğinin değer kümesi $V_s = \{n, y, ç\}$, g özelliğinin değer kümesi $V_g = \{e, h\}$, $V = \{e, h, n, y, ç\}$, $\rho: X \times A \to V$ bilgi fonksiyonu da (hasta,özellik) ikilisini hastanın bulunduğu satır ile özelliğin bulunduğu sütunun kesiştiği yerdeki özellik değerine eşler. Örneğin $\rho(h2, s) = y$, $\rho(h5, k) = h$ olur.

Çizelge 2.1'de $h2$, $h3$ ve $h5$ hastaları baş ağrısı özelliğine göre, $h3$ ve $h6$ hastaları kas ağrısı ve grip özelliklerine göre ve $h2$ ve $h5$ hastaları baş ağrısı, kas ağrısı ve sıcaklık özelliklerine göre ayırt edilemezdir. Nesnelerin özelliklerinin kümesi $B = \{b\} \subset A$ olarak alındığında elde edilecek denklik sınıfları $\{h2, h3, h5\}$ ve $\{h1, h4, h6\}$ olur. Ancak nesnelerin özelliklerinin kümesi $C = \{b, k\} \subset A$ olarak alındığında elde edilecek denklik sınıfları $\{p1, p4, p6\}$, $\{p2, p5\}$ ve $\{p3\}$ olur. Benzer şekilde A nesne özellikleri kümesinin herhangi bir alt kümesine göre elde edilecek denklik sınıfları bulunabilir.

$h2$ hastası griptir ama $h5$ hastası grip değildir ve bu iki hasta baş ağrısı, kas ağrısı ve sıcaklık özelliklerine göre ayırt edilemezdir. Böylece grip özelliği baş ağrısı, kas ağrısı ve sıcaklık özellikleri yardımıyla belirlenemez. Mevcut bilgi sistemine göre $h2$ ve $h5$ hastaları sınır çizgisinde kalır. $h1, h3$ ve $h6$ hastaları grip olduklarına dair belirtiler gösterirken $h2$ ve $h5$ hastalarının grip olup olmadığı konusunda bir çıkarım yapılamaz ve son olarak eldeki belirtilerden $h4$ hastasının grip olmadığı kesindir. Böylece grip olan hastaların kümesi $G = \{h1, h2, h3, h6\}$ iken $D = \{b, k, s\}$ nesne özellikleri kümesine göre G kümesinin alt tahmin kümesi $\underline{R}G = \{h1, h3, h6\}$ ve üst tahmin kümesi $\overline{R}G = \{h1, h2, h3, h5\}$ olur. Dolayısıyla $SnrG = \overline{R}G - \underline{R}G = \{h2, h4\}$ olur. Benzer şekilde grip olmayan hastaların kümesi $G^t = \{h4, h5\}$ iken $D = \{b, k, s\}$ nesne özellikleri kümesine göre G^t kümesinin alt tahmin kümesi $\underline{R}G^t = \{h4\}$ ve üst tahmin kümesi $\overline{R}G = \{h2, h4, h5\}$ olur. Dolayısıyla $SnrG = \overline{R}G - \underline{R}G = \{h2, h4\}$ olur (Peters and Skowron 2004).

2.2.2. Tahminlerin özellikleri

Her $X, Y \subseteq E$ küme çifti ve her $\mathcal{A} = (E, R)$ tahmin uzayı için aşağıdaki özellikler mevcuttur (Pawlak 1982):

(1) $\underline{R}X \subseteq X \subseteq \overline{R}X$

(2) $\underline{R}E = \overline{R}E = E$

(3) $\underline{R}\emptyset = \overline{R}\emptyset = \emptyset$

(4) $\overline{R}(\overline{R}X) = \underline{R}(\overline{R}X) = \overline{R}X$

(5) $\underline{R}(\underline{R}X) = \overline{R}(\underline{R}X) = \underline{R}X$

(6A) $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}X \cup \underline{R}Y$

(6Ü) $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}X \cup \overline{R}Y$

(7A) $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}X \cap \underline{R}Y$

(7Ü) $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}X \cap \overline{R}Y$

(8A) $\underline{R}X = -\overline{R}(-X)$

(8Ü) $\overline{R}X = -\underline{R}(-X)$

(9A) $\underline{R}(X - Y) \subseteq \underline{R}X - \underline{R}Y$

(9Ü) $\overline{R}(X - Y) \supseteq \overline{R}X - \overline{R}Y$

(10) $\overline{R}X \cup \underline{R}(-X) = E$

(11) $\underline{R}X \cup \overline{R}(-X) = E$

(12A) $\underline{R}X \cup \underline{R}(-X) = -SnrX$

(12Ü) $\overline{R}X \cup \overline{R}(-X) = E$

(13) $\overline{R}X \cap \underline{R}(-X) = \emptyset$

(14) $\underline{R}X \cap \overline{R}(-X) = \emptyset$

(15A) $\underline{R}X \cap \underline{R}(-X) = \emptyset$

(15Ü) $\overline{R}X \cap \overline{R}(-X) = SnrX$

(16) $-(\underline{R}X \cup \underline{R}Y) = \overline{R}(-X) \cap \overline{R}(-Y)$

(17) $-(\underline{R}X \cup \overline{R}Y) = \overline{R}X \cap \underline{R}Y$

(18) $-(\overline{R}X \cup \underline{R}Y) = \underline{R}(-X) \cap \overline{R}(-Y)$

(19) $-(\overline{R}X \cup \overline{R}Y) = \underline{R}(-X) \cap \underline{R}(-Y)$

(20) $-(\underline{R}X \cap \underline{R}Y) = \overline{R}(-X) \cup \overline{R}(-Y)$

(21) $-(\underline{R}X \cap \overline{R}Y) = \overline{R}(-X) \cup \underline{R}(-Y)$

(22) $-(\overline{R}X \cap \underline{R}Y) = \underline{R}(-X) \cup \overline{R}(-Y)$

(23) $-(\overline{R}X \cap \overline{R}Y) = \underline{R}(-X) \cup \underline{R}(-Y)$

(24) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{R}X \subseteq \overline{R}Y$ ve $\underline{R}X \subseteq \underline{R}Y$

(25) X, $\mathcal{A}$ tahmin uzayında bir birleşik kümedir $\Leftrightarrow X = \overline{R}X$ ve $X = \underline{R}X$

2.2.3. Tahminlerin doğruluğu

Bir tahminin niteliğini açıklamak için bazı doğruluk ölçümlerine gireceğiz.

Tanım 2.2.3.1: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subset E$ olsun. $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kümelerinin sırasıyla kapsadığı atom kümelerinin sayısına $\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesinin iç ve dış ölçümü denir ve $\underline{\mu}(X)$ ve $\overline{\mu}(X)$ ile gösterilir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.3.2: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subset E$ olsun. X kümesi $\mathcal{A}$ tahmin uzayında bir birleşik küme yani $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ ise X kümesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında ölçülebilir küme aksi halde ölçülemez küme denir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.3.3: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subset E$ olsun.

$$\eta(X) = \frac{\underline{\mu}(X)}{\overline{\mu}(X)}, \qquad \overline{\mu}(X) \neq 0$$

sayısına $\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesinin tahmin doğruluğu denir (Pawlak 1982).

Açıkça görülür ki herhangi $\mathcal{A} = (E, R)$ tahmin uzayı ve herhangi $X \subset E$ kümesi için $0 \leq \eta(X) \leq 1$ dir.

$\mathcal{A}$ tahmin uzayında herhangi ölçülebilir bir X kümesi için $\eta(X) = 1$ dir. X kümesi $\mathcal{A}$ tahmin uzayında ölçülemez ise $0 \leq \eta(X) < 1$ dir. Özel olarak $\eta(X) = 0 \Leftrightarrow \underline{R}X = \emptyset$ dir.

$\mathcal{A} = (E, R)$ diskret tahmin uzayında herhangi X kümesi için $\eta(X) = 1$ dir ve bu mümkün olan en büyük doğruluk değeridir.

Örnek 2.2.3.4: $\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayıların kümesi olsun ve S ayırt edilemezlik bağıntısı $\mathbb{R}^+$ kümesi üzerinde

$$(0,1], (1,2], (2,3], \ldots$$

şeklinde verilen parçalanışlarla tanımlansın. $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^+, S)$ tahmin uzayında bir $n \geq 0$ için $n < r \leq n+1$ olmak üzere bir $(0, r)$ açık aralığının tahminleri

$n \geq 1$ için $\underline{R}\big((0,r)\big) = \bigcup_{i=0}^{n-1}(i, i+1] = (0, n]$ ve $n = 0$ için $\underline{R}\big((0,r)\big) = \emptyset$,

$$\overline{R}\big((0,r)\big) = \bigcup_{i=0}^{n}(i, i+1] = (0, n+1]$$

olarak bulunur. $\mathcal{A}$ tahmin uzayında $(0, r)$ açık aralığının iç ve dış ölçümleri

$$\underline{\mu}(0,r) = n$$
$$\overline{\mu}(0,r) = n+1$$

ve tahmin doğruluğu

$$\eta(0, r) = \frac{n}{n+1}$$

olarak bulunur (Pawlak 1982).

2.2.4. Kümelerin Rough denkliği

Tanım 2.2.4.1: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X, Y \subset E$ olsun. $\underline{R}X = \underline{R}Y$ ise X ve Y kümelerine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında rough-alt denktir denir ve $X \eqsim Y$ ile gösterilir. $\overline{R}X = \overline{R}Y$ ise X ve Y kümelerine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında rough-üst denk kümeler denir ve $X \simeq Y$ ile gösterilir. $\underline{R}X = \underline{R}Y$ ve $\overline{R}X = \overline{R}Y$ ise X ve Y kümelerine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında rough denktir denir ve $X \approx Y$ ile gösterilir (Pawlak 1982).

Önerme 2.2.4.2: $\eqsim$, $\simeq$ ve $\approx$ bağıntıları $P(E)$ üzerinde denklik bağıntılarıdır (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.4.3: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $\eqsim$, $\simeq$ ve $\approx$ bağıntıları $P(E)$ üzerinde denklik bağıntıları olsun. Elemanları E kümesinin alt kümeleri olan ve $\eqsim$, $\simeq$ ve $\approx$ bağıntıları sırasıyla $\underline{\mathcal{A}}^*$, $\overline{\mathcal{A}}^*$ ve $\mathcal{A}^*$ uzaylarında ayırt edilemezlik bağıntıları olmak üzere

$$\underline{\mathcal{A}}^* = (P(E), \eqsim)$$
$$\overline{\mathcal{A}}^* = (P(E), \simeq)$$
$$\mathcal{A}^* = (P(E), \approx)$$

olarak tanımlanan $\mathcal{A}^*$ ($\underline{\mathcal{A}}^*$, $\overline{\mathcal{A}}^*$) tahmin uzayına $\mathcal{A}$ nın (alt, üst) genişlemesi denir. Burada $\approx$ ($\eqsim$, $\simeq$) bağıntısının denklik sınıfları E kümesinin $\approx$ ($\eqsim$, $\simeq$) ayırt edilemezlik bağıntısına göre denk olan alt kümelerinin bir ailesidir (Pawlak 1982).

2.2.5. Rough denkliğin özellikleri

Herhangi $\mathcal{A} = (E, R)$ tahmin uzayı ve herhangi $X, Y \subseteq E$ rough kümeleri için aşağıdaki özellikler mevcuttur (Pawlak 1982):

i. $X \approx Y$ ise $X \cap Y \approx X \approx Y$ dir,
ii. $X \simeq Y$ ise $X \cup Y \simeq X \simeq Y$ dir,
iii. $X \simeq X'$ ve $Y \simeq Y'$ ise $X \cup Y \simeq X' \cup Y'$ dir,
iv. $X \approx X'$ ve $Y \approx Y'$ ise $X \cap Y \approx X' \cap Y'$ dir,
v. $X \approx Y$ ise $X - Y \approx \emptyset$ dir,
vi. $X - Y \simeq \emptyset$ ise $X = Y$ dir,
vii. $X \approx Y$ ise $-(-X) \approx Y$ dir
viii. $X \simeq Y$ ise $-(-X) \simeq Y$ dir,
ix. $X \approx Y$ ise $-(-X) \approx Y$ dir,
x. $X \simeq Y$ ise $X \cup -Y \simeq E$ dir,
xi. $X \simeq Y$ ise $X \cap -Y \simeq \emptyset$ dir.

Tanım 2.2.5.1: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $X \simeq E$ ise X kümesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında yoğundur denir. $X \approx \emptyset$ ise X kümesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında dardır denir. X hem yoğun hem de dar ise X kümesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında dağınıktır denir (Pawlak 1982).

Herhangi $\mathcal{A} = (E, R)$ tahmin uzayı ve herhangi $X, Y \subset E$ rough kümeleri için aşağıdaki özellikler mevcuttur (Pawlak 1982):

i. $X \subseteq Y$ ve $X \approx \emptyset$ ise $X \approx \emptyset$ dir,
ii. $X \subseteq Y$ ve $X \simeq E$ ise $Y \simeq E$ dir,
iii. $X \simeq E$ ise $-X \approx \emptyset$ dir,
iv. $X \approx \emptyset$ ise $-X \simeq E$ dir,
v. X bir dağınık küme ise $-X$ de dağınık kümedir yani $X \approx -X$ dir,

vi. X, Y yoğun ise $X \simeq Y$ dir,

vii. X, Y dar ise $X \eqsim Y$ dir,

viii. X, Y dağınık ise $X \approx Y$ dir,

ix. $X \eqsim \emptyset \Leftrightarrow \underline{R}X = \emptyset$,

x. $X \simeq \emptyset \Leftrightarrow X = \emptyset$,

xi. $X \eqsim E \Leftrightarrow X = E$,

xii. $X \simeq E \Leftrightarrow \overline{R}X = E$,

xiii. $\overline{R}X$, $X \simeq Y$ olacak şekildeki tüm Y kümelerinin birleşimidir,

xiv. $\underline{R}X$, $X \eqsim Y$ olacak şekildeki tüm Y kümelerinin arakesitidir.

2.2.6. Kümelerin Rough kapsanması

Tanım 2.2.6.1: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X, Y \subseteq E$ olsun. $\underline{R}X \subseteq \underline{R}Y$ ise X kümesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında Y kümesi tarafından rough alt-kapsanır denir ve $X \underset{\sim}{\subset} Y$ ile gösterilir. $\overline{R}X \subseteq \overline{R}Y$ ise X kümesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında Y kümesi tarafından rough üst-kapsanır denir ve $X \tilde{\subset} Y$ ile gösterilir. $\underline{R}X \subseteq \underline{R}Y$ ve $\overline{R}X \subseteq \overline{R}Y$ ise X kümesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında Y kümesi tarafından rough kapsanır denir ve $X \underset{\sim}{\tilde{\subset}} Y$ ile gösterilir (Pawlak 1982).

Önerme 2.2.6.2: $\underset{\sim}{\subset}, \tilde{\subset}, \underset{\sim}{\tilde{\subset}}$ rough kapsanmaları sıralama bağıntılarıdır (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.6.3: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\mathcal{A}$ tahmin uzayında X in tüm rough (alt, üst) kapsadığı kümelerinin ailesine $\mathcal{A}$ tahmin uzayında X kümesinin rough (alt, üst) kuvvet kümesi denir ve $P_{\mathcal{A}}(X)$ ($P_{\underline{\mathcal{A}}}(X)$, $P_{\overline{\mathcal{A}}}(X)$) ile gösterilir. Böylece

$$P_{\underline{\mathcal{A}}}(X) = \left\{ Y : Y \underset{\sim}{\subset} X \right\}$$

$$P_{\overline{\mathcal{A}}}(X) = \left\{ Y : Y \tilde{\subset} X \right\}$$

$$P_{\mathcal{A}}(X) = \left\{ Y : Y \underset{\sim}{\tilde{\subset}} X \right\}$$

olur (Pawlak 1982).

Önerme 2.2.6.4: Herhangi $\mathcal{A} = (E, R)$ tahmin uzayı ve herhangi $X, Y \subseteq E$ rough kümeleri için aşağıdaki özellikler mevcuttur (Pawlak 1982):

i. $X \eqsim Y$ ise $P_{\overline{\mathcal{A}}}(X) = P_{\underline{\mathcal{A}}}(Y)$ olur,

ii. $X \simeq Y$ ise $P_{\overline{\mathcal{A}}}(X) = P_{\overline{\mathcal{A}}}(Y)$ olur,

iii. $X \approx Y$ ise $P_{\mathcal{A}}(X) = P_{\mathcal{A}}(Y)$ olur,

iv. $X \underset{\sim}{\subset} Y$ ise $P_{\underline{\mathcal{A}}}(X) \subseteq P_{\underline{\mathcal{A}}}(Y)$ olur,

v. $X \overset{\sim}{\subseteq} Y$ ise $P_{\overline{\mathcal{A}}}(X) \subseteq P_{\overline{\mathcal{A}}}(Y)$ olur,

vi. $X \underset{\sim}{\overset{\sim}{\subset}} Y$ ise $P_{\mathcal{A}}(X) \subseteq P_{\mathcal{A}}(Y)$ olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEMLER

3.1. Tahmin Uzayı ile Üretilen Topoloji

Tanım 3.1.1: $\mathcal{A} = (E, R)$ bir tahmin uzayı olsun. $\mathcal{A}$ tahmin uzayı $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ topolojisini üretir. $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ topolojisine R bağıntısıyla üretilen topoloji veya $\mathcal{A}$ tahmin uzayı ile üretilen topoloji denir. E/R, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ için bir taban teşkil eder. Ayrıca $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ topolojik uzayında $\underline{R}X$ alt tahmin kümesi X kümesinin içi ve $\overline{R}X$ üst tahmin kümesi X kümesinin kapanışı olarak yorumlanabilir. Her $\underline{\mathcal{A}}^*$, $\overline{\mathcal{A}}^*$ ve $\mathcal{A}^*$ tahmin uzayları sırasıyla $\mathcal{T}_{\underline{\mathcal{A}}^*}$, $\mathcal{T}_{\overline{\mathcal{A}}^*}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{A}^*}$ topolojilerini üretirler ve böylece $\left(P(E), \mathcal{T}_{\underline{\mathcal{A}}^*}\right)$, $\left(P(E), \mathcal{T}_{\overline{\mathcal{A}}^*}\right)$ ve $(P(E), \mathcal{T}_{\mathcal{A}^*})$ topolojik uzaydırlar ve $P(E)/\eqsim$, $P(E)/\simeq$ ve $P(E)/\approx$ ilgili topolojik uzaylar için birer tabandırlar. Bir başka deyişle $P(E)/\eqsim$, $P(E)/\simeq$ ve $P(E)/\approx$ sırasıyla $\eqsim$, $\simeq$ ve $\approx$ bağıntılarının denklik sınıflarının aileleridirler yani $\underline{\mathcal{A}}^*$, $\overline{\mathcal{A}}^*$ ve $\mathcal{A}^*$ tahmin uzaylarındaki temel sınıfların aileleridirler. Böylece bir $\mathcal{A}^*$ ($\underline{\mathcal{A}}^*$, $\overline{\mathcal{A}}^*$) tahmin uzayının aynı denklik sınıfındaki kümeler bir bakıma benzerdir ve $\mathcal{A}^*$ ($\underline{\mathcal{A}}^*$, $\overline{\mathcal{A}}^*$) tahmin uzayında bu kümeleri ayırt edemeyiz (Pawlak 1982).

3.2. Topolojik Rough Uzay

Tanım 3.2.1 (Topolojik Rough Uzay): E boştan farklı bir küme, $X \subseteq E$ bir rough küme ve τ_1 ve τ_2 sırasıyla X rough kümesinin $G_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq G_2 \subseteq \overline{R}X$ şartını sağlayan G_1 ve G_2 alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ ailesine X üzerinde rough topoloji ve (X, τ) ikilisine topolojik rough uzay denir. Ayrıca τ topolojisinin her $G = (G_1, G_2)$ elemanına X rough kümesinin açık alt kümesi denir (Wu *et al.* 2007):

$[T_1]$ $\emptyset = (\emptyset, \emptyset) \in \tau$ ve $X \in \tau$ dur,

$[T_2]$ $\mathrm{G}^1 = (\mathrm{G}_1^1, \mathrm{G}_2^1), \mathrm{G}^2 = (\mathrm{G}_1^2, \mathrm{G}_2^2) \in \tau$ ise $\mathrm{G}^1 \cap \mathrm{G}^2 \in \tau$ dur,

$[T_3]$ $\mathrm{G}^{\mathrm{i}} = \left(\mathrm{G}_1^{\mathrm{i}}, \mathrm{G}_2^{\mathrm{i}}\right) \in \tau$ ise $\bigcup_i \mathrm{G}^{\mathrm{i}} \in \tau$, $i = \{1,2, \ldots\}$ dir.

Tanım 3.2.2: (X, τ) bir topolojik rough uzay, $A = (A_1, A_2) \subseteq X$ ve $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ olsun. $\left(\underline{R}X - A_1, \overline{R}X - A_2\right)$ kümesi X kümesinin açık alt kümesi ise A kümesine X kümesinin kapalı alt kümesi denir (Wu *et al.* 2007).

Teorem 3.2.3: (X, τ) bir topolojik rough uzay olsun. $\mathcal{F}$, X rough kümesinin tüm kapalı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki şartları sağlar (Wu *et al.* 2007):

$[K_1]$ $\emptyset = (\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$ ve $X \in \mathcal{F}$ dir,

$[K_2]$ $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ise $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ dir.

$[K_3]$ $F_i \in \mathcal{F}$ ise $\bigcap_i F_i \in \mathcal{F}$, $\ i \in \{1,2, \ldots\}$ dir.

İspat: $[K_1]$ $\left(\underline{R}X - \underline{R}X\,, \overline{R}X - \overline{R}X\right) = (\emptyset, \emptyset) = \emptyset \in \tau$ olduğundan $X = \left(\underline{R}X\,, \overline{R}X\right) \in \mathcal{F}$ dir. Yine $\left(\underline{R}X - \emptyset, \overline{R}X - \emptyset\right) = \left(\underline{R}X\,, \overline{R}X\right) = X \in \tau$ dur; bu nedenle $\emptyset \in \mathcal{F}$ dir.

$[K_2]$ $F_1 = \left(\underline{R}F_1, \overline{R}F_1\right)$, $F_2 = \left(\underline{R}F_2, \overline{R}F_2\right) \in \mathcal{F}$ olduğunu farz edelim. Bu durumda $\underline{R}F_1, \underline{R}F_2 \in \mathcal{F}_1$, $\overline{R}F_1, \overline{R}F_2 \in \mathcal{F}_2$ dir ve $\underline{R}F_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}F_1 \subseteq \overline{R}X$ ve $\underline{R}F_2 \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}F_2 \subseteq \overline{R}X$ şartlarını sağlarlar. $\underline{R}X - \left(\underline{R}F_1 \cup \underline{R}F_2\right) = \left(\underline{R}X - \underline{R}F_1\right) \cap \left(\underline{R}X - \underline{R}F_2\right)$, $\overline{R}X - \left(\overline{R}F_1 \cup \overline{R}F_2\right) = \left(\overline{R}X - \overline{R}F_1\right) \cap \left(\overline{R}X - \overline{R}F_2\right)$ ve aynı zamanda $\underline{R}X - \underline{R}F_1$, $\underline{R}X - \underline{R}F_2$, $\overline{R}X - \overline{R}F_1$ ve $\overline{R}X - \overline{R}F_2$ açık kümeler olduğundan $\underline{R}X - \left(\underline{R}F_1 \cup \underline{R}F_2\right)$ ve $\overline{R}X - \left(\overline{R}F_1 \cup \overline{R}F_2\right)$ kümeleri de açık kümelerdir. Yine $\underline{R}F_1 \cup \underline{R}F_2$ ve $\overline{R}F_1 \cup \overline{R}F_2$ sırasıyla $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ nun kapalı kümeleridir. Bilinen küme özelliklerinden $\underline{R}F_1 \cup \underline{R}F_2 \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}F_1 \cup \overline{R}F_2 \subseteq \overline{R}X$ yazılır. Yine rough kümenin birleşme işleminden $F_1 \cup F_2 = \left(\underline{R}F_1 \cup\right.$

$\underline{R}F_2, \overline{R}F_1 \cup \overline{R}F_2)$ yazılır; bu yüzden $F_1 \cup F_2$ X in bir kapalı kümesidir, yani $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ dir.

$[K_3]$ $F_i = (\underline{R}F_i, \overline{R}F_i) \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $\underline{R}F_i$ ve $\overline{R}F_i$ kapalı kümelerdir ve $i \in \{1,2,\dots\}$ olmak üzere $\underline{R}F_i \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}F_i \subseteq \overline{R}X$ şartlarını sağlarlar. $\underline{R}X - \underline{R}F_i$ ve $\overline{R}X - \overline{R}F_i$ kümelerine bağlı olarak $\underline{R}X - (\bigcap_i \underline{R}F_i) = \bigcup_i (\underline{R}X - \underline{R}F_i)$ ve $\overline{R}X - (\bigcap_i \overline{R}F_i) = \bigcup_i (\overline{R}X - \overline{R}F_i)$ kümeleri açık kümelerdir. $\bigcap_i \underline{R}F_i$ ve $\bigcap_i \overline{R}F_i$ kapalı kümelerdir. Bilinen küme özelliklerinden hareketle $\bigcap_i \underline{R}F_i \subseteq \underline{R}X \subseteq \bigcap_i \overline{R}F_i \subseteq \overline{R}X$ yazılır. $\bigcap_i F_i = (\bigcap_i \underline{R}F_i, \bigcap_i \overline{R}F_i)$ yazılır; buradan $\bigcap_i F_i$ X in bir kapalı kümesidir, yani $\bigcap_i F_i \in \mathcal{F}$ dir. ■

Tanım 3.2.4: (X, τ) bir topolojik rough uzay ve $A = (A_1, A_2) \subseteq X$ ve $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ olsun. $\overline{A_1}$ kümesi A kümesinin τ_1-kapanışı ve $\overline{A_2}$ kümesi A kümesinin τ_2-kapanışı olmak üzere $\overline{A} = (\overline{A_1}, \overline{A_2})$ kümesine $A = (A_1, A_2)$ kümesinin τ-kapanışı veya kısaca kapanışı denir (Wu *et al.* 2007).

Örnek 3.2.5: $\Omega = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, n \in \mathbb{Z}^+, m \le n\right\}$ olsun. Ω kümesi üzerinde Ω/R bölüm kümesinin elemanları $\{0\}$ kümesi ve ayrıca 0 ve 1 arasında farklı yığılma noktalarına sahip olan kümeler olacak şekilde yani

$$\Omega/R = \left\{\{0\}, \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+1}{n+2}, \dots\right\}, \left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{2n+1}{3n+2}, \dots\right\}, \dots\right\}$$

şeklinde bir R denklik bağıntısı tanımlansın.

$$X = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n+2}{n+3}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \dots, \frac{2n+3}{3n+5}, \dots\right\}$$

$$A_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

$$A_2 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n+2}{n+3}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{2n+1}{3n+2}, \dots\right\}$$

olarak verildiğinde

$$\underline{R}X = \left\{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$$

$$\overline{R}X = \left\{0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\} \cup \left\{\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n+1}{n+2},\dots\right\} \cup \left\{\frac{3}{5},\frac{5}{8},\dots,\frac{2n+1}{3n+2},\dots\right\}$$

olup $\overline{A_1} = \underline{R}X$ ve $\overline{A_2} = \overline{R}X$ yazılır. Yani A_1 ve A_2 kümeleri sırasıyla $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kümelerinin yoğun alt kümeleridirler. Dolayısıyla $A = (A_1, A_2)$ kümesi $X = \left(\underline{R}X, \overline{R}X\right)$ kümesinin yoğun alt kümesidir (Wu *et al.* 2007).

Teorem 3.2.6: (X, τ) bir topolojik rough uzay ve $A, B \subseteq X$ ve olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır (Wu *et al.* 2007):

i. $\overline{\emptyset} = \emptyset$

ii. $A \underset{\sim}{\tilde{\subseteq}} \overline{A} \underset{\sim}{\tilde{\subseteq}} X$

iii. $\overline{\overline{A}} \approx \overline{A}$

iv. $\overline{A \cup B} \approx \overline{A} \cup \overline{B}$

İspat: i. Tanımdan açıktır.

ii. $A \subseteq X$ ve $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ olsun. Bu durumda kapanış tanımından $A_1 \subseteq \overline{A_1} \subseteq \underline{R}X$ ve $A_2 \subseteq \overline{A_2} \subseteq \overline{R}X$ yazılır. Dolayısıyla $A \underset{\sim}{\tilde{\subseteq}} \overline{A} \underset{\sim}{\tilde{\subseteq}} X$ olur.

iii. A_1 ve A_2 kümelerinin kapanış tanımından $x_1 \in \overline{\overline{A_1}}$ ise x_1 noktasının her V_{x_1} komşuluğunda bir $y_1 \in \overline{A_1}$ noktası ve y_1 noktasının her W_{y_1} komşuluğunda bir $z_1 \in A_1$ noktası vardır. Benzer şekilde $x_2 \in \overline{\overline{A_2}}$ ise x_2 noktasının her V_{x_2} komşuluğunda bir $y_2 \in \overline{A_2}$ noktası ve y_2 noktasının her W_{y_2} komşuluğunda bir $z_2 \in A_2$ noktası vardır. Buradan $W_{y_1} \subseteq V_{x_1}$ ve $W_{y_2} \subseteq V_{x_2}$ olacak şekilde W_{y_1} ve W_{y_2} seçebiliriz. Dolayısıyla x_1 noktasının her V_{x_1} komşuluğunda bir $z_1 \in A_1$ noktası ve x_2 noktasının her V_{x_2} komşuluğunda bir $z_2 \in A_2$ noktası vardır. Yığılma noktası tanımına dayanarak $x_1 \in \overline{A_1}$ ve $x_2 \in \overline{A_2}$ elde edilir. Buradan $\overline{\overline{A_1}} \subseteq \overline{A_1}$ ve $\overline{\overline{A_2}} \subseteq \overline{A_2}$ olur. Dolayısıyla $\overline{\overline{A}} \underset{\sim}{\subseteq} \overline{A}$ olur. Teoremin **ii.** önermesinden $\overline{A} \underset{\sim}{\subseteq} \overline{\overline{A}}$ yazılır. Böylece $\overline{\overline{A}} \approx \overline{A}$ olur.

iv. $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2) \subseteq X$, $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ ve $B_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq B_2 \subseteq \overline{R}X$ olsun. $A_1 \subseteq A_1 \cup B_1$, $A_2 \subseteq A_2 \cup B_2$ ve kapanış tanımından $\overline{A_1} \subseteq \overline{A_1 \cup B_1}$ ve $\overline{A_2} \subseteq \overline{A_2 \cup B_2}$ ve benzer şekilde $\overline{B_1} \subseteq \overline{A_1 \cup B_1}$ ve $\overline{B_2} \subseteq \overline{A_2 \cup B_2}$ olur. Buradan $\overline{A_1} \cup \overline{B_1} \subseteq \overline{A_1 \cup B_1}$, $\overline{A_2} \cup \overline{B_2} \subseteq \overline{A_2 \cup B_2}$ yazılır. Böylece $\overline{A} \cup \overline{B} = \left(\overline{A_1} \cup \overline{B_1}, \overline{A_2} \cup \overline{B_2}\right)$, $\overline{A \cup B} = \left(\overline{A_1 \cup B_1}, \overline{A_2 \cup B_2}\right)$ olmak üzere

$$\overline{A} \cup \overline{B} \underset{\sim}{\subseteq} \overline{A \cup B} \tag{1}$$

yazılır.

Şimdi de çelişki yoluyla $\overline{A \cup B} \underset{\sim}{\subseteq} \overline{A} \cup \overline{B}$ olduğu gösterilir:

$x_1 \in \overline{A_1 \cup B_1}$ ama $x_1 \notin \overline{A_1}$ ve $x_1 \notin \overline{B_1}$, $x_2 \in \overline{A_2 \cup B_2}$ ama $x_2 \notin \overline{A_2}$ ve $x_2 \notin \overline{B_2}$ olsun. Kapanış tanımından A_1 kümesinin herhangi bir noktasını içermeyen x_1 noktasının bir M_{x_1} komşuluğu ve A_2 kümesinin herhangi bir noktasını içermeyen x_2 noktasının bir M_{x_2} komşuluğu vardır. Aynı zamanda B_1 kümesinin herhangi bir noktasını içermeyen x_1 noktasının bir V_{x_1} komşuluğu ve B_2 kümesinin herhangi bir noktasını içermeyen x_2 noktasının bir V_{x_2} komşuluğu vardır. $M_{x_1} \cap V_{x_1}$ kümesi x_1 noktasının ve $M_{x_2} \cap V_{x_2}$ kümesi x_2 noktasının bir komşuluğu olup sırasıyla $A_1 \cup B_1$ ve $A_2 \cup B_2$ kümelerinin herhangi bir noktasını içermezler. Bu durumda $x_1 \in \overline{A_1 \cup B_1}$ ve $x_2 \in \overline{A_2 \cup B_2}$ kabulleri ile bir çelişki oluşturur. Bu yüzden $x_1 \in \overline{A_1}$ ya da $x_1 \in \overline{B_1}$ ve $x_2 \in \overline{A_2}$ ya da $x_2 \in \overline{B_2}$ dir. Buna göre $\overline{A_1 \cup B_1} \subseteq \overline{A_1} \cup \overline{B_1}$ ve $\overline{A_2 \cup B_2} \subseteq \overline{A_2} \cup \overline{B_2}$ olur. Buradan

$$\overline{A\cup B}\,\underset{\sim}{\tilde{\subset}}\,\overline{A}\cup\overline{B} \tag{2}$$

olur. Böylece (1) ve (2) den $\overline{A \cup B} \approx \overline{A} \cup \overline{B}$ yazılır. ■

Önerme 3.2.7: (X, τ) bir topolojik rough uzay, $A = (A_1, A_2) \subseteq X$ ve $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ olsun. A kümesinin X in kapalı alt kümesi olması için gerek ve yeter şart $A \approx \overline{A}$ olmasıdır (Wu *et al.* 2007).

İspat: A bir kapalı küme ise A_1 ve A_2 sırasıyla $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ in kapalı kümeleridirler. Bu nedenle $\underline{R}X - A_1$ ve $\overline{R}X - A_2$ açık kümelerdir. $A_1 \neq \overline{A_1}$ ve $A_2 \neq \overline{A_2}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\overline{A_1} - A_1 \neq \emptyset$ ve $\overline{A_2} - A_2 \neq \emptyset$ olur. $x_1 \in \overline{A_1} - A_1$ ve $x_2 \in \overline{A_2} - A_2$ olduğunu farz edelim; buradan $x_1 \in \underline{R}X - A_1$ ve $x_2 \in \overline{R}X - A_2$ dir. Bu halde $x_1 \in G \subseteq \underline{R}X - A_1$ olacak şekilde $\exists G \in \tau_1$ ve $x_2 \in H \subseteq \overline{R}X - A_2$ olacak şekilde $\exists H \in \tau_2$ vardır. Yine x_1 ve x_2 sırasıyla A_1 ve A_2 kümelerinin yığılma noktaları olduğundan $G \cap A_1 \neq \emptyset$ ve $H \cap A_2 \neq \emptyset$ yazılır. Böylece $G \subseteq \underline{R}X - A_1$ ve $H \subseteq \overline{R}X - A_2$ çelişkileri vardır; bu yüzden sadece $\overline{A_1} - A_1 = \emptyset$ ve $\overline{A_2} - A_2 = \emptyset$, yani $A_1 = \overline{A_1}$ ve $A_2 = \overline{A_2}$ yazılır; bu durumda $A \approx \overline{A}$ olur.

Tersine $A \approx \overline{A}$ olursa $A_1 = \overline{A_1}$ ve $A_2 = \overline{A_2}$ yazılır. Ancak $x_1 \in \underline{R}X - A_1$ ve $x_2 \in \overline{R}X - A_2$ için x_1 ve x_2 noktalarını ihtiva eden herhangi açık kümeler sırasıyla $\underline{R}X - A_1$ ve $\overline{R}X - A_2$ tarafından ihtiva edilmezse $x_1 \in \overline{A_1} - A_1$ ve $x_2 \in \overline{A_2} - A_2$ olur. Böylece $A_1 \neq \overline{A_1}$ ve $A_2 \neq \overline{A_2}$ çelişkileri oluşur; bu nedenle $x_1 \in G \subseteq \underline{R}X - A_1$ olacak şekilde $\exists G \in \tau$ ve $x_2 \in H \subseteq \overline{R}X - A_2$ olacak şekilde $\exists H \in \tau$ vardır. Buradan $\underline{R}X - A_1$ ve $\overline{R}X - A_2$ açık kümelerdir; bu yüzden A_1 ve A_2 kapalı kümelerdir ve böylece $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ olduğundan $A = (A_1, A_2)$ X in kapalı alt kümesidir. ■

Tanım 3.2.8: X bir rough küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kümelerinin alt kümelerinin sırasıyla $\mathfrak{B}_1 = \{\mathcal{B}_{\alpha_1}\}$ ve $\mathfrak{B}_2 = \{\mathcal{B}_{\alpha_2}\}$ ailelerine $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kümelerinin topolojik tabanları denir. $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \{(\mathcal{B}_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_2})\}$ taban ikilisine X rough kümesinin topolojik tabanı denir (Wu *et al.* 2007):

(T_1) $\underline{R}X = \bigcup_{\alpha_1} \mathcal{B}_{\alpha_1}$, $\overline{R}X = \bigcup_{\alpha_2} \mathcal{B}_{\alpha_2}$.

(T_2) $x \in \mathcal{B}_{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_{\beta_1}$ ve $y \in \mathcal{B}_{\alpha_2} \cap \mathcal{B}_{\beta_2}$ ise $x \in \mathcal{B}_{\gamma_1} \subseteq \mathcal{B}_{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_{\beta_1}$ ve $y \in \mathcal{B}_{\gamma_2} \subseteq \mathcal{B}_{\alpha_2} \cap \mathcal{B}_{\beta_2}$ olacak şekilde $\mathcal{B}_{\gamma_1} \in \mathfrak{B}_1$ ve $\mathcal{B}_{\gamma_2} \in \mathfrak{B}_2$ vardır.

Tanım 3.2.9: X bir rough küme, $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \{(\mathcal{B}_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_2})\}$, X rough kümesinin bir tabanı, $A = (A_1, A_2) \subseteq X$ ve $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ olsun. A kümesi $\mathfrak{B}$ tabanının bazı elemanlarının birleşimi ise A alt kümesine $\mathfrak{B}$ ye göre açık kümedir denir (Wu *et al.* 2007).

Önerme 3.2.10: X bir rough küme, $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \{(\mathcal{B}_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_2})\}$, X rough kümesinin bir tabanı, $A = (A_1, A_2) \subseteq X$ ve $A_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq A_2 \subseteq \overline{R}X$ olsun.

i. A, $\mathfrak{B}$ topolojik tabanına göre açık kümedir $\Leftrightarrow$ A_1 ve A_2 aynı zamanda $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ topolojik tabanına göre açık kümelerdir.

ii. A_1, $\mathfrak{B}_1$ topolojik tabanlarına göre açık kümedir $\Leftrightarrow$ Her $a_1 \in A_1$ noktası için $a_1 \in \mathcal{B}_{\alpha_1} \subseteq A_1$ olmasını sağlayacak $\mathcal{B}_{\alpha_1} \in \mathfrak{B}_1$ vardır. A_2, $\mathfrak{B}_2$ topolojik tabanlarına göre açık kümedir $\Leftrightarrow$ Her $a_2 \in A_2$ noktası için $a_2 \in \mathcal{B}_{\alpha_2} \subseteq A_2$ olmasını sağlayacak $\mathcal{B}_{\alpha_2} \in \mathfrak{B}_2$ vardır (Wu *et al.* 2007).

İspat: i. Tanımdan A, $\mathfrak{B}$ topolojik tabanına göre açık kümedir $\Leftrightarrow$ A, $\mathfrak{B}$ nin bazı elemanlarının birleşimidir, yani $A = \left(\bigcup_{\alpha_1} \mathcal{B}_{\alpha_1}, \bigcup_{\alpha_2} \mathcal{B}_{\alpha_2}\right)$ $\Leftrightarrow$ A_1 ve A_2 aynı zamanda $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ topolojik tabanına göre açık kümelerdir.

ii. A_1, $\mathfrak{B}_1$ topolojik tabanlarına göre açık kümedir $\Leftrightarrow$ $A_1 = \bigcup_{\alpha_1} \mathcal{B}_{\alpha_1}$ $\Leftrightarrow$ Her $a_1 \in A_1$ noktası için $a_1 \in \mathcal{B}_{\alpha_1} \subseteq A_1$ olmasını sağlayacak $\mathcal{B}_{\alpha_1} \in \mathfrak{B}_1$ vardır. Benzer şekilde A_2,

$\mathfrak{B}_2$ topolojik tabanlarına göre açık kümedir $\Leftrightarrow A_2 = \bigcup_{\alpha_2} \mathcal{B}_{\alpha_2} \Leftrightarrow$ Her $a_2 \in A_2$ noktası için $a_2 \in \mathcal{B}_{\alpha_2} \subseteq A_2$ olmasını sağlayacak $\mathcal{B}_{\alpha_2} \in \mathfrak{B}_2$ vardır. ■

Teorem 3.2.11: $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \{(\mathcal{B}_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_2})\}$, X rough kümesinin bir topolojik tabanı olsun. $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\mathfrak{B}$ topolojik tabanına göre tüm açık kümelerin bir ailesi ise τ, X rough kümesinin bir topolojisidir ve $\mathfrak{B} \underset{\sim}{\subseteq} \tau$ dir. Özel olarak $\mathfrak{B}$ tabanının kendisi bir topolojiye sahipse $\mathfrak{B} \approx \tau$ dur (Wu *et al.* 2007).

Burada τ topolojisine $\mathfrak{B}$ topolojik tabanı ile üretilen bir topoloji denir ve $\mathfrak{B}$ ailesine (X, τ) topolojik rough uzayın topolojik tabanı denir (Wu *et al.* 2007).

İspat: Topolojik tabanın i. özelliğine ve Önerme 3.2.10'a bağlı olarak $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ sırasıyla $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ topolojik tabanlarına göre açık kümelerdir, yani $\underline{R}X \in \tau_1$ ve $\overline{R}X \in \tau_2$ dir ve bu durumda $X = (\underline{R}X, \overline{R}X)$, $\mathfrak{B}$ topolojik tabanına göre bir açık kümedir. Yine boş küme $\mathfrak{B}$ nin sıfır sayıdaki elemanının bir birleşimidir ve ayrıca $\mathfrak{B}$ topolojik tabanına göre bir açık kümedir. Böylece τ $[T_1]$ şartını sağlar.

Şimdi τ nun $[T_2]$ şartını sağladığını yani τ nun $G_1 = (\underline{R}G_1, \overline{R}G_1)$ ve $G_2 = (\underline{R}G_2, \overline{R}G_2)$ elemanları için $G_1 \cap G_2 = (\underline{R}G_1 \cap \underline{R}G_2, \overline{R}G_1 \cap \overline{R}G_2)$ arakesitinin de τ ailesinin bir elemanı olduğunu gösterelim.

$G_1, G_2 \in \tau$ olduğundan $\underline{R}G_1$ ve $\overline{R}G_1$, $\underline{R}G_2$ ve $\overline{R}G_2$ sırasıyla $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ ye göre açık kümelerdir ve $\underline{R}G_1 \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}G_1 \subseteq \overline{R}X$ ve $\underline{R}G_2 \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}G_2 \subseteq \overline{R}X$ şartlarını sağlarlar.

$x \in \underline{R}G_1 \cap \underline{R}G_2$ olduğunu farz edelim. Önerme 3.2.10'dan $x \in \mathcal{B}_{\alpha_1}^{(i)} \subseteq \underline{R}G_i$ $(i = 1,2)$ olmasını sağlayan bir $\mathcal{B}_{\alpha_1}^{(i)} \in \mathfrak{B}_1$ vardır. Topolojik tabanın **ii.** özelliğine göre $x \in \mathcal{B}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{B}_{\alpha_1}^{(1)} \cap \mathcal{B}_{\alpha_1}^{(2)} \subseteq \underline{R}G_1 \cap \underline{R}G_2$ olmasını sağlayan $\mathcal{B}_{\alpha_1} \in \mathfrak{B}_1$ vardır. Yine Önerme 3.2.10'dan $\underline{R}G_1 \cap \underline{R}G_2$, $\mathfrak{B}_1$ topolojik tabanına göre bir açık kümedir, yani $\underline{R}G_1 \cap \underline{R}G_2 \in \tau_1$ dir.

Benzer şekilde $\overline{R}G_1 \cap \overline{R}G_2 \in \tau_2$ dir. Yukarıda verilenlerden $\underline{R}G_1 \cap \underline{R}G_2 \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}G_1 \cap \overline{R}G_2 \subseteq \overline{R}X$ yazılır. Önerme 3.2.10'dan $G_1 \cap G_2$, $\mathfrak{B}$ topolojik tabanına göre bir açık kümedir, yani $G_1 \cap G_2 \in \tau$ dur.

τ nun $[T_3]$ şartını sağladığını gösterelim. $G_i = \left(\underline{R}G_i, \overline{R}G_i\right) \in \tau$ olduğunu ve $\underline{R}G_i$ ve $\overline{R}G_i$ kümelerinin sırasıyla $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ ye göre açık kümeler olduğunu ve $i \in \{1,2, \ldots\}$ olmak üzere $\underline{R}G_i \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}G_i \subseteq \overline{R}X$ şartını sağladıklarını farz edelim. $\bigcup_i \underline{R}G_i = \bigcup_i \bigcup_{\alpha_1} \mathcal{B}^i_{\alpha_1} = \bigcup_{\gamma_1} \mathcal{B}_{\gamma_1}$ ve $\bigcup_i \overline{R}G_i = \bigcup_i \bigcup_{\alpha_2} \mathcal{B}^i_{\alpha_2} = \bigcup_{\gamma_2} \mathcal{B}_{\gamma_2}$ olduğundan ve tabana göre açık küme tanımından $\bigcup_i \underline{R}G_i$, $\mathfrak{B}_1$ e göre açık, $\bigcup_i \overline{R}G_i$, $\mathfrak{B}_2$ ye göre açık ve $\bigcup_i \underline{R}G_i \subseteq \underline{R}X \subseteq \bigcup_i \overline{R}G_i \subseteq \overline{R}X$ dir. $\bigcup_i G_i = \left(\bigcup_i \underline{R}G_i, \bigcup_i \overline{R}G_i\right)$ olduğundan $\bigcup_i G_i \in \tau$ olur. Böylece τ topoloji olma şartlarını sağlar; dolayısıyla τ, X in bir topolojisidir.

$\forall A_1 \in \tau_1$ için A_1, $\mathfrak{B}_1$ in bazı elemanlarının birleşimi olduğundan $\mathfrak{B}_1 \subseteq \tau_1$ olduğu açıktır. Benzer şekilde $\mathfrak{B}_2 \subseteq \tau_2$ dir. Bu sebepten $\mathfrak{B} \underset{\sim}{\subseteq} \tau$ dur.

Özel olarak $\mathfrak{B}$ nin kendisi bir topoloji ise $\forall A_1^{(i)} \in \tau_1$ ve $\mathcal{B}_1^{(j)} \in \mathfrak{B}_1$ için $\bigcup_i A_1^{(i)} \subseteq \bigcup_j \mathcal{B}_1^{(j)}$ yazılır, yani $\tau_1 \subseteq \mathfrak{B}_1$ dir. Benzer şekilde $\tau_2 \subseteq \mathfrak{B}_2$ dir. Buradan $\tau \underset{\sim}{\subseteq} \mathfrak{B}$ dir. $\mathfrak{B} \underset{\sim}{\subseteq} \tau$ olduğu bilindiğine göre $i, j \in \{1,2, \ldots\}$ için $\mathfrak{B} \approx \tau$ yazılır. ■

Tanım 3.2.12: (X, τ) bir topolojik rough uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesinin $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ topolojik tabanları aynı topolojiyi üretirlerse $\mathfrak{B}_1$ ve $\mathfrak{B}_2$ topolojik tabanları denktir denir (Wu *et al.* 2007).

Teorem 3.2.13: $\mathfrak{B}^{(1)} = \left(\mathfrak{B}_1^{(1)}, \mathfrak{B}_2^{(1)}\right) = \left\{\left(\mathfrak{B}_{\alpha_1}^{(1)}, \mathfrak{B}_{\alpha_2}^{(1)}\right)\right\}$ ve $\mathfrak{B}^{(2)} = \left(\mathfrak{B}_1^{(2)}, \mathfrak{B}_2^{(2)}\right) = \left\{\left(\mathfrak{B}_{\alpha_1}^{(2)}, \mathfrak{B}_{\alpha_2}^{(2)}\right)\right\}$, X rough kümesinin iki topolojik tabanı olsun ve $i = 1,2$ için $\mathfrak{B}_{\alpha_1}^{(i)} \subseteq \underline{R}X \subseteq \mathfrak{B}_{\alpha_2}^{(i)} \subseteq \overline{R}X$ şartını sağlasın. $\mathfrak{B}^{(1)}$ ve $\mathfrak{B}^{(2)}$ denktirler $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}^{(1)}$ in her $\left(\mathcal{B}_{\alpha_1}^{(1)}, \mathcal{B}_{\alpha_2}^{(1)}\right)$ elemanı $\mathfrak{B}^{(2)}$ ye göre açıktır ve $\mathfrak{B}^{(2)}$ nin her $\left(\mathcal{B}_{\alpha_1}^{(2)}, \mathcal{B}_{\alpha_2}^{(2)}\right)$ elemanı $\mathfrak{B}^{(1)}$ e göre açıktır (Wu *et al.* 2007).

İspat: (⇒) Hipotezden $\tau(\mathfrak{B}^{(1)}) \approx \tau(\mathfrak{B}^{(2)})$ dir. Bununla beraber $\mathfrak{B}^{(1)} \underset{\sim}{\subset} \tau(\mathfrak{B}^{(1)})$ ve $\mathfrak{B}^{(2)} \underset{\sim}{\subset} \tau(\mathfrak{B}^{(2)})$ olduğu açıktır. Bu nedenle bilinen özelliklerden $\mathfrak{B}^{(1)} \underset{\sim}{\subset} \tau(\mathfrak{B}^{(2)})$ ve $\mathfrak{B}^{(2)} \underset{\sim}{\subset} \tau(\mathfrak{B}^{(1)})$ elde edilir.

(⇐) $\mathfrak{B}^{(1)}$ ve $\mathfrak{B}^{(2)}$ sırasıyla $\tau(\mathfrak{B}^{(1)})$ ve $\tau(\mathfrak{B}^{(2)})$ topolojilerini üretsin. Topolojik taban ile üretilen topoloji tanımı ve Tanım 3.2.9'dan $\tau(\mathfrak{B}^{(2)})$ nin her elemanı $\mathfrak{B}^{(2)}$ nin bazı elemanlarının birleşimidir. Hipotez ve Tanım 3.2.9'dan $\mathfrak{B}^{(2)}$ nin her elemanı $\mathfrak{B}^{(1)}$ in bazı elemanlarının birleşimidir. Bu yüzden $\tau(\mathfrak{B}^{(2)}) \underset{\sim}{\subset} \tau(\mathfrak{B}^{(1)})$ yazılır. Benzer şekilde $\tau(\mathfrak{B}^{(1)}) \underset{\sim}{\subset} \tau(\mathfrak{B}^{(2)})$ yazılır. Bu nedenle $\tau(\mathfrak{B}^{(1)}) \approx \tau(\mathfrak{B}^{(2)})$ olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.3. Rough Homeomorfizm ve Topolojik Rough Uzayda İnvaryantlar

Tanım 3.3.1: (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik rough uzay $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $f: X \to Y$ dönüşümü X kümesinin her açık alt kümesini (kapalı alt kümesini) Y kümesinin bir açık alt kümesine (kapalı alt kümesine) dönüştürüyorsa f ye açık dönüşüm (kapalı dönüşüm) adı verilir (Wu *et al.* 2007).

Tanım 3.3.2 (Rough Homeomorfizm): X ve Y iki topolojik rough uzay olsun. $f_1: \underline{R}X \to \underline{R}Y$ ve $f_2: \overline{R}X \to \overline{R}Y$ dönüşümlerinin bire-bir, örten ve açık olduğunu farz edelim. Bu durumda f_1 dönüşümüne $\underline{R}X$ den $\underline{R}Y$ ye bir homeomorfizm ve f_2 dönüşümüne $\overline{R}X$ den $\overline{R}Y$ ye bir homeomorfizm denir. Ayrıca f_1 ve f_2 sırasıyla X den Y ye alt rough homeomorfizm ve üst rough homeomorfizm olarak adlandırılır. Burada $f = (f_1, f_2)$ dönüşüm ikilisine X den Y ye rough homeomorfizm denir ve $f: X \to Y$ ile gösterilir. Böyle bir f homeomorfizmi varsa X ve Y ye rough homeomorfturlar veya topolojik rough denktirler denir ve $f: X \cong Y$ veya $X \cong Y$ ile gösterilir. f_1, $\underline{R}X$ den $\underline{R}X$ e bir $1_{\underline{R}X}$ birim dönüşümü ve f_2, $\overline{R}X$ dan $\overline{R}X$ ya bir $1_{\overline{R}X}$ birim dönüşümü ise f, X den X e bir $(1_{\underline{R}X}, 1_{\overline{R}X})$ birim dönüşümü olarak adlandırılır ve $1_X = (1_{\underline{R}X}, 1_{\overline{R}X})$ ile gösterilir (Wu *et al.* 2007).

Tanım 3.3.3: X bir topolojik rough uzay olsun. $\underline{R}X$ kümesinin herhangi $\mathcal{U}_1$ açık örtüsü için her zaman bir $\mathcal{U}_1^0$ sonlu alt örtüsü varsa $\underline{R}X$ kümesine kompakt küme ve ayrıca X in kompakt alt tahmini denir. Aynı zamanda $\overline{R}X$ kümesinin herhangi $\mathcal{U}_2$ açık örtüsü için her zaman bir $\mathcal{U}_2^0$ sonlu alt örtüsü varsa $\overline{R}X$ kümesine kompakt küme ve ayrıca X in kompakt üst tahmini denir. Bu durumda X kümesine kompakt rough küme ve ayrıca kompakt rough uzay adı verilir. $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ sıralı ikilisine X in bir açık örtüsü ve $(\mathcal{U}_1^0, \mathcal{U}_2^0)$ sıralı ikilisine sonlu örtü sıralı ikilisi denir (Wu *et al.* 2007).

Tanım 3.3.4: X bir topolojik rough uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\underline{R}A$ alt uzayının herhangi bir $\mathcal{U}_1 = \{V_{\alpha_i}\}$ $(i \in \{1,2,\ldots\})$ açık örtüsü için her zaman $\underline{R}A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha_j}$ olacak şekilde $\underline{R}A$ alt uzayının bir $\mathcal{U}_1^0 = \{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$ sonlu alt örtüsü varsa $\underline{R}A$ alt uzayına kompakttır denir. Aynı zamanda $\overline{R}A$ alt uzayı da kompakt ise A ya X in kompakt alt kümesi denir (Wu *et al.* 2007).

Önerme 3.3.5: X bir topolojik rough uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A, X in kompakt alt kümesidir $\Leftrightarrow$ X de A nın herhangi bir açık örtüsü için her zaman X de A nın bir sonlu alt örtüsü vardır (Wu *et al.* 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}_1 = \{V_\alpha\}$ nın $\underline{R}X$ de $\underline{R}A$ nin bir açık örtüsü olduğunu farz edelim. Bu durumda $\mathcal{U}_1 | \underline{R}A = \{V_\alpha \cap \underline{R}A\}$, $\underline{R}A$ nın bir örtüsüdür ve tüm $V_\alpha \cap \underline{R}A$ kümeleri $\underline{R}A$ alt uzayının açık kümeleridir. Hipotezden bir $\{V_{\alpha_1} \cap \underline{R}A, \ldots, V_{\alpha_n} \cap \underline{R}A\}$ sonlu alt örtüsü vardır, yani $\underline{R}A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (V_{\alpha_i} \cap \underline{R}A)$ dır. Bu nedenle $\underline{R}A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$ dir, yani $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$, $\underline{R}X$ de $\underline{R}A$ nın bir sonlu alt örtüsüdür. Benzer şekilde $\overline{R}X$ de $\overline{R}A$ nın herhangi bir açık örtüsü için $\overline{R}X$ de $\overline{R}A$ nın da her zaman bir sonlu alt örtüsü vardır. Böylece X de A nın herhangi bir açık örtüsü için daima X de A nın bir sonlu alt örtüsü vardır.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{V}_1 = \{W_\alpha\}$ nın $\underline{R}A$ alt uzayının bir açık örtüsü olduğunu varsayalım. Bu durumda $W_\alpha = V_\alpha \cap \underline{R}A$ olmasını sağlayan $\underline{R}X$ nin V_α açık kümesi vardır. $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}$ nın $\underline{R}X$ de $\underline{R}A$ nın açık örtüsü olduğu açıktır. Hipotezden $\underline{R}X$ de $\underline{R}A$ nın bir $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$ bir sonlu alt örtüsü vardır, yani $\underline{R}A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$ dir. Bu nedenle $\underline{R}A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\left(V_{\alpha_i} \cap \underline{R}A\right) = \bigcup_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}$ dir; buradan $\underline{R}A$, $\underline{R}X$ kümesinin kompakt alt uzayıdır. Benzer şekilde $\overline{R}A$, $\overline{R}X$ kümesinin kompakt alt uzayıdır. Böylece A, X in kompakt alt kümesidir. ■

Önerme 3.3.6: X bir kompakt rough uzay olsun. X in her A kapalı alt kümesi kompakt-tır (Wu *et al.* 2007).

İspat: $A = \left(\underline{R}A, \overline{R}A\right)$, X in bir kapalı alt kümesi ise $\underline{R}A$ ve $\overline{R}A$ sırasıyla $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kümelerinin kapalı alt kümeleridirler ve $\underline{R}A \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}A \subseteq \overline{R}X$ şartını sağlarlar. X bir kompakt rough küme olduğundan $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kompakt kümelerdir.

$\mathcal{U}_1 = \{V_\alpha\}$, $\underline{R}X$ de $\underline{R}A$ nın açık örtüsü olsun. $\mathbb{U} = \mathcal{U}_1 \cup \left\{\underline{R}X - \underline{R}A\right\}$ olduğunu farz edelim. Bu durumda $\mathbb{U}$, $\underline{R}X$ in açık örtüsüdür. $\underline{R}X$ kompakt küme olduğundan $\underline{R}X$ kümesinin bir $\left\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}, \underline{R}X - \underline{R}A\right\}$ sonlu alt örtüsü vardır, yani $\bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \cup \left(\underline{R}X - \underline{R}A\right) \supseteq \underline{R}X$ dir. Bu nedenle $\left\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\right\}$, $\underline{R}A$ yi örtmelidir ve bu durumda $\underline{R}A$, $\underline{R}X$ kümesinin kompakt alt kümesidir. Benzer şekilde $\overline{R}A$, $\overline{R}X$ kümesinin kompakt alt kümesidir. Böylece A, X in kompakt alt kümesidir. ■

Tanım 3.3.7: X bir topolojik rough uzay olsun. $\underline{R}X$ deki herhangi iki nokta için ayrık komşuluklar varsa $\underline{R}X$ uzayına Hausdorff uzay denir. Aynı zamanda $\overline{R}X$ de Hausdorff uzay ise X e Hausdorff rough uzay denir (Wu *et al.* 2007).

Önerme 3.3.8: X Hausdorff rough uzay, $A = \left(\underline{R}A, \overline{R}A\right) \subseteq X$ ve $\underline{R}A \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}A \subseteq \overline{R}X$ olsun. A, X in kompakt alt kümesi ise A, X in bir kapalı alt kümesidir (Wu *et al.* 2007).

İspat: A, X in kompakt alt kümesi olduğundan $\underline{R}A$ ve $\overline{R}A$ sırasıyla $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kümelerinin kompakt alt kümeleridirler. X Hausdorff rough uzay olduğundan $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ Hausdorff uzaylardır. Bu durumda $\forall x \in \underline{R}X - \underline{R}A$ için açıkça görülür ki herhangi

$y \in \underline{R}A$, $y \neq x$ için Hausdorff uzay tanımından sırasıyla $x \in V_x \subseteq \underline{R}X$ ve $y \in W_y \subseteq \underline{R}X$ olacak şekilde ayrık V_x ve W_y açık komşulukları vardır, yani $V_x \cap W_y = \emptyset$ dir.

Yukarıda verilenlerden hareketle $\mathcal{V} = \{W_y\}_{y \in \underline{R}A}$, $\underline{R}X$ de $\underline{R}A$ kümesinin açık örtüsüdür. $\underline{R}A$ kompakt olduğundan $\underline{R}A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$ olmasını sağlayan bir $\{W_{y_1}, \dots, W_{y_n}\}$ sonlu alt örtüsü vardır. $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$ ve $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in V$, $\underline{R}A \subseteq W$ ve $V \cap W = \emptyset$ dir; bu nedenle $x \in V$ ama $x \notin \underline{R}A$ dir. Böylece $x \in V \subseteq \underline{R}X - \underline{R}A$ olur; bu sebepten x, $\underline{R}X - \underline{R}A$ kümesinin bir iç noktasıdır. x keyfi olduğundan $\underline{R}X - \underline{R}A$, $\underline{R}X$ kümesinin bir açık kümesidir; bu durumda $\underline{R}A$, $\underline{R}X$ in bir kapalı kümesidir. Benzer şekilde $\overline{R}A$, $\overline{R}X$ in bir kapalı kümesidir. $\underline{R}A \subseteq \underline{R}X \subseteq \overline{R}A \subseteq \overline{R}X$ olduğundan kapalı küme tanımına göre A, X in bir kapalı kümesidir. ■

Önerme 3.3.9: X kompakt Hausdorff rough uzay olsun. A, X in kompakt alt kümesidir $\Leftrightarrow$ A, X in bir kapalı kümesidir (Wu *et al.* 2007).

İspat: Bu önermeden önce verilen iki önermeden bu önermenin doğruluğu gösterilir. ■

Önerme 3.3.10: Homeomorfizm dönüşümü altında X kompakt rough kümesinin Y görüntüsü yine kompakttır (Wu *et al.* 2007).

İspat: $X = (\underline{R}X, \overline{R}X)$ kompakt rough küme ise $\underline{R}X$ ve $\overline{R}X$ kompakt kümelerdir. $f: X \to Y$ bir homeomorfizm ve $Y = (\underline{R}Y, \overline{R}Y)$ olmak üzere $f = (f_1, f_2)$ dir. Bu durumda $f_1: \underline{R}X \to \underline{R}Y$ ve $f_2: \overline{R}X \to \overline{R}Y$ de homeomorfizmdirler.

Şimdi $\underline{R}X$ için f_1 homeomorfizm dönüşümü altında $f_1[\underline{R}X] = \underline{R}Y$ görüntü kümesinin kompakt küme olduğunu gösterelim:

$\mathcal{U}_1 = \{V_\alpha\}$ nın $f_1\big[\underline{R}X\big] = \underline{R}Y$ nin bir açık örtüsü olduğunu kabul edelim. f homeomorfiizm olduğundan aynı zamanda bire-bir, örten ve açık dönüşümdür. Dolayısıyla $f_1^{-1}[\mathcal{U}_1] = \{f_1^{-1}[V_\alpha]\}$ nın $\underline{R}X$ kümesinin bir açık örtüsü olduğunu görmek kolaydır. $\underline{R}X$ kompakt küme olduğundan $\{f_1^{-1}[V_{\alpha_1}], \dots, f_1^{-1}[V_{\alpha_n}]\}$ sonlu alt örtüsü vardır. Bu durumda $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$, $f_1\big[\underline{R}X\big] = \underline{R}Y$ nin açık örtüsüdür ve sonludur; bu nedenle $\underline{R}X = f_1\big[\underline{R}X\big]$ kompaktır. Benzer şekilde $\overline{R}Y = f_2\big[\overline{R}X\big]$ de kompakttır. Bu nedenle Y görüntü kümesi kompakttır. ■

Teorem 3.3.11: X bir kompakt topolojik rough uzay ve Y bir Hausdorff rough uzay olsun. f, X den Y ye bire-bir ve örten bir dönüşüm ise homeomorfizmdir (Wu *et al.* 2007).

İspat: F, X in kapalı kümesi olsun. Önerme 3.3.6'dan X bir kompakt rough küme olduğundan F, X in bir kompakt alt kümesidir. Önerme 3.3.10'dan f bire-bir ve örten dönüşüm olduğundan $f[F]$, Y nin bir kompakt alt kümesidir. Önerme 3.3.8'den Y bir Hausdorff rough küme olduğundan $f[F]$, Y nin bir kapalı alt kümesidir. Bu nedenle f bir bire-bir, örten ve kapalı dönüşümdür ve dolayısıyla f bir homeomorfizmdir. ■

3.4. Tahmin Uzayı ile Üretilen Topolojik Uzayda Dönüşümler

Tanım 3.4.1: E_1 ve E_2 boştan farklı sonlu kümeler, $f: E_1 \to E_2$ bir dönüşüm ve R_1, E_1 üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. E_2 kümesi üzerindeki aşağıdaki şartları sağlayan R bağıntısı verilsin:

i. R bağıntısı yansımalıdır,
ii. $\forall x, y \in E_1$ için xR_1y ise $f(x)Rf(y)$ dir.

Bu durumda R bağıntısını kapsayan en küçük geçişmeli R_2 bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve R_2 bağıntısına R_1 ile üretilen denklik bağıntısı denir. f dönüşümü bire-bir ise $R = R_2$ dir (Liu 2004).

Önerme 3.4.2: E_1 ve E_2 boştan farklı sonlu kümeler, $f: E_1 \rightarrow E_2$ bir dönüşüm, R_1, E_1 üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı ve R_2, R_1 ile üretilen denklik bağıntısı olsun. f bire-bir ve $x \neq y \in E_2$ ise $xR_2y \Leftrightarrow f^{-1}(x)R_1f^{-1}(y)$ dir (Liu 2004).

Teorem 3.4.3: R_2, R_1 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $f: (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü süreklidir (Liu 2004).

İspat: $B = \{[y]_{R_2} : y \in E_2\}$ ailesinin $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ topolojik uzayı için bir taban olduğunu biliyoruz. $y \in E_2 - f[E_1]$ ise $[y]_{R_2} = \{y\}$ ve $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$ olur ve böylece $f^{-1}\left[[y]_{R_2}\right]$ kümesi bir $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}$-açık kümesidir. $y \in f[E_1]$ ise $\forall x \in f^{-1}\left[[y]_{R_2}\right]$ için $f\left[[x]_{R_1}\right] \subset [y]_{R_2}$ olur. Bu şekilde B tabanındaki her bir elemanın ters görüntüsü $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$ topolojik uzayında bir açık kümedir. ■

Teorem 3.4.4: R_2, R_1 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen iki topolojik uzay olsun. Bu durumda $f: (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü birebir ise açıktır (Liu 2004).

İspat: $A = \{[x]_{R_1} : x \in E_1\}$ sınıfının $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$ topolojik uzayı için bir taban olduğu bilinir. f fonksiyonunun açık olduğunu göstermek için A tabanındaki her bir elemanın f altındaki görüntüsünün $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_2}$-açık olduğunu göstermek gerekir. $f\left[[x]_{R_1}\right] = [f(x)]_{R_2}$ olduğunu göstermek için $f\left[[x]_{R_1}\right] \neq [f(x)]_{R_2}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y \in [f(x)]_{R_2} - f\left[[x]_{R_1}\right]$, $y \in f\left[[x]_{R_1}\right]$ ve yR_2y elemanları vardır. Önerme 3.4.2'den $f^{-1}(y)R_1f^{-1}(y)$ ve $f^{-1}(y)R_1x$ olur. Bu yüzden $y \in f\left[[x]_{R_1}\right]$ olur ve bu da bir çelişki oluşturur. Çelişkinin kaynağı $f\left[[x]_{R_1}\right] \neq [f(x)]_{R_2}$ kabulümüzdür. Dolayısıyla $f\left[[x]_{R_1}\right] = [f(x)]_{R_2}$ ve böylece f bir açık dönüşümdür. ■

Teorem 3.4.5: R_2, R_1 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı, $A \subseteq E_1$ ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$ve $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen topolojik uzaylar olsun. $f\colon (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \to (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü bire-bir ise $f[\,\overline{A}\,] = \overline{f[A]}$ olur (Liu 2004).

İspat: Topolojik uzay özelliğinden $f[\,\overline{A}\,] \subset \overline{f[A]}$ olduğu gösterilir. Verilen her iki topolojide de her açık küme aynı zamanda bir kapalı küme olduğundan ve Teorem 3.4.4'den $f[\,\overline{A}\,]$ bir kapalı kümedir. Bu nedenle $f[A] \subset f[\,\overline{A}\,]$ olduğundan $\overline{f[A]} \subset f[\,\overline{A}\,]$ dır. Böylece $f[\,\overline{A}\,] = \overline{f[A]}$ olur. ■

Teorem 3.4.6: R_2, R_1 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı, $B \subseteq E_2$ ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$ve $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen topolojik uzaylar olsun. $f\colon (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \to (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü bire-bir ise $f^{-1}[\,\overline{B}\,] = \overline{f^{-1}[B]}$ olur (Liu 2004).

İspat: Topolojik uzay özelliğinden $f^{-1}[\,\overline{B}\,] \subset \overline{f^{-1}[B]}$ olduğu gösterilir. $x \in f^{-1}[\,\overline{B}\,] - \overline{f^{-1}[B]}$ ise $[f(x)]_{R_2} \subset \overline{B}$ ve $[f(x)]_{R_2} \cap B \neq \emptyset$ dir. Yani $y \in [f(x)]_{R_2} \cap B$ ve $f^{-1}(y) \in f^{-1}[B]$ mevcuttur. f bire-bir olduğundan $xR_1f^{-1}(y)$ dir. ■

Tanım 3.4.7: $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ bir tahmin uzayı, $E_1 \neq \emptyset$ sonlu bir küme, $f\colon E_1 \to E_2$ bir dönüşüm olsun. E_1 kümesi üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan R_1 bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve R_1 bağıntısına R_2 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı denir (Liu 2004):

i. R_1 yansımalıdır.
ii. Her $x, y \in E_1$ için $f(x)R_2f(y)$ ise xR_1y dir.

Teorem 3.4.8: R_1, R_2 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$ve $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen topolojik uzaylar olsun. Bu durumda $f: (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \to (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü süreklidir (Liu 2004).

Teorem 3.4.9: R_1, R_2 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı, $A \mathbin{\tilde{\subsetneq}} E_1$, $B \mathbin{\tilde{\subsetneq}} E_2$ ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$ve $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen topolojik uzaylar olsun. $f: (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \to (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü örten ise $f[\,\overline{A}\,] = \overline{f[A]}$ ve $f^{-1}[\,\overline{B}\,] = \overline{f^{-1}[B]}$ dir (Liu 2004).

Teorem 3.4.10: R_1, R_2 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı, $X \mathbin{\tilde{\subsetneq}} E_1$ ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$ve $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen topolojik uzaylar olsun. $f: (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \to (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü örten ve X rough küme ise $f[X]$ de rough kümedir (Liu 2004).

Teorem 3.4.11: R_1, R_2 denklik bağıntısı ile üretilen denklik bağıntısı, $\mathcal{A}_1 = (E_1, R_1)$, $\mathcal{A}_2 = (E_2, R_2)$ iki tahmin uzayı ve $(E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1})$, $(E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ sırasıyla $\mathcal{A}_1$ve $\mathcal{A}_2$ tahmin uzayları ile üretilen topolojik uzaylar olsun. $f: (E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) \to (E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{A}_2})$ dönüşümü bire-bir ve örten ise f dönüşümünün her bir kısıtlaması sürekli ve açık, rough kümenin görüntüsü ve ters görüntüsü de rough kümedir (Liu 2004).

3.5. Örtü Tabanlı Rough Kümeler

Tanım 3.5.1 (Örtü): $E \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $\boldsymbol{C}$ de E kümesinin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\cup \boldsymbol{C} = E$ ise $\boldsymbol{C}$ ailesine E kümesinin bir örtüsü denir (Zhu and Wang 2007).

Uyarı 3.5.2: Aksi belirtilmedikçe örtünün sonlu olduğu varsayılacaktır (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.3 (Örtülü tahmin Uzayı): $E \neq \emptyset$ bir evrensel küme ve $\boldsymbol{C}$ de E kümesinin bir örtüsü olsun. $(\boldsymbol{C}, E)$ sıralı ikilisine örtülü tahmin uzayı denir (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.4 (Minimal Tanım): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $x \in E$ olsun.

$$Mt(x) = \{K \in \boldsymbol{C}: x \in K \wedge (\forall S \in \boldsymbol{C} \wedge x \in S \wedge S \subseteq K \Rightarrow K = S)\}$$

olarak tanımlanan kümeye x noktasının minimal tanımı denir (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.5 (Maksimal Tanım): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $K \in \boldsymbol{C}$ olsun. $\boldsymbol{C}$ örtüsünün K kümesini kapsayan herhangi bir elemanı yoksa K kümesine $\boldsymbol{C}$ örtüsünün maksimal tanımı denir. $\boldsymbol{C}$ deki bütün maksimal tanımların ailesi $Maxt(\boldsymbol{C})$ ile gösterilir (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.6 (Ayırtedilemez Komşuluk): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $x \in E$ olsun. $\cup\{K: x \in K \in \boldsymbol{C}\}$ kümesine x noktasının ayırt edilemez komşuluğu denir ve $N(x)$ ile gösterilir (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.7 (Yakın Komşuluk): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $x \in E$ olsun. $\cup\{Mt(x)\}$ kümesine x noktasının yakın komşuluğu denir ve $CN(x)$ ile gösterilir (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.8 (Birli): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı olsun. $\forall x \in E$ için $|Mt(x)| = 1$ ise $\boldsymbol{C}$ örtüsüne birli denir (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.9 (Nokta Kaplı Örtü): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı olsun. $\forall K \in C$ ve $x \in K$ için $K \subseteq CN(x)$ ise $\boldsymbol{C}$ örtüsüne nokta kaplı örtü denir (Zhu and Wang 2007).

Tanım 3.5.10 (Örtülü Alt Tahmin): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun.

$$\underline{\boldsymbol{C}}X = \bigcup\{K \in \boldsymbol{C}: K \subseteq X\}$$

olarak tanımlanan $\underline{\boldsymbol{C}}X$ kümesine X kümesinin örtülü alt tahmini denir (Zhu and Wang 2007).

3.5.1. Birinci tip örtü

Tanım 3.5.1.1 (Birinci Tip Örtülü Üst Tahmin): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun.

$$\overline{\boldsymbol{C_1}}X = \underline{\boldsymbol{C}}X \cup \bigcup\{Mt(x): x \in X - \underline{\boldsymbol{C}}X\}$$

olarak tanımlanan $\overline{\boldsymbol{C_1}}X$ kümesine X kümesinin birinci tip örtülü üst tahmini denir (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.1.2: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\underline{\boldsymbol{C}}X = X$ olması için gerek ve yeter şart X kümesinin $\boldsymbol{C}$ örtüsünün bazı elemanlarının birleşimi olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.1.3: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C_1}}X = X$ olması için gerek ve yeter şart X kümesinin $\boldsymbol{C}$ örtüsünün bazı elemanlarının birleşimi olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.1.4: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\underline{\boldsymbol{C}}X$ örtülü alt tahmini için aşağıdaki özellikler doğrudur (Zhu and Wang 2007):

i. $\underline{\boldsymbol{C}}E = E$

ii. $\underline{\boldsymbol{C}}\emptyset = \emptyset$

iii. $\underline{\boldsymbol{C}}X \subseteq X$

iv. $\underline{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{C}}X) = \underline{\boldsymbol{C}}X$

v. $X \subseteq Y$ ise $\underline{\boldsymbol{C}}X \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}Y$

vi. $\forall K \in \boldsymbol{C}$ için $\underline{\boldsymbol{C}}K = K$

Önerme 3.5.1.5: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X, Y \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C_1}}X$ birinci tip örtülü üst tahmini için aşağıdaki özellikler doğrudur (Zhu and Wang 2007):

i. $\overline{\boldsymbol{C_1}}E = E$

ii. $\overline{\boldsymbol{C_1}}\emptyset = \emptyset$

iii. $X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}X$

iv. $\overline{\boldsymbol{C_1}}(\overline{\boldsymbol{C_1}}X) = \overline{\boldsymbol{C_1}}X$

v. $\forall K \in \boldsymbol{C}$ için $\overline{\boldsymbol{C_1}}K = K$

Teorem 3.5.1.6: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X, Y \subseteq E$ olsun. $\underline{\boldsymbol{C}}(X \cap Y) = \underline{\boldsymbol{C}}X \cap \underline{\boldsymbol{C}}Y$ olması için gerek ve yeter şart $\forall K_1, K_2 \in \boldsymbol{C}$ için $K_1 \cap K_2$ kümesinin $\boldsymbol{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanının birleşimi olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: ($\Rightarrow$) $K_1 \cap K_2 = \underline{\boldsymbol{C}}K_1 \cap \underline{\boldsymbol{C}}K_2 = \underline{\boldsymbol{C}}(K_1 \cap K_2)$ ve $\underline{\boldsymbol{C}}(K_1 \cap K_2)$ kümesi $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıda elemanın birleşimi olarak yazıldığından $K_1 \cap K_2$ kümesi de $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıda elemanın birleşimi olarak yazılır.

($\Leftarrow$) $\underline{\boldsymbol{C}}(X \cap Y) \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}X \cap \underline{\boldsymbol{C}}Y$ olduğunu görmek kolaydır. Diğer yandan

$$K_i, K_j' \in \boldsymbol{C}, 1 \leq i \leq m \text{ ve } 1 \leq j \leq n$$

olmak üzere $\underline{\boldsymbol{C}}X = K_1 \cup \dots \cup K_m$ ve $\underline{\boldsymbol{C}}Y = K_1' \cup \dots \cup K_n'$ olarak alınsın. Hipotezden herhangi $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $K_i \cap K_j'$ $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıda elemanın bir birleşimidir. $W_h \in \boldsymbol{C},\ 1 \leq h \leq l$ olmak üzere $K_i \cap K_j' = W_1 \cup \dots \cup W_l$ olarak alınsın.

$1 \leq h \leq l$ için $W_h \subseteq K_i \cap K_j' \subseteq X \cap Y$ olduğundan $W_h \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}(X \cap Y)$ olur. Buradan $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $K_i \cap K_j' \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}(X \cap Y)$ olur.

$$\underline{\boldsymbol{C}}X \cap \underline{\boldsymbol{C}}Y = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (K_i \cap K_j')$$

eşitliğinden hareketle $\underline{\boldsymbol{C}}X \cap \underline{\boldsymbol{C}}Y \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}(X \cap Y)$ olduğunu gösteririz. Böylece $\underline{\boldsymbol{C}}(X \cap Y) = \underline{\boldsymbol{C}}X \cap \underline{\boldsymbol{C}}Y$ olur. ■

Teorem 3.5.1.7: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X, Y \subseteq E$ olsun. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olması için gerek ve yeter şart $\forall K_1, K_2 \in \boldsymbol{C}$ için $K_1 \cap K_2$ kümesinin $\boldsymbol{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanının birleşimi olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\overline{\boldsymbol{C_1}}(K_1 \cap K_2) \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}K_1 = K_1$ ve $\overline{\boldsymbol{C_1}}(K_1 \cap K_2) \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}K_2 = K_2$ ve dolayısıyla $\overline{\boldsymbol{C_1}}(K_1 \cap K_2) \subseteq K_1 \cap K_2$ olur. $X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}X$ özelliğinden hareketle

$$K_1 \cap K_2 \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}(K_1 \cap K_2)$$

ve dolayısıyla $K_1 \cap K_2 = \overline{\boldsymbol{C_1}}(K_1 \cap K_2)$ olur. $K_1 \cap K_2$ kümesi $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıda elemanın birleşimidir.

$(\Leftarrow)$ Birinci tip örtülü üst tahmin tanımına göre

$$K_i \in Mt(y_i), \qquad 1 \leq i \leq m$$

olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X - \underline{\boldsymbol{C}}X$ elemanları ve $K_1, K_2, \ldots, K_m \in \boldsymbol{C}$ örtü elemanları mevcuttur ve $\overline{\boldsymbol{C_1}}X$ kümesi $\underline{\boldsymbol{C}}X \cup K_1 \cup \ldots \cup K_m$ olarak ifade edilir. $y_i \in Y$ olduğu açıktır. $1 \leq i \leq m$ için $y_i \in Y - \underline{\boldsymbol{C}}Y$ ise $K_i \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olduğunu görmek kolaydır. $y_i \notin Y - \underline{\boldsymbol{C}}Y$ ise

$y_i \in \underline{\boldsymbol{C}}Y$ dir. Böylece $y_i \in K_i' \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}Y$ olacak şekilde bir $K_i' \in \boldsymbol{C}$ örtü elemanı vardır. Hipotezden $K_i \cap K_i'$ kümesi $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıda elemanın bir birleşimidir. $W_h \in \boldsymbol{C}$, $1 \leq h \leq l$ olmak üzere $K_i \cap K_i' = W_1 \cup \ldots \cup W_l$ olarak alınsın. $y_i \in K_i \cap K_i'$ olduğundan $y_i \in W_j$ olacak şekilde $1 \leq j \leq l$ mevcuttur. $K_i \in Mt(y_i)$ ve $W_j \subseteq K_i$ den $K_i = W_j$ ve böylece $K_i \subseteq K_i'$ olur. Bu yüzden

$$K_i \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}Y \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y, \qquad 1 \leq i \leq m$$

olur. $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{\boldsymbol{C}}X \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}Y$ özelliğinden

$$\underline{\boldsymbol{C}}X \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}Y \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$$

ve dolayısıyla $\overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olur. ■

Yardımcı Teorem 3.5.1.8: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X, Y \subseteq E$ olsun. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ özelliğinden

$\overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y)$ ve

$$\overline{\boldsymbol{C_1}}Y \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y)$$

ve dolayısıyla $\overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y)$ olur. Diğer yandan $X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}X$ özelliğinden

$$X \cup Y \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$$

olur. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ özelliğinden $\overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y) \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}\big(\overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y\big)$ olur. Buradan $\overline{\boldsymbol{C_1}}\big(\overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y\big) = \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ ve dolayısıyla $\overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y) \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olur. Böylece

$$\overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$$

olur.

$(\Leftarrow)$ $X \subseteq Y$ ise $\overline{\boldsymbol{C_1}}Y = \overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ ve dolayısıyla $\overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olur. ■

Teorem 3.5.1.9: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X, Y \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$ olması için gerek ve yeter şart $\forall K_1, K_2 \in \boldsymbol{C}$ için $K_1 \cap K_2$ kümesinin $\boldsymbol{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanının birleşimi olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: Teorem 3.5.1.7 ve Yardımcı Teorem 3.5.1.8'den açıktır. ■

Sonuç 3.5.1.10: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X, Y \subseteq E$ olsun. Aşağıdaki önermeler birbirlerine denktirler (Zhu and Wang 2007):

i. $\overline{\boldsymbol{C_1}}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C_1}}X \cup \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$
ii. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_1}}Y$
iii. $\underline{\boldsymbol{C}}(X \cap Y) = \underline{\boldsymbol{C}}X \cap \underline{\boldsymbol{C}}Y$

Teorem 3.5.1.11: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\underline{\boldsymbol{C}}\big(-\underline{\boldsymbol{C}}X\big) = -\underline{\boldsymbol{C}}X$ olması için gerek ve yeter şart $\forall K_1, \dots, K_m \in \boldsymbol{C}$ için $-(K_1 \cup \dots \cup K_m)$ kümesinin $\boldsymbol{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanının birleşimi olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\forall K_1, \dots, K_m \in \boldsymbol{C}$ için

$$\underline{\boldsymbol{C}}\big(-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)\big) = \underline{\boldsymbol{C}}\left(-\underline{\boldsymbol{C}}(K_1 \cup \ldots \cup K_m)\right)$$
$$= -\underline{\boldsymbol{C}}(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$$
$$= -(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$$

olur. Dolayısıyla $-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$ kümesi $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıda elemanın bir birleşimidir.

($\Leftarrow$) $\underline{\boldsymbol{C}}X$ kümesi $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıda elemanın birleşimidir. $K_1, \ldots, K_m \in \boldsymbol{C}$ olmak üzere $\underline{\boldsymbol{C}}X = K_1 \cup \ldots \cup K_m$ olarak alınsın. $\underline{\boldsymbol{C}}\big(-\underline{\boldsymbol{C}}X\big) = \underline{\boldsymbol{C}}\big(-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)\big)$ olur. Hipotezden

$$\underline{\boldsymbol{C}}\big(-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)\big) = -(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$$

ve dolayısıyla $\underline{\boldsymbol{C}}\big(-\underline{\boldsymbol{C}}X\big) = -\underline{\boldsymbol{C}}X$ olur. ■

Teorem 3.5.1.12: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C_1}}\big(-\overline{\boldsymbol{C_1}}X\big) = -\overline{\boldsymbol{C_1}}X$ olması için gerek ve yeter şart $\forall K_1, \ldots, K_m \in \boldsymbol{C}$ için $-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$ kümesinin $\boldsymbol{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanının birleşimi olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: Yukarıdaki ispata benzer şekilde ispatlanır. ■

Sonuç 3.5.1.13: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\underline{\boldsymbol{C}}\big(-\underline{\boldsymbol{C}}X\big) = -\underline{\boldsymbol{C}}X$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{\boldsymbol{C_1}}\big(-\overline{\boldsymbol{C_1}}X\big) = -\overline{\boldsymbol{C_1}}X$ olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

Teorem 3.5.1.14: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C_1}}(-X) = -\underline{\boldsymbol{C}}X$ ise $\forall K_1, \ldots, K_m \in \boldsymbol{C}$ için $-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$ kümesi $\boldsymbol{C}$ örtüsünün sonlu sayıdaki elemanının birleşimidir (Zhu and Wang 2007).

İspat: $\forall K_1, \ldots, K_m \in \boldsymbol{C}$ için

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{C_1}}\big(-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)\big) &= -\underline{\boldsymbol{C}}(K_1 \cup \ldots \cup K_m) \\ &= -(K_1 \cup \ldots \cup K_m)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $-(K_1 \cup \ldots \cup K_m)$ kümesi $\boldsymbol{C}$ örtüsündeki sonlu sayıdaki elemanın bir birleşimidir. ■

3.5.2. İkinci tip örtü

Tanım 3.5.2.1 (İkinci Tip Örtülü Üst Tahmin): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun.

$$\overline{\boldsymbol{C}_2}X = \bigcup\{K: K \in C, K \cap X \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanan $\overline{\boldsymbol{C}_2}X$ kümesine ikinci tip örtülü üst tahmini denir (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.2.2: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\boldsymbol{C}$ örtüsü E kümesinin bir parçalanışı ise $\overline{\boldsymbol{C}_2}X$ ikinci tip örtülü üst tahmini Pawlak'ın üst tahmin kümesidir (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.2.3: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subset E$ olsun. $\boldsymbol{C}$ örtüsü E kümesinin bir parçalanışı ise $\overline{\boldsymbol{C}_2}X$ ikinci tip örtülü üst tahmini aşağıdaki özellikleri sağlar (Zhu and Wang 2007):

i. $\overline{\boldsymbol{C}_2}E = E$

ii. $\overline{\boldsymbol{C}_2}\emptyset = \emptyset$

iii. $X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}X$

iv. $\overline{\boldsymbol{C}_2}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X \cup \overline{\boldsymbol{C}_2}Y$

v. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C}_2}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}Y$

Teorem 3.5.2.4: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olması için gerek ve yeter şart $\forall K, K_1, \dots, K_m \in \boldsymbol{C}$ için $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_m \neq \emptyset$ ve $K \cap (K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m) \neq \emptyset$ iken $K \subseteq (K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m)$ olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\forall K, K_1, \dots, K_m \in \boldsymbol{C}$ için $K_1 \cap \dots \cap K_m \neq \emptyset$ ve $K \cap (K_1 \cup \dots \cup K_m) \neq \emptyset$ ise $x \in K_1 \cap \dots \cap K_m$ olacak şekilde bir x elemanı mevcuttur. İkinci tip örtülü üst tahmin tanımından

$K_1 \cup \dots \cup K_m \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})$ ve

$$K \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})\right)$$

olur. $\forall X \subseteq E$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ ve $K \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})$ olur ve böylece $K \subseteq (K_1 \cup \dots \cup K_m)$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\overline{\boldsymbol{C}_2}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right)$ olduğu açıktır. Şimdi $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olduğunu gösterelim. İlk olarak $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})\right) \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})$ olduğunu gösterelim.

İkinci tip örtülü üst tahmin tanımına göre

$$\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\}) = K_1 \cup \dots \cup K_m$$

olacak şekilde $K_1, K_2, \dots, K_m \in \boldsymbol{C}$ örtü elemanları mevcuttur. $\forall y \in \overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})\right)$ için $y \in K$ ve $K \cap \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\}) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $K \in \boldsymbol{C}$ örtü elemanı mevcuttur. $K \subseteq (K_1 \cup \dots \cup K_m) = \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})$ ve dolayısıyla $y \in \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})$ dir. Bu durumda

$$\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})\right) \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\})$$

olduğunu göstermiş oluruz. $\overline{\boldsymbol{C}_2}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X \cup \overline{\boldsymbol{C}_2}Y$ özelliğinden $\forall X \subseteq E$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olur. ■

Teorem 3.5.2.5: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(-\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) = -\overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olması için gerek ve yeter şart $\left\{\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\}) : x \in E\right\}$ kümesinin bir parçalanış olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ $X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ ve $\overline{\boldsymbol{C}_2}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X \cup \overline{\boldsymbol{C}_2}Y$ özelliklerini sağlayan ikinci tip örtülü üst tahmin kümesi bilinen klasik üst tahmin kümesidir. Dolayısıyla $\left\{\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\}) : x \in E\right\}$ bir parçalanıştır.

$(\Leftarrow)$ $\left\{\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\}) : x \in E\right\}$ bir parçalanış ise $\overline{\boldsymbol{C}_2}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X \cup \overline{\boldsymbol{C}_2}Y$ özelliğinden ikinci tip örtülü üst tahmin kümesi, $P = \left\{\overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\}) : x \in E\right\}$ parçalanışı ile üretilen klasik tahmin kümesidir ve dolayısıyla $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(-\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) = -\overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olur. ■

Sonuç 3.5.2.6: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(-\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) = -\overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}X\right) = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

Teorem 3.5.2.7: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C}_2}(-X) = -\underline{\boldsymbol{C}}X$ olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{C}$ örtüsünün bir parçalanış olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\forall K_1, K_2 \in \boldsymbol{C}$ için $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ ise $x \in K_1 \cap K_2$ olduğunu kabul edelim. $\underline{\boldsymbol{C}}K_1 = K_1$ eşitliğinden ve $\underline{\boldsymbol{C}}(-X) = -\overline{\boldsymbol{C}_2}X$ hipotezinden $\overline{\boldsymbol{C}_2}(-K_1) = -K_1$ ve dolayısıyla $K_2 \subseteq K_1$ olur. Aksi takdirde $y \in -K_1$ olacak şekilde $y \in K_2$ elemanı mevcuttur. İkinci tip örtülü üst tahmin kümesi tanımından $x \in \overline{\boldsymbol{C}_2}(-K_1)$ olur. Bu, $\overline{\boldsymbol{C}_2}(-K_1) = -K_1$ eşitliği ile bir çelişki oluşturur. Aynı şekilde $K_1 \subseteq K_2$ olduğunu gösterebiliriz. Buradan $K_1 = K_2$ olur. Böylece $\boldsymbol{C}$ bir parçalanıştır.

($\Leftarrow$) İspatı açıktır. ■

Teorem 3.5.2.8: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı olsun. $\forall K \in \boldsymbol{C}$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}(K) = K$ olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{C}$ örtüsünün bir parçalanış olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: ($\Rightarrow$) $\forall K, K' \in \boldsymbol{C}$ ve $K' \neq K$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}(K) = K$ olduğundan ikinci tip örtülü üst tahmin kümesi tanımına göre $K' \cap K = \emptyset$ veya $K' \subset K$ dır. $K' \subset K$ ise ikinci tip örtülü üst tahmin kümesi tanımından $K \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}(K') = K'$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece $K' \cap K = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\boldsymbol{C}$ bir parçalanıştır.

($\Leftarrow$) İspatı açıktır. ■

Sonuç 3.5.2.9: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı olsun. $\forall K \in \boldsymbol{C}$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}(K) = K$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(-\overline{\boldsymbol{C}_2}K\right) = -\overline{\boldsymbol{C}_2}K$ olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

Sonuç 3.5.2.10: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı olsun. $\forall K \in \boldsymbol{C}$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}(K) = K$ ise $\overline{\boldsymbol{C}_2}\left(\overline{\boldsymbol{C}_2}K\right) = \overline{\boldsymbol{C}_2}K$ dır (Zhu and Wang 2007).

3.5.3. Üçüncü tip örtü

Tanım 3.5.3.1 (Üçüncü Tip Örtülü Üst Tahmin): $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun.

$$\overline{\boldsymbol{C}_3}X = \bigcup \{Mt(x) : x \in X\}$$

olarak tanımlanan $\overline{\boldsymbol{C}_3}X$ kümesine üçüncü tip örtülü üst tahmini denir (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.3.2: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\boldsymbol{C}$ örtüsü E kümesinin bir parçalanışı ise $\overline{\boldsymbol{C}_3}X$ üçüncü tip örtülü üst tahmini Pawlak'ın üst tahmin kümesidir (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.3.3: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\boldsymbol{C}$ örtüsü E kümesinin bir parçalanışı ise $\overline{\boldsymbol{C}_3}X$ üçüncü tip örtülü üst tahmini aşağıdaki özellikleri sağlar (Zhu and Wang 2007):

i. $\overline{\boldsymbol{C}_3}E = E$

ii. $\overline{\boldsymbol{C}_3}\emptyset = \emptyset$

iii. $X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_3}X$

iv. $\overline{\boldsymbol{C}_3}(X \cup Y) = \overline{\boldsymbol{C}_3}X \cup \overline{\boldsymbol{C}_3}Y$

v. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{\boldsymbol{C}_3}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_3}Y$

Önerme 3.5.3.4: $(\boldsymbol{C}^1, E)$ ve $(\boldsymbol{C}^2, E)$ iki örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\underline{\boldsymbol{C}^1}X = \underline{\boldsymbol{C}^2}X$ ise $\overline{\boldsymbol{C}_3^1}X = \overline{\boldsymbol{C}_3^2}X$ olur (Zhu and Wang 2007).

Önerme 3.5.3.5: $(\boldsymbol{C}^1, E)$ ve $(\boldsymbol{C}^2, E)$ iki örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C}_3^1}X = \overline{\boldsymbol{C}_3^2}X$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in E$ için $CN(x)$ kümesinin her iki örtü için eşit olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

3.5.4. Üç tip arasındaki ilişki

Birinci, ikinci ve üçüncü tip örtülü tahmin kümeleri tanımlarından aşağıdaki ifadenin sağlandığını görmek kolaydır: E nin bir $\boldsymbol{C}$ örtüsü ve $X \subseteq E$ için

$$\overline{\boldsymbol{C_1}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_3}}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C_2}}X \tag{3.1}$$

olur (Zhu and Wang 2007).

Şimdi de yukarıdaki üç tip örtülü üst tahmin kümelerinin birbirlerine eşit olması için gerek ve yeter şartlar verilir:

Teorem 3.5.4.1: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C_1}}X = \overline{\boldsymbol{C_3}}X$ olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{C}$ örtüsünün birli olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $\boldsymbol{C}$ birli ise $\overline{\boldsymbol{C_1}}X = \underline{\boldsymbol{C}}X \cup \{Mt(x) : x \in X - \underline{\boldsymbol{C}}X\}$ ve

$$\overline{\boldsymbol{C_3}}X = \bigcup\{Mt(x) : x \in X\} = \bigcup\{Mt(x) : x \in \underline{\boldsymbol{C}}X\} \cup \bigcup\{Mt(x) : x \in X - \underline{\boldsymbol{C}}X\}$$

eşitliklerinden hareketle sadece $\cup\{Mt(x) : x \in \underline{\boldsymbol{C}}X\} \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}X$ olduğunu göstermek gerekir. Örtülü alt tahmin tanımından $\forall x \in \underline{\boldsymbol{C}}X$ için $x \in K \subseteq X$ olacak şekilde bir $K \in \boldsymbol{C}$ örtü elemanı mevcuttur. K' $Mt(x)$ deki tek eleman olsun. $K' \subseteq K$ ise $K' \subseteq \underline{\boldsymbol{C}}X$ olduğu açıktır. Aksi takdirde $\exists y \in K'$ için $y \notin K$ dır. $Mt(x)$ tanımından $K'' \subseteq K$ ve $K'' \in Mt(x)$ olacak şekilde bir K'' mevcuttur. $y \notin K$ olduğundan $y \notin K''$ olur. Buradan $K'' \neq K'$ olur. Dolayısıyla $Mt(x)$ en az iki elemana sahiptir. Bu ise $\boldsymbol{C}$ örtüsünün birli olması ile çelişir.

$\boldsymbol{C}$ örtüsü birli değilse $\exists x \in E$ için $Mt(x)$ en az iki farklı K ve K'' elemanlarına sahiptir. Birinci ve üçüncü tip örtülü üst tahmin tanımlarından $\overline{\boldsymbol{C_1}}K = K$ ve $\overline{\boldsymbol{C_3}}K = \cup\{Mt(x) : x \in K\}$ olur. Böylece $K' \subseteq \overline{\boldsymbol{C_3}}K$ olur. Bu da $\overline{\boldsymbol{C_1}}K \neq \overline{\boldsymbol{C_3}}K$ anlamına gelir. Aksi takdirde $K' \subseteq K$ olur. Bu da K nın minimum olmasına bir çelişkidir. ■

Teorem 3.5.4.2: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı olsun. $\forall X \subseteq E$ için $\overline{\boldsymbol{C_2}}X = \overline{\boldsymbol{C_3}}X$ olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{C}$ örtüsünün nokta kaplı örtü olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $\forall X \subseteq E$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}X = \overline{\boldsymbol{C}_3}X$ olsun. $\forall x \in E$ ve $x \in K \in \boldsymbol{C}$ için $K \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}(\{x\}) = \overline{\boldsymbol{C}_3}(\{x\}) = \bigcup Mt(x)$ olur. Böylece $\boldsymbol{C}$ bir nokta kaplı örtüdür.

Diğer yandan $\boldsymbol{C}$ bir nokta kaplı örtü ise $\forall X \subseteq E$ için $\overline{\boldsymbol{C}_2}X = \bigcup\{K : K \in \boldsymbol{C} \wedge K \cap X \neq \emptyset\}$ olur. $\forall K \in \boldsymbol{C}$ için $K \cap X \neq \emptyset$ olur. $x \in K \cap X$ olsun. Bu durumda $x \in K$ ve $x \in X$ olur. Nokta kaplı örtü tanımından $K \subseteq \bigcup Mt(x)$ olur. Böylece $K \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_3}X$ olur.Buradan $\overline{\boldsymbol{C}_2}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_3}X$ yazılır. $\overline{\boldsymbol{C}_3}X \subseteq \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olduğu tanımlardan açıktır. Böylece $\overline{\boldsymbol{C}_2}X = \overline{\boldsymbol{C}_3}X$ olur. ■

Teorem 3.5.4.3: $(\boldsymbol{C}, E)$ bir örtülü tahmin uzayı ve $X \subseteq E$ olsun. $\overline{\boldsymbol{C}_1}X = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{C}$ örtüsünün E kümesinin bir parçalanışı olmasıdır (Zhu and Wang 2007).

İspat: $\boldsymbol{C}$ örtüsü bir parçalanış ise $\forall X \subseteq E$ için $\overline{\boldsymbol{C}_1}X = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olduğunu görmek kolaydır.

Diğer yandan $\forall X \subseteq E$ için $\overline{\boldsymbol{C}_1}X = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ ise (3.1) den $\overline{\boldsymbol{C}_1}X = \overline{\boldsymbol{C}_3}X = \overline{\boldsymbol{C}_2}X$ olur. $\overline{\boldsymbol{C}_1}X = \overline{\boldsymbol{C}_3}X$ olduğundan $\boldsymbol{C}$ örtüsü birlidir. $\overline{\boldsymbol{C}_2}X = \overline{\boldsymbol{C}_3}X$ olduğundan $\boldsymbol{C}$ örtüsü nokta kaplı örtüdür. Bu durumda $\boldsymbol{C}$ bir parçalanıştır. ■

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Parakompakt Rough Uzaylar

Tanım 4.1.1 (İnceltilmiş): X bir rough küme, $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2)$ ve $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^1, \mathcal{W}^2)$ iki örtü olsun. $\forall W^1 \in \mathcal{W}^1$ ve $\forall W^2 \in \mathcal{W}^2$ için $W^1 \subset U^1$ ve $W^2 \subset U^2$ olacak şekilde bir $\exists U^1 \in \mathcal{U}^1$ ve $\exists U^2 \in \mathcal{U}^2$ oluyorsa $\mathcal{W}$ örtüsüne $\mathcal{U}$ örtüsünün inceltilmişi denir.

Tanım 4.1.2 (Yerel Sonlu Aile): $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ olmak üzere (X, τ) bir topolojik rough uzay, $\mathcal{U}_1$ $\underline{R}X$ alt tahmin kümesinin bir ailesi ve $\mathcal{U}_2$ de $\overline{R}X$ üst tahmin kümesinin bir ailesi olsun. $\underline{R}X$ alt tahmin kümesinin her noktası $\mathcal{U}_1$ ailesinin en fazla sonlu sayıda elemanı ile arakesiti boştan farklı olan bir açık komşuluğa sahip ise $\mathcal{U}_1$ ailesine τ_1-yerel sonlu aile denir. $\overline{R}X$ üst tahmin kümesinin her noktası $\mathcal{U}_2$ ailesinin en fazla sonlu sayıda elemanı ile arakesiti boştan farklı olan bir açık komşuluğa sahip ise $\mathcal{U}_2$ ailesine τ_2-yerel sonlu aile denir. Her iki ifadenin sağlandığı durumda $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ ailesine τ-yerel sonlu veya kısaca yerel sonlu aile denir.

Önerme 4.1.3: (X, τ) bir topolojik rough uzay ve $\mathcal{W} = \{W_i\}$ bir yerel sonlu aile olsun. Bu durumda $\cup_i \overline{W_i} \approx \overline{\cup_i W_i}$ olur.

İspat: $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^1, \mathcal{W}^2)$ olarak alalım. $\overline{W_i^1} \subseteq \overline{\cup_i W_i^1}$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu durumda $\cup_i \overline{W_i^1} \subseteq \overline{\cup_i W_i^1}$ olur.

Şimdi de $\overline{\cup_i W_i^1} \subseteq \cup_i \overline{W_i^1}$ olduğunu gösterelim. $y \notin \cup_i \overline{W_i^1}$ olsun. $i \neq i_1, i_2, \dots i_n$ için $y \in U_1$ ve $U_1 \cap W_i^1 = \emptyset$ olacak şekilde bir U_1 τ_1-açık komşuğu vardır. Bu durumda $y \notin \overline{W_{i_1}}, \dots \overline{W_{i_n}}$ yazılır. $V = U \cap \left(\overline{W_{i_1}}\right)^t \cap \dots \cap \left(\overline{W_{i_n}}\right)^t$ olsun. Bu durumda V bir açık kümedir ve $\forall i$ için $V \cap W_i = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $V^t \subseteq \overline{\cup_i W_i}$ ve ayrıca $V \cap (\cup_i W_i) = \emptyset$ olur. Bu halde y$\notin \overline{\cup_i W_i}$ olur. Dolayısıyla $\overline{\cup_i W_i^1} \subseteq \cup_i \overline{W_i^1}$ dir. Böylece $\overline{\cup_i W_i^1} = \cup_i \overline{W_i^1}$

dir. Benzer şekilde $\overline{\cup_i W_i^2} = \cup_i \overline{W_i^2}$ olduğu gösterilir. Rough eşitlik tanımından $\cup_i \overline{W_i} \approx \overline{\cup_i W_i}$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Tanım 4.1.4 (Normal Rough Uzay): X bir topolojik rough uzay olsun. $\underline{R}X$ in herhangi iki ayrık kapalı alt kümesini kapsayan ayrık iki açık küme varsa $\underline{R}X$ uzayına normal uzay denir. Aynı zamanda $\overline{R}X$ de normal uzay ise X e normal rough uzay denir.

Tanım 4.1.5 (Parakompakt Rough Uzay): $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ olmak üzere (X, τ) bir topolojik rough uzay ve $A = (A_1, A_2) \subseteq X$ olsun. A_1 kümesinin her $\mathcal{U}_1$ açık örtüsü bir açık ve yerel sonlu $\mathcal{W}_1$ inceltilmişine sahip ise A_1 e parakompakt küme denir. A_2 kümesinin her $\mathcal{U}_2$ açık örtüsü bir açık ve yerel sonlu $\mathcal{W}_2$ inceltilmişine sahip ise A_2 ye parakompakt küme denir. Her iki ifadenin sağlandığı durumda A ya parakompakt rough küme denir; $A = X$ olması durumunda da parakompakt rough uzay adı verilir.

Önerme 4.1.6: $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ olmak üzere (X, τ) bir parakompakt rough uzay ve $A = (A_1, A_2) \subseteq X$ bir kapalı küme olsun. Bu durumda A kümesi parakompakttır.

İspat: $\mathcal{U}^1 = \{U_i^1\}$, A_1 kümesinin bir açık örtüsü olsun. A_1 kapalı küme olduğundan $\mathcal{V}^1 = \mathcal{U}^1 \cup \{{A_1}^t\}$ ailesi $\underline{R}X$ alt tahmin kümesinin bir açık örtüsü olur. X parakompakt rough uzay olduğundan $\underline{R}X$ in $\mathcal{V}^1$ açık örtüsü bir $\mathcal{W}^1$ açık yerel sonlu inceltilmişe sahiptir. Yani $\forall W_j^1 \in \mathcal{W}^1$ için $W_j^1 \subset V_i^1$ o.ş. $\exists V_i^1 \in \mathcal{V}^1$ şartını sağlayan bir $\mathcal{W}^1 = \{W_j^1\}$ ailesi mevcuttur. Ayrıca bu $\mathcal{W}^1 = \{W_i^1\}$ ailesinin en fazla sonlu sayıda elemanı ile X in her bir noktasının en az bir komşuluğunun aile arakesiti boştan farklıdır. Yani

$$(\forall x \in X, \exists G^1 \in \tau_1)\left(x \in G^1 \wedge G^1 \cap W_{j_k}^1 \neq \emptyset \wedge G^1 \cap W_{j_k}^1 = \emptyset, k \in \{1,2,\dots,n\} \not\ni m\right)$$

olur.

$$\mathcal{M}^1 = \mathcal{W}^1 - \{W \in \mathcal{W}^1 : W \subseteq {A_1}^t\}$$

olarak tanımlanan $\mathcal{M}^1$ ailesi $\mathcal{U}^1$ açık örtüsünün bir inceltilmişidir. Aynı zamanda $A_1 \subseteq X$ olduğundan $\mathcal{M}^1$ bir yerel sonlu ailedir. Dolayısıyla $\mathcal{M}^1$ ailesi $\mathcal{U}^1$ açık örtüsünün bir açık yerel sonlu inceltilmişidir. A_1 in $\mathcal{U}^1$ açık örtüsü keyfi olarak alındığından A_1 kapalı kümesi parakompakttır. Benzer şekilde A_2 kapalı kümesinin de parakompakt olduğu gösterilir. Böylece parakompakt rough küme tanımından A kapalı kümesi parakompakt rough kümedir. ■

Teorem 4.1.7: X parakompakt Hausdorff rough uzay ise normal rough uzaydır.

İspat: İlk önce $\underline{R}X$ uzayının regüler olduğunu gösterelim. $x \in \underline{R}X$ ve $F_1(\not\ni x) \subseteq \underline{R}X$ bir kapalı küme olsun. $\underline{R}X$ Hausdorff olduğundan $\forall y \in F_1$ için $x \notin \overline{U_y^1}$ olacak şekilde en az bir U_y^1 açık komşuluğu vardır. $\mathcal{K}^1 = \{U_y^1\}_{y \in F_1} \cup \{F_1{}^t\}$ ailesi $\underline{R}X$ in bir açık örtüsüdür. $\underline{R}X$ parakompakt olduğundan $\mathcal{K}^1$ açık örtüsü bir $\mathcal{W}^1 = \{W_i^1\}_{i \in I_1}$ açık yerel sonlu inceltilmişine sahiptir. $J_1 = \{i \in I_1 : W_i^1 \cap F_1 \neq \emptyset\}$ olsun. $\{W_i^1\}_{i \in J_1}$ ailesi F_1 kapalı kümesinin bir örtüsüdür. $V_1 = \bigcup_{i \in J_1} W_i^1 \supseteq F_1$ olsun. $\{W_i\}_{i \in I_1}$ ailesi $\mathcal{K}^1$ açık örtüsünün bir inceltilmişi olduğundan $\forall i \in J_1, \exists y \in F_1$ için $W_i^1 \subseteq U_y^1$ ve dolayısıyla $\overline{W_i^1} \subseteq \overline{U_y^1}$ olur. Buradan $\forall i \in J_1$ için $x \notin \overline{W_i^1}$ olur. $x \notin \bigcup_{i \in J_1} \overline{W_i^1} = x \notin \overline{\bigcup_{i \in J_1} W_i^1} = \overline{V_1}$ olur. Böylece $\underline{R}X$ bir regüler uzaydır. Benzer şekilde $\overline{R}X$ de bir regüler uzaydır. Dolayısıyla X bir regüler rough uzaydır. Şimdi de $\underline{R}X$ regüler uzayının nomal uzay olduğu gösterilecektir. $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ olacak şekilde $A_1, B_1 \subseteq \underline{R}X$ kapalı kümeleri verilsin. $\underline{R}X$ regüler uzay olduğundan $\forall y \in A_1$ için $B_1 \cap \overline{U_y^1} = \emptyset$ olacak şekilde en az bir U_y^1 açık komşuluğu vardır. $\mathcal{M}^1 = \{U_y^1\}_{y \in A_1} \cup \{A_1{}^t\}$ ailesi $\underline{R}X$ in bir açık örtüsüdür. $\underline{R}X$ parakompakt olduğundan $\mathcal{M}^1$ açık örtüsü bir $\mathcal{W}^1 = \{W_i^1\}_{i \in I_1}$ açık yerel sonlu inceltilmişine sahiptir. $J_1 = \{i \in I_1 : W_i^1 \cap A_1 \neq \emptyset\}$ olsun. $\{W_i\}_{i \in J_1}$ ailesi A_1 kapalı kümesinin bir örtüsüdür. $Y_1 = \bigcup_{i \in J_1} W_i^1$ olsun. $\{W_i^1\}_{i \in I_1}$ ailesi $\mathcal{M}^1$ açık örtüsünün bir inceltilmişi olduğundan $\forall i \in J_1, \exists y \in A_1$ için $W_i^1 \subseteq U_y^1$ ve dolayısıyla $\overline{W_i^1} \subseteq \overline{U_y^1}$ olur. Buradan $\forall i \in J_1$ için $B_1 \cap \overline{W_i^1} = \emptyset$ olur. Böylece $\emptyset = A_1 \cap \left(\bigcup_{i \in J} \overline{W_i^1}\right) = A_1 \cap \left(\overline{\bigcup_{i \in J} W_i^1}\right) = A_1 \cap \overline{V_1}$ olur.

Böylece $\underline{R}X$ uzayı bir normal uzaydır. Benzer şekilde $\overline{R}X$ in de bir normal uzay olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla X bir normal rough uzaydır. ■

5. SONUÇLAR

Wu (2007)'nun rough küme üzerinde tanımladığı topoloji, esasen klasik küme üzerinde tanımlanan bilindik iki topolojiden meydana gelir. Wu (2007) çalışmasında kompaktlık, Hausdorf uzay ve homeomorfizm kavramlarını rough topolojiye uyarlayarak bu kavramlarla ilgili bazı gerçeklerin rough topolojik uzayda da geçerli olduğunu göstermiştir.

Bu tez çalışmasında kompaktlık kavramına nazaran daha genel bir kavram olan parakompaktlık kavramı rough topolojik uzayda yeniden tanımlanarak bu kavramla ilgili bilinen gerçeklerden bazılarının rough topolojik uzayda da geçerliliğinin korunduğu gösterilmiştir. Verilen bir rough uzayın parakompakt olduğu biliniyorsa kapalı her alt kümesinin de parakompakt olduğunu söyleriz. Ayrıca her parakompakt Hausdorff rough uzayın aynı zamanda bir normal rough uzay olduğunu söyleriz.

KAYNAKLAR

Bülbül, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, Trabzon.

Grzymala-Busse J.W., Kostek B., Swiniarski W.R., Szczuka M.S., 2004. Some Issues On Rough Sets. Transactions On Rough Sets I, Peters, J.F., Skowron A. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York, 1-58.

Jeffrey L., 2010. Paracompactness. University of Toronto Mathematics, http://www.math.toronto.edu/mat1300/paracompact.pdf (05.07.2010).

Lipschutz, S., 1968. Schaum's Outline of General Topology. McGraw-Hill, 256, New York.

Liu, W.J., 2004. Topological Space Properties of Rough Sets. Proceedings of the Third International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Shanghai.

Liu, W.J., Bai L. and Jing Q., 2006. Some Topological Properties of Rough Approximation Spaces. Proceedings of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Dalian.

Munkres, J.R., 1975. Topology A First Course ,Prentice-Hall,Inc.Englewood Ciffs, New Jersey.

Pawlak, Z., 1982. Rough Sets. International Journal of Computer and Information Sciences, Vol. 11 (5) 341-356.

Willard, S., 1970. General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. London.

Wu, Q.E., Wang T., Huang Y.X. and Li J.S., 2007. Topology Theory on Rough Sets. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics, Vol. 38 (1) 68-77.

Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji,Gazi Basımevi, Ankara.

Yüksel, Ş., 1998. Genel Topoloji, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya.

Zhu, W. and Wang F.Y., 2007. On Three Types of Covering-Based Rough Sets. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, Vol. 19 (8) 1131-1144.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Erzurum'da doğmuştur. Öğrenimine 1991 yılında Mimar Sinan İlköğretim Okulu'nda başlamış ve 1996-1999 yıllarında Yahya Kemal İlköğretim Okulu'nda devam etmiştir. 2002 yılında Mehmet Akif Ersoy Lisesi'nde ortaöğretim kademesini tamamlamıştır. Aynı yılda Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamıştır. 2007 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Hâlen eğitimine devam etmektedir.