MUTLAK TOPLANABİLME METODLARI

Tezi Hazırlayan
H. Nedret ÖĞDÜK

Tez Yöneticisi
Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü'ne
Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi Olarak
Sunulmuştur.

Temmuz 2002
KAYSERİ

Erciyes Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

10 / 07 / 2002

Başkan: Prof. Dr. Osman MUCUK

Üye : Prof. Dr. Hüseyin BOR

Üye : Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

Onay:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım

19 TEMMUZ 2002

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	H. Nedret ÖĞDÜK
Baba Adı	:	Necdet
Ana Adı	:	Güler
Doğum Yeri	:	Adana
Doğum Tarihi	:	02.10.1976

İlk ve orta öğrenimini İskenderun' da tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nden lisans diploması alarak 1998 yılında mezun oldu. 23.11.1999 tarihinde Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü " Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi " Anabilim Dalı' na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü' nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Adres: Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, KAYSERİ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması, yürütülmesi ve yazılmasında değerli katkıları ile en büyük desteği gördüğüm saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN'a ve manevi destekleri için aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

H. Nedret ÖĞDÜK

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili bir giriş yapıldı.

İkinci bölümde, bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme tanımları kullanılarak iki teorem ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde, $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilme tanımı kullanılarak üçüncü bölümde verilen teoremleri genelleştiren iki teorem ifade ve ispat edildi.

Beşinci bölümde $\varphi - |C, \alpha|_k$ toplanabilme tanımı kullanılarak bir teorem ifade ve ispat edildi.

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters:

In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis.

In the second chapter, some basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, two theorems are stated and proved by using $\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ summability definition.

In the fourth chapter, two theorems, which generalize the theorems given in the third chapter, are stated and proved by using $\left|\bar{N}, p_n; \delta\right|_k$ summability definition.

In the fifth chapter, the theorem is stated and proved by using $\varphi - \left| C, \alpha \right|_k$ summability definition.

SEMBOLLER

N	:	Doğal Sayılar Cümlesi
$\sum a_n$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
(s_n)	:	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini kısmi toplamlar dizisi
$s_n = O(1)$	:	(s_n) dizisi sınırlı

İÇİNDEKİLER

SAYFA

BÖLÜM I

GİRİŞ

Son zamanlarda "bazı şartlar altında toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler", farklı matematikçiler tarafından incelenmiş ve bunlardan bir takım sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezde $\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ ve $\left|\bar{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilme metodlarını kullanarak herhangi bir sonsuz serinin (λ_n) toplanabilme çarpanı kullanarak, bu metodlardan birisi ile toplanabilirliği gösterildi.

$0 < \alpha \leq 1$ durumuna göre $\sum a_n \lambda_n$ serisinin $\varphi - \left|C, \alpha\right|_k$ toplanabilmesini inceledik.

BÖLÜM II

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili olan bazı tanım ve teoremleri vererek işe başlayacağız.

Aksi bir şey söylenmedikçe (s_n), $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (p_n),

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty \;, \quad n \to \infty, \quad \left(P_{-i} = p_{-i} = 0,\, i \geq 1\right)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini gösterecektir.

TANIM 2.1. (s_n), $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (u_n) de 1-inci mertebeden Cesàro ortalamasını göstersin. Yani

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_v \tag{2.1}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} u_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (C,1) toplanabilirdir denir.

TANIM 2.2. (u_n), (2.1) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \tag{2.2}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|$ toplanabilirdir denir [9].

TANIM 2.3. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n - u_{n-1}|^k < \infty \tag{2.3}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir [10].

Özel olarak, (2.3) de k=1 alırsak, $|C,1|$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.4. (s_n), $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $\alpha > -1$ olmak üzere u_n^α ve t_n^α sırasıyla (s_n) ve (na_n) dizisinin α-ıncı mertebeden n-inci Cesàro ortalamasını göstersinler. Yani

$$u_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} s_v \tag{2.4}$$

$$t_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \tag{2.5}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} u_n^\alpha = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (C,α) toplanabilirdir denir.

Burada

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = O(n^\alpha), \quad \alpha > -1 , \quad A_0^\alpha = 1$$

$$n > 0 \text{ için } A_{-n}^\alpha = 0 \tag{2.6}$$

dır [20].

TANIM 2.5. (u_n^α), (1.4) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer $\alpha > -1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha \right| < \infty \tag{2.7}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha|$ toplanabilirdir denir [9].

TANIM 2.6. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha \right|^k < \infty \tag{2.8}$$

ise. $\sum a_n$ serisi $|C.\alpha|_k$ toplanabilirdir denir [10].

Burada $t_n^\alpha = n(u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha)$ $([13])$olduğundan (2.8) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| t_n^\alpha \right|^k < \infty$$

TANIM 2.7. u_n^α , (2.4) deki gibi tanımlansın. (φ_n) ise pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n\left(u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha\right)\right|^k < \infty \tag{2.9}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $k \geq 1$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere $\varphi - \left|C,\alpha\right|_k$ toplanabilirdir denir [1].

Burada $t_n^\alpha = n\left(u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha\right)$ olduğundan (2.9) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}\left|\varphi_n t_n^\alpha\right|^k < \infty$$

şeklinde yazılabilir.

TANIM 2.8. (p_n),

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty, \quad n \to \infty \tag{2.10}$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve (t_n) de diziden diziye $(\overline{N}, p_n)$ ortalamasını göstersin. Yani

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v \tag{2.11}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine $(\overline{N}, p_n)$ toplanabilirdir denir [11].

$(\overline{N}, p_n)$ metodu regüler bir metoddur. Bu metodun regüler olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $P_n \to \infty$ olmasıdır [19].

TANIM 2.9. (t_n), (2.11) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| < \infty \tag{2.12}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\overline{N}, p_n|$ toplanabilirdir denir [17].

TANIM 2.10. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty \tag{2.13}$$

ise, $\sum a_n$ serisine $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir denir [2].

Özel olarak, (2.13) de $\forall n \in N$ için $p_n = 1$ alırsak, $|C,1|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.11. $k \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k + k - 1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty \tag{2.14}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\overline{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir denir [3].

Özel olarak, (2.14) de $\delta = 0$ alırsak, $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.12. A ve B iki toplanabilme metodu olsun. A toplanabilen her dizi, aynı değere B toplanabiliyorsa A ya B yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise A-metodu B-metoduna denktir denir [19].

TANIM 2.13. Bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Eğer $\sum a_n \lambda_n$ serisi bir B toplama metodu yardımıyla toplanabiliyorsa, (λ_n) dizisine $\sum a_n$ serisinin B metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [12].

TANIM 2.14. $K = K(\beta, \gamma) \geq 1$; her $n \geq m \geq 1$ için

$$Kn^{\beta}\gamma_n \geq m^{\beta}\gamma_m \tag{2.15}$$

olacak şekilde bir sabit olsun.Bu taktirde (γ_n) pozitif dizisine yarı β -kuvvetli artan bir dizi denir [14].

TANIM 2.15. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ve $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q} \tag{2.16}$$

dur [16].

TANIM 2.16. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \tag{2.17}$$

dır [16].

Şimdi, birinci bölümün son kısmında konumuzla ilgili lemmaların sadece ifadelerini vermekle yetineceğiz.

LEMMA 2.17. $0<\beta<1$ için (X_n) yarı β -kuvvetli artan bir dizi olsun. $(X_n),(\lambda_n)$,

$$\lambda_n \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.18}$$

$$\sum_{n=1}^{m} nX_n \left|\Delta^2 \lambda_n\right| = O(1), \quad m \to \infty \tag{2.19}$$

olacak şekilde diziler olsun. Bu taktirde

$$nX_n \,|\, \Delta\lambda_n \,| = O(1) \tag{2.20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \,|\, \Delta\lambda_n \,| < \infty \tag{2.21}$$

$$X_n \,|\, \lambda_n \,| = O(1), \quad n \to \infty \tag{2.22}$$

dır [4].

LEMMA 2.18. $0<\beta<1$ için (X_n) yarı β -kuvvetli artan bir dizi olsun. $(X_n),(\beta_n)$ de

$$\beta_n \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.23}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \,|\, \Delta\beta_n \,| X_n < \infty \tag{2.24}$$

olacak şekilde diziler olsun. Bu taktirde,

$$n\beta_n X_n = O(1), \quad n \to \infty \tag{2.25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n \langle \infty \tag{2.26}$$

dır [15].

LEMMA 2.19. A_n^{α}, (2.6) daki gibi tanımlanmak üzere, eğer $0 < \alpha \leq 1$ ve $1 \leq \nu \leq n$ ise, bu taktirde

$$\left| \sum_{p=1}^{\nu} A_{n-p}^{\alpha-1} a_p \right| \leq \max \left| \sum_{p=1}^{m} A_{m-p}^{\alpha-1} a_p \right| \tag{2.27}$$

dir [8].

BÖLÜM III

$\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ TOPLANABİLME METODU İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde, yarı β -kuvvetli artan bir dizi kullanılarak $\sum a_n \lambda_n$ serisinin hangi şartlar altında $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirliği ile ilgili iki teorem ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 3.1. $0<\beta<1$ için (X_n) yarı β -kuvvetli artan bir dizi ve

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} v a_v \tag{3.1}$$

olsun. (λ_n), (p_n) ve (t_n) dizileri de (2.18), (2.19) şartları sağlanacak ve

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{p_n}{P_n} |t_n|^k = O(X_m), \quad m \to \infty \tag{3.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|}{n} < \infty \tag{3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{|t_n|^k}{n} = O(X_m), \quad m \to \infty \tag{3.4}$$

olacak şekilde diziler olsun. Bu taktirde, $\sum a_n \lambda_n$ serisi $k \geq 1$ olmak üzere $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirdir [4].

İSPAT: $\sum a_n \lambda_n$ serisinin $\left(\overline{N}, p_n\right)$ ortalaması T_n olsun. Yani

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{i=0}^{v} a_i \lambda_i = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} \left(P_n - P_{v-1}\right) a_v \lambda_v \,, \left(P_0 \neq 0\right) \tag{3.5}$$

dür. Buna göre $T_n - T_{n-1}$ farkını teşkil edersek,

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \lambda_v \,,\ n \geq 1,\ \left(P_{-1} = 0\right)$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} \frac{P_{v-1} \lambda_v}{v} v a_v$$

elde ederiz.Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplama formülünü uygulayalım.Bu durumda,

$$T_n - T_{n-1} = \frac{n+1}{nP_n} p_n t_n \lambda_n - \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v t_v \lambda_v \frac{v+1}{v}$$

$$+ \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v t_v \Delta\lambda_v \frac{v+1}{v} + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v t_v \frac{\lambda_{v+1}}{v} \tag{3.6}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}$$

bulunur. Teoremi ispatlamak için $k \geq 1$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, i=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left|T_{n,i}\right|^k < \infty$$

olduğunu göstermek kafidir. İlk olarak (2.18) den dolayı $|\lambda_n|^{k-1} = O(1)$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,1}|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)|t_n|^k|\lambda_n|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)|t_n|^k|\lambda_n|$$

bulunur. Şimdi Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,1}|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\lambda_n|\sum_{v=1}^{n}\frac{p_v}{P_v}|t_v|^k + O(1)|\lambda_m|\sum_{n=1}^{m}\frac{p_n}{P_n}|t_n|^k$$

elde ederiz. (3.2), (2.21) ve (2.22) şartlarından,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,1}|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|\Delta\lambda_n|X_n + O(1)|\lambda_m|X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

bulunur. $T_{n,2}$ için, $k > 1$ ve $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak ve $T_{n,1}$ deki gibi işlemi devam ettirirsek,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,2}|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}^{\ k}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v|t_v||\lambda_v|\right\}^k$$

$$\leq O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v|t_v|^k|\lambda_v|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}p_v|t_v|^k|\lambda_v|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}\frac{p_v}{P_v}|t_v|^k|\lambda_v|^k$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}\frac{p_v}{P_v}|t_v|^k|\lambda_v|$$

$$=O(1),\quad m\to\infty$$

elde ederiz. Yine $k\rangle 1$ olmak üzere Hölder Eşitsizliği ve Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,3}|^k=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v|\Delta\lambda_v||t_v|\right\}^k$$

$$\leq O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v|\Delta\lambda_v||t_v|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v|\Delta\lambda_v|\right\}^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}|t_v|^k|\Delta\lambda_v|$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}v|\Delta\lambda_v|\frac{|t_v|^k}{v}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v|\Delta\lambda_v|)\sum_{j=1}^{v}\frac{|t_j|^k}{j}+O(1)m|\Delta\lambda_m|\sum_{v=1}^{m}\frac{|t_v|^k}{v}$$

bulunur. (3.4), (2.19), (2.20) ve (2.21) şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|T_{n,3}|^k=O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v|\Delta\lambda_v|)X_v+O(1)m|\Delta\lambda_m|X_m$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m-1} vX_v\left|\Delta^2\lambda_v\right|+O(1)\sum_{v=1}^{m-1} X_{v+1}\left|\Delta\lambda_{v+1}\right|+O(1)m\left|\Delta\lambda_m\right|X_m$$

$$=O(1),\quad m\to\infty$$

elde ederiz. Son olarak, yine $k>1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği ve Abel kısmi toplama formülünden,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,4}\right|^k=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|t_v\right|\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\right\}^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|t_v\right|^k\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\right\}^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\left|t_v\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta\left|\lambda_{v+1}\right|\sum_{i=1}^{v}\frac{\left|t_i\right|^k}{i}+O(1)\left|\lambda_{m+1}\right|\sum_{v=1}^{m}\frac{\left|t_v\right|^k}{v}$$

yazabiliriz. (2.21), (2.22), (3.4) şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,4}\right|^k=O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\lambda_{v+1}\right|X_{v+1}+O(1)\left|\lambda_{m+1}\right|X_{m+1}$$

$$=O(1),\quad m\to\infty$$

elde ederiz.O halde i=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,i}\right|^k=O(1),\quad m\to\infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar. Şimdi de Teorem 3.1 de $T_n - T_{n-1}$ farkını (t_n) dizisi yerine (s_n) dizisine göre teşkil edersek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TEOREM 3.2. $0 < \beta < 1$ için (X_n) yarı β -kuvvetli artan bir dizi olsun. $(\Delta\lambda_n),(\beta_n),(p_n)$ ve (s_n) dizileri de (2.22), (2.23), (2.24) şartları sağlanacak ve

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} |s_n|^k = O(X_m), \quad m \to \infty \tag{3.7}$$

$$|\Delta\lambda_n| \leq \beta_n \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{p_n}{P_n} |s_n|^k = O(X_m), \quad m \to \infty \tag{3.9}$$

olacak şekilde diziler olsun. Bu taktirde, $\sum a_n \lambda_n$ serisi $k \geq 1$ olmak üzere $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir [15].

İSPAT: $\sum a_n \lambda_n$ serisinin $(\overline{N}, p_n)$ ortalaması U_n olsun. Yani

$$U_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{i=0}^{v} a_i \lambda_i = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} (P_n - P_{v-1}) a_v \lambda_v \, , (P_0 \neq 0)$$

dır. Buna göre $n \geq 1$ için $U_n - U_{n-1}$ farkını teşkil edersek,

$$U_n - U_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1} a_v \lambda_v$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplama formülünü uygulayalım. Bu durumda,

$$U_n - U_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \Delta\lambda_v s_v - \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v s_v \lambda_v + \frac{p_n}{P_n} \lambda_n s_n \tag{3.10}$$

$$= U_{n,1} + U_{n,2} + U_{n,3}$$

bulunur. Teoremi ispatlamak için k)1 olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, r=1,2,3 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,r}\right|^k < \infty, \quad m \to \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak (3.8)şartından ve $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,1}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}^{\ k}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1} P_v \beta_v \left|s_v\right|\right\}^k$$

$$\leq O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1} P_v \beta_v \left|s_v\right|^k\right\} \times \left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} P_v \beta_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} P_v \beta_v \left|s_v\right|^k \sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} \beta_v \left|s_v\right|^k$$

elde ederiz. Şimdi de Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_{n,1}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m} v\beta_v \frac{\left|s_v\right|^k}{v}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)\sum_{i=1}^{v}\frac{\left|s_i\right|^k}{i} + O(1)m\beta_m \sum_{v=1}^{m}\frac{\left|s_v\right|^k}{v}$$

bulunur. (2.24), (2.25), (2.26) ve (3.7)şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,1}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)X_v + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} v\Delta\beta_v X_v + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_{v+1}X_{v+1} + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

elde ederiz. (2.18) şartından dolayı $|\lambda_n|^{k-1} = O(1)$ olduğundan ve $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,2}|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v|\lambda_v||s_v|\right\}^k$$

$$\le O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v|\lambda_v|^k|s_v|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v|\lambda_v|^k|s_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\frac{p_v}{P_v}|\lambda_v||s_v|^k$$

bulunur. Yine Abel kısmi toplama formülü ve (3.9) şartını kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,2}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta|\lambda_v|\sum_{i=1}^{v}\frac{p_i}{P_i}|s_i|^k + O(1)|\lambda_m|\sum_{v=1}^{m}\frac{p_v}{P_v}|s_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\Delta\lambda_v|X_v + O(1)|\lambda_m|X_m$$

elde ederiz. Böylece (2.22), (2.26) ve (3.8)şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,2}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_v X_v + O(1)|\lambda_m| X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

bulunur. Son olarak $U_{n,3}$ için, Abel kısmi toplama formülü ve (2.22), (2.26), (3.8), (3.9) şartlarını uygularsak,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,3}|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}\frac{p_n}{P_n}|\lambda_n||s_n|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\lambda_n|\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j}{P_j}|s_j|^k + O(1)|\lambda_m|\sum_{n=1}^{m}\frac{p_n}{P_n}|s_n|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|\Delta\lambda_n| X_n + O(1)|\lambda_m| X_m$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n X_n + O(1)|\lambda_m| X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

elde ederiz. O halde r=1,2,3 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}|U_{n,r}|^k < \infty, \quad m \to \infty$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

BÖLÜM IV

$\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ TOPLANABİLME METODU İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde, üçüncü bölümde verdiğimiz Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 deki $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirlik yerine $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilme alarak daha genel teoremleri ifade ve ispat edeceğiz. Bölümün sonunda Teorem 4.1 in ispatını daha zayıf şartlar altında vereceğiz.

TEOREM 4.1. $0 < \beta < 1$ için (X_n) yarı β -kuvvetli artan bir dizi olsun. Ayrıca (λ_n), (β_n) ve (t_n) de (2.22), (2.23), (2.24), (3.1), (3.3), (3.8) şartlarını sağlayan diziler olsun. Eğer

$$\sum_{n=v+1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}=O\left\{\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{P_v}\right\} \tag{4.1}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|t_n|^k=O(X_m), \quad m\to\infty \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\frac{1}{n}|t_n|^k=O(X_m), \quad m\to\infty \tag{4.3}$$

ise, $k\geq 1$ ve $0<\delta k\leq 1$ olmak üzere $\sum a_n\lambda_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilirdir [5].

İSPAT: $\sum a_n\lambda_n$ serisinin $(\bar{N},p_n)$ ortalaması T_n olsun. Tanımdan ve toplam sırasını değiştirerek, (3.5) eşitliğini elde ederiz. Yine $n \geq 1$ için Abel kısmi toplama formülünü kullanırsak, (3.6) farkını yazabiliriz.

Teoremi ispatlamak için $k > 1$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,r}|^k < \infty, \quad m \to \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (2.22) den $\lambda_n = O\left(\frac{1}{X_n}\right) = O(1)$ olduğundan ve Abel kısmi toplama formülünden,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,1}|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|\lambda_n||t_n|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\lambda_n|\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|t_v|^k + O(1)|\lambda_m|\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|t_n|^k$$

yazabiliriz. (2.22), (2.26), (3.8) ve (4.2) şartları gereğince

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,1}|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|\Delta\lambda_n|X_n + O(1)|\lambda_m|X_m$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n X_n + O(1)|\lambda_m|X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

bulunur. $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak, $T_{n,1}$ deki gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k \le O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v\left|\lambda_v\right|^k\left|t_v\right|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}p_v\right\}^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}p_v\left|\lambda_v\right|^k\left|t_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|t_v\right|^k\left|\lambda_v\right|^k$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|t_v\right|^k\left|\lambda_v\right|$$

$$=O(1),\quad m\to\infty$$

elde ederiz. $T_{n,3}$ için (3.8) şartından ve $k>1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|\Delta\lambda_v\right|\left|t_v\right|\right\}^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\beta_v\left|t_v\right|\right\}^k$$

$$\le O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\beta_v\left|t_v\right|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\beta_v\right\}^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}P_v\beta_v\left|t_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

bulunur. (4.1) şartını ve Abel kısmi toplama formülünü uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\beta_v\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\left|t_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v\beta_v\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{v}\left|t_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)\sum_{i=1}^{v}\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^{\delta k}\frac{1}{i}\left|t_i\right|^k + O(1)m\beta_m\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{v}\left|t_v\right|^k$$

elde ederiz. (2.24), (2.25), (2.26) ve (4.3) gereğince

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)X_v + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1} vX_v\left|\Delta\beta_v\right| + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_{v+1}X_{v+1} + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1), \quad m\to\infty$$

bulunur. Son olarak yine $k>1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|t_v\right|\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|t_v\right|^k\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}P_v\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}P_v\frac{\left|\lambda_{v+1}\right|}{v}\left|t_v\right|\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

elde ederiz. (4.1) ve yine Abel kısmi toplama formülü gereğince

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,4}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\lambda_{v+1}|\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{v}|t_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta|\lambda_{v+1}|\sum_{r=1}^{v}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k}\frac{1}{r}|t_r|^k + O(1)|\lambda_{m+1}|\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{v}|t_v|^k$$

yazabiliriz. Şimdi de (2.22), (2.26), (3.8) ve (4.3) şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,4}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\Delta\lambda_{v+1}|X_{v+1} + O(1)|\lambda_{m+1}|X_{m+1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_{v+1}X_{v+1} + O(1)|\lambda_{m+1}|X_{m+1}$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

elde ederiz. O halde r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,r}|^k < \infty, \quad m \to \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

TEOREM 4.2. $0 < \beta < 1$ için (X_n) yarı β-kuvvetli artan bir dizi ve $(p_n),(s_n)$ dizileri de

$$P_n = O(np_n), \quad n \to \infty \tag{4.4}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|s_n|^k = O(X_m), \quad m \to \infty \tag{4.5}$$

şartını sağlayan diziler olsun. Eğer (2.22), (2.23), (2.24), (3.8) ve (4.1) şartları sağlanıyor ise, $k \geq 1$ ve $0 < \delta k \leq 1$ olmak üzere $\sum a_n \lambda_n$ serisi $\left|\bar{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilirdir [18].

İSPAT: $\sum a_n \lambda_n$ değiştirerek, (3.5) eşitliğini elde ederiz. Yine $n \geq 1$ için Abel kısmi toplama formülünü kullanırsak, (3.10) farkını yazabiliriz.

Teoremi ispatlamak için $k > 1$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, i=1,2,3 için

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k + k - 1} \left|\sigma_{n,i}\right|^k < \infty, \quad m \to \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak (3.8) den dolayı $\left|\Delta \lambda_n\right| \leq \beta_n$ ve (4.4) den dolayı $P_v = O(v p_v)$ olduğundan,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k + k - 1} \left|\sigma_{n,1}\right|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{n-1}^{\;k}} \left\{\sum_{v=1}^{n-1} P_v \left|\Delta \lambda_v\right| \left|s_v\right|\right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{n-1}^{\;k}} \left\{\sum_{v=1}^{n-1} v p_v \beta_v \left|s_v\right|\right\}^k$$

elde ederiz.(2.25) den dolayı $v\beta_v = O\left(\frac{1}{X_v}\right)$ olduğundan, $k > 1$ ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden ve (4.1) şartından,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k + k - 1} \left|\sigma_{n,1}\right|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k - 1} \frac{1}{P_{n-1}} \left\{\sum_{v=1}^{n-1} (v\beta_v)^k p_v \left|s_v\right|^k\right\}$$

$$\times \left\{\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)^k p_v |s_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)^k \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|s_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)^{k-1}(v\beta_v)\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|s_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|s_v|^k$$

bulunur. Böylece Abel kısmi toplama formülü ve (2.24), (2.25), (2.26) ve (4.5) şartları gereğince

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|\sigma_{n,1}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)\sum_{r=1}^{v}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k-1}|s_r|^k$$

$$+O(1)m\beta_m\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|s_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\Delta(v\beta_v)|X_v + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}v|\Delta\beta_v|X_v + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_{v+1}X_{v+1} + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1), \quad m\to\infty$$

yazabiliriz. $\sigma_{n,2}$ için önce $k>1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sigma_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}^{\;k}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v\left|s_v\right|\left|\lambda_v\right|\right\}^k$$

$$\leq O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v\left|s_v\right|^k\left|\lambda_v\right|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}p_v\left|s_v\right|^k\left|\lambda_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

elde ederiz. (2.22) den dolayı $\left|\lambda_n\right| = O(1)$ olduğundan ve (4.1) den

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sigma_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|s_v\right|^k\left|\lambda_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|s_v\right|^k\left|\lambda_v\right|$$

bulunur. Yine Abel kısmi toplama formülü ve (2.22), (2.26), (3.8) ve (4.5) şartlarını kullanırsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\sigma_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta\left|\lambda_v\right|\sum_{i=1}^{v}\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^{\delta k-1}\left|s_i\right|^k$$

$$+ O(1)\left|\lambda_m\right|\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|s_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta\lambda_v\right|X_v + O(1)\left|\lambda_m\right|X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_v X_v + O(1)\left|\lambda_m\right|X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

elde ederiz. Son olarak, (4.4) şartını kullanarak $T_{n,1}$ deki gibi işlemi devam ettirirsek,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} |\sigma_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1} |s_n|^k |\lambda_n|$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

bulunur. O halde i=1,2,3 için

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} |\sigma_{n,i}|^k = O(1), \quad m \to \infty$$

elde ederiz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi Teorem 4.1 deki şartları zayıflatarak $\sum a_n \lambda_n$ serisinin $|\overline{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilirliğini göstereceğiz.

TEOREM 4.3. $0 < \beta < 1$ için (X_n) yarı β-kuvvetli artan bir dizi olsun. Eğer (2.22), (2.23), (2.24), (3.1), (3.8), (4.1), (4.2) ve (4.4) şartları sağlanıyor ise, $k \geq 1$ ve $0 < \delta k \leq 1$ olmak üzere $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|\overline{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir [6].

İSPAT: Yine $\sum a_n \lambda_n$ serisinin $(\overline{N}, p_n)$ ortalaması T_n olsun. Bu durumda T_n ortalamasını (3.5) ve $n \geq 1$ için $T_n - T_{n-1}$ farkını da (3.6) eşitlikleri ile gösterelim.

Teoremi ispatlamak için $k > 1$ olmak üzere r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} |T_{n,r}|^k < \infty, \quad m \to \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $T_{n,1}$ ve $T_{n,2}$ için ispat, Teorem 3.1 deki gibidir. O halde teoremi ispatlamak için $k>1$ olmak üzere r=3,4 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,r}\right|^k<\infty, \quad m\to\infty$$

olduğunu göstermek kafidir. İlk olarak (3.8) ve (4.4) şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}P_v\left|t_v\right|\left|\Delta\lambda_v\right|\right\}^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}{}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}vp_v\left|t_v\right|\beta_v\right\}^k$$

bulunur. $k>1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k\leq O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}(v\beta_v)^k p_v\left|t_v\right|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}(v\beta_v)^k p_v\left|t_v\right|^k\right\}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)^k p_v\left|t_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

elde ederiz. Diğer taraftan (2.25) şartından $n\beta_n=O\left(\frac{1}{X_n}\right)=O(1)$ olduğundan ve (4.1) şartından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k=O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)^k\left|t_v\right|^k\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)|t_v|^k\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}$$

bulunur. Şimdi Abel kısmi toplama formülü ve (4.2) gereğince

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,3}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)\sum_{i=1}^{v}\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^{\delta k-1}|t_i|^k + O(1)m\beta_m\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|t_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\Delta v\beta_v|X_v + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}vX_v|\Delta\beta_v| + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_{v+1}X_{v+1} + O(1)m\beta_m X_m$$

yazabiliriz. Böylece Lemma 2.11 in (2.24), (2.25), (2.26) şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,3}|^k = O(1), \quad m\to\infty$$

bulunur.Son olarak, $T_{n,1}$ ve $T_{n,2}$ de olduğu gibi işlemi devam ettirirsek,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,4}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|\lambda_{v+1}||t_v|^k$$

$$= O(1), \quad m\to\infty$$

elde ederiz. Böylece r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,r}|^k = O(1), \quad m\to\infty$$

dur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

BÖLÜM V

$\varphi - |C,\alpha|_k$ TOPLANABİLME METODU İLE İLGİLİ TEOREM

Bu bölümde, yarı β -kuvvetli artan bir dizi kullanılarak $\sum a_n \lambda_n$ serisinin $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere hangi şartlar altında $\varphi - |C,\alpha|_k$ toplanabilirliği ile ilgili bir teorem ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 5.1. $0<\beta<1$ için (X_n) yarı β -kuvvetli artan bir dizi olsun. Ayrıca (λ_n) ve (β_n) de (2.22), (2.23), (2.24) ve (3.8) şartlarını sağlayan diziler olsun. Eğer $\left(n^{\varepsilon-k}|\varphi_n|^k\right)$ dizisi artmayan olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı varsa ve

$$w_n^\alpha = \begin{cases} |t_n^\alpha|, & \alpha = 1 \\ \max_{1\leq v\leq n} |t_v^\alpha|, & 0<\alpha<1 \end{cases} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlı (w_n^α) dizisi,

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k}\left(|\varphi_n| w_n^\alpha\right)^k = O(X_m), \quad m \to \infty \tag{5.2}$$

şartını sağlıyorsa bu taktirde $k\geq 1, 0<\alpha\leq 1$ ve $k\alpha+\varepsilon>1$ olmak üzere $\sum a_n\lambda_n$ serisi $\varphi - |C,\alpha|_k$ toplanabilirdir [7].

İSPAT: $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere T_n^α, $(na_n\lambda_n)$ dizisinin α -ıncı mertebeden n-inci Cesàro ortalamasını göstersin. Bu durumda (2.5) den

$$T_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\nu a_\nu \lambda_\nu$$

dır. Abel kısmi toplama formülünü kullanırsak,

$$T_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1}\Delta\lambda_\nu \sum_{p=1}^{\nu} A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p + \frac{\lambda_n}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\nu a_\nu$$

elde ederiz.Şimdi de Lemma 2.19 u uygularsak

$$\left|T_n^\alpha\right| \le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left|\Delta\lambda_\nu\right|\left|\sum_{p=1}^{\nu} A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p\right| + \frac{|\lambda_n|}{A_n^\alpha}\left|\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\nu a_\nu\right|$$

$$\le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu^\alpha w_\nu^\alpha \left|\Delta\lambda_\nu\right| + \left|\lambda_n\right| w_n^\alpha$$

$$= T_{n,1}^\alpha + T_{n,2}^\alpha$$

bulunur.

$$\left|T_{n,1}^\alpha + T_{n,2}^\alpha\right|^k \le 2^k\left(\left|T_{n,1}^\alpha\right|^k + \left|T_{n,2}^\alpha\right|^k\right)$$

olduğundan, teoremi ispatlamak için r=1,2 için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}\left|\varphi_n T_{n,r}^\alpha\right|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $k>1$ ve $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left|\varphi_n T_{n,1}^\alpha\right|^k \le \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k}\left(A_n^\alpha\right)^{-k}\left|\varphi_n\right|^k\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu^\alpha w_\nu^\alpha \beta_\nu\right\}^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} n^{-\alpha k} |\varphi_n|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^{\alpha k} (w_v^\alpha)^k \beta_v \right\} \times \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \beta_v \right\}^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} (w_v^\alpha)^k \beta_v \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{n^{-k} |\varphi_n|^k}{n^{\alpha k}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} (w_v^\alpha)^k \beta_v \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{n^{\varepsilon - k} |\varphi_n|^k}{n^{\alpha k + \varepsilon}}$$

elde ederiz. Teoremin hipotezinden $\left(n^{\varepsilon-k} |\varphi_n|^k\right)$ artmayan bir dizi olduğundan

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} |\varphi_n T_{n,1}^\alpha|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} (w_v^\alpha)^k \beta_v v^{\varepsilon - k} |\varphi_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k + \varepsilon}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\alpha k} (w_v^\alpha)^k \beta_v v^{\varepsilon - k} |\varphi_v|^k \int_v^\infty \frac{dx}{x^{\alpha k + \varepsilon}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} v \beta_v v^{-k} \left(w_v^\alpha |\varphi_v|\right)^k$$

bulunur. Şimdi de Abel kısmi toplama formülünden ve (5.2) şartından,

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} |\varphi_n T_{n,1}^\alpha|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v\beta_v) \sum_{r=1}^{v} r^{-k} \left(w_r^\alpha |\varphi_r|\right)^k + O(1) m\beta_m \sum_{v=1}^{m} v^{-k} \left(w_v^\alpha |\varphi_v|\right)^k$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta(v\beta_v)| X_v + O(1) m\beta_m X_m$$

elde ederiz. (2.24), (2.25), (2.26) şartlarından,

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-k} |\varphi_n T_{n,1}^\alpha|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v |\Delta\beta_v| X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\beta_{v+1}| X_{v+1} + O(1) m\beta_m X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

bulunur. $T^{\alpha}_{n,2}$ için (2.22) den $|\lambda_n| = O\left(\frac{1}{X_n}\right) = O(1)$ olduğundan ve Abel kısmi toplama formülü gereğince

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} |\varphi_n T^{\alpha}_{n,2}|^k = \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| n^{-k} \left(w^{\alpha}_n |\varphi_n|\right)^k$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n| n^{-k} \left(w^{\alpha}_n |\varphi_n|\right)^k$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta |\lambda_n| \sum_{v=1}^{n} v^{-k} \left(w^{\alpha}_v |\varphi_v|\right)^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{n=1}^{m} n^{-k} \left(w^{\alpha}_n |\varphi_n|\right)^k$$

yazabiliriz. (2.22), (2.26) ve (3.8) den,

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} |\varphi_n T^{\alpha}_{n,2}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\lambda_n| X_n + O(1) |\lambda_m| X_m$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \beta_n X_n + O(1) |\lambda_m| X_m$$

$$= O(1), \quad m \to \infty$$

elde ederiz. Böylece

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-k} |\varphi_n T^{\alpha}_{n,r}|^k = O(1), \quad m \to \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

[1]. M. Balcı, Absolute φ-summability factors, Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A_1 29, 63-68, (1980).

[2]. H. Bor, On $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ Summability Factors of Infinite Series, Tamkang J. Math., 16, 13-20, (1985).

[3]. H. Bor, On the local property of $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ summability of factored Fourier series, J. Math. Anal. Appl., 179, 644-649, (1993)

[4]. H. Bor, A Note on Quasi Power Increasing Sequences, Jour. Math. Anal. Appl. (submitted for publication).

[5]. H. Bor and H. S. Özarslan, An Application of Quasi Power Increasing Sequences, Int. Math. Journal, 187-191, (2002).

[6]. H. Bor and H. S. Özarslan, An Application of Quasi Power Increasing Sequences, Indian J. Pure and Appl. Math., 33, 5, 1-6, (2002).

[7]. H. Bor and H. S. Özarslan, On Quasi Power Increasing Sequences, Indian J. Pure and Appl. Math., (to appear in 2002).

[8]. L. S. Bosanquet, A Mean Value Theorem, J. London Math. Soc., 16, 146-148, (1941).

[9]. M. Fekete, Zur Theorie der Divergenten Reihen, Math. és termezs értesitö (Budapest) 29, 719-726, (1911).

[10]. T. M. Flett, On an Extension of Absolute Summability and Some Theorems of Littlewood and Paley, Proc. Lond. Math. Soc., 7, 113-141, (1957).

[11]. G. M. Hardy, Divergent Series, Oxford, (1973).

[12]. N. Kishore and G. C. Hotta, On $|\bar{N}, p_n|$ Summability Factors,Acta Sci. Math. (Szeged), 31, 9-12, (1970).

[13]. E. Kogbetliantz, Sur les Séries Absolument Sommables Por la Métode des Moyannes Arithmétiques, Bull. Sci. Math., 49, 234-256, (1925).

[14]. L. Leindler, Integrability Theorems with Sign Changing Coeffients, Acta Math. Hungarica, 76, 3, 173-188, (1997).

[15]. L. Leindler, A New Application of Quasi Power Increasing Sequences, Publ. Math. Debrecen, 58, 791-796, (2001).

[16]. I. J. Maddox, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, (1970).

[17]. S. M. Mazhar, On The Summability Factors of Infinite Series, Pub. Math. Debrecen, 13, 229-236, (1966).

[18]. H. S. Özarslan, A Note On Quasi Power Increasing Sequences, Indian J. Pure and Appl. Math., (to appear in 2002).

[19]. G. M. Petersen, Regular Matrix Transformations, Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London, (1966).

[20]. A. Zygmud, Trigonometric series, Vol. I. Cambridge Univ. Press, 1959