SABİT NOKTA İTERASYONLARININ HATALARI ÜZERİNE

Esra YOLAÇAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ
2010

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SABİT NOKTA İTERASYONLARININ HATALARI ÜZERİNE

Esra YOLAÇAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2010

Yrd. Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ danışmanlığında, Esra YOLAÇAN tarafından hazırlanan bu çalışma 20/07/2010 tarihinde aşağıdaki jüriler tarafından Matematik Anabilim Dalı, Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Enver TATAR	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SABİT NOKTA İTERASYONLARININ
HATALARI ÜZERİNE

Esra YOLAÇAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ

Bu tezde, Banach uzaylarda ortak bir sabit noktaya yakınsayan genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri için yenilenmiş sonlu adım hatalı iterasyon yönteminin kuvvetli yakınsaması çalışıldı.

2010, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm, Sabit nokta, Kuvvetli yakınsama, Banach uzayı.

ABSTRACT

MS Thesis

ON ERRORS OF FIXED POINT ITERATIONS

Esra YOLAÇAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ

In this thesis, it is proved the strong convergence of modified finite-step iterative process with mean errors for a finite family of generalized asymptotically quasi-nonexpansive in Banach space to converge to a common fixed point.

2010, 51 pages

Keywords: Generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings, Fixed point, Strong convergence, Banach space.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen ve çalışmakla gurur duyduğum çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ'a en içten dileklerimle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere bölümümüzün öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e, Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT'a, Sayın Arş. Gör. İsa YILDIRIM'a ve Matematik Bölümü'nün tüm öğretim elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı aileme en içten dileklerimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Esra YOLAÇAN
Temmuz - 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

c_o	0 a yakınsayan dizilerin uzayı
$dim\ (X)$	X uzayının boyutu
$Dom(T)$	T nin tanım kümesi
$D(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{D}(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
E^*	E uzayının duali
F	Cisim ($F = \mathbb{R}\ veya\ \mathbb{C}$)
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$I(u_0, \alpha_n, \beta_n, T)$	Ishikawa iterasyonu
$K(k_0, \lambda, T)$	Krasnoselskij iterasyonu
$M(x_0, \alpha_n, T)$	Mann iterasyonu
$(N, \|\ \ \|)$	Normlu uzay
$P(\mathrm{p}_0, T)$	Picard iterasyonu

1. GİRİŞ

Tarihsel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki ana dalda gelişmektedir. Birincisi, normlu lineer uzayların kompakt, konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli operatörler için sabit nokta teorisidir. Diğeri ise, tam metrik uzaylar üzerinde büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında L. E. J. Brouwer ile başlamıştır. Bilinen en basit sabit nokta teoremi: “$[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f:[a,b] \to [a,b]$ sürekli bir dönüşüm ise, bu durumda f nin $[a,b]$ aralığında bir sabit noktası vardır” şeklindedir. Brouwer bu teoremi, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genişletmiştir: “B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f: B \to B$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir ”.

1922 de Banach, Banach sabit nokta teoremi veya büzülme ilkesi olarak da bilinen “f, bir (X,d) tam metrik uzayından yine kendisi üzerine tanımlanan bir büzülme dönüşümü ise, f nin X de bir tek sabit noktası vardır ve herhangi bir $x \in X$ için $\left(f^n(x)\right)$ Picard iterasyonu bu sabit noktaya yakınsar” teoremini vermiştir.

Banach’ın bu çalışması bundan sonra ki yapılan çalışmaların genelleştirilmesinde temel teşkil eder. 1930 yılında J. Schauder, X bir Banach uzayı olmak üzere, K, X in boş olmayan herhangi bir kompakt konveks alt kümesi ve $f: K \to K$ sürekli herhangi bir dönüşümün sabit noktası olduğunu ispatladı. 1950 de F.E. Browder, 1965 de W.A. Kirk, 1968 de R. Kanan, 1972 de Zamfirescu ve daha pek çok kişi bu temel sonuçları genelleştirmiş ve bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Aslında bu teori, bir integral denklemin çözümünün varlığını göstermek amacıyla kurulmuştur. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini göstermektedir. Yine, Banach sabit nokta teoremi belirli dönüşümlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremi olup, ayrıca (uygulamaya yönelik problemlerin çözümünde) sabit noktaya en iyi yaklaşımı elde etmek için inşa esasına dayanan bir işlem yöntemini verir. Bu işleme “iterasyon” adı verilir.

İterasyon yöntemleri, uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm dallarında kullanılır. Yakınsaklık ispatları ve hata tahminleri, büyük bir çoğunlukla Banach sabit nokta teoreminin bir uygulaması yardımıyla elde edilir.

İterasyonla ilgili kısa bir tarihçe vermek gerekirse; yaklaşık iki bin yıldan fazla tarihe sahip olan Ardışık Yaklaşımlar İterasyonunu ilk kez bir İtalyan matematikçisi olan Picard kullanarak adi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin tahmini çözümünü araştırmıştır. Bu sahada ilk teorik sonuç Polonyalı matematikçi S. Banach’a ait olan “Daralma Dönüşüm Prensibi” veya “Banach Sabit Nokta Teoremi” dir.

Sunulan bu tezde, Banach uzayında sabit nokta teorisi detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak hem matematikteki bazı temel tanım ve kavramlar hem de sabit nokta ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak, Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa ve Noor gibi önemli iterasyon yöntemleri tanıtılmıştır. Daha sonra, bu iterasyonların hataları hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Banach uzaylarda ortak bir sabit noktaya yakınsayan genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri için yenilenmiş sonlu adım hatalı iterasyon yönteminin kuvvetli yakınsaması incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramlarla ilgili tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve $X = (X, d)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 (Yakınsak Dizi): (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine X de yakınsak ve x e de dizinin limiti denir. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ve limiti x ise, bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 (Cauchy Dizisi): (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her ε >0 için $m,n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4 (Tam Metrik Uzay): (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.5 (Kompakt Metrik Uzay): (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse, (X,d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.6 (Sürekli Dönüşüm): $X = (X,d)$ ve $Y = (Y,\rho)$ iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x,x_0) < \delta$ olduğunda $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ veya denk bir ifade ile,

$$f\big(D(x_0;\delta)\big) \subseteq D(f(x_0);\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise, f ye X üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.1.7 (Açık ve Kapalı Küme): X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x;r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ sayısı varsa, A ya X in açık alt kümesi denir. X in herhangi bir B alt kümesinin X deki tümleyeni olan $B^t = X - B$, X de açık ise B ye kapalı küme denir.

Tanım 2.1.8 (Topolojik Uzay): X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer, aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, τ ya X için bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

i. $X, \emptyset \in \tau$ dur,

ii. τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi τ ya aittir,

iii. τ ya ait sonsuz sayıda kümenin birleşimi τ ya aittir.

Tanım 2.1.9 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $\cdot: F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) $(L,+)$ değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha . x \in L$ dir.

L2. $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

L3. $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

L4. $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

L5. $1.x = x$ dir (burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay uzay adı verilir.

Tanım 2.1.10 (Konveks Küme): L, bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: \; z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.1.11 (Normlu Uzay): N, bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \; (\alpha \in F)$

N3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\| \quad \|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm ve $(N, \| \quad \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.12 (Banach Uzayı): N, normlu lineer uzay olsun. N, $d(x,y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise, N ye Banach uzayı denir.

N nin reel ve kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.13 (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \quad \rangle : L \times L \to F$ fonksiyonu,

I1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

I2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $(\alpha \in F)$

I3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

I4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(L, \langle \quad \rangle)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.14 (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \quad \|$, iç çarpım normu olsun. $d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ olarak tanımlanırsa, (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X e Hilbert uzayı denir.

Bu tanımdan Hilbert uzaylarının, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzayları olduğu görülür.

Tanım 2.1.15 (Sınırlı Lineer Operatör): N ve N' iki normlu uzay ve $T: N \to N'$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|Tx\|' \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa, T ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.1.16 (Cebirsel Dual): X bir reel lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $L(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $L(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R} \text{ lineer}\}$ olsun. $\forall x \in X$ ve $T_1, T_2 \in L(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $L(X, \mathbb{R})$ bir reel lineer uzay olur. Bu $L(X, \mathbb{R})$ uzayına X in cebirsel duali denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.1.17 (Topolojik Dual): X, bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. $\forall x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $C(X, \mathbb{R})$ bir lineer uzay olur. Bu $C(X, \mathbb{R})$ uzayına X in topolojik duali denir ve X^* ile gösterilir.

Burada X^*, $\|T\| = \sup\{|T(x)|: \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu lineer uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzaydır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı da verilir.

Yukarıdaki tanımlardan da anlaşılacağı gibi X^* topolojik duali, X' cebirsel dualinin bir alt uzayıdır. Sonlu boyutlu uzayların topolojik dualleri ile cebirsel dualleri aynıdır.

Tanım 2.1.18 (Kuvvetli Yakınsaklık): X, bir normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum ya

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti denir.

Tanım 2.1.19 (Zayıf Yakınsaklık): X, normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer, her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \xrightarrow{z} x$ ya da $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Teorem 2.1.20 (Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık): X, normlu uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu durumda,

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.

(b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.

(c) $\dim(X) < \infty$ ise zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1 (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x noktasına T nin sabit noktası denir.

Yani $Tx = x$ denkleminin çözümü, T nin bir sabit noktasıdır. T nin sabit noktalarının kümesi F_T veya $Fix(T)$ ile gösterilir. X herhangi bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^{n+1}(x) = T\big(T^n(x)\big)$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x), T$ altında x in n. iterasyonu olarak adlandırılır.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_T \subset F_{T^n}$ dir.

2. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $F_{T^n} = \{x\}$ ise, $F_T = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $T: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2,3\}$ bir dönüşüm ve $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ olarak tanımlanırsa, $F_{T^2} = \{1, 2,3\}$ olur. Ancak $F_T = \{2\}$ dir.

Şimdi vereceğimiz örnekler, bazı özel dönüşümlerin sabit noktalarının olup olmaması ile ilgilidir.

Örnek 2.2.1.1: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ şeklindeki özdeş dönüşümü için X in her bir noktası sabit noktadır.

Örnek 2.2.1.2: $K = [0,\infty)$ olmak üzere $T: K \to K$, $Tx = sinx$ dönüşümünü göz önüne alalım. Böyle bir dönüşüm için $F_T = \{0\}$ dır.

Örnek 2.2.1.3: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X, Tx = x - \sqrt{7}$ ise $F_T = \emptyset$ dir.

Örnek 2.2.1.4: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $T(x,y) = (x,0)$ dönüşümünün sabit noktaları, $(x,0)$ şeklindeki noktalardır.

Örnek 2.2.1.5: $X = [0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$, $T\mathrm{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir.

Tanım 2.2.2 (Lipschitzian Dönüşüm): (X,d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x,y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Bu tanıma göre her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \delta$ ve $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ olduğunda

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x,y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Yani, T düzgün süreklidir.

Her düzgün sürekli fonksiyonun Lipschitz şartını sağlaması gerekmez. Mesela, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlanan $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgün sürekli olup Lipschitz şartını sağlamaz.

Örnek 2.2.2.1: $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, $n \geq 2$ için $Tx = 6x + n!$ olsun. Bu durumda

$$d(Tx,Ty) = |6x + n! - 6y - n!| = 6|x-y| = 6d(x,y),$$

olur. $k \geq 6$ için T fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 2.2.3 (Daraltan Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktalara sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0,1]$ olmak üzere $T: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ ve $T(x) = \frac{x}{5}$ dönüşümünü alalım. Burada T dönüşümü daraltan dönüşümdür fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm, düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm olamaz. Buna karşın, T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n bir daraltan dönüşüm olabilir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde görebiliriz.

Örnek 2.2.3.1: T: [0,2] → [0,2] olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

olarak tanımlansın. T fonksiyonu $x = 1$ de süreksizdir ve dolayısıyla daraltan dönüşüm olmaz. Diğer taraftan, $T^2: \{0,1\} \to \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup T^2 daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 2.2.4 (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Örnek 2.2.4.1: $X = [1,+\infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: [1,+\infty) \to [1,+\infty)$, $T(x) = x + \frac{1}{x}$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü;

$$T'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1 \text{ ve } 0 < T'(x) < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoremi'nden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

Tanım 2.2.5 (Kesin Pseudocontractive Dönüşüm): X bir Banach uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve T nin tanım kümesi $Dom(T)$ ile gösterelim. Her $x, y \in Dom(T)$ ve her $t > 0$ için,

$$\|x - y\| \leq \|(1 + t)(x - y) - kt(Tx - Ty)\|$$

olacak şekilde pozitif bir k sabiti varsa T ye kesin pseudocontractive dönüşüm (strictly pseudocontractive dönüşüm) denir. $k = 1$ için kesin pseudocontractive dönüşümler pseudocontractive dönüşümler olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.6 (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 2.2.6.1: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve T: X → X, $Tx = |x| - 3$ olsun. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = \big||x| - 3 - |y| + 3\big| = \big||x| - |y|\big| \leq |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat T ne daraltan ne de kesin daraltan dönüşümdür.

Tanım 2.2.7 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa, X e düzgün (uniformly) konveks Banach uzayı adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Örnek 2.2.7.1: $\mathbb{R}^n$; $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)^{1/2}$ $(x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$ uzayı Euclidean normuna göre düzgün konveksdir.

Örnek 2.2.7.2: ℓ_1 ve ℓ_∞ uzayları düzgün konveks değildir. $x = (1,0,0,0 \cdots)$, $y = (0,-1,0,0,\cdots) \in \ell_1$ ve $\varepsilon = 1$ olsun. Bu durumda

$$\|x\|_1 = 1, \|y\|_1 = 1, \|x - y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon,$$

dır. Fakat, $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|_1 = 1$ ve $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|_1 \leq 1 - \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunamaz. Bu yüzden, ℓ_1 uzayı düzgün konveks değildir. Benzer düşünceyle, eğer $x = (1,1,1,0,0,\cdots)$, $y = (1,1,-1,0,0,\cdots) \in \ell_\infty$ ve $\varepsilon = 1$ olsun. Bu durumda

$$\|x\|_\infty = 1, \|y\|_\infty = 1, \|x - y\|_\infty = 2 > 1 = \varepsilon,$$

olur. $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|_\infty = 1$ olduğundan dolayı, ℓ_∞ uzayı düzgün konveks değildir.

Tanım 2.2.8 (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm): X bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, T ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 2.2.9 (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\, x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + r_n)\|x - y\|$$

olduğunda $n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ olacak şekilde bir $\{r_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

Tanım 2.2.10 (Quasi (Sözde)-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$ ve $\forall x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Sonuç 2.2.10.1:

1. En az bir sabit noktaya sahip olan genişlemeyen bir dönüşüm quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür.

2. Lineer bir quasi-genişlemeyen bir dönüşüm genişlemeyen bir dönüşümdür.

Aşağıdaki örnek ile lineer olmayan sürekli quasi-genişlemeyen dönüşümlerin genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösterelim.

Örnek 2.2.10.2: X = ℓ_∞ ve $K = \{x \in \ell_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ olsun. $T: K \to K$ dönüşümü $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in K$ için $Tx = (0, {x_1}^2, {x_2}^2, {x_3}^2, \cdots)$ şeklinde tanımlansın. Burada T lineer olmayan sürekli bir dönüşüm olup tek bir sabit noktaya sahiptir. Yani $F_T = \{0\}$ dır. $\forall x \in K$ için;

$$\|Tx - 0\|_\infty = \|(0, {x_1}^2, {x_2}^2, {x_3}^2, \cdots)\|_\infty \leq \|(0, x_1, x_2, \cdots)\|_\infty = \|x - p\|$$

olup buradan T'nin quasi-genişlemeyen dönüşüm olduğu görülür. $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right) \in K$ ve $y = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \cdots\right) \in K$ olarak alınırsa

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \left\|\left(0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \cdots\right)\right\|_\infty = \frac{5}{16} > \frac{1}{4} = \|x - y\|_\infty,$$

olup buradan da T'nin genişlemeyen bir dönüşüm olmadığı görülür.

Tanım 2.2.11 (Asimptotically Nonexpansive in the intermediate sense): X bir reel Normlu uzayı, K da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in K$ için,

$$limsup_{n\to\infty} sup_{x,y\in K}(\|T^n x - T^n y\| - \|x - y\|) \leq 0 \tag{2.2}$$

olacak şekilde $T: K \to K$ sürekli bir dönüşümü varsa, T ye asimptotically nonexpansive in the intermediate sense (ortadaki asimptotik genişlemeyen dönüşüm) dönüşümü adı verilir.

Eğer $a_n \coloneqq sup_{x,y\in K}(\|T^n x - T^n y\| - \|x - y\|)$ ve $\sigma_n = \{0, a_n\}$ olarak alırsak, bu durumda $n \to \infty$ iken $\sigma_n \to 0$ olup (2.2) eşitsizliği $\forall\, x, y \in K$ ve $\forall\, n \geq 1$ için,

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|x - y\| + \sigma_n$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer K, E düzgün konveks Banach uzayının kapalı, konveks, sınırlı boştan farklı alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotically nonexpansive in the intermediate sense ise bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir (Kirk 1974).

Yukarıdaki dönüşümler göz önüne alındığında asimptotically nonexpansive in the intermediate sense dönüşümlerinin, genişlemeyen dönüşümlerle asimptotik genişlemeyen dönüşümler arasında bulunduğu kolay bir şekilde görülmektedir.

Tanım 2.2.12 (Asimptotically Quasi-Nonexpansive in the intermediate sense): X bir reel Normlu uzay ve K da X in boş olmayan alt kümesi olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$, $\forall\, x \in K$ ve $\forall\, n \geq 1$ için

$$limsup_{n\to\infty} sup_{x\in K, p\in F_T}(\|T^n x - p\| - \|x - p\|) \leq 0$$

olacak şekilde ve $T: K \to K$ sürekli bir dönüşümü varsa, T ye asimptotically quasi-nonexpansive in the intermediate sense (ortadaki asimptotik sözde-genişlemeyen dönüşüm) dönüşümü adı verilir.

Örnek 2.2.12.1: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $d(x,y) = |x - y|$ alışılmış metriğini düşünelim. $T: X \to X$, $Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, asimptotically nonexpansive in the intermediate sense dönüşümüdür, ancak genişlemeyen dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.13 (Zamfirescu Operatör): (X, d) tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için aşağıdaki $(z_1) - (z_3)$ şartlarından en az biri doğru olacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$ ve $0 \leq \beta, \gamma < 0{,}5$ şartlarını sağlayan α, β ve γ reel sayıları varsa, T ye Zamfirescu operatörü denir.

(z_1) $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$;

(z_2) $d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(z_3) $d(Tx, Ty) \leq \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Quasi genişlemeyen dönüşüm sınıfını içeren bir operator sınıfı 1972 de Zamfirescu tarafından verilmiştir. Zamfirescu'nun teoremi Banach, Kanan ve Chatterjea sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmiş şeklidir.

Tanım 2.2.14 (Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir Normlu uzay ve K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset, \forall\, x \in K$ ve $\forall\, n \geq 1$ için

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x - p\|$$

$n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ olacak şekilde bir $\{r_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa bu T dönüşümüne asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Tanım 2.2.15 (Genelleştirilmiş Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir Banach uzay ve K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\, x, y \in K$ ve $\forall\, n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + r_n)\|x - y\| + s_n$$

olduğunda $n \to \infty$ iken $r_n,\ s_n \to 0$ olacak şekilde bir $\{s_n\},\ \{r_n\} \in [0, \infty)$ dizileri varsa bu T dönüşümüne genelleştirilmiş asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

Tanım 2.2.16 (Genelleştirilmiş Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir Banach uzay ve K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$, $\forall\, x \in K$ ve $\forall\, n \geq 1$ için,

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x - p\| + s_n$$

olduğunda $n \to \infty$ iken $r_n,\ s_n \to 0$ olacak şekilde bir $\{s_n\},\ \{r_n\} \in [0, \infty)$ dizileri varsa bu T dönüşümüne genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Sonuç 2.2.16.1: Yukarıdaki tanımları göz önüne aldığımızda;

1. $\forall\, n \geq 1$ için $s_n \equiv 0$ oluyorsa, bu durumda genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm, asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm olur;

2. $\forall\, n \geq 1$ için $r_n = s_n \equiv 0$ oluyorsa, bu durumda genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm, quasi-genişlemeyen dönüşüm olur.

2.3. Sabit Nokta Teoremleri

Bazı dönüşümlerin sabit noktası olmadığı halde bazılarının var olduğunu hatta bu sabit noktaların sayısının birden fazla olabileceği bilinir. O halde "Hangi tür dönüşümlerin sabit noktaları var ve bu sabit noktalar hangi koşullar altında tek olur?" sorusu ile karşılaşılır. Bu soruyu daha detaylı olarak cevaplamak için aşağıdaki teorem ve örnekleri verebiliriz.

Teorem 2.3.1: $[a,b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f:[a,b] \to [a,b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında bir c sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a,b]$ için, $T(x) = x - f(x)$ olacak şekilde bir $T:[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda, T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise, $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremine göre $T(c) = 0$ olacağından, $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ vardır.

Teorem 2.3.2 (Banach Daralma İlkesi): (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T, bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0,\, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \ldots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu, dolayısıyla $x \in X$ e yakınsadığını ve x in $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\
&\leq kd(x_{n+p-1}, x_{n-1}) = kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \leq \cdots \\
&\leq k^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n d(x_p, x_0) \\
&\leq k^n \left(d(x_p, x_{\mathrm{p}-1}) + d(x_{p-1}, x_0)\right) \\
&\leq k^n \left(kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)\right) \\
&= k^n \left(d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + kd(x_{p-1}, x_{p-2})\right) \\
&\leq k^n\left[d(x_{p-2}, x_0) + kd(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})\right] \\
&\vdots \\
&\leq k^n(d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2 d(x_1, x_0) + \ldots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)(1 + k + k^2 + k^3 + \ldots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)\left(\frac{1}{1-k}\right) \quad (n \to \infty\ için)
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

elde edilir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x \in X$ ve dolayısıyla $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir. Yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminden $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y, T nin başka bir sabit noktası yani $Ty = y$ olsun. Buna göre,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu da $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü,

$$d(x, y) \leq kd(x, y) \Rightarrow d(x, y) - kd(x, y) \leq 0$$

olduğundan

$$d(x, y)[1 - k] \leq 0$$

olur. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. O halde hem $1 - k > 0$ hem de $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y)[1 - k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x, y) = 0$ olması gerekir. O halde $x = y$ dir.

Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğinin güncel bir incelenmesi sabit nokta teoremleri yardımıyla yapılmaktadır. Sabit nokta teoremi yalnız diferensiyel denklemler için değil, her tür denklem için kullanılabilen ilginç bir yöntemdir.

Euler ve Cauchy, f nin sürekli ve diferensiyellenebilir bir fonksiyon olması durumunda

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

şeklindeki bir diferansiyel denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine yaptıkları çalışmada Banach Daralma İlkesi temel malzeme olmuştur (Aksoy and Khamsi 1990).

Örnek 2.3.3: $X = \mathbb{R}$, $K = [0,5] \subset X$, $T: K \to K$ ve $Tx = \frac{x}{x+2}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{2}$ olarak seçelim. Daraltan dönüşümden,

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{5},$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 = \frac{1}{11},$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = \frac{1}{23},$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0$$

$$\vdots$$

şeklinde bir dizi elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alınırsa, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,5]$ dir. Ayrıca sabit nokta tanımını uygularsak

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{x+2} = x \Rightarrow x = 0 \in [0,5] \text{ ve } x = -1 \notin [0,5]$$

olur. Yani bu dönüşümün sabit noktası yine $0 \in [0,5]$ olarak bulunmuş olur.

Teorem 2.3.4 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): D, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda, $T: D \to D$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Brouwer Teoremi herhangi bir Banach uzayı (sonsuz boyutlu uzay) için genişletilemez. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.3.4.1: D, c_0 Banach uzayında bir kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) \in$ D için

$$T: D \to \mathrm{D}, T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}}, \ldots)$$

şeklinde tanımlansın. Her $x, y \in D$ için

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin D de bir çözümü yoktur.

Teorem 2.3.5 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, K da X in boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Teorem 2.3.6: (X, d) tam metrik uzay, $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla,

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0, T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu ise $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.3.7: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$$

dir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: T nin bir sabit noktasının olduğunu göstermek kolaydır. Bunun için,

$$\phi(x) = d(x, Tx), \quad x \in X$$

şartını sağlayan bir $\phi: X \to \mathbb{R}^+$fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda ϕ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden ϕ, bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

çıkar. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir.

Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise,

$$d(T^{n+1}x, x_0) = d(T^{n+1}x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \to \infty$ için

$$r = \lim_{n \to \infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca X kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi, yakınsak bir $(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k \to \infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan,

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k \to \infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k \to \infty} d(T^{n_k + 1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin x_0 noktasına yakınsadığını gösterir. O halde $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$ dır.

Teorem 2.3.8: (X, d) bir tam metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $T: D(x_0, r) \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(Tx_0, x_0) < (1 - k)r$$

ise, bu durumda T dönüşümü $D(x_0, r)$ diskinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal *et al.* 2001).

İspat: $d(Tx_0, x_0) < (1 - k)r_0$ olmak üzere $0 \leq r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 vardır. Göstereceğiz ki $T: \overline{D(x_0, r_0)} \to \overline{D(x_0, r_0)}$ dir. Eğer $x \in \overline{D(x_0, r_0)}$ ise,

$$\begin{aligned} d(Tx, x_0) &\leq d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1 - k)r_0 \leq r_0 \end{aligned}$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden dolayı Tnin $\overline{D(x_0, r_0)} \subset D(x_0, r)$ da bir tek sabit noktası vardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları vardır. Bunlardan bazıları Picard, Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, Noor iterasyonları, hatalı Mann, hatalı Ishikawa ve hatalı Noor iterasyon metotları sıkça kullanılmaktadır. Şimdi bu iterasyon metotlarını verelim:

3.1.1. Picard İterasyon Metodu

$(X, \| \quad \|)$ reel normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Picard iterasyonu, $p_0 \in X$ olmak üzere

$$p_{n+1} = T^{n+1} p_0, \; n = 0,1,2,\dots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1980). $P(p_0, T)$ ile gösterilen Picard iterasyonu, ardışık yaklaşıklıkların dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Örnek 3.1.1.1: $C = [0,1]$ ve her $x \in C$ için $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümü alalım. T genişlemeyen bir dönüşüm olup tek bir sabit noktaya sahiptir. Yani $F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Ama, herhangi bir $x_o = a \neq \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 = 1 - \mathrm{a}, \\
x_2 &= Tx_1 = T^2 x_0 = \mathrm{a}\,, \\
x_3 &= Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = 1 - \mathrm{a}, \\
&\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde bir dizi elde ederiz. Fakat bu dizi T nin sabit noktasına yakınsamaz. O halde genişlemeyen bir T dönüşümü sabit noktaya sahip olsa bile Picard iterasyon dönüşümünün sabit noktaya yakınsaması gerekmez.

3.1.2. Krasnoselskij İterasyon Metodu

$(X, \| \ \|)$ reel normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Krasnoselskij iterasyonu, $k_0 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$k_{n+1} = (1-\lambda)k_n + \lambda T k_n, \ \ n = 0,1,2,\ldots \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır (Krasnoselskij 1955). (3.2) Krasnoselskij iterasyonu kısaca $K(k_0, \lambda, T)$ ile gösterilir. Ayrıca bu iterasyon, $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir.

3.1.3 Kirk İterasyon Metodu

$(X, \| \ \|)$ reel normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_o x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_n T^k x_n \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $k \geq 1$ tamsayı ve $i = 0, 1, 2, \cdots, k$ için $\alpha_i \geq 0$ ve $\alpha_1 > 0$ olmak üzere

$$\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir.

Bu (3.3) eşitsizliği ile verilen Kirk iterasyonu, $k = 0$ için Picard iterasyonuna, $k = 1$ için de Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

3.1.4. Mann İterasyon Metodu

$(X, \| \quad \|)$ reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere, Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n = 0,1,2, \dots \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır (Mann 1953). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ dir. Mann iterasyonu kısaca $M(x_0, \alpha_n, T)$ ile gösterilir. (3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon, Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

Eğer T sürekli ve Mann iterasyon yöntemi yakınsaksa, bu durumda T nin bir sabit noktasına yakınsar. Fakat eğer T sürekli değilse, Mann iterasyon yöntemine göre yakınsak olsa bile T nin bir sabit noktaya yakınsayacağını garanti edemeyiz (Berinde 2006).

Örnek 3.1.4.1: $T: [0,1] \to [0,1]$, $T0 = T1 = 0$ ve $Tx = 1,\ 0 < x < 1$ olsun. Bu durumda $F_T = \{0\}$ olup $\alpha_n = \frac{1}{n}\ (n \geq 1)$ olacak şekilde $0 < x_1 < 1$ için $M(x_1, \alpha_n, T)$ Mann iterasyonu 1 e yakınsar, fakat bu nokta T nin sabit noktası değildir.

Mann iterasyon yöntemi, Lipschitzian ve strictly pseudocontractive dönüşümlerin yakınsama durumları için yetersiz olduğundan Ishikawa iterasyon metodu ortaya çıkmıştır.

Örnek 3.1.4.2: $E = l_2$, $K = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$ olsun. $\mathrm{T}: K \to E,\ Tx = -4x$ olarak tanımlayalım. T nin tek sabit noktası $x^* = (0,0,0, \cdots)$ olsun. Bu durumda T nin

Lipschitzian ve strictly pseudocontractive olduğunu görmek kolaydır. $x_0 = (1,0,0,\cdots)$ ve $\alpha_n = \beta_n = {}^1/_{(n+2)}$ olsun. Bu durumda

$$y_0 = (1-\beta_0)x_0 + \beta_0 T x_0 = -3/2\, x_0 \notin K$$

olur. Bu yüzden Ty_0 hesaplanamaz. Bu durumda Mann'ın iyi tanımlı olduğu gözlenemez.

3.1.5. Ishikawa İterasyon Metodu

$(X, \|\ \ \|)$ reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $u_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n \\ v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n T u_n, \ \ n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır (Ishikawa 1974). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ dir. Ishikawa iterasyonu kısaca $\mathrm{I}(u_0, \alpha_n, \beta_n, T)$ ile gösterilir. Ayrıca (3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınması durumunda bu iterasyonun, Mann iterasyonuna indirgenir.

3.1.6. Noor İterasyon Metodu

$(X, \|\ \ \|)$ reel normlu uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $u_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n \\ v_n \ \ \ = (1-\beta_n)u_n + \beta_n T w_n \\ w_n \ \ \ = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n, n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır (Noor 2000). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için (α_n), (β_n) ve $(\gamma_n) \in [0,1]$ dir.

Noor, çözümler yenileyen değişik teknikler kullanarak Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu tanıtmıştır.

3.1.7. n-adım İterasyon Metodu (Multistep Iteration)

$(X, \| \quad \|)$ reel normlu uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $k_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere *n-adım* iterasyonu, $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} t_n^{p-1} = \left(1 - \beta_n^{p-1}\right) k_n + \beta_n^{p-1} T k_n, \\ t_n^i \quad = \left(1 - \beta_n^i\right) k_n + \beta_n^i T t_n^{i+1}, \\ k_{n+1} = (1 - \alpha_n) k_n + \alpha_n T t_n^1, i = 1, 2, \ldots, p - 2 \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır (Rhoades and Şoltuz 2004). Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ ve $\{\beta_n^i\} \subset [0,1)$ dir.

3.2. Mann, Ishikawa ve Noor İterasyonlarının Hataları

Sabit nokta iterasyon yöntemlerini hatalarıyla ele alma fikri nümerik hesaplamalardan kaynaklanmaktadır. Bunlar sabit nokta iterasyonlarının kararlılık problemleriyle ilgili olmasına rağmen, burada bu konuyu bağımsız bir başlık altında ele aldık.

Hatalı iterasyon yöntemleri ilk olarak 1995'de, Liu tarafından aşağıdaki gibi tanıtılmıştır:

i. E normlu uzay, K da E'nin boş olmayan bir alt kümesi, $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $\{x_n\}$, K da bir dizi olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, hatalı Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T x_n + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ dır.

ii. E normlu uzay, K da E'nin boş olmayan bir alt kümesi, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $\{x_n\}$, K da bir dizi olsun. Hatalı Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_1 = x \in K, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n + u_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n + v_n, n \geq 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in [0,1]$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ dır.

(3.9) denkleminde $\beta_n = 0$ ve $v_n \equiv 0_E$ olarak alınırsa hatalı Mann iterasyonu elde edilir.

Liu'nun verdiği hatalı iterasyon yöntemlerinin tamamen tatmin edici olup olmadığı tartışılmaktadır, çünkü hataların oluşumu rastgele bir şekildedir. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ şartları hata terimlerini dolaylı olarak gösterse de; $n \to \infty$ alınması gerekirken, Liu, $n \to 0$ olarak almıştır. Bu da mantıksızdır.

1998 de, Xu, aşağıdaki iterasyon yöntemlerinin hata terimlerini ifade etmede, daha yeterli olduğunu göstermiştir.

3.2.1. Hatalı Mann İterasyon Metodu

E normlu uzay, K da E'nin boş olmayan bir alt kümesi, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $\{x_n\}$, K da bir dizi olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, hatalı Mann iterasyonu

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \gamma_n T x_n + \delta_n u_n, \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{u_n\}$, K da sınırlı dizi ve $\alpha_n + \gamma_n + \delta_n = 1$, $n \geq 0$ olacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\} \in [0,1]$ dır.

3.2.2. Hatalı Ishikawa İterasyon Metodu

E normlu uzay, K da E'nin boş olmayan bir alt kümesi, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $\{x_n\}$, K da bir dizi olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, hatalı Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} x_1 = x \in K, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \gamma_n T y_n + \delta_n u_n, \\ y_n = \alpha_n' x_n + \gamma_n' T x_n + \delta_n' v_n, \ n \geq 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ K da sınırlı diziler ve

$$\alpha_n + \gamma_n + \delta_n = 1 = \alpha_n' + \gamma_n' + \delta_n', \ n \geq 0$$

olacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\alpha_n'\}, \{\gamma_n'\}, \{\delta_n'\} \in [0,1]$ dır.

(3.11) da $\gamma_n' = \delta_n' = 0$ ise, o zaman $\{x_n\}$ dizisi hatalı Mann iterasyonu olarak adlandırılır. Xu tarafından tanımlanmış olan yukarıdaki (3.10) ve (3.11) hatalı iterasyon tanımlarına yinede ciddi itirazlar vardır. Şöyle ki; eğer T nin değer kümesi sınırlıysa, Xu'nun tanımı Liu'nunkine indirgenir ve dahası, daha pratik bir bakış açısıyla Xu'nun yapısı uygulanamaz.

3.2.3. Hatalı Noor İterasyon Metodu

E normlu lineer uzay, K da E nin boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T: K \to K$ verilen bir dönüşüm ve $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ K da birer dizi olsun. $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere, hatalı Noor iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + \gamma_n T y_n + \delta_n u_n, \\ y_n = \alpha_n' x_n + \gamma_n' T z_n + \delta_n' v_n, \\ z_n = \alpha_n'' x_n + \gamma_n'' T x_n + \delta_n'' \omega_n, \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ve $\{\omega_n\}$ K da sınırlı diziler ve

$$\alpha_n + \gamma_n + \delta_n = \alpha_n' + \gamma_n' + \delta_n' = \alpha_n'' + \gamma_n'' + \delta_n'' = 1\,, \quad n \geq 0$$

olacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\delta_n\}$, $\{\alpha_n'\}$, $\{\gamma_n'\}$, $\{\delta_n'\}$, $\{\alpha_n''\}$, $\{\gamma_n''\}$, $\{\delta_n''\} \in [0,1]$ dır.

(3.12) de $\gamma_n'' = \delta_n'' = 0$ ise, bu durumda $\{x_n\}$ dizisi hatalı Ishikawa iterasyonu olarak adlandırılır. Şayet $n \geq 0$ için $\gamma_n' = \delta_n' = 0$ ve $\gamma_n'' = \delta_n'' = 0$ olursa, o zaman hatalı Noor iterasyonu, hatalı Mann iterasyonuna indirgenir.

Xu ve Noor, düzgün olarak konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesinde kendi üzerine tanımlanmış bir asimptotik genişlemeyen dönüşümün sabit noktası için Noor iterasyonunun yakınsaklığını çalışmışlardır. 2004 yılında, Cho, Zhou ve Guo asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm için hatalı 3-adım iterasyonunun kuvvetli ve zayıf yakınsaklığını göstermişlerdir.

Goebel ve Kirk, düzgün olarak konveks bir Banach uzayını kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesinde kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen her bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu göstermişlerdir. Zhou *et al.* 2003 yılında, genelleştirilmiş asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm için yenilenmiş Ishikawa ve Mann iterasyonlarının yakınsamalarını göstermişlerdir. Atsushiba, Banach uzaylarda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerekli ve yeterli şartlar üzerine çalışmıştır.

2006 yılında Lan, genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşüm için (2-adım iterasyonu) yenilenmiş Ishikawa iterasyonunun kuvvetli yakınsadığını göstermiştir. 2007 yılında Yang, kendi üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesi için yenilenmiş sonlu adım iterasyonunun yakınsamalarını ispat etmiştir. 2008 yılında ise Nantadilok, genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşüm için hatalı 3-adım iterasyon yönteminin gerekli ve yeterli şartlar altında yakınsamasını incelemiş ve Lan'ın sonuçlarını geliştirmiştir. Fakat, Saejung *et al*. 2009 yılında, Lan'ın tanımlamış olduğu genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm tanımının aslında asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm olduğunu aşağıdaki Lemma 3.2.5 deki gibi göstermişlerdir.

Öncelikle Lan'ın tanımlamış olduğu genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm tanımını hatırlayalım.

Tanım 3.2.4 (Genelleştirilmiş Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir Banach uzay ve K da X in boş olmayan alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$, $\forall\, x \in K$ ve $\forall\, n \geq 1$ için

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x - p\| + s_n \|x - T^n x\|$$

olduğunda $n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ ve $s_n \to 0$ olacak şekilde bir $\{r_n\}, \{s_n\} \in [0, 1)$ dizileri varsa bu T dönüşümüne genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Lan 2006).

Lemma 3.2.5: $T: K \to K$ dönüşümü genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümse bu durumda T dönüşümü asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümdür (Saejung *et al*. 2009).

İspat: Lan'ın tanımında, $\forall\, x \in K,\ p \in F_T \neq \emptyset$ ve $\forall\, n \geq 1$ için

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x - p\| + s_n \|x - T^n x\|$$

olduğunda $n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ ve $s_n \to 0$ olacak şekilde bir $\{r_n\}, \{s_n\} \in [0,1)$ dizilerinin olması gerekiyordu. Buradan,

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x - p\| + s_n\,(\|x - p\| + \|T^n x - p\|)$$

$$\|T^n x - p\| \leq \frac{1 + r_n + s_n}{1 - s_n}\|x - p\|$$

$$\|T^n x - p\| \leq \left(1 + \frac{r_n + 2s_n}{1 - s_n}\right)\|x - p\|$$

olup $\frac{r_n+2s_n}{1-s_n} \to 0$ olduğundan T dönüşümü asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Suantai *et al*. 2009 yılında, Banach uzaylarda genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesi için genel bir iterasyon yöntemini tanıtmışlardır.

Biz, bu yapılanları dikkate alarak, genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için sonlu adım iterasyon yöntemini tanıttık. Bu yeni iterasyon şemamız aşağıda (3.13) deki gibi tanıtılmıştır:

E, normlu uzay ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $T_i: K \to K$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler ve $\mathcal{F} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $n \geq 1$ ve verilen bir $x_1 \in K$ için,

$$\begin{cases} y_n = \alpha_{nk}x_n + \delta_{nk}T_k^n x_n + \gamma_{nk}u_{nk}, \\ y_{n+1} = \alpha_{n(k-1)}x_n + \delta_{n(k-1)}T_{k-1}^n y_n + \beta_{n(k-1)}T_{k-1}^n x_n + \gamma_{n(k-1)}u_{n(k-1)}, \\ y_{n+2} = \alpha_{n(k-2)}x_n + \delta_{n(k-2)}T_{k-2}^n y_{n+1} + \beta_{n(k-2)}T_{k-2}^n y_n + \gamma_{n(k-2)}u_{n(k-2)}, \\ \qquad \vdots \\ y_{n+k-2} = \alpha_{n2}x_n + \delta_{n2}T_2^n y_{n+k-3} + \beta_{n2}T_2^n y_{n+k-4} + \gamma_{n2}u_{n2}, \\ x_{n+1} = \alpha_{n1}x_n + \delta_{n1}T_1^n y_{n+k-2} + \beta_{n1}T_1^n y_{n+k-3} + \gamma_{n1}u_{n1}, \end{cases} \tag{3.13}$$

ile tanımlanan iterasyon yöntemiyle $\{x_n\}$, $\{y_n\}, \cdots, \{y_{n+k-2}\}$ iterasyon dizileri hesaplanır. Burada $\{u_{n1}\}$, $\{u_{n2}\}, \cdots, \{u_{nk}\}$ K da sınırlı diziler ve

$\alpha_{nk} + \delta_{nk} + \gamma_{nk} = 1$ ve $\forall i = 1, 2, \cdots, k-1$ için $\alpha_{ni} + \delta_{ni} + \beta_{ni} + \gamma_{ni} = 1$

olacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_{ni}\}$, $\{\delta_{ni}\}$, $\{\beta_{ni}\}$ ve $\{\gamma_{ni}\} \in [0,1]$ dir.

Yukarıdaki (3.13) iterasyon yönteminde $k = 3$ için, eğer $T_1 = T_2 = T_3 = T$, her $n \geq 1$ için $\beta_{n1} = \beta_{n2} \equiv 0$ ve $\gamma_{n1} = \gamma_{n2} = \gamma_{n3} \equiv 0$ olarak alınırsa (3.13) denklemi Xu ve Noor tarafından tanımlanan

$$\begin{cases} y_n = \alpha_{n3} x_n + \delta_{n3} T^n x_n, \\ y_{n+1} = \alpha_{n2} x_n + \delta_{n2} T^n y_n, \\ x_{n+1} = \alpha_{n1} x_n + \delta_{n1} T^n y_{n+1}, & n \geq 1, \end{cases}$$

Noor iterasyonuna indirgenir. Burada,

$$\alpha_{n1} + \delta_{n1} = \alpha_{n2} + \delta_{n2} = \alpha_{n3} + \delta_{n3} = 1$$

olacak şekilde $i = \{1,\ 2,\ 3\}$ için $\{\alpha_{ni}\}$, $\{\delta_{ni}\} \in [0,1]$ dir.

(3.13) de $k = 3$ için, eğer $T_1 = T_2 = T$, her $n \geq 1$ için $\delta_{n3} = \beta_{n1} = \beta_{n2} \equiv 0$ ve $\gamma_{n1} = \gamma_{n2} = \gamma_{n3} \equiv 0$ olarak alınırsa (3.13) denklemi,

$$\begin{cases} y_{n+1} = \alpha_{n2} x_n + \delta_{n2} T^n x_n, \\ x_{n+1} = \alpha_{n1} x_n + \delta_{n1} T^n y_{n+1}, & n \geq 1, \end{cases}$$

Ishikawa iterasyonuna indirgenir. Burada,

$$\alpha_{n1} + \delta_{n1} = \alpha_{n2} + \delta_{n2} = 1$$

olacak şekilde $i = \{1,\ 2\}$ için $\{\alpha_{ni}\}$, $\{\delta_{ni}\} \in [0,1]$ dir.

(3.13) de $k = 3$ için, eğer $T_1 = T$ ve her $n \geq 1$ için $\delta_{n3} = \delta_{n2} = \beta_{n1} = \beta_{n2} \equiv 0$ ve $\gamma_{n1} = \gamma_{n2} = \gamma_{n3} \equiv 0$ olarak alınırsa (3.13) denklemi,

$$x_{n+1} = \alpha_{n1}x_n + \delta_{n1}T^n x_n, \qquad n \geq 1,$$

Mann iterasyonuna indirgenir. Burada, $\alpha_{n1} + \delta_{n1} = 1$ olacak şekilde $\{\alpha_{n1}\}$, $\{\delta_{n1}\} \in [0,1]$ dir.

Yine, (3.13) de, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$ için $\gamma_{ni} = 0$ olması durumunda Yang'ın sonuçları elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, çalışmalarımızda elde ettiğimiz bazı bulgulara yer verilecektir.

Banach uzaylarda genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri için kendi üzerine olan dönüşümlerin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması gösterilmiştir. İfade etmiş olduğumuz bu işlemleri (3.13) de verilen iterasyon şemamızı kullanarak gerçekleştirdik.

4.1. Kendi Üzerine Olan Genelleştirilmiş Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşümlerin Yakınsamaları

Temel teoremlerimizi ispat için kullanacağımız aşağıdaki tanım ve lemmalarda E normlu uzay, K da E nin kapalı konveks alt kümesi olarak alınmıştır. Şimdi, ispatlarımızda kullanacağımız tanımları ve lemmayı verelim.

Tanım 4.1.1: Eğer K daki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ ise, $T: K \to K$ dönüşümüne yarıkompaktır (ya da hemicompact) denir. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin K da p sabit noktasına kuvvetli yakınsayan $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisi vardır. Eğer K daki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\|x_n - Tx_n\|$ yakınsaksa, $T: K \to K$ dönüşümüne demicompact tır denir. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi mevcuttur. Eğer her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin bir $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisi var ve $\left\{Tx_{n_j}\right\}$ dizisi T nin görüntü kümesinde yakınsak ise, T dönüşümüne tamamen süreklidir denir.

Tanım 4.1.2. ((I) Şartı): $F(T) = \{x \in K: Tx = x\} \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \to K$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ dönüşümü verilsin. Eğer $d(x, F(T)) = inf\{\|x - p\|: p \in F(T)\}$ olmak üzere her $x \in K$ için,

$$\|x - Tx\| \geq f\big(d(x, F(T))\big)$$

T dönüşümü (I) şartını sağlıyor denir. Burada $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(0) = 0$ ve her $t \in (0,\infty)$ için $f(t) > 0$ şartlarını sağlayan bir dönüşümdür (Senter and Datson 1974).

Tanım 4.1.3. (($\bar{A}$) Şartı): $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ olmak üzere $T_i: K \to K$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ dönüşümleri verilsin. Eğer $d(x,\mathcal{F}) = inf\{\|x-p\|: p \in \mathcal{F}\}$ olmak üzere her $x \in K$ için,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \|x - T_i x\| \geq f\big(d(x,\mathcal{F})\big)$$

T_i dönüşümleri ($\bar{\text{A}}$) şartını sağlıyor denir. Burada $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(0) = 0$ ve her $t \in (0,\infty)$ için $f(t) > 0$ şartlarını sağlayan bir dönüşümdür (Chidume and Ali 2007).

Tanım 4.1.4. (($\bar{B}$) Şartı): $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ olmak üzere $T_i: K \to K$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $x \in K$ için,

$$max_{1\leq i\leq k}\{\|x - T_i x\|\} \geq f\big(d(x,\mathcal{F})\big)$$

T_i dönüşümleri ($\bar{\text{B}}$) şartını sağlıyor denir. Burada $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(0) = 0$ ve her $t \in (0,\infty)$ için $f(t) > 0$ şartlarını sağlayan bir dönüşümdür (Chidume and Ali 2007).

Tanım 4.1.5. (($\bar{C}$) Şartı): $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ olmak üzere $T_i: K \to K$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $x \in K$ için,

$$\|x - T_i x\| \geq f\big(d(x,\mathcal{F})\big)$$

T_i dönüşümlerinin en az biri için ($\bar{\text{C}}$) şartını sağlıyor denir. Burada $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(0) = 0$ ve her $t \in (0,\infty)$ için $f(t) > 0$ şartlarını sağlayan bir dönüşümdür (Chidume and Ali 2007).

Lemma 4.1.6: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$, $a_{n+1} \leq (1 + c_n)a_n + b_n$, $n \geq 1$, eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan reel diziler olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ ise bu durumda

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır,

(ii) $\lim\inf_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğu her zaman $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur (Tan and Xu 1993).

4.2. Temel Sonuçlar

Biz bu bölümde elde ettiğimiz temel teoremlerimizi ve ispatlarını verdik.

Lemma 4.2.1: E bir Banach uzay, K da E nin kapalı, konveks ve boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i: K \to K \quad (i = 1,2, \cdots, k)$ genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ni} < \infty \ (i = 1,2, \cdots, k)$, her $i = 1,2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} l_{ni} < \infty$ olacak şekilde $\{r_{ni}\}$, $\{l_{ni}\} \subset [0,\infty)$ de diziler olarak verilsin. $x_1 \in K$ için, (3.13) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Bu durumda,

(a) Her $i = 1,2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n(j+1)} < \infty$ olacak şekilde $\{b_n\}$, $\{c_{n(j+1)}\} \subset [0,\infty)$ de dizileri var ve her $j = 1,2, \cdots, k-2$ ve her $p \in \mathcal{F}$ için

$$\|y_{n+j} - p\| \leq (1 + b_n)^{j+1}\|x_n - p\| + c_{n(j+1)};$$

(b) Her $p \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır;

(c) Her $p \in \mathcal{F}$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^{\infty} s_i < \infty$ ve

$$\|x_{n+m} - p\| \leq M\|x_n - p\| + \sum_{i=n}^{\infty} s_i$$

olacak şekilde $\{s_i\} \subset [0,\infty)$ dizisi ve $M > 0$ sabiti vardır.

İspat: (a) $p \in \mathcal{F}$, her n için $b_n = max_{1\leq i\leq k}\{r_{ni}\}$ ve $d_n = max_{1\leq i\leq k}\{l_{ni}\}$ alalım. Her $i = 1,2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} l_{ni} < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ ifadelerinin yazılabileceği aşikardır.

$\forall\, n \geq 1$ için,

$$
\begin{aligned}
\|y_n - p\| &\leq \|\alpha_{nk}x_n + \delta_{nk}T_k^n x_n + \gamma_{nk}u_{nk} - p\| \qquad (4.1)\\
&\leq \alpha_{nk}\|x_n - p\| + \delta_{nk}\|T_k^n x_n - p\| + \gamma_{nk}\|u_{nk} - p\|\\
&\leq \alpha_{nk}\|x_n - p\| + \delta_{nk}[(1 + r_{nk})\|x_n - p\| + l_{nk}] + \gamma_{nk}\|u_{nk} - p\|\\
&\leq \alpha_{nk}\|x_n - p\| + \delta_{nk}(1 + r_{nk})\|x_n - p\| + \delta_{nk}l_{nk} + \gamma_{nk}\|u_{nk} - p\|\\
&\leq \alpha_{nk}(1 + b_n)\|x_n - p\| + \delta_{nk}(1 + b_n)\|x_n - p\| + \delta_{nk}d_n + \gamma_{nk}\|u_{nk} - p\|\\
&\leq (1 + b_n)\|x_n - p\| + c_{n1},
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $c_{n1} = \delta_{nk}d_n + \gamma_{nk}\|u_{nk} - p\|$ olup, $\{u_{nk}\}$ dizisi sınırlı, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{nk} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ olduğundan dolayı, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1} < \infty$ yazılabilir.

(4.1) denklemini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
\|y_{n+1} - p\| &\leq \left\|\alpha_{n(k-1)}x_n + \delta_{n(k-1)}T_{k-1}^n y_n + \beta_{n(k-1)}T_{k-1}^n x_n \right. \qquad (4.2)\\
&\quad \left. +\gamma_{n(k-1)}u_{n(k-1)} - p\right\|\\
&\leq \alpha_{n(k-1)}\|x_n - p\| + \delta_{n(k-1)}\|T_{k-1}^n y_n - p\| + \beta_{n(k-1)}\|T_{k-1}^n x_n - p\|\\
&\quad +\gamma_{n(k-1)}\left\|u_{n(k-1)} - p\right\|\\
&\leq \alpha_{n(k-1)}\|x_n - p\| + \delta_{n(k-1)}(1 + b_n)\|y_n - p\| + \delta_{n(k-1)}d_n\\
&\quad +\beta_{n(k-1)}(1 + b_n)\|x_n - p\| + \beta_{n(k-1)}d_n + \gamma_{n(k-1)}\left\|u_{n(k-1)} - p\right\|\\
&\leq \alpha_{n(k-1)}\|x_n - p\| + \delta_{n(k-1)}(1 + b_n)[(1 + b_n)\|x_n - p\| + c_{n1}]\\
&\quad +\delta_{n(k-1)}d_n + \beta_{n(k-1)}(1 + b_n)^2\|x_n - p\| + \beta_{n(k-1)}d_n\\
&\quad +\gamma_{n(k-1)}\left\|u_{n(k-1)} - p\right\|\\
&\leq \left(\alpha_{n(k-1)} + \delta_{n(k-1)} + \beta_{n(k-1)}\right)(1 + b_n)^2\|x_n - p\|\\
&\quad +\delta_{n(k-1)}(1 + b_n)c_{n1} + \delta_{n(k-1)}d_n + \beta_{n(k-1)}d_n\\
&\quad +\gamma_{n(k-1)}\left\|u_{n(k-1)} - p\right\|\\
&\leq (1 + b_n)^2\|x_n - p\| + c_{n2},
\end{aligned}
$$

ifadesini elde ettik. Burada $c_{n2} = \delta_{n(k-1)}(1+b_n)c_{n1} + \delta_{n(k-1)}d_n + \beta_{n(k-1)}d_n + +\gamma_{n(k-1)}\left\|u_{n(k-1)} - p\right\|$ olup $\{u_{n(k-1)}\}, \{b_n\}$ dizileri sınırlı ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n(k-1)} < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n2} < \infty$ yazılabilir.

(4.1) ve (4.2) denklemlerini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
\|y_{n+2} - p\| &\leq \left\|\alpha_{n(k-2)}x_n + \delta_{n(k-2)}T_{k-2}^n y_{n+1} + \beta_{n(k-2)}T_{k-2}^n y_n + \gamma_{n(k-2)}u_{n(k-2)} - p\right\| \\
&\leq \alpha_{n(k-2)}\|x_n - p\| + \delta_{n(k-2)}\|T_{k-2}^n y_{n+1} - p\| + \beta_{n(k-2)}\|T_{k-2}^n y_n - p\| \\
&\quad +\gamma_{n(k-2)}\left\|u_{n(k-2)} - p\right\| \\
&\leq \alpha_{n(k-2)}\|x_n - p\| + \delta_{n(k-2)}(1+b_n)\|y_{n+1} - p\| + \delta_{n(k-2)}d_n \\
&\quad +\beta_{n(k-2)}(1+b_n)\|y_n - p\| + \beta_{n(k-2)}d_n + \gamma_{n(k-2)}\left\|u_{n(k-2)} - p\right\| \\
&\leq \alpha_{n(k-2)}\|x_n - p\| + \delta_{n(k-2)}(1+b_n)[(1+b_n)^2\|x_n - p\| + c_{n2}] \\
&\quad +\delta_{n(k-2)}d_n + \beta_{n(k-2)}(1+b_n)[(1+b_n)\|x_n - p\| + c_{n1}] \\
&\quad +\beta_{n(k-2)}d_n + \gamma_{n(k-2)}\left\|u_{n(k-2)} - p\right\| \\
&\leq \left(\alpha_{n(k-2)} + \delta_{n(k-2)} + \beta_{n(k-2)}\right)(1+b_n)^3\|x_n - p\| + \delta_{n(k-2)}(1+b_n)c_{n2} \\
&\quad +\delta_{n(k-2)}d_n + \beta_{n(k-2)}(1+b_n)c_{n1} + \beta_{n(k-2)}d_n + \gamma_{n(k-2)}\left\|u_{n(k-2)} - p\right\| \\
&\leq (1+b_n)^3\|x_n - p\| + c_{n3},
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ettik. Burada $c_{n3} = \delta_{n(k-2)}(1+b_n)c_{n2} + \delta_{n(k-2)}d_n + \beta_{n(k-2)}(1+b_n)c_{n1} + \beta_{n(k-2)}d_n + \gamma_{n(k-2)}\left\|u_{n(k-2)} - p\right\|$ olup $\{u_{n(k-2)}\}, \{b_n\}$ dizileri sınırlı ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n2} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n(k-2)} < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n3} < \infty$ yazılabilir.

Üstteki metodu devam ettirirsek,

$$\left\|y_{n+j} - p\right\| \leq (1+b_n)^{j+1}\|x_n - p\| + c_{n(j+1)}, \quad j = 0,1,\cdots,k-2 \tag{4.3}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $j = 0,1,\cdots,k-2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n(j+1)} < \infty$ olacak şekilde $\{c_{n(j+1)}\} \subset [0,\infty)$ azalmayan reel dizileri vardır.

Böylece, (a) şıkkının ispatı tamamlanmıştır.

(b) (3.13), (4.3) ifadelerini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq \|\alpha_{n1}x_n + \delta_{n1}T_1^n y_{n+k-2} + \beta_{n1}T_1^n y_{n+k-3} + \gamma_{n1}u_{n1} - p\| \qquad (4.4)\\
&\leq \alpha_{n1}\|x_n - p\| + \delta_{n1}\|T_1^n y_{n+k-2} - p\| + \beta_{n1}\|T_1^n y_{n+k-3} - p\|\\
&\quad +\gamma_{n1}\|u_{n1} - p\|\\
&\leq \alpha_{n1}\|x_n - p\| + \delta_{n1}(1 + b_n)\|y_{n+k-2} - p\| + \delta_{n1}d_n\\
&\quad +\beta_{n1}(1 + b_n)\|y_{n+k-3} - p\| + \beta_{n1}d_n + \gamma_{n1}\|u_{n1} - p\|\\
&\leq \alpha_{n1}(1 + b_n)^k\|x_n - p\| + \delta_{n1}(1 + b_n)\left[(1 + b_n)^{k-1}\|x_n - p\| + c_{n(k-1)}\right]\\
&\quad +\delta_{n1}d_n + \beta_{n1}(1 + b_n)\left[(1 + b_n)^{k-2}\|x_n - p\| + c_{n(k-2)}\right]\\
&\quad +\beta_{n1}d_n + \gamma_{n1}\|u_{n1} - p\|\\
&\leq (\alpha_{n1} + \delta_{n1} + \beta_{n1})(1 + b_n)^k\|x_n - p\| + \delta_{n1}(1 + b_n)c_{n(k-1)} + \delta_{n1}d_n\\
&\quad +\beta_{n1}(1 + b_n)c_{n(k-2)} + \beta_{n1}d_n + \gamma_{n1}\|u_{n1} - p\|\\
&\leq (1 + b_n)^k\|x_n - p\| + c_{nk}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{nk} = \delta_{n1}d_n + \beta_{n1}d_n + \gamma_{n1}\|u_{n1} - p\| + \delta_{n1}(1 + b_n)c_{n(k-1)} + \beta_{n1}(1 + b_n)c_{n(k-2)}$ olup, $\{u_{n1}\}$, $\{b_n\}$ dizileri sınırlı ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n(k-1)} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n(k-2)} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n1} < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} < \infty$ yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 + b_n)^k\|x_n - p\| + c_{nk} \qquad (4.5)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 4.1.6 nın (i) maddesinden dolayı, her $p \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır. Böylece ispat tamamlanır.

(c) Önceki bilgilerimizden; eğer $t \geq 0$ ise bu durumda $1 + t \leq e^t$ olduğunu biliyoruz. Buradan da $k = 1,2,\cdots$ için $(1+t)^k \leq e^{kt}$ eşitsizliği yazılabilir. Bu yüzden (4.5) den,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m} - p\| &\leq (1 + b_{m+n-1})^k \|x_{n+m-1} - p\| + c_{(m+n-1)k} \qquad (4.6)\\
&\leq exp\{kb_{m+n-1}\}\|x_{n+m-1} - p\| + c_{(m+n-1)k}\\
&\vdots\\
&\leq exp\left\{k\sum_{i=n}^{n+m-1} b_i\right\}\|x_n - p\| + \sum_{i=n}^{n+m-1} c_{in}\\
&\leq exp\left\{k\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right\}\|x_n - p\| + \sum_{i=n}^{\infty} c_{in}\\
&\leq M\|x_n - p\| + \sum_{i=n}^{\infty} s_i,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $s_i = c_{in}$ ve $M = exp\{k\sum_{i=n}^{\infty} b_i\}$ olarak alınmıştır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2: E bir Banach uzay, K da E nin kapalı, konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i: K \to K \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ kapalı ve $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{ni} < \infty$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, her $i = 1, 2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} l_{ni} < \infty$ olacak şekilde $\{r_{ni}\}$, $\{l_{ni}\} \subset [0,\infty)$ de diziler olarak verilsin. Bu durumda (3.13) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisi dönüşümlerin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasıdır.

İspat: İspatımızın gereklilik kısmı aşikar olduğundan dolayı, biz sadece yeterlilik kısmının ispatını vereceğiz. Denklem (4.5) den her $p \in \mathcal{F}$, $\forall n$ için

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 + b_n)^k \|x_n - p\| + c_{nk}$$

eşitsizliğinin var olduğunu biliyoruz. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, \mathcal{F}) &\leq (1 + b_n)^k d(x_n, \mathcal{F}) + c_{nk} \qquad (4.7) \\ &= \left(1 + \sum_{r=1}^{k} \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} {b_n}^r\right) d(x_n, \mathcal{F}) + c_{nk}, \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{k} \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} {b_n}^r < \infty$ yazılabilir. Ayrıca, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} < \infty$ ve $liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olduğundan dolayı, Lemma 4.1.6 nın (ii) maddesinden $lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ yazılır. Şimdi de $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayalım. Lemma 4.2.1 nın (c) maddesinden her $p \in \mathcal{F}$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_{n+m} - p\| \leq M\|x_n - p\| + \textstyle\sum_{i=n}^{\infty} s_i \qquad (4.8)$$

eşitsizliğinin var olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} s_i < \infty$ olduğundan dolayı, keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$$d(x_n, \mathcal{F}) < \tfrac{\varepsilon}{4M}, \quad \textstyle\sum_{i=n_0}^{\infty} s_i < \tfrac{\varepsilon}{4}, \quad \forall n \geq n_0, \qquad (4.9)$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu yüzden,

$$\|x_{n_0} - q\| < \tfrac{\varepsilon}{4M}, \qquad (4.10)$$

olacak şekilde $q \in \mathcal{F}$ vardır. Yine,

$\forall n \geq n_0$ ve $m \geq 1$ için (4.8), (4.9) ve (4.10) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - q\| + \|x_n - q\| \\ &\leq M\|x_{n_0} - q\| + \sum_{i=n_0}^{\infty} s_i + \mathrm{M}\|x_{n_0} - q\| + \sum_{i=n_0}^{\infty} s_i \\ &< M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4} + M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durum, $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Bu yüzden $x_n \to q \in K$ yazılır. Şimdi de, $q \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. $\forall n$ için

$$|d(q,\mathcal{F}) - d(x_n,\mathcal{F})| \leq \|q - x_n\| \tag{4.12}$$

eşitsizliği kolayca görülebilir. $lim_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F}) = 0$ olduğundan dolayı, $q \in \mathcal{F}$ yazılır.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2 den aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

Sonuç 4.2.3: E bir Banach uzay, K da E nin kapalı, konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i: K \to K$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ kapalı ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ni} < \infty$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, her $i = 1, 2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} l_{ni} < \infty$ olacak şekilde $\{r_{ni}\}$, $\{l_{ni}\} \subset [0,\infty)$ de diziler olarak verilsin. Bu durumda (3.13) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisi bir $q \in \mathcal{F}$ noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart p noktasına yakınsayan $\{x_n\}$ nin $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisinin var olmasıdır.

Bir asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm olduğundan dolayı, aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 4.2.4: E bir Banach uzay, K da E nin kapalı, konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i: K \to K \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için $\mathcal{F} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ kapalı ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ni} < \infty$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, her $i = 1, 2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} l_{ni} < \infty$ olacak şekilde $\{r_{ni}\}$, $\{l_{ni}\} \subset [0,\infty)$ de diziler olarak verilsin. Bu durumda (3.13) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisi dönüşümlerin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasıdır.

Aşağıdaki teorem ile $(\bar{\mathrm{C}})$ şartını sağlayan Banach uzaylarda genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için kuvvetli yakınsama teoremi verilmiştir.

Teorem 4.2.5: E bir Banach uzay, K da E nin kapalı, konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i: K \to K \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için $\mathcal{F} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ kapalı ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ni} < \infty$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, her $i = 1, 2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} l_{ni} < \infty$ olacak şekilde $\{r_{ni}\}$, $\{l_{ni}\} \subset [0,\infty)$ de diziler olarak verilsin. Verilen bir $x_1 \in K$ için, (3.13) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $i = 1, 2, \cdots, k$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ olan ve $(\bar{\mathrm{C}})$ şartını sağlayan $\{T_i : i = 1,2,\cdots,k\}$ ailesi ise bu durumda $\{x_n\}$ iterasyon dizisi dönüşümlerin ailesinin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Her $i = 1,2,\cdots,k$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ olan ve $(\bar{\mathrm{C}})$ şartını sağlayan $\{T_i : i = 1,2,\cdots,k\}$ ailesi mevcutsa $i_0 \in \{1,2,\cdots,k\}$ için $\|x_n - T_{i_0} x_n\| \geq f\big(d(x_n, \mathcal{F})\big)$ olacak şekilde T_{i_0} dönüşümlerin en az biri bu şartı sağlar. Burada $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(0) = 0$ ve her $t \in (0,\infty)$ için $f(t) > 0$ şartlarını sağlayan bir dönüşümdür. Biz, $lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olduğunu biliyoruz. Teorem 4.2.2 den dolayı, biz $\{x_n\}$ dizisinin dönüşümlerinin ailesinin sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını göstermiş olduk. Böylece ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde ise çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilecektir.

İlk olarak, E normlu uzay ve K da E uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi olmak üzere $T_i: K \to K \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerle çalışılmıştır. Bu dönüşümler için iterasyon dizileri teşkil edilmiş ve uygun şartlar altında bu iterasyon dizisinin dönüşümlerini ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsamaları incelenmiştir.

5.1. Sonuç: E bir Banach uzay, K da E nin kapalı, konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i: K \to K \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ genelleştirilmiş asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ni} < \infty \ (i = 1, 2, \cdots, k)$, her $i = 1, 2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} s_{ni} < \infty$ olacak şekilde $\{r_{ni}\}$, $\{l_{ni}\} \subset [0,\infty)$ de diziler olarak verilsin. Bu durumda (3.13) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisi bir $p \in \mathcal{F}$ noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart p noktasına yakınsayan $\{x_n\}$ nin $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisinin var olmasıdır.

5.2. Sonuç: E bir Banach uzay, K da E nin kapalı, konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca $T_i: K \to K \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ni} < \infty \ (i = 1, 2, \cdots, k)$, her $i = 1, 2, \cdots, k$ için $\sum_{n=1}^{\infty} r_{ni} < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} s_{ni} < \infty$ olacak şekilde $\{r_{ni}\}$, $\{l_{ni}\} \subset [0,\infty)$ de diziler olarak verilsin. Bu durumda (3.13) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin dönüşümlerin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasıdır.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., O’ Regan D., Sahu D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, ISBN 978-0-387-75817-6.

Agarwal, R. P., Meehan M. and O’ Regan D., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambidge University Press.

Aksoy, A. G. and Khamsi, M. A., 1990. Nonstandart Methods in Fixed Point Theory, ISBN 0-387-97364-8.

Atsushiba, S., 2003. Strong convergence of iterative sequences for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, Sci. Math. Jpn., 57, 377-388.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics ISBN-13 978-3-540-72233-5.

Chidume, C. E., and Ali, B., 2007. Weak and strong convergence theorems for finite families of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330, 377-378.

Chidume, C. E., and Osilike, M.O., 1993. ‘Fixed point iterations for quasi-contractive maps in uniformly smooth Banach spaces’ Bull. Kroean Math. Soc.(1993), No:2, pp.201-212.

Cholamjiak, W. And Suantai, S., 2008. Approximating common fixed point of a finite family of generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings, Thai Journal of Mathematics, 6, 315-322.

Cho, Y. J., Kim, K. J., and Lan, H. Y., 2008. Three step iterative procedure with errors for generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings, Taiwanese Journal of Mathematics, 12, 2155-2178.

Ciric, L.B., 2003. Fixed Point Theory. Contraction Mapping Principle. FME Pres. Beograd.

Goebel, K. and Kirk W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 35, 171-174.

Imnang, S., Suantai, S., 2009. Common fixed points of Multistep Noor iterations with errors for a finite family of generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings, Abstr. Appl. Anal., Article ID 728510, 14 pages, doi:10. 1155/2009/728510.

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150.

Ishikawa, S., 1976. Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space, Proc. Amer. Math. Soc., 59, 65-71.

Khan, S. H. and Fukhar-ud-din H., 2005. Weak and strong convergence of a scheme with errors two nonexpansive mappings, Nonlinear Anal., 61, 1295-1301.

Kirk, W. A., 1974. Fixed point theorems for non-Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type, Israel J. Math. 17, 339-346.

Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk., 10, 123-127.

Kızıltunç, H. 2007. Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının iterasyon metotlarıyla elde edilmesi, Atatürk Üniversitesi, Doktora Tezi.

Lan, H. Y., 2006. Common fixed point iterative process with errors for generalized asymptotically nonexpansive mappings, Comput. Math. Appl., 52, 1403-1412.

Liu, L. S., 1995. Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 194, 114-125.

Liu, Q., 2001. Iterative sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mappings with error member, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 259, 18-24.

Madox, I. J. 1988. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres.

Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510.

Nantadilok, J., 2008. Three-step iteration scheme with errors for generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings, Thai J. Math., 6, 297-308.

Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math Anal. Appl., 251, 217-229.

Picard, E.,1980. Jour. De Math., (4) 6, 145-210.

Rhoades, B.E. and Şoltuz, S. M., 2006. The equivalence between the T-stabilities Mann and Ishikawa iterations, J. Math. Anal. Appl., 318, 472-475.

Saejung, S., Suantai, S., and Yotkaew, P., 2009. A note on Common fixed point of Multistep Noor iteration with errors for a finite of generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Article ID 283461, doi: 10.1155/2009/283461.

Senter, H. F., and Datson, W. G. Jr., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proceeding of the American Mathematical Society, 44, 375-380.

Shahzad, N., and Zegeye, H., 2007. Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of generalized asymptotically quasi-nonexpansive maps, Applied Mathematics and Computation, 189, 1058-1065.

Suzuki, T., 2004. Common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces, Bull. Aust. Math. Soc., 69, 1-18.

Tan, K. K., Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, J. Math. Anal. Appl., 178, 301-308.

Xu, Y., 1998. Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive operator equations, J. Math. Anal. Appl., 224, 98-101.

Yang, L., 2007. Modified multistep iterative process for some common fixed point of a finite family of nonself asymptotically nonexpansive mappings, Math. Comput. Modelling., 45, 1157-1169.

Zeng, L. C., Yao, J. C., 2006. Implicit iteration scheme with perturbed mapping for common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Anal., 64, 2507-2515.

Zhou, H. Y., Cho, Y. J., and Grabiec, M., 2003. Iterative processes for generalized asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, Panamer. Math. J., 13, 99-107.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Samsun'da doğdu. İlköğretimini Edirne'nin Keşan ilçesinde, lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2002 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'ne girmeye hak kazanarak 2006 yılında dereceyle mezun oldu.

2006 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2007 yılında matematik öğretmeni olarak Erzurum Milli Eğitim Müdürlüğü emrine atandı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.