BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Mevlüt TUNÇ

Doktora Tezi
Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları
Eğitimi Anabilim Dalı
Doç. Dr. S. Uğur KIRMACI
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Mevlüt TUNÇ

ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Doç. Dr. S. Uğur KIRMACI danışmanlığında, Mevlüt TUNÇ tarafından hazırlanan bu çalışma 13/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu (…/…)~~** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. S. Uğur KIRMACI	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	*İmza*	:

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Ömer AKBULUT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER
VE UYGULAMALARI

Mevlüt TUNÇ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. S. Uğur KIRMACI

Bu tezde, matematiğin birçok dalında sıklıkla kullanılan ve literatürde Hermite - Hadamard eşitsizliği olarak bilinen $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ eşitsizliği ele alınmıştır. İlk bölümde ünlü Hadamard eşitsizliği hakkında genel bir giriş verildi. Sonraki bölümde ilk olarak çalışma ile ilgili konveks fonksiyonların farklı türleri için detaylı bir literatür çalışması yapıldı. Daha sonra Hadamard eşitsizliğinin ispatı ve Hadamard tipli eşitsizlikler incelenmiştir. Son olarak farklı türden konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri inşa edildi ve her alt konu için yeni uygulamalar verildi.

2011, 130 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Hadamard eşitsizliği, özel ortalamalar, konvekslik çeşitleri.

ABSTRACT

PH D Thesis

HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES
FOR SOME CONVEX FUNCTIONS
AND APPLICATION

Mevlüt TUNÇ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Secondary School Science and Mathematics Education

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. S. Uğur KIRMACI

In this thesis, frequently used many branch of mathematics and that knows as Hermite-Hadamard inequality

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

are presented. In first section, a general introduction to famous Hadamard's inequality is given. In next section, at first deal with study different kind of convex functions detailed study are fulfilled. Then, examined proof of Hadamard's inequality and connected subject. In the final section, invented for various convex functions, new integral inequalities and for all subject new applications are given.

2011, 130 Pages

Keywords: Convexity, Hadamard's inequality, special means, kinds of convexity.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. S. Uğur KIRMACI'ya, Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na ve Sayın Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR'e en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli görüşlerinden ve tavsiyelerinden yararlandığım Afyon Kocatepe Üniversitesinden Sayın Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a, çok kıymetli hocam, abim Sayın Doç. Dr. Murat SUBAŞI'na, Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR hocama, OFMA Matematik Öğretmenliği Bölümü ve Fen Fakültesi Matematik Bölümündeki çok değerli hocalarıma en samimi duygularımla teşekkür ederim.

Bana manevi olarak destek veren anneme, babama ve çalışmalarım sırasında bana karşı göstermiş oldukları sabır ve destekten dolayı eşime ve çocuklarıma teşekkür ederim.

Mevlüt TUNÇ
Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$f^{(n)}$	f Fonksiyonunun n. Mertebeden Türevi
I	$\mathbb{R}$ de Bir Aralık
I^{o}	I ’ nın İçi
$L^{1}([a,b])$	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\Gamma(x)$	Euler-Gamma Fonksiyonu
$\beta(x,y)$	Euler-Beta Fonksiyonu
K_s^1	Birinci Anlamda *s*–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda *s*–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	Godunova–Levin Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$P(I)$	*P*–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h,I)$	*h*–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	*m*–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	(α,m)–konveks Fonksiyonlar Sınıfı
A_s	*s*–aritmetik Ortalama
G_s	*s*–geometrik Ortalama
L_s	*s*–logaritmik Ortalama
H_s	*s*–harmonik Ortalama

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

> "Konveks fonksiyon kavramı bana aynen pozitif fonksiyon ya da artan fonksiyonun temeli olarak görünüyor. Eğer bunu yanlış anlamıyorsam, bu kavram reel fonksiyonlar teorisinin temel açıklamasında yer almalı."
>
> J. L. W. V. Jensen (1906)

Konveksliğin basit ve doğal tanımı Archimedes'e (yaklaşık olarak M.Ö.250) ve onun çok ünlü olan π (pi) değerini hesaplamasına kadar uzanır (Düzgün çokgenleri çevreleyerek ve kazıyarak). Archimedes'in dikkat ettiği gerçek, konveks bir eğrinin çevre uzunluğu onu çevreleyen başka bir konveks eğrinin çevre uzunluğundan daha küçük olmasıdır.

Aslında biz konveksliği sürekli olarak ve birçok yolla yaşamaktayız. Ayakta duruş pozisyonumuz çok sade bir örnek olmakla birlikte, ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içine ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi korumaktadır. Aynı zamanda konveksliğin günlük yaşantımız üzerinde büyük etkisi vardır, endüstri, iş alanları, tıp, sanat gibi dalların nümerik uygulamalarında da kullanmaktayız. Öyle ki bu tür fonksiyonlar kaynakların dağılımının optimumlaştırılması problemlerinin çözümü ve şans oyunlarının dengesinin sağlanmasında dahi kullanılmaktadır.

Konveks fonksiyonlar teorisi, konvekslik genel konusunun bir parçasıdır, bir konveks kümenin bir epigrapfisidir yani fonksiyonun grafiğinin üstündeki veya üzerindeki noktaların kümesidir. Bununla beraber matematiğin bütün dalları ile yakın ilişki içerisinde olan bu teori kendi başına önemli bir teoridir. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. Değişkenler hesabı ikinci türev testi ile konveksliğin tanınmasında kuvvetli bir araçtır. Mucize eseri olarak bu Hessian testi birkaç değişken durumu için doğal bir genelleştirmedir. Optimizasyon ve kontrol teorisinin bazı derin problemlerinden hareketle konveks fonksiyonlar teorisi sonsuz boyutlu Banach uzaylarının çalışma alanını genişletmektedir.

Konveks fonksiyonlar konusunun tanımı genel olarak Johan Ludwig William Valdemar Jensen'e (1859-1925) kendi çalışmalarından dolayı atfedilmektedir. Üstelik bu fonksiyonlarla ilk uğraşan kişi o değildi. Onun selefleri arasında Ch. Hermite, O. Hölder ve O. Stolz'u hatırlamamız gerekir. Yirminci yüzyıl boyunca geometrik fonksiyonel analizde, matematiksel ekonomide, konveks analizde ve lineer olmayan optimizasyonda yoğun araştırma faaliyetleri ve önemli sonuçlar gerçekleşti. G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. P'olya nın "Inequalities" adlı klasik kitabı konveks fonksiyonlar konusunun popüler olmasında önemli rol oynadı. Kabaca söylemek gerekirse konveks fonksiyonların iki temel özelliği vardır, birincisi bir sınır noktasında maksimum elde etmek ve herhangi bir lokal minimum bir global minimumdur demek, ikincisi kesin konveks fonksiyonun en çok bir minimumunun olduğunu söylemektir.

Eşitsizlikler teorisi matematiğin hemen hemen bütün dallarında geniş bir çalışma aralığında çok etkili ve kuvvetli araçlar üreten ve sürekli gelişmekte olan bir teoridir. Bu teori son yıllarda çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmektedir, matematiksel analiz ve uygulamaların farklı bakış açıları altında etkili olmakta ve yeni araştırmaları canlandırmaktadır. Jensen, Hadamard, Hilbert, Hardy, Opial, Poincaré, Sobolev, Levin ve Lyapunov isimleriyle özdeşleşmiş birçok eşitsizlik tipi arasında derin kökler ve matematiğin farklı dalları üzerinde büyük etkileri olmuştur. Son birkaç on yıllık süreçte bu eşitsizliklerle ilgili çok önemli uygulamalı çalışma alanlarında sağlam ve etkili ürünlerin verilmesine şahit olmaktayız. Bu teorinin gelişmesinde yukarıda bahsettiğimiz isimleriyle özdeşleşmiş eşitsizlikler üzerine çalışmalar yapan araştırmacıların artmasıyla çalışma alanlarının yenilenmesi ve mevcut çalışma alanlarının genişlemesi bu teorinin cazibesini de arttırmaktadır. Literatürde birçok yeni çalışma ve ürün görülmektedir.

Bugün en önemli integral eşitsizliklerinden biri konveks fonksiyonlar için Hadamard (veya Hermite-Hadamard) integral eşitsizliğidir. Hermite (1822-1901), Ekim 1881 de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) aşağıdaki gibi basıldı.

"***Sur deux limites d'une integrale definie***. *Soit* $f\left(x\right)$ *une fonction qui varie toujours dans le même sens de* $x=a,$ *áx* $=b$. *On aura les relations*

$$\left(b-a\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\int_a^b f(x)dx<\left(b-a\right)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.1}$$

ou bien

$$\left(b-a\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\int_a^b f(x)dx>\left(b-a\right)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y=f\left(x\right)$ *tourne sa convexité ou sa concavite vers l'axe des abcisses.*

En faisant dans ces formules $f\left(x\right)=1/\left(1+x\right),\ a=0,\ b=x$ *il vient*

$$x-\frac{x^2}{2+x}<\log\left(1+x\right)<x-\frac{x^2}{2\left(1+x\right)}."$$

Şurası önemlidir ki Hermite'in bu kısa notu matematiksel literatürde daha önce hiç düşünülmemişti. (1.1) eşitsizliğinin

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.2}$$

için bir ara değer eşitsizliği olduğu açıktır.

Hermite'in çalışmasının yayınlanmasından yaklaşık yirmi yıl sonra J.L.W.V. Jensen, (1.2) eşitsizliğini kullanarak konveks fonksiyonları tanımladı (1905-1906).

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925) tarafından 1906 yılında ortaya atılan bir sıra çalışmaların başında konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler ve gamma fonksiyonu başlıca çalışmalarıdır. Jensen'ın ünlü eşitsizliği; f fonksiyonu $\left[a,b\right]$

aralığında konveks fonksiyon ve $\lambda_i \geq 0, (i=1,2,...,n)$ sayıları $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu taktirde ünlü Jensen eşitsizliği $x_i \in [a,b]$ için

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n\right) \leq \lambda_1 f\left(x_1\right) + \lambda_2 f\left(x_2\right) + ... + \lambda_n f\left(x_n\right) \tag{1.3}$$

dir.

Bu eşitsizlik yardımıyla literatürde sıkça karşılaştığımız aşağıdaki;

$x_1,...,x_n \geq 0$ ve $f(x) = \ln x,\ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ için (1.3)'den

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n}$$

eşitsizliği, buradan da iyi bilinen

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 .... x_n} \tag{1.4}$$

Aritmetik ortalama – Geometrik ortalama eşitsizliği vardır. $x_1 = x_2 = ... = x_n$ olması durumunda eşitlik sağlanır.

Yukarıdaki (1.3) eşitsizliğinde $f(x) = -x^2$ olarak seçilirse, her $x_1,...,x_n$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ eşitliğini sağlayan her $\lambda_i \geq 0, (i=1,2,...,n)$ için

$$\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n\right)^2 \geq \lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_1 x_2{}^2 + ... + \lambda_n x_n{}^2$$

olur. Bu ifadede $x_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ ve $\lambda_k = b_k^2 \left(b_1^2 + ... + b_n^2\right)^{-1}, (k=1,...,n)$ yazılırsa Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir;

$$\left|a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right| \leq \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2} \tag{1.5}$$

Konkav fonksiyon olarak $f(x) = \ln x$ alınırsa, her $x, y \in (0, \infty)$ ve $\alpha > 0,\ \beta > 0,$ $\alpha + \beta = 1$ için

$$\begin{gathered} \ln(\alpha x + \beta y) \geq \alpha \ln x + \beta \ln y = \ln(x^\alpha y^\beta) \\ \Rightarrow \alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta \Rightarrow \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}} \geq xy \end{gathered} \tag{1.6}$$

elde edilir. Son ifade de $\frac{1}{\alpha}=p,\ \frac{1}{\beta}=q$ denirse, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliğini sağlayan her $p>1, q>1$ ve $x\geq 0, y\geq 0$ için

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy \tag{1.7}$$

Young eşitsizliği elde edilir.

Jensen eşitsizliği yukarıda saydığımız eşitsizliklerin hepsinden daha genel bir eşitsizlik olduğu için doğal olarak daha geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Konu ile ilgili literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunlardan en önemli ve dikkat çekici olanlarından bahsetmek gerekirse Dragomir, Pearce, Pečarić, Fink, Tong, Fitzpatrict, Pachpatte, Godunova, Varosanec, Özdemir, Kırmacı, Yıldırım, Alomari, Darus, Baugoffa, Sarıkaya ve Set‘in yakın zamanda yapmış olduğu eserlerine bakılabilir.

Sunulan bu tezde Hermite-Hadamard eşitsizliği detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak hem pür matematikteki temel tanım ve kavramlar hem de konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci olarak, daha önce tanımlanan çeşitli konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili kavramlar ve teoremler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak konveks fonksiyonlarla daha sonra ise farklı türden konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili eşitsizlikler özetlenmiştir. Bu bölümde ünlü Hermite-Hadamard eşitsizliğinin gelişimi ve farklı genişlemeleri üzerine yapılmış olan çalışmalara değinilmiştir. Dördüncü bölümde konveks ve bazı farklı türden konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikleri incelenmiş ve elde edilen yeni integral eşitsizlikleri için bazı özel uygulamalar verilmiştir. Son olarak da çalışma ile ilgili sonuçlar yazılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Artan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2).(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0$ oluyorsa f fonksiyonuna monoton artan fonksiyon, $(x_1 - x_2).(f(x_1) - f(x_2)) > 0$ oluyorsa f fonksiyonuna kesin artan fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.2. (Azalan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2).(f(x_1) - f(x_2)) \leq 0$ oluyorsa f fonksiyonuna monoton azalan fonksiyon, $(x_1 - x_2).(f(x_1) - f(x_2)) < 0$ oluyorsa f fonksiyonuna kesin azalan fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Özellik 2.1.3. (Artan ve Azalan Fonsiyonların Özellikleri):

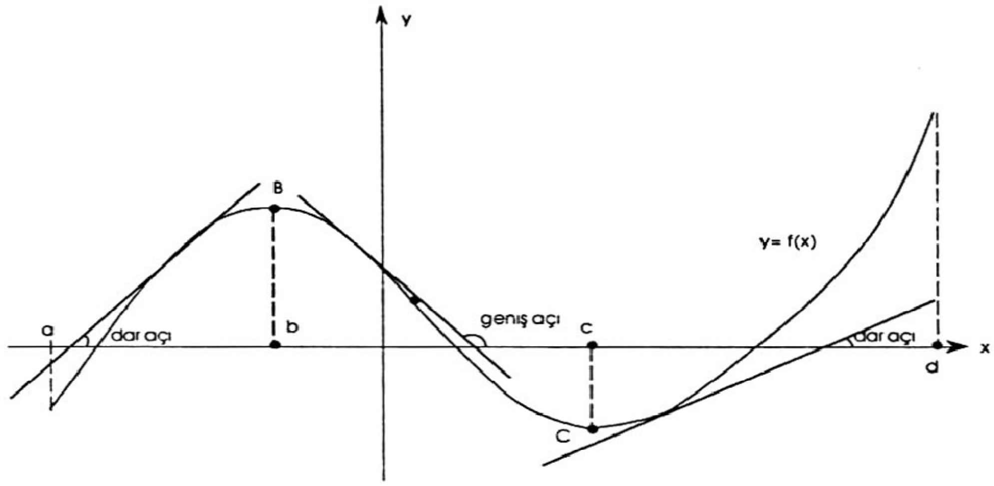
1) f ve g, I üzerinde azalmayan fonksiyonlar ise $f + g$ aynı özelliğe sahiptir.

2) f azalmayan ve λ negatif olmayan bir reel sayı ise λf de azalmayandır.

3) f ve g negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon ise $f.g$ de azalmayandır.

4) f pozitif ve azalmayan ise $\frac{1}{f}$ artmayan fonksiyondur.

5) f ve g monoton ise $f + g$ nin monoton olduğu sonucu her zaman çıkarılamaz. Çünkü f monoton artan, g monoton azalan iken $f + g$ için bir şey söylenemez (Mitrinović 1970).



Şekil 2.1. f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar

Şekil 2.1'deki gibi verilmiş $y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) ve (c,d) aralıklarında kesin artan, (b,c) aralığında ise kesin azalandır. (a,b) aralığında diferensiyellenebilen $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde; Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \geq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton artan, eğer $f'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur. Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \leq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton azalan, eğer $f'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur.

Genel anlamıyla artan veya azalan fonksiyonlar için aşağıdaki teoremler vardır.

Teorem 2.1.4. (Chebyshev Eşitsizliği): $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ reel sayıların azalmayan (veya artmayan) iki dizisi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n} \\ &\geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \\ &\geq \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

yada $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ reel sayıların negatif olmayan bir dizisi olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik durumu sadece a veya b dizilerinden en az birinin sabit olması ile sağlanır. Özel olarak $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1$ seçilirse

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$$

eşitsizliği elde edilir (Mitrinović *et al.*1993).

Teorem 2.1.5. (Chebyshev İntegral Eşitsizliği): $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında aynı anda artan yada aynı anda azalan, integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Bundan başka $p : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, (a,b) aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Böylece

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \qquad (2.1.2)$$

eşitsizliği vardır (Mitrinović and Vasić 1974, Mitrinović and Pečarić 1990).

Eğer f ve g fonksiyonlarından birisi artmayan ve diğeri azalmayan birer fonksiyon ise (2.1.2) eşitsizliği yön değiştirir. Bu eşitsizliğin aşağıdaki özel durumları mevcuttur.

Özel olarak $p(x) = 1$ seçilirse

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \qquad (2.1.3)$$

ve

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$$

yazılır.

Teorem 2.1.6. (Schur Eşitsizliği): $k, l, m \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha > 0$ olsun, bu durumda

$$k^{\alpha}(k-l)(k-m)+l^{\alpha}(l-m)(l-k)+m^{\alpha}(m-l)(m-n)\geq 0 \qquad (2.1.4)$$

eşitsizliği vardır (Mitrinović 1970).

Schur eşitsizliği olarak bilinen bu ifade de eşitlik durumu yalnızca $k=l=m$ veya bu sayılardan ikisinin eşit diğerinin 0 olması durumunda sağlanır. Eşitsizlik α nın herhangi bir pozitif tamsayı olması durumunda $\forall k,l,m\in \square$ için sağlanır.

Eşitsizliğin ispatı yeniden düzenlenmesiyle kolaylıkla görülebilir yani; bu eşitsizlik k,l,m için simetrik olduğundan genelliği bozmadan $k\geq l\geq m$ olduğu kabul edilirse

$$(k-l)\left[k^{\alpha}(k-m)-l^{\alpha}(l-m)\right]+m^{\alpha}(l-m)(k-m)\geq 0 \qquad (2.1.5)$$

yazılabilir. Bu ifadeden de görülmektedir ki eşitsizliğin sol tarafındaki her bir terim sıfırdan büyük ya da eşittir. Bu ifade Schur eşitsizliğinin yeniden yazılmasından başka bir şey değildir.

L. Euler (1707-1783) gamma fonksiyonunu $n!=1.2....(n-1).n$ faktöriyeller için ara değer fonksiyonu olarak kullanmış daha sonra ise bu fonksiyonun özellikleri üzerine ilginç sonuçlar ve integraller için temsilini vermiştir. Gamma fonksiyonu pozitif n tamsayıları için $\Gamma(1)=1,\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ ile birlikte

$$\Gamma(n)=(n-1)!\ ,\ n\in \square_{+} \qquad (2.1.6)$$

dir. (2.1.6) eşitliğinin pozitif reel sayılar için doğal bir genişlemesi olarak

$$f(x+1)=xf(x),\quad x>0 \qquad (2.1.7)$$

eşitliği yazılır (Niculescu and Persson 2006).

Euler, gamma fonksiyonunun integral temsilini

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,\quad x>0 \qquad (2.1.8)$$

olarak ifade eder (Kannappan 2009).

Tanım 2.1.7. Beta fonksiyonu

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad x,y>0 \tag{2.1.9}$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tip Beta integral fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Kannappan 2009).

Tanım 2.1.8. $\beta:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (birinci çeyrek düzlemde tanımlı reel değerli fonksiyon) bir y değişkenine bağlı olarak x değişkeni için monoton (x in değeri için monotonluk şartı yeterli) olsun,

$$\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y), \quad x,y\in(0,\infty) \tag{2.1.10}$$

$$\beta(1,y)=\frac{1}{y} \tag{2.1.11}$$

şartları ile birlikte β'ya Euler tip Beta fonksiyonu denir (Kannappan 2009).

Beta fonksiyonunun

i-

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt, \quad x,y>0 \tag{2.1.12}$$

ii-

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y>0 \tag{2.1.13}$$

iii-

$$\beta(x,y)=\beta(y,x) \tag{2.1.14}$$

özellikleri vardır (Jeffrey and Dai 2008).

Tanım 2.1.9. A, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olsun. Her $x\in A$ için $x\le M$ oluyorsa $M\in\mathbb{R}$ sayısına A' nın üst sınırı, $m\le x$ oluyorsa $m\in\mathbb{R}$ sayısına A'nın alt sınırı denir. A kümesine, üst sınırı varsa yukarıdan sınırlı, alt sınırı varsa aşağıdan sınırlı, hem üst hem de alt sınırı varsa sınırlıdır denir (Hunter and Nachtergaele 2000).

Tanım 2.1.10. A, $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesi olsun. M, A'nın bir üst sınırı ve A'nın diğer bütün M' üst sınırları için $M \leq M'$ oluyorsa M sayısına supremum, en küçük üst sınır denir ve $\sup A$ ile gösterilir. Ayrıca $M \in A$ ise M sayısına A'nın maksimum elemanı denir. m, A nın bir alt sınırı ve A nın diğer bütün m' alt sınırları için $m \geq m'$ oluyorsa m sayısına infimum, en büyük alt sınır denir ve $\inf A$ ile gösterilir. Eğer $m \in A$ ise m sayısına A'nın minimum elemanı denir (Hunter and Nachtergaele 2000).

Tanım 2.1.11. $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir (Hunter and Nachtergaele 2000).

Teorem 2.1.12. (İntegraller için Ortalama Değer Teoremi): f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.1.15}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ vardır (Thomas and Finney 1992).

2.2. Konveks Küme ve Konveks Fonksiyon

Konvekslik kavramı birçok problemin çözümünde kullanılır. Konveks fonksiyonlar optimizasyon problemleri için pek çok önemli özelliklere sahiptir. Örneğin, konveks fonksiyon üzerinde herhangi bir lokal minimum global minimumdur.

Tanım 2.2.1. L boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+ : L\text{x}L \to L$ ve $. : K\text{x}L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye K cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L , + işlemine göre değişmeli bir gruptur.

$G1$. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

$G2$. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

$G3$. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in L$ vardır,

$G4$. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in L$ vardır,

$G5$. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$L1$. $a.x \in L$ dir,

$L2$. $a.(x + y) = a.x + a.y$ dir,

$L3$. $(a + b).x = a.x + b.x$ dir,

$L4$. $(ab).x = a.(b.x)$ dir,

$L5$. $1.x = x$ dir (1, K nın birim elemanıdır). (2.2.1)

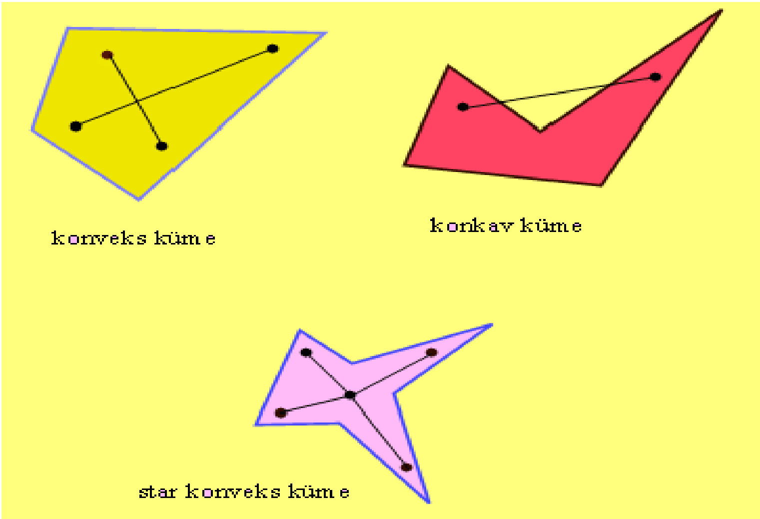
$K = \mathbb{R}$ ise L ye reel vektör uzayı denir (Anton 1994).

Tanım 2.2.2. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun

$$tx + (1 - t)y \in C, \quad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1] \qquad (2.2.2)$$

şartı sağlanıyorsa C ye konveks küme denir (Bertsekas *et.al.* 2003)

Boş küme konveks küme olarak düşünülür. Bunların tersine eğer bir küme konveks değil ise konkav küme olarak ifade edilir. Bu tanımların yanı sıra, A reel veya kompleks lineer uzayın bir altkümesi olmak üzere, eğer bir $x_0 \in A$ noktasından herhangi bir $x \in A$ noktasına çizilen bütün doğrular yine bu A kümesinin içerisinde kalıyorsa bu kümeye star konveks küme denir.

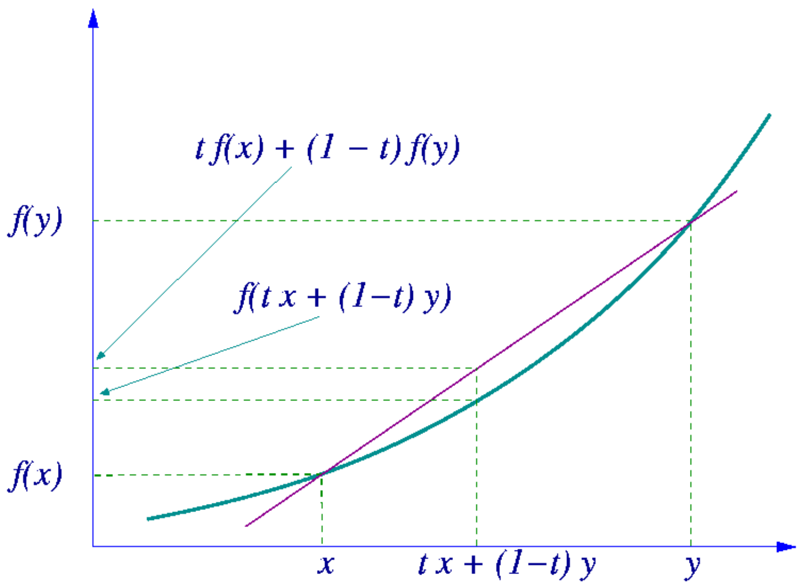


Şekil 2.2. Konveks, konkav ve star konveks küme

Tanım 2.2.3. $f : I \to \mathbb{R}$, $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için f fonksiyonu

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.2.3}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlik $x \neq y$ ve $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir. $-f$ konveks (kesin konveks) ise o zaman f 'ye konkav (kesin konkav) denir (Pečarić *et. al* 1992).



Şekil 2.3. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Geometrik olarak $tx+(1-t)y$ noktasında, f 'nin eğri üzerinde aldığı değer, $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş her zaman eğrinin $[x,y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir. Şekil 2.3 den de görüldüğü gibi $t\in[0,1]$ olduğundan $tf(x)\le f(x)$ dir. Benzer şekilde $(1-t)f(y)\le f(y)$ dir. Yani $(1-t)f(y)$ de $f(y)$ nin altındadır. Dolayısıyla $tf(x)+(1-t)f(y)$, $f(x)$ ile $f(y)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f 'nin grafiğinin $[x,y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Eğer f fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığında sınırlı ve her $x,y\in[a,b]$ için (2.2.3) eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli olur. Burada f fonksiyonunun sınırlılık şartı çok önemlidir. Konveks fonksiyonlar için iyi bilinen Jensen eşitsizliği aşağıdaki teoremde ifade edilmektedir.

Teorem 2.2.4. (Jensen Eşitsizliği): f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\lambda_i\ge 0,\ (i=1,2,...,n)$ sayıları $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=1$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda $x_i\in[a,b]$ için

$$f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n\right)\le\lambda_1 f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)+...+\lambda_n f\left(x_n\right) \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği vardır (Jensen 1905, 1906).

Sonuç 2.2.5. $f:U\subseteq L\to\mathbb{R}$, L reel lineer uzayın bir U konveks kümesi üzerinde konveks bir dönüşüm, $x_i\in U$, $i=1,...,n$ ve $p_i\ge 0$ olmak üzere $P_n=\sum_{i=1}^{n}p_i>0$ olsun, bu durumda

$$f\left(\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n}\right)\le\frac{\lambda_1 f\left(x_1\right)+\lambda_2 f\left(x_2\right)+...+\lambda_n f\left(x_n\right)}{\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n} \tag{2.2.5}$$

yazılabilir (Pachpatte 2005).

Tanım 2.2.6. I, $\mathbb{R}$ ’de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.2.6}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamda konveks veya $J-$ konveks fonksiyon denir. Aynı zamanda bu fonksiyona orta konveks fonksiyon da denir. $x, y \in I$ için $x \neq y$ olduğunda “$\leq$” yerine “$<$” gelir. Bu durumda f fonksiyonuna kesin J–konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Konveks fonksiyonlarla ilgili fonksiyonel özellikler bu alandaki problemlerin çözümünde önemli bir kaynak oluşturmaktadır.

Özellik 2.2.7. i-İki konveks fonksiyonun toplamı (aynı aralık üzerinde tanımlı) yine bir konveks fonksiyondur. Bu toplamda fonksiyonlardan birisi kesin konveks ise toplamda kesin konvekstir.

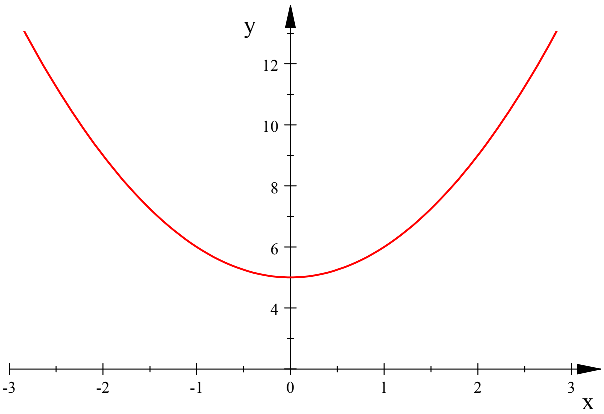
ii-Bir (kesin) konveks fonksiyonun pozitif bir skalerle çarpımı da (kesin) konveks fonksiyondur.

iii-Tanımlandığı aralığın bir alt aralığına kısıtlanmış olan (kesin) konveks fonksiyon yine bu aralıkta (kesin) konveks fonksiyondur.

iv-Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ bir (kesin) konveks fonksiyon ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan (artan) bir konveks fonksiyon ise böylece gof bileşkesi de (kesin) konveks fonksiyondur

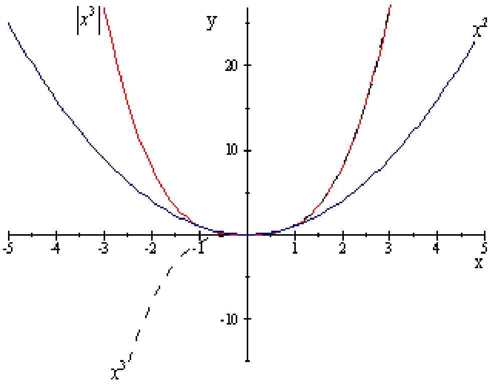
v- f, I ve J aralıkları arasında tam bir eşleme olsun. Eğer f artan ise f nin konveks olması için gerek ve yeter şart f^{-1} in (kesin) konkav olmasıdır. Eğer f azalan bir eşleme ise f ve f^{-1} aynı tür konvekstir (Niculescu and Persson 2006).

Örnekler 2.2.8. **a)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + a$ fonksiyonu konvekstir.



Şekil 2.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x^2 + a$)

b) $1 \leq p$ için, $f(x) = |x|^p$ fonksiyonu konvekstir.



Şekil 2.5. Aralık üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|^p$)

Üçgen eşitsizliği reel ve kompleks sayılar için sıklıkla kullanılan temel bir eşitsizliktir.

Teorem 2.2.9. Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ $\left(\text{veya } \mathbb{C}\right)$ için

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$$

ve tümevarımla

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n| \tag{2.2.7}$$

eşitsizlikleri vardır (Mitrinović *et al.*1993).

Bu eşitsizliğin integral versiyonu şu şekildedir.

Teorem 2.2.10. f, $[a,b]$ aralığında sürekli, reel (yada kompleks) değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a<b) \tag{2.2.8}$$

eşitsizliği vardır (Mitrinović *et al.*1993).

2.3. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar

2.3.1. Logaritmik konveks fonksiyonlar sınıfı

Tanım 2.3.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise f fonksiyonuna logaritmik konveks (log–konveks) yada çarpımsal konveks fonksiyon denir. Veya denk olarak, eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(tx+(1-t)y\right) \le f^{t}(x)\, f^{1-t}(y) \tag{2.3.1.1}$$

şartını sağlıyorsa, f fonksiyonuna logaritmik konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlik ters çevrilirse f ye log–konkav fonksiyon denir (Pečarić *et al.*1992).

Uyarı 2.3.1.2. f ve g konveks ve g artan bir fonksiyon ise gof de konvekstir, üstelik $f = \exp\log f$ olarak yazılabileceğinden log–konveks fonksiyon bir konveks fonksiyondur, bunun tersi her zaman doğru değildir. Bu tabi ki (2.3.1.1) den ve doğal olarak aritmetik ortalama – geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$f^{t}(x)\, f^{1-t}(y) \le tf(x) + (1-t)\, f(y) \tag{2.3.1.2}$$

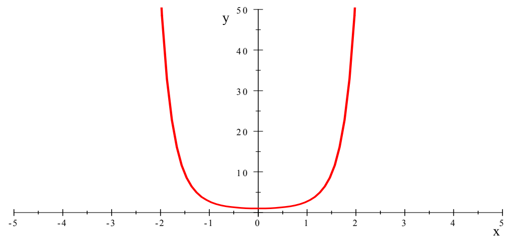
dir (Roberts and Varberg 1973).

Bu uyarı sonucunda açıkça görülmektedir ki;

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le f^{t}(x)f^{1-t}(y)\le tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.3.1.3}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Örnek 2.3.1.3. Logaritmik konveks fonksiyonun aynı zamanda bir konveks fonksiyon olduğunu göstermek çok kolaydır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin $f(x)=x^2$ bir konveks fonksiyondur fakat $\log f(x)=\log x^2=2\log|x|$ bir konveks fonksiyon değildir dolayısıyla logaritmik konveks fonksiyonda değildir. Diğer taraftan $f(x)=e^{(x^2)}$ logaritmik konvekstir çünkü $\ln f(x)=\ln e^{(x^2)}=x^2$ konvekstir. Logaritmik konveks fonksiyona daha sıradan bir örnek olarak pozitif reel sayılara kısıtlanmış gamma fonksiyonu da verilebilir.



Şekil 2.6. $f(x)=e^{(x^2)}$ logaritmik konveks fonksiyon eğrisi

2.3.2. *m* – konveks ve *(α,m)* – konveks fonksiyonlar sınıfı

Toader *m* – konveksliği ve *m* – konvekslik sınıfının klasik konvekslik ve starshaped özellikleriyle olan ilişkilerini aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.3.2.1. $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b>0$ olsun. $\forall x,y\in[0,b]$ ve $m,t\in[0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\le tf(x)+m(1-t)f(y) \tag{2.3.2.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna m – konvekstir denir. Eğer $-f$, m – konveks ise f, m–konkav fonksiyondur. $f(0) \leq 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm m – konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir (Toader 1984).

Tanım 2.3.2.2. $b > 0$ olmak üzere $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tx) \leq tf(x) \tag{2.3.2.2}$$

şartını sağlıyorsa starshaped fonksiyon denir. Burada $x \in [0,b]$ ve $t \in [0,1]$ dir (Toader 1984).

Açıkça görülebilir ki Tanım 2.3.2.1, $m = 1$ için standart konvekslik tanımına, $m = 0$ için ise starshaped tanımına dönüşür.

Miheşan, (α, m) – konveksliği aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.3.2.3. $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0,b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^{\alpha} f(x) + m(1-t^{\alpha}) f(y) \tag{2.3.2.3}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna (α, m) – konveks fonksiyon denir (Miheşan 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm (α, m)–konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^{\alpha}(b)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $(\alpha, m) = \{(0,0), (\alpha,0), (1,0), (1,m), (1,1), (\alpha,1)\}$ için sırasıyla artan, α–starshaped, starshaped, m–konveks, konveks ve α–konveks fonksiyonlar elde edilir.

2.3.3. *s* – konveks fonksiyonlar sınıfı

s – konveks kavramı ilk olarak W. Orlicz tarafından Orlicz Uzayları teorisinde kullanıldı. Orlicz'nin yapmış olduğu bu yeni tanımlama daha sonra birinci anlamda s – konveks fonksiyon adıyla anılmıştır. Bunun yanı sıra ikinci anlamda s – konveks fonksiyonlar Breckner tarafından literatüre kazandırılmış ve bu yapılan çalışmalar doğrultusunda Hudzik ve Maligranda s – konveks fonksiyonlar için kullanışlı özellikler ve örnekler tanımlamıştır.

Tanım 2.3.3.1. Reel değerli fonksiyonlar için $0 < s \leq 1$ olmak üzere s – konveksliğin birinci ve ikinci anlamı olmak üzere aşağıdaki gibi iki tanımı vardır.

1- Her $\alpha, \beta \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.3.3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna birinci anlamda s – konveks fonksiyon denir ve birinci anlamda s – konveks fonksiyonlar sınıfı genellikle K_s^1 ile gösterilir (Orlicz 1961).

2- Yukarıdaki tanımda $\alpha + \beta = 1$ olarak alınırsa bu durumda f ye ikinci anlamda s – konveks fonksiyon denir ve kısaca $f \in K_s^2$ ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Hudzik ve Maligranda çalışmalarında $f \in K_s^1$ $(s \in (0,1))$ sınıfından fonksiyonların azalmayan olduklarını ve $s = 1$ için s – konveksliğin, açık olarak sıradan konveks fonksiyon kavramına indirgendiğini göstermişlerdir. Yine Hudzik ve Maligranda'nın çalışmalarında konu ile ilgili vermiş oldukları örnek ve özelliklerin de kullanışlı olduğu görülmektedir.

Örnek 2.3.3.2. $s \in (0,1)$ ve $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases} \tag{2.3.3.2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

a) Eğer $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$

b) Eğer $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Özellik 2.3.3.3. Eğer $f \in K_s^2$ ise f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan değerler alır (Hudzik and Maligranda 1994).

İspat: $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f \in K_s^2$ için

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) \leq \frac{f(t)}{2^s} + \frac{f(t)}{2^s} = 2^{1-s} f(t) \tag{2.3.3.3}$$

yazılabilir, üstelik $\left(2^{1-s} - 1\right) f(t) \geq 0$ dır ve böylece $f(t) \geq 0$ dir.

2.3.4. $Q(I)$ ve $P(I)$ fonksiyonlar sınıfı

Tanım 2.3.4.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda} \tag{2.3.4.1}$$

oluyorsa f ye Godunova – Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfından fonksiyon denir (Godunova and Levin 1985).

Godunova ve Levin aynı zamanda bütün negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonların bu sınıfa ait olduğunu gösterdiler ve aşağıdaki genel sonucu verdiler.

Sonuç 2.3.4.2. Eğer $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-y)(z-x) \geq 0 \quad (2.3.4.2)$$

eşitsizliği vardır. Gerçekten bu eşitsizlik yukarıdaki tanım ile eşdeğerdir ve tanımın yerinede kullanılabilir. Eğer bu eşitsizlikte $f = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ kullanılırsa ifade literatürde iyi bilinen Schur eşitsizliği ile çakışmaktadır (Godunova and Levin 1985).

Ayrıca, aşağıdaki farklı bir fonksiyon sınıfı tanımı da verilir.

Tanım 2.3.4.3. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq f(x) + f(y) \quad (2.3.4.3)$$

oluyorsa f fonksiyonuna P fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfından fonksiyon denir (Dragomir *et al.* 1995).

2.3.5. *h* – konveks fonksiyonlar sınıfı

Varošanec, h – konveks fonksiyonlar sınıfı adını verdiği negatif olmayan fonksiyonlar için yeni ve büyük bir sınıf tanımladı. Öyle ki bu sınıf literatürde iyi bilinen negatif olmayan konveks fonksiyonlar, ikinci anlamda s – konveks fonksiyonlar, Godunova – Levin fonksiyonlar ve P – fonksiyonları içerisine katmıştır.

Tanım 2.3.5.1. $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. f negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq h(\lambda) f(x) + h(1-\lambda) f(y) \quad (2.3.5.1)$$

şartını sağlıyorsa $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h–konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfından fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonuna h–konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfından fonksiyon denir (Varošanec 2007).

Açıkça görülebilir ki $h(\lambda) = \lambda$, $h(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$, $h(\lambda) = 1$, $h(\lambda) = \lambda^s$ seçilirse sırasıyla konveks, Godunova – Levin, $P(I)$ fonksiyonu ve s – konveks fonksiyonu elde edilir.

Uyarı 2.3.5.2. h negatif olmayan bir fonksiyon ve $\forall \lambda \in (0,1)$ için

$$h(\lambda) \geq \lambda$$

dır. Örneğin $h_k(x) = x^k$ fonksiyonu burada $k \leq 1$ ve $x > 0$ için bu sonucu verir (Varošanec 2007).

Eğer f, I üzerinde $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için negatif olmayan bir konveks fonksiyon ise

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq h(\lambda) f(x) + h(1-\lambda) f(y) \quad (2.3.5.2)$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece $f \in SX(h, I)$ olur. Benzer şekilde h fonksiyonu $\forall \lambda \in (0,1)$ için $h(\lambda) \leq \lambda$ özelliğine sahip ise o zaman herhangi bir negatif olmayan f konkav fonksiyonu $SV(h, I)$ sınıfına dâhil olur (Varošanec 2007).

2.4. Konveks Fonksiyonlar için Literatürde İyi Bilinen Birkaç Eşitsizlik

Bu kısımda konveks fonksiyonlar için literatürde sıkça karşılaşılan bazı eşitsizliklere yer verilecektir. Bu eşitsizlikleri vermekteki asıl amaç, konveks fonksiyonların gelişimi hakkında bilgi vermektir. Matematik literatüre bakıldığında çok sayıda benzer eşitsizlikle karşılaşmak mümkündür. Bu başlık altında seçilen belli başlı eşitsizlikler konveks fonksiyonların gelişimi, sistematik olarak çalışılmaya başlanması, özel anlamların elde edilişi, farklı boyutlu uzaylardaki fonksiyonların konveks olup olmamasının nasıl test edileceği hakkındadır. Hermite-Hadamard eşitsizliğinden ise daha sonra bahsedilecektir.

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925) tarafından 1905 - 1906 yıllarında ortaya atılan bir sıra çalışmaların başında konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler ve Gamma fonksiyonu başlıca çalışmalarıdır. Bu çalışmalar konveks fonksiyonlar için sistematik çalışmanın başlangıcı olmuştur. Şimdi matematiğin çeşitli dallarında sıklıkla kullanılan çok önemli ve temel eşitsizliklerden birisi olan Jensen eşitsizliğine ait birkaç farklı formu verilecektir.

Önerme 2.4.1. (Jensen Eşitsizliğinin Ayrık Durumu): I üzerinde reel değerli f fonksiyonu, eğer $x_1,...,x_n \in I$ ve $\lambda_1,...,\lambda_n \in [0,1]$ için $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ olmak üzere

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \tag{2.4.1}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa konvekstir (Pachpatte 2005).

Teorem 2.4.2. (Jensen Eşitsizliği): $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, j–konveks fonksiyon olsun. Herhangi $x_1,...,x_n \in I$ noktaları, negatif olmayan $r_1,...,r_n$ rasyonel sayıları ve $r_1 + ... + r_n = 1$ için

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) \tag{2.4.2}$$

eşitsizliği vardır (Pachpatte 2005).

Teorem 2.4.3. (Jensen İntegral Eşitsizliği): $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon, $h : I \to (0,\infty)$ ve $u : I \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Böylece

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)\,dt}{\int_a^b h(t)\,dt}\right) \le \frac{\int_a^b h(t)\,f\left(u(t)\right)dt}{\int_a^b h(t)\,dt} \tag{2.4.3}$$

eşitsizliği vardır (Pachpatte 2005).

Sonuç 2.4.4. $f: I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Böylece f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ ve $\forall h > 0$ için $x+h,\ x-h \in I$ olmak üzere

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \ge 0 \tag{2.4.4}$$

olmasıdır (Niculescu and Persson 2006).

Hem Teorem 2.4.2 hem de Sonuç 2.4.4 durumları kesin konvekslik durumu için geçerlidir. Sonuç 2.4.4 kullanılarak bazı çok yaygın fonksiyonların kesin konveks olma durumları hızlı bir şekilde kontrol edilebilir. Örneğin

$$a,b > 0,\ a \ne b \text{ için } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

olduğundan, $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall h > 0$ için

$$e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^{x} > 0$$

yazılır. Bu ifadenin bir sonucu olarak aşağıdaki iyi bilinen aritmetik ortalama–geometrik ortalama eşitsizliği verilebilir.

Teorem 2.4.5. (Ağırlıklı AM–GM Eşitsizliği): Eğer $x_1,\dots,x_n \in (0,\infty)$ ve $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in (0,1)$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ ise $x_1 = \dots = x_n$ olmaksızın

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k > x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} \tag{2.4.5}$$

eşitsizliği vardır. Bu son eşitsizlikte x_k yerine $1/x_k$ yazılırsa (aynı x_k ve λ_k hipotezleri altında) $x_1 = \dots = x_n$ olmaksızın

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} > 1\Big/\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x_k} \tag{2.4.6}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe ağırlıklı geometrik ortalama – harmonik ortalama eşitsizliği denir (Niculescu and Persson 2006).

Yukarıdaki teorem ve özellikte $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ olarak ifade edilirse $x_1,...,x_n \in (0,\infty)$ pozitif sayı ailesi için $x_1 = ... = x_n$ olmaksızın

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 ... x_n} > \frac{n}{\left(\dfrac{1}{x_1} + ... + \dfrac{1}{x_n}\right)} \tag{2.4.7}$$

eşitsizliği yazılabilir (Niculescu and Persson 2006).

Teorem 2.4.6. (**Popoviciu Eşitsizliği**): $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y, z \in I$ için

$$\begin{aligned} &\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \\ &\qquad \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. $x = y = z$ olması durumunda eşitlik elde edilir (Niculescu and Persson 2006).

Örnek 2.4.7. Aşağıdaki fonksiyonlar kesin konvekstir.

a) $(0,\infty)$ aralığı üzerinde $-\log x$ ve $x \log x$

b) $p > 1$ olmak üzere $[0,\infty)$ üzerinde x^p , $p < 0$ olmak üzere $(0,\infty)$ üzerinde x^p,
$0 < p < 1$ olmak üzere $[0,\infty)$ üzerinde $-x^p$

c) $p > 1$ olmak üzere $[0,\infty)$ üzerinde $(1 + x^p)^{1/p}$ (Niculescu and Persson 2006).

Teorem 2.4.8. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) : $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Eğer f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f(x)|^p$ ve $|g(x)|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise bu durumda

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \tag{2.4.9}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu yalnızca $A|f(x)|^p = B|g(x)|^q$ durumu için sağlanır, burada *A* ve *B* birer sabittir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.4.9. I bir açık aralık olsun. Bir reel değerli f fonksiyonunun I da konveks olması için gerek ve yeter şart, f nin sürekli ve $f''(x)\ge 0$ olmasıdır (Niculescu and Persson 2006).

Sonuç 2.4.10. (İkinci Türev Testi): $f: I \to \mathbb{R}$ iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Böylece

1) f nin konveks olması için gerek yeter şart $f''(x)\ge 0$ olmasıdır.

2) f nin kesin konveks olması için gerek yeter şart $f''(x)\ge 0$ olması ve f'' nin sıfır olduğu kümenin pozitif uzunluklu aralıklar ihtiva etmesidir (Niculescu and Persson 2006).

Örnek 2.4.11. Aşağıda verilen fonksiyonlar konvekstir. Bu durum ikinci türev testi uygulanarak görülebilir.

a) $a\ge 1$ için $\mathbb{R}$ üzerinde $\log\left(\left(e^{ax}-1\right)/\left(e^{x}-1\right)\right)$ ve $\log\left(\sinh ax/\sinh x\right)$

b) $b\ge a\ge 1$ için $(0,\pi/2)$ üzerinde $b\log\cos\left(x/\sqrt{b}\right)-a\log\cos\left(x/\sqrt{a}\right)$ (Niculescu and Persson 2006).

2.5. Literatürde Sık Kullanılan Ortalamalar

$a,\ b$ iki pozitif reel sayı olmak üzere;

i. Genel ortalama:

$$M = M_p(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}, \quad x_i \geq 0 \tag{2.5.1}$$

ii. Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.5.2}$$

iii. Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.5.3}$$

iv. Harmonik ortalama:

$$H = H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.5.4}$$

v. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \end{cases} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.5.5}$$

vi. İdentrik ortalama:

$$I = I(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.5.6}$$

vii. Genelleştirilmiş logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}, & a \neq b \end{cases} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.5.7}$$

viii. Kuadratik ortalama:

$$K = K(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad a,b \geq 0 \tag{2.5.8}$$

ortalamaları vardır.

Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde iyi bilinmektedir:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A\,. \tag{2.5.9}$$

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_{-1} = L$, $L_0 = I$ ile gösterilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Literatürde Hermite - Hadamard eşitsizliği olarak bilinen, analizin temel eşitsizliklerinden birisi olan bu eşitsizlik 1893 yılında ilk kez J. Hadamard tarafından verildi. İlk çalışıldığı günden bu yana birçok araştırmacı tarafından çeşitli ispatları, genişlemeleri, farklı biçimleri ve güncellemeleri elde edilmektedir. Bunlara ilave olarak bu tezde Hermite - Hadamard eşitsizliğine benzer yeni, kullanışlı integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Lemma 3.1.1. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir

i- f, $[a,b]$ aralığı üzerinde konvekstir

ii- $\forall x, y \in [a,b]$ için $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f\left(tx + (1-t)y\right)$ dönüşümü $[0,1]$ aralığı üzerinde konvekstir (Pecaric and Dragomir 1991).

Teorem 3.1.2. f dönüşümü $[a,b]$ aralığında konveks ise

i- f, (a,b) aralığında süreklidir ve

ii- f, $[a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Teorem 3.1.3. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I , $\mathbb{R}$ de bir aralık $a,b \in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.1}$$

olur (Hadamard 1893).

İspat: f , I üzerinde konveks olduğundan (a,b) aralığında sürekli ve $[a,b]$ aralığında sınırlıdır, dolayısıyla f bu aralıkta integrallenebilirdir. O halde tanımdan her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(ta+(1-t)b\right) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. Bu ifadenin $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt &\leq \int_0^1 \left(tf(a)+(1-t)f(b)\right)dt \\ &= f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

elde edilir bu ise Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Diğer taraftan f , I üzerinde konveks olduğundan $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right] \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt\right] \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

elde edilir. Bu ifadedeki sağ taraftaki ikinci integral de $1-t=s$ yazılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt + \int_0^1 f\left(sa+(1-s)b\right)ds\right]$$
$$= \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt \tag{3.1.6}$$

elde edilir bu ise eşitsizliğin sol tarafıdır. Yukarıda elde edilen (3.1.3) ve (3.1.6) ifadeleri birlikte yazılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.7}$$

olur. (3.1.7) ifadesinde $ta+(1-t)b = x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

A. Lupas 1976 da $t \in [0,1]$ koşulu yerine $p,q > 0$ seçerek $I \supset [a,b]$ üzerinde konveks bir f fonksiyonu ve $v = (pa+qb)/(p+q)$ için

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliğini verdi. Buradaki y seçimi $0 < y \leq \left[(b-a)/(p+q)\right]\min(p,q)$ şeklindedir. (3.1.8) eşitsizliği $p = q = 1,\ y = (b-a)/2$ seçilmesi durumunda bilinen Hadamard eşitsizliğidir.

J. E. Pečarić ve P. R. Beesack'da hipotezdeki aynı şartlar altında Hadamard eşitsizliğine aşağıdaki teoremdeki gibi farklılık getirmişlerdir.

Teorem 3.1.2. Eğer $p,q > 0$, f fonksiyonu $I \supset [a,b]$ üzerinde konveks ve $v = (pa+qb)/(p+q)$ ise

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \le \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt$$
$$\le \frac{1}{2}\left[f(v-y)+f(v+y)\right]$$
$$\le \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \tag{3.1.9}$$

eşitsizliği vardır (Pečarić and Beesack 1986).

İspat: Eğer $0<y\le\left[(b-a)/(p+q)\right]\min(p,q)$ ise bu takdirde $0<p\le q$ ve $0<q<p$ gibi iki duruma dikkat etmek lazım, ikincisi $a\le v-y<v+y\le b$ oluşudur, böylece f, $[v-y,v+y]$ aralığı üzerinde tanımlıdır. Hadamard eşitsizliği üzerinde a, b yerine $v-y,v+y$ ifadeleri yazılırsa

$$f(v) \le \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt \le \frac{1}{2}\left[f(v-y)+f(v+y)\right] \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Konveksliğin tanımını kullanarak $a\le x_1<x_2<x_3\le b$ için

$$f(x_2) \le \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3) \tag{3.1.11}$$

eşitsizliği yazılır, bu eşitsizlikte $x_1=a,\ x_3=b$ yazılırsa

$$f(v-y) \le \frac{b-(v-y)}{b-a}f(a)+\frac{v-y-a}{b-a}f(b) \tag{3.1.12}$$

$$f(v+y) \le \frac{b-(v+y)}{b-a}f(a)+\frac{v+y-a}{b-a}f(b) \tag{3.1.13}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.1.11) – (3.1.13) den

$$
\begin{aligned}
f(v) &\le \frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y} f(t)dt \\
&\le \frac{1}{2}\left[f(v-y) + f(v+y) \right] \\
&\le \frac{1}{2}\left[\frac{b-(v-y)}{b-a} f(a) + \frac{v-y-a}{b-a} f(b) + \frac{b-(v+y)}{b-a} f(a) + \frac{v+y-a}{b-a} f(b) \right] \\
&\le \frac{1}{2}\left[\frac{b-v}{b-a} f(a) + \frac{v-a}{b-a} f(b) \right] \\
&\le \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}
\end{aligned}
$$

olur ve bu ispatı tamamlar.

3.2. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Pachpatte'nin 2003 te yapmış olduğu çalışma iki konveks fonksiyonun çarpımı için Hadamard eşitsizliğinin genişlemesine ait verilebilecek güzel bir örnektir.

Teorem 3.2.1. f ve g, $[a,b]$ aralığı üzerinde reel değerli, negatif olmayan konveks fonksiyonlar ve $M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$, $N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$ olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b), \tag{3.2.1}$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{6}M(a,b) + \frac{1}{3}N(a,b) \tag{3.2.2}$$

eşitsizlikleri vardır (Pachpatte 2003).

Teorem 3.2.2. f ve g, $[a,b]$ üzerinde reel değerli, negatif olmayan konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\frac{3}{2}\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)g\left(tx+(1-t)y\right)dtdydx$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{1}{8}\left[\frac{M(a,b)+N(a,b)}{(b-a)^2}\right], \tag{3.2.3}$$

$$\frac{3}{b-a}\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)g\left(tx+(1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dtdx$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{1}{4}\left(\frac{1+b-a}{b-a}\right)\left[M(a,b)+N(a,b)\right] \tag{3.2.4}$$

eşitsizlikleri vardır. $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ yukarıdaki teoremdeki gibidir (Pachpatte 2003).

Dragomir tarafından konveks fonksiyonlar için yazılan aşağıdaki iki teorem Hadamard eşitsizliğinin modül için bir genişlemesidir.

Teorem 3.2.3. I bir reel sayı aralığı ve $a,b\in I,\ a<b$ için $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafının bir geliştirmesi olan

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$\geq \begin{cases} \left|f(a)-\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx\right|, & f(a)=f(b) \text{ ise} \\ \left|\dfrac{1}{f(b)-f(a)}\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)}|x|dx-\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx\right|, & f(a)\neq f(b) \text{ ise} \end{cases} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği vardır (Dragomir 2001).

Teorem 3.2.4. Yukarıdaki teoremin şartları ile Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\geq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}\right|dx-\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|\geq 0 \tag{3.2.6}$$

eşitsizliği vardır (Dragomir 2001).

Yine Dragomir ve Fitzpatrick tarafından ikinci anlamda *s*–konveks fonksiyonlar için yazılan aşağıdaki Hadamard tipli eşitsizlik genişlemesi de konu için önemlidir.

Teorem 3.2.5. $s \in (0,1)$ olmak üzere $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ ikinci anlamda *s*–konveks bir fonksiyon $a,b \in [0,\infty)$ ve $a<b$ olsun. $f \in L^1([a,b])$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{3.2.7}$$

eşitsizliği vardır (Dragomir and Fitzpatrick 1999).

Kırmacı, Bakula, Özdemir ve Pečarić tarafından *s*–konveks fonksiyonlar için yayınlanmış olan bir dizi eşitsizliklere bakacak olursak, aşağıdaki iki teorem ve uyarı ilgi çekicidir.

Teorem 3.2.6. $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ $a,b \in [0,\infty)$, $a<b$ iki fonksiyon ve $g,\, fg \in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığı üzerinde f negatif olmayan konveks bir fonksiyon, $s \in (0,1)$ için g, $[a,b]$ aralığı üzerinde *s*–konveks bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{s+2}M(a,b) + \frac{1}{(s+1)(s+2)}N(a,b) \tag{3.2.8}$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b) \text{ ve } N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

dır (Kırmacı *et al.* 2007).

Uyarı 3.2.7. Eğer bu son teorem de $x \in [a,b]$ için $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=1$ olarak seçilirse (3.2.7) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir, yani

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx \leq \frac{g(a)+g(b)}{s+2}+\frac{g(a)+g(b)}{(s+1)(s+2)} = \frac{g(a)+g(b)}{s+1} \tag{3.2.9}$$

olur (Kırmacı *et al.* 2007).

Teorem 3.2.8. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ iki fonksiyon ve $f,g,fg\in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $s_1,s_2\in(0,1)$ için $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonu s_1- konveks ve g fonksiyonu s_2-konveks ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \frac{1}{s_1+s_2+1}M(a,b)+B(s_1+1,s_2+1)N(a,b) = \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[M(a,b)+s_1s_2\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2+1)}N(a,b)\right] \tag{3.2.10}$$

eşitsizliği vardır (Kırmacı *et al.* 2007).

Burada $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\forall x,y>0$ dır

Farklı tür konveks fonksiyonlar için Hadamard tipli eşitsizliklere birkaç örnek verecek olursak Dragomir, Pečarić ve Persson'un 1995 te Godunova – Levin ve P – fonksiyon sınıfları için yapmış olduğu çalışma konu için verilebilecek iyi bir örnektir.

Teorem 3.2.9. $f\in Q(I)$, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f\in L^1([a,b])$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{3.2.11}$$

eşitsizliği vardır (Dragomir *et al.* 1995).

Teorem 3.2.10. $f\in P(I)$, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f\in L^1([a,b])$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq 2\left[f(a)+f(b)\right] \tag{3.2.12}$$

eşitsizliği vardır (Dragomir *et al*. 1995).

Bu çalışmaların yanı sıra Sarıkaya, Sağlam ve Yıldırım tarafından 2008'de *h*–konveks fonksiyonlar için aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır.

Teorem 3.2.11. $f\in SX(h_1,I)$, $g\in SX(h_2,I)$, $a,b\in I$, $a<b$ ve $fg\in L^1([a,b])$, $h_1h_2\in L^1([0,1])$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\ &\leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\,dt+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$, $N(a,b)$ yukarıdaki gibidir (Sarıkaya *et al*. 2008).

Teorem 3.2.12. $f\in SX(h_1,I)$, $g\in SX(h_2,I)$, $a,b\in I$, $a<b$ ve $fg\in L^1([a,b])$, $h_1h_2\in L^1([0,1])$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\ &\leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\,dt+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$, $N(a,b)$ yukarıdaki gibidir (Sarıkaya *et al*. 2008).

Lemma 3.2.13. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L^1([a,b])$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)\,f'\big(ta+(1-t)b\big)\,dt \tag{3.2.15}$$

eşitliği vardır (Dragomir and Agarwal 1998).

Bu lemmayı kullanarak Pearce ve Pečarić tarafından aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.2.14. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir dönüşüm $a,b \in I$ ve $a<b$ olsun. Bu durumda $q \geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.16}$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)^q|}{2}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{3.2.17}$$

$|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konkav bir dönüşüm ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{3.2.18}$$

eşitsizlikleri vardır (Pearce and Pečarić 2000).

Teorem 3.2.15. $I^o \subseteq [0,\infty)$ olmak üzere $f: I^o \to \mathbb{R}$ iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon $a,b \in I^o$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. $m \in (0,1]$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $|f''|^q$, $[a,b]$ üzerinde *m*–konveks bir dönüşüm ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{12}\left[\frac{|f''(a)|^q+m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{3.2.19}$$

eşitsizliği vardır (Özdemir *et al*. 2010).

Teorem 3.2.16. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir (α,m)–konveks fonksiyon olsun. $(\alpha,m)\in(0,1]^2$, $0\le a<b<\infty$ ve $f\in L^1([a,b])$ ise

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\le\min\left\{\frac{f(a)+\alpha mf\left(\frac{b}{m}\right)}{\alpha+1},\frac{f(b)+\alpha mf\left(\frac{a}{m}\right)}{\alpha+1}\right\}\qquad(3.2.20)$$

eşitsizliği vardır (Set *et al*. 2009).

Teorem 3.2.17. $f\in SX(h,I)$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir, $\frac{a+b}{2}$ de simetrik bir fonksiyon ve $a,b\in I,\ a<b$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)g(x)dx\\&\qquad\le\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b\left(h\left(\frac{b-x}{b-a}\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right)g(x)dx\end{aligned}\qquad(3.2.21)$$

eşitsizliği vardır (Sarıkaya *et al*. 2010).

Teorem 3.2.18. $fg\in SX(ch,I)$, $a,b\in I$, $a<b$, $h(1/2)\neq0$ ve $fg\in L^1[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{2ch(1/2)}(fg)\left(\frac{a+b}{2}\right)&\le\frac{1}{b-a}\int_a^b(fg)(x)dx\\&\le c\left[(fg)(a)+(fg)(b)\right]\int_0^1 h(\alpha)d\alpha\end{aligned}\qquad(3.2.22)$$

eşitsizliği vardır. Burada c uygun pozitif bir sayıdır (Sarıkaya *et al*. 2010).

Dragomir ve Mond tarafından yazılan log–konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\left[f(x)\right]dx\right]$$
$$\le \frac{1}{b-a}\int_a^b G\left(f(x), f(a+b-x)\right)dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (3.2.23)$$
$$\le L\left(f(a), f(b)\right)\le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Burada a, b pozitif reel sayılar için $G(a,b)=\sqrt{ab}$ geometrik ortalamayı ve $L(a,b)=\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}$ logaritmik ortalamayı göstermektedir (Dragomir and Mond 1998).

İki tane log–konveks fonksiyonun çarpımı için Hadamard tipli eşitsizlik Pachpatte tarafından,

$$\frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \left[f(a)+f(b)\right]L\left(f(a), f(b)\right)$$
$$+\left[g(a)+g(b)\right]L\left(g(a), g(b)\right) \qquad (3.2.24)$$

biçiminde ifade edilmektedir (Pachpatte 2004).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmada elde edilen bazı bulgular alt başlıklar halinde verilecektir. İlk olarak 3. Bölümde ifade edilen konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğine ilişkin yeni eşitsizlikler teşkil edilecektir, ikinci olarak 2. Bölümde ifade edilen farklı türden konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğinin genişlemeleri üzerine yapılan yeni eşitsizlikler verilecektir.

4.1. Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

(3.1.1) ifadesindeki eşitsizlik literatürde Hadamard eşitsizliği olarak bilinmekte olup $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bütün konveks fonksiyonlar için sağlanmaktadır. Analizde çok kullanışlı olan eşitsizliklerden birisi olan Hadamard eşitsizliği ortaya çıktığından bu güne kadar sayısız çalışmaya konu olmuş ve üzerine yeni ispatları, güncellemeleri, genelleştirmeleri, genişlemeleri ve benzeri çalışmaları açısından cazip bir konu olarak güncelliğini korumaktadır. Bu çalışmadaki asıl amacımız Hadamard tipli integral eşitsizlikleri teşkil etmektir. Buradaki teoremlerin ispatlarında oldukça elementer işlemler kullanılmıştır.

Teorem 4.1.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir konveks fonksiyon olsun. Böylece

$$\begin{aligned}&\frac{2f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)\,f(x)\,dx+\frac{2f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)\,f(x)\,dx\\ &\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx+\frac{\psi(a,b)}{3}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\psi(a,b)=f^2(a)+f(a)\,f(b)+f^2(b)$ dir.

İspat: f, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan $t\in[0,1]$ için

$$f\big(ta+(1-t)b\big)\le tf(a)+(1-t)\,f(b)\tag{4.1.2}$$

yazılabilir. $a,b\ge 0$ olmak üzere $G(a,b)\le A(a,b)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&2\,f\big(ta+(1-t)b\big)\big[tf(a)+(1-t)\,f(b)\big]\\ &\le f^2\big(ta+(1-t)b\big)+t^2 f^2(a)+2t(1-t)\,f(a)\,f(b)+(1-t)^2 f^2(b)\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

yazılabilir, eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}&2\,f(a)tf\big(ta+(1-t)b\big)+2\,f(b)(1-t)\,f\big(ta+(1-t)b\big)\\ &\le f^2\big(ta+(1-t)b\big)+t^2 f^2(a)+2t(1-t)\,f(a)\,f(b)+(1-t)^2 f^2(b)\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

olur. Lemma 3.1.1.’den $f\big(ta+(1-t)b\big)$ dönüşümünün $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks olduğu kullanılarak (4.1.4) eşitsizliğinin $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınabilir, yani

$$\begin{aligned}
&2f(a)\int_0^1 tf\left(ta+(1-t)b\right)dt+2f(b)\int_0^1 (1-t)\,f\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
&\le \int_0^1 f^2\left(ta+(1-t)b\right)dt+f^2(a)\int_0^1 t^2dt \qquad (4.1.5)\\
&\quad +2f(a)f(b)\int_0^1 t(1-t)dt+f^2(b)\int_0^1 (1-t)^2dt
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikteki her bir integral ayrı ayrı hesaplanır ve $ta+(1-t)b=x$, $(a-b)dt=dx$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 tf\left(ta+(1-t)b\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(x)dx=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)\,f(x)dx \qquad (4.1.6)$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_0^1 (1-t)\,f\left(ta+(1-t)b\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{a-x}{a-b}f(x)dx=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)\,f(x)dx \qquad (4.1.7)$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f^2\left(ta+(1-t)b\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx \\
&\int_0^1 t^2dt=\int_0^1 (1-t)^2dt=\frac{1}{3},\quad \int_0^1 t(1-t)dt=\frac{1}{6}
\end{aligned} \qquad (4.1.8)$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu (4.1.6-8) hesaplamaları (4.1.5) ifadesinde yerlerine yazılırsa (4.1.1) eşitsizliği elde edilir, böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir konveks bir fonksiyon $a<b$ ve $f(x)\neq 0$ olsun. Böylece

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{4f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\int_a^b f^2(x)dx+\frac{\varphi(a,b)}{24f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \qquad (4.1.9)$$

eşitsizliği vardır, burada $\varphi(a,b)=f^2(a)+4f(a)f(b)+f^2(b)$ dir.

İspat: f, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan $t\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\
&\leq \frac{f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)}{2}
\end{aligned} \tag{4.1.10}
$$

yazılır. Yukarıda (4.1.1) eşitsizliğinin ispatındaki gibi aritmetik ortalama–geometrik ortalama eşitsizliği kullanılırsa, (Burada aritmetik ortalama – geometrik ortalama eşitsizliği düzenlenirse $ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ eşitsizliği elde edilir. Ya da direkt olarak kuadratik ortalama – geometrik ortalama eşitsizliğinden de hareket edilebilir.)

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{f\left(ta+(1-t)b\right)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{f\left((1-t)a+tb\right)}{2} \\
& \leq \frac{f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}+\frac{f^2\left(ta+(1-t)b\right)}{8} \\
& \quad +\frac{2f\left(ta+(1-t)b\right)f\left((1-t)a+tb\right)}{8}+\frac{f^2\left((1-t)a+tb\right)}{8}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı 2 ile çarpılır ve f nin konveksliğinin tanımı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)f\left((1-t)a+tb\right) \\
& \leq f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f^2\left(ta+(1-t)b\right)}{4} \\
& \quad +\frac{f\left(ta+(1-t)b\right)f\left((1-t)a+tb\right)}{2}+\frac{f^2\left((1-t)a+tb\right)}{4}
\end{aligned}
$$

$$\le f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f^2\left(ta+(1-t)b\right)}{4}$$
$$+\frac{\left[tf(a)+(1-t)f(b)\right]\left[(1-t)f(a)+tf(b)\right]}{2}+\frac{f^2\left((1-t)a+tb\right)}{4}$$
$$= f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f^2\left(ta+(1-t)b\right)}{4} \tag{4.1.11}$$
$$+\frac{t(1-t)\left[f^2(a)+f^2(b)\right]+\left[t^2+(1-t)^2\right]f(a)f(b)}{2}$$
$$+\frac{f^2\left((1-t)a+tb\right)}{4}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığı üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt$$
$$\le f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 dt+\frac{1}{4}\int_0^1 f^2\left(ta+(1-t)b\right)dt+\frac{1}{4}\int_0^1 f^2\left((1-t)a+tb\right)dt \tag{4.1.12}$$
$$+\frac{f^2(a)+f^2(b)}{2}\int_0^1 t(1-t)\,dt+\frac{f(a)f(b)}{2}\int_0^1\left(t^2+(1-t)^2\right)dt$$

ve

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt=\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_0^1 t(1-t)\,dt=\frac{1}{6},\qquad \int_0^1\left(t^2+(1-t)^2\right)dt=\frac{2}{3} \tag{4.1.13}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. (4.1.13) ifadesindeki değerler (4.1.12) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\le f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f^2(x)\,dx+\frac{f^2(a)+f^2(b)}{12}+\frac{f(a)f(b)}{3} \tag{4.1.14}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki tarafı $2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ile bölünürse (4.1.9) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.1.3. Eğer (4.1.1) ve (4.1.9) eşitsizliklerinde $a=0$, $b=1$ ve $f(x)=x$ konveks fonksiyonu olarak seçilirse (4.1.1) ve (4.1.9) ifadelerinin tam olarak eşitliklere dönüştüğü görülebilir.

Teorem 4.1.4. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir konveks fonksiyon ve $t\in[0,1]$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}&\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)\left(tf(x)+(1-t)f(y)\right)dtdydx\\&\le\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dtdydx\\&\quad+\frac{2}{3(b-a)}\int_a^b f^2(x)dx+\frac{\Psi(a,b)}{12}\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\Psi(a,b)=f^2(a)+2f(a)f(b)+f^2(b)$ dir.

İspat: f, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan $x,y\in[a,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le tf(x)+(1-t)f(y)\tag{4.1.16}$$

yazılabilir. $a,b\ge 0$ için $G(a,b)\le A(a,b)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&2f\left(tx+(1-t)y\right)\left[tf(x)+(1-t)f(y)\right]\\&\le f^2\left(tx+(1-t)y\right)+t^2f^2(x)+2t(1-t)f(x)f(y)+(1-t)^2f^2(y)\end{aligned}\tag{4.1.17}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinde *t* ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)\left(tf(x)+(1-t)f(y)\right)dt\\&\le\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dt+\int_0^1 t^2f^2(x)dt\\&\quad+2\int_0^1 t(1-t)f(x)f(y)dt+\int_0^1(1-t)^2f^2(y)dt\\&=\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dt+\frac{f^2(x)+f(x)f(y)+f^2(y)}{3}\end{aligned}\tag{4.1.18}$$

elde edilir. (4.1.18) eşitsizliğinin her iki tarafının $[a,b]^2$ üzerinden x ve y ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&2\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)\left(tf(x)+(1-t)f(y)\right)dtdydx \\
&\leq \int_a^b\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dtdydx+\frac{b-a}{3}\int_a^b f^2(x)dx \\
&+\frac{1}{3}\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)dydx+\frac{b-a}{3}\int_a^b f^2(y)dy \qquad (4.1.19)\\
&\leq \int_a^b\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dtdydx+\frac{2(b-a)}{3}\int_a^b f^2(x)dx \\
&+\frac{1}{3}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b f(y)dy\right)
\end{aligned}$$

yazılır. Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı (4.1.19) eşitsizliğinin sağ tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&2\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)\left(tf(x)+(1-t)f(y)\right)dtdydx \\
&\leq \int_a^b\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dtdydx+\frac{2(b-a)}{3}\int_a^b f^2(x)dx \\
&+\frac{1}{3}(b-a)^2\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) \\
&=\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dtdydx+\frac{2(b-a)}{3}\int_a^b f^2(x)dx \qquad (4.1.20)\\
&+\frac{1}{12}\left(f^2(a)+2f(a)f(b)+f^2(b)\right)(b-a)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{(b-a)^2}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)\left(tf(x)+(1-t)f(y)\right)dtdydx \\
&\leq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)y\right)dtdydx+\frac{2}{3(b-a)}\int_a^b f^2(x)dx \qquad (4.1.21)\\
&+\frac{1}{12}\left(f^2(a)+2f(a)f(b)+f^2(b)\right)
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir konveks fonksiyon ve $t\in[0,1]$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}&\frac{2}{b-a}\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\left(tf(x)+(1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dtdx\\&\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dtdx+\frac{\Psi(a,b)}{12}(b-a+2)\end{aligned}\tag{4.1.22}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\Psi(a,b)=f^2(a)+2f(a)f(b)+f^2(b)$ dir.

İspat: f, $[a,b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan konveks bir fonksiyon olduğundan, her $x,y\in[a,b]$ ve her $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\le tf(x)+(1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\tag{4.1.23}$$

yazılabilir. $a,b\ge 0$ için $G(a,b)\le A(a,b)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&2f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\left[tf(x)+(1-t)f(\frac{a+b}{2})\right]\\&\le f^2\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+t^2f^2(x)\\&\quad+2t(1-t)f(x)f(\frac{a+b}{2})+(1-t)^2f^2(\frac{a+b}{2})\end{aligned}\tag{4.1.24}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığı üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\left[tf(x)+(1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dt\\&\le\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt+f^2(x)\int_0^1 t^2dt\\&\quad+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(x)\int_0^1 t(1-t)dt+f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1(1-t)^2\,dt\\&=\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt\\&\quad+\frac{1}{3}\left\{f^2(x)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(x)+f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}\end{aligned}\tag{4.1.25}$$

olur. (4.1.25) eşitsizliğinin her iki tarafının $[a,b]$ üzerinden x e göre integrali alınır ve Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı, bu eşitsizliğin sağ tarafını daha da büyütmek için kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&2\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\left[tf(x)+(1-t)\,f(\frac{a+b}{2})\right]dtdx \\
&\leq \int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dtdx \\
&\quad+\frac{1}{3}\left\{\int_a^b f^2(x)dx+f(\frac{a+b}{2})\int_a^b f(x)dx+(b-a)\,f^2(\frac{a+b}{2})\right\} \\
&\leq \int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dtdx \\
&+\frac{1}{3}(b-a)^2\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)^2 \\
&+\frac{1}{3}\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{(b-a)}{3}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)^2 \\
&=\int_a^b\int_0^1 f^2\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dtdx \\
&+\frac{\Psi(a,b)}{12}(b-a)(b-a+2)
\end{aligned}
\tag{4.1.26}
$$

elde edilir. Son olarak (4.1.26) eşitsizliğinin her iki yanı $(b-a)$ ile bölünür ve düzenleme yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.1.6. Eğer f, $[a,b]$ aralığı üzerinde reel değerli, negatif olmayan konkav bir fonksiyon olarak seçilirse, (4.1.1)-(4.1.9)-(4.1.15) ve (4.1.22) eşitsizlikleri yön değiştirir.

4.2. Konveks Fonksiyonlar için Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Literatürde iyi bilinen ve matematiğin sayılar ve olasılık teorisi başta olmak üzere, istatistik ve fizik gibi birçok bilim dalında sıkça kullanılan eşitsizliklerden birisi de Chebyshev'in eşitsizliğidir.

Teorem 4.2.1. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon $0\le a<b<\infty$ ve $f,g,\ fg\in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında f ve g azalmayan ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{M(a,b)}{3}+\frac{N(a,b)}{6}\\
&\ge\frac{g(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)f(x)dx+\frac{g(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)f(x)dx\\
&\quad+\frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)g(x)dx+\frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)g(x)dx
\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ ve $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ dır.

İspat: f ve g negatif olmayan konveks fonksiyonlar olmak üzere her $t\in[0,1]$ için

$$f\big(ta+(1-t)b\big)\le tf(a)+(1-t)f(b)$$
$$g\big(ta+(1-t)b\big)\le tg(a)+(1-t)g(b)$$

eşitsizlikleri vardır. Chebyshev eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big\{f\big(ta+(1-t)b\big)g\big(ta+(1-t)b\big)+\{tf(a)+(1-t)f(b)\}\{tg(a)+(1-t)g(b)\}\Big\}\\
&\ge\frac{1}{4}\Big\{\big\{f\big(ta+(1-t)b\big)+tf(a)+(1-t)f(b)\big\}.\big\{g\big(ta+(1-t)b\big)+tg(a)+(1-t)g(b)\big\}\Big\}\\
&\ge\frac{1}{2}\Big\{f\big(ta+(1-t)b\big)\{tg(a)+(1-t)g(b)\}+g\big(ta+(1-t)b\big)\{tf(a)+(1-t)f(b)\}\Big\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu çift eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&2\Big\{f\big(ta+(1-t)b\big)g\big(ta+(1-t)b\big)\\
&\quad+t^2f(a)g(a)+t(1-t)\big[f(a)g(b)+f(b)g(a)\big]+(1-t)^2f(b)g(b)\Big\}\\
&\ge f\big(ta+(1-t)b\big)g\big(ta+(1-t)b\big)+tg(a)f\big(ta+(1-t)b\big)\\
&\quad+(1-t)g(b)f\big(ta+(1-t)b\big)\\
&\quad+tf(a)g\big(ta+(1-t)b\big)+t^2f(a)g(a)+t(1-t)f(a)g(b)\\
&\quad+(1-t)f(b)g\big(ta+(1-t)b\big)+t(1-t)f(b)g(a)+(1-t)^2f(b)g(b)\\
&\ge 2\Big\{tg(a)f\big(ta+(1-t)b\big)+(1-t)g(b)f\big(ta+(1-t)b\big)\\
&\quad+tf(a)g\big(ta+(1-t)b\big)+(1-t)f(b)g\big(ta+(1-t)b\big)\Big\}
\end{aligned}$$

olur. Bu çift eşitsizlik için aşağıdaki üç durum vardır.

1. Durum: Eşitsizliğin sağ tarafı için;

$$\begin{aligned}
& f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+tg(a)f\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad +(1-t)g(b)f\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad +tf(a)g\left(ta+(1-t)b\right)+t^2 f(a)g(a)+t(1-t)f(a)g(b) \\
&\quad +(1-t)f(b)g\left(ta+(1-t)b\right)+t(1-t)f(b)g(a)+(1-t)^2 f(b)g(b) \\
& \geq 2\left\{tg(a)f\left(ta+(1-t)b\right)+(1-t)g(b)f\left(ta+(1-t)b\right)\right. \\
&\quad \left.+tf(a)g\left(ta+(1-t)b\right)+(1-t)f(b)g\left(ta+(1-t)b\right)\right\}
\end{aligned}$$

ifadesinden,

$$\begin{aligned}
& f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad +t^2 f(a)g(a)+t(1-t)f(a)g(b) \\
&\quad +t(1-t)f(b)g(a)+(1-t)^2 f(b)g(b) \\
& \geq tg(a)f\left(ta+(1-t)b\right)+(1-t)g(b)f\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad +tf(a)g\left(ta+(1-t)b\right)+(1-t)f(b)g\left(ta+(1-t)b\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizliğin her iki yanının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
&\quad + f(a)g(a)\int_0^1 t^2 dt + f(a)g(b)\int_0^1 t(1-t)\,dt \\
&\quad + f(b)g(a)\int_0^1 t(1-t)\,dt + f(b)g(b)\int_0^1 (1-t)^2\,dt \\
& \geq g(a)\int_0^1 tf\left(ta+(1-t)b\right)dt + g(b)\int_0^1 (1-t)f\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
&\quad + f(a)\int_0^1 tg\left(ta+(1-t)b\right)dt + f(b)\int_0^1 (1-t)g\left(ta+(1-t)b\right)dt
\end{aligned}$$

olur. $x=ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{M(a,b)}{3}+\frac{N(a,b)}{6}$$
$$\geq \frac{g(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)f(x)dx+\frac{g(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)f(x)dx$$
$$+\frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)g(x)dx+\frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)g(x)dx$$

elde edilir.

2. Durum: Eşitsizliğin sol tarafı için;

$$2\{f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)$$
$$+t^2 f(a)g(a)+t(1-t)[f(a)g(b)+f(b)g(a)]+(1-t)^2 f(b)g(b)\}$$
$$\geq f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+tg(a)f(ta+(1-t)b)$$
$$+(1-t)g(b)f(ta+(1-t)b)$$
$$+tf(a)g(ta+(1-t)b)+t^2 f(a)g(a)+t(1-t)f(a)g(b)$$
$$+(1-t)f(b)g(ta+(1-t)b)+t(1-t)f(b)g(a)+(1-t)^2 f(b)g(b)$$

ifadesinden,

$$f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+t^2 f(a)g(a)$$
$$+t(1-t)[f(a)g(b)+f(b)g(a)]+(1-t)^2 f(b)g(b)$$
$$\geq tg(a)f(ta+(1-t)b)+(1-t)g(b)f(ta+(1-t)b)$$
$$+tf(a)g(ta+(1-t)b)+(1-t)f(b)g(ta+(1-t)b)$$

eşitsizliği elde edilir ki buradan da aynı süreç neticesinde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{M(a,b)}{3}+\frac{N(a,b)}{6}$$
$$\geq \frac{g(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)f(x)dx+\frac{g(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)f(x)dx$$
$$+\frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)g(x)dx+\frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)g(x)dx$$

elde edilir.

3. Durum:

$$
\begin{aligned}
&2\Big\{ f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad + t^2 f(a)g(a) + t(1-t)\left[f(a)g(b) + f(b)g(a)\right] + (1-t)^2 f(b)g(b)\Big\} \\
&\geq 2\Big\{ tg(a)f\left(ta+(1-t)b\right) + (1-t)g(b)f\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad + tf(a)g\left(ta+(1-t)b\right) + (1-t)f(b)g\left(ta+(1-t)b\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

ifadesinden,

$$
\begin{aligned}
&f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right) + t^2 f(a)g(a) \\
&\quad + t(1-t)\left[f(a)g(b) + f(b)g(a)\right] + (1-t)^2 f(b)g(b) \\
&\geq tg(a)f\left(ta+(1-t)b\right) + (1-t)g(b)f\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad + tf(a)g\left(ta+(1-t)b\right) + (1-t)f(b)g\left(ta+(1-t)b\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ki buradan da aynı süreç neticesinde

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{M(a,b)}{3} + \frac{N(a,b)}{6} \\
&\geq \frac{g(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)f(x)dx + \frac{g(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)f(x)dx \\
&\quad + \frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)g(x)dx + \frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)g(x)dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.2. Teorem 4.2.1 de $f(x) = g(x)$ olarak seçilirse Teorem 4.1.1 deki

$$
\begin{aligned}
&\frac{2f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)f(x)dx + \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)f(x)dx \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx + \frac{\psi(a,b)}{3}
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\psi(a,b) = f^2(a) + f(a)f(b) + f^2(b)$ dir.

Teorem 4.2.3. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $0 \le a < b < \infty$ ve $f, g, fg \in L^1([a,b])$ olsun. Eğer f konveks fonksiyonu ve $g \in P(I)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde azalmayan ve negatif olmayan fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \frac{M(a,b)+N(a,b)}{2} \\
&\ge \frac{g(a)+g(b)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)g(x)\,dx + \frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)g(x)\,dx
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.2.1 deki gibidir.

İspat: f konveks fonksiyonu ve $g \in P(I)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde azalmayan ve negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
f\left(ta+(1-t)b\right) &\le tf(a)+(1-t)f(b) \\
g\left(ta+(1-t)b\right) &\le g(a)+g(b)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. Yine Chebyshev eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{ f\left(ta+(1-t)b\right) g\left(ta+(1-t)b\right) + \left\{tf(a)+(1-t)f(b)\right\}\left\{g(a)+g(b)\right\}\right\} \\
&\ge \frac{1}{4}\left\{\left\{ f\left(ta+(1-t)b\right) + tf(a)+(1-t)f(b)\right\}.\left\{ g\left(ta+(1-t)b\right) + g(a)+g(b)\right\}\right\} \\
&\ge \frac{1}{2}\left\{ f\left(ta+(1-t)b\right)\left\{g(a)+g(b)\right\} + g\left(ta+(1-t)b\right)\left\{tf(a)+(1-t)f(b)\right\}\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu çift eşitsizlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&2\left\{ f\left(ta+(1-t)b\right) g\left(ta+(1-t)b\right)\right. \\
&\quad \left. + tf(a)g(a) + tf(a)g(b) + (1-t)f(b)g(a) + (1-t)f(b)g(b)\right\} \\
&\ge f\left(ta+(1-t)b\right) g\left(ta+(1-t)b\right) + g(a) f\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad + g(b) f\left(ta+(1-t)b\right) \\
&\quad + tf(a) g\left(ta+(1-t)b\right) + tf(a)g(a) + tf(a)g(b) \\
&\quad + (1-t)f(b) g\left(ta+(1-t)b\right) + (1-t)f(b)g(a) + (1-t)f(b)g(b) \\
&\ge 2\left\{ g(a) f\left(ta+(1-t)b\right) + g(b) f\left(ta+(1-t)b\right)\right. \\
&\quad \left. + tf(a) g\left(ta+(1-t)b\right) + (1-t)f(b) g\left(ta+(1-t)b\right)\right\}
\end{aligned}$$

olur. Bu çift eşitsizlik düzenlenirse önceki teoremin ispatına benzer şekilde her üç durumda da

$$\begin{aligned} & f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right) \\ & \quad +tf(a)g(a)+tf(a)g(b) \\ & \quad +(1-t)\,f(b)g(a)+(1-t)\,f(b)g(b) \\ & \geq g(a)f\left(ta+(1-t)b\right)+g(b)f\left(ta+(1-t)b\right) \\ & \quad +tf(a)g\left(ta+(1-t)b\right)+(1-t)\,f(b)g\left(ta+(1-t)b\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)dt \\ & \quad +\{f(a)g(a)+f(a)g(b)\}\int_0^1 t\,dt+\{f(b)g(a)+f(b)g(b)\}\int_0^1(1-t)\,dt \\ & \geq g(a)\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+g(b)\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt \\ & \quad +f(a)\int_0^1 tg\left(ta+(1-t)b\right)dt+f(b)\int_0^1(1-t)\,g\left(ta+(1-t)b\right)dt \end{aligned}$$

yazılır. $x=ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\frac{M(a,b)+N(a,b)}{2} \\ & \geq \frac{g(a)+g(b)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(b-x)\,g(x)\,dx+\frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b(x-a)\,g(x)\,dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.3. *s* – Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Lemma 4.3.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir.

i- f, $[a,b]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda *s*–konvekstir,

ii- $\forall x, y \in [a,b]$ ve $s \in (0,1]$ için $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(tx + (1-t)y)$ dönüşümü $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda *s*–konvekstir.

İspat: "i$\Rightarrow$ii" $x, y \in [a,b]$ olmak üzere $t_1, t_2 \in [0,1]$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ için $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) &= f\left[(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)x + (1 - \lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2)y\right] \\ &= f\left[(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)x + \left(\lambda_1(1-t_1) + \lambda_2(1-t_2)\right)y\right] \\ &= f\left[\lambda_1\left(t_1 x + (1-t_1)y\right) + \lambda_2\left(t_2 x + (1-t_2)y\right)\right] \\ &\leq \lambda_1^s f\left(t_1 x + (1-t_1)y\right) + \lambda_2^s f\left(t_2 x + (1-t_2)y\right) \\ &= \lambda_1^s g(t_1) + \lambda_2^s g(t_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani g fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde ikinci anlamda *s*–konvekstir.

"ii$\Rightarrow$i" $x, y \in [a,b]$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ için $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) &= f\left(\lambda_1 x + (1-\lambda_1)y\right) \\ &= g(\lambda_1.1 + \lambda_2.0) \\ &\leq \lambda_1^s g(1) + \lambda_2^s g(0) \\ &\leq \lambda_1^s f(x) + \lambda_2^s f(y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Yani f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda *s*–konvekstir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, ikinci anlamda *s*–konveks ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde $t \in [0,1]$ ve $s_1, s_2 \in (0,1]$ için f, s_1-konveks ve g, s_2-konveks ise

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b \int_0^1 f\left(tx + (1-t)y\right) g\left(tx + (1-t)y\right) dt dy dx \\ &\leq \frac{2}{(s_1 + s_2 + 1)(b-a)} \int_a^b f(x) g(x) dx + \frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{2\Gamma(s_1 + s_2 + 2)} \left[M(a,b) + N(a,b)\right] \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$, $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ ve $\forall x,y>0$ için $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ dır.

İspat: $[a,b]$ üzerinde f, s_1-konveks ve g, s_2-konveks olduklarından $x,y\in[a,b]$, $t\in[0,1]$ ve $s_1,s_2\in(0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y)\le t^{s_1}f(x)+(1-t)^{s_1}f(y)$$
$$g(tx+(1-t)y)\le t^{s_2}g(x)+(1-t)^{s_2}g(y)$$

yazılır. f ve g negatif fonksiyonlar olmadığından yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}&f(tx+(1-t)y)g(tx+(1-t)y)\\&\le t^{s_1+s_2}f(x)g(x)+(1-t)^{s_1+s_2}f(y)g(y)\\&\quad+t^{s_1}(1-t)^{s_2}f(x)g(y)+t^{s_2}(1-t)^{s_1}f(y)g(x)\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki yanının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(tx+(1-t)y)g(tx+(1-t)y)dt\\&\le f(x)g(x)\int_0^1 t^{s_1+s_2}dt+f(y)g(y)\int_0^1(1-t)^{s_1+s_2}dt\\&\quad+f(x)g(y)\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}dt+f(y)g(x)\int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_1}dt\\&=\frac{1}{s_1+s_2+1}\left[f(x)g(x)+f(y)g(y)\right]\\&\quad+\beta(s_1+1,s_2+1)f(x)g(y)+\beta(s_2+1,s_1+1)f(y)g(x)\\&=\frac{1}{s_1+s_2+1}\left[f(x)g(x)+f(y)g(y)\right]\\&\quad+\beta(s_1+1,s_2+1)\left[f(x)g(y)+f(y)g(x)\right]\\&=\frac{1}{s_1+s_2+1}\left[f(x)g(x)+f(y)g(y)\right]\\&\quad+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{\Gamma(s_1+s_2+2)}\left[f(x)g(y)+f(y)g(x)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin x ve y ye göre $[a,b]^2$ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\,g(tx+(1-t)y)\,dtdydx\\
&\leq \frac{1}{s_1+s_2+1}\left[\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)\,dydx+\int_a^b\int_a^b f(y)g(y)\,dydx\right]\\
&\quad+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{\Gamma(s_1+s_2+2)}\left[\int_a^b\int_a^b f(x)g(y)\,dydx+\int_a^b\int_a^b f(y)g(x)\,dydx\right]\\
&\leq \frac{1}{s_1+s_2+1}(b-a)\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\int_a^b f(y)g(y)\,dy\right]\\
&\quad+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{\Gamma(s_1+s_2+2)}\left[\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(y)\,dy+\int_a^b f(y)\,dy\int_a^b g(x)\,dx\right]
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizliğin sağ tarafına Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\int_a^b\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\,g(tx+(1-t)y)\,dtdydx\\
&\leq \frac{2(b-a)}{s_1+s_2+1}\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\
&\quad+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{\Gamma(s_1+s_2+2)}(b-a)^2\left[2.\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}\right] \qquad (4.3.2)\\
&\leq \frac{2(b-a)}{s_1+s_2+1}\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\
&\quad+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{2\Gamma(s_1+s_2+2)}(b-a)^2\left[M(a,b)+N(a,b)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.3.3. Eğer Teorem 4.3.2 de $s_1=s_2=1$ olarak seçilirse, (3.2.3) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.4. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, ikinci anlamda *s*–konveks ve integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde her $t\in[0,1]$ ve $s_1,s_2\in(0,1]$ için f, s_1-konveks ve g, s_2-konveks ise

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)g\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dtdx\\&\leq\frac{1}{(s_1+s_2+1)(b-a)}\int_a^b f(x)g(x)dx\\&+\left[\frac{1}{4(s_1+s_2+1)}+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{2\Gamma(s_1+s_2+2)}\right]\left[M(a,b)+N(a,b)\right]\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$, $N(a,b)$ ve Γ fonksiyonu Teorem 4.3.2 deki gibidir.

İspat: $[a,b]$ üzerinde f, s_1-konveks ve g, s_2-konveks olduklarından $x\in[a,b]$, $t\in[0,1]$ ve $s_1,s_2\in(0,1]$ için

$$f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\leq t^{s_1}f(x)+(1-t)^{s_1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$g\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\leq t^{s_2}g(x)+(1-t)^{s_2}g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonları negatif olmadığından yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}&f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)g\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\\&\leq t^{s_1+s_2}f(x)g(x)+(1-t)^{s_1+s_2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&\quad+t^{s_1}(1-t)^{s_2}f(x)g\left(\frac{a+b}{2}\right)+t^{s_2}(1-t)^{s_1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(x)\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden *t* ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)g\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt$$

$$\le f(x)g(x)\int_0^1 t^{s_1+s_2}dt + f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 (1-t)^{s_1+s_2}\,dt$$

$$+ f(x)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}\,dt + f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(x)\int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_1}\,dt$$

$$=\frac{1}{s_1+s_2+1}\left[f(x)g(x)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$+\beta(s_1+1,s_2+1)\,f(x)g\left(\frac{a+b}{2}\right)+\beta(s_2+1,s_1+1)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(x)$$

$$=\frac{1}{s_1+s_2+1}\left[f(x)g(x)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{\Gamma(s_1+s_2+2)}\left[f(x)g\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(x)\right]$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin de $[a,b]$ üzerinden x e göre integrali alınır ve Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı kullanılırsa

$$\int_a^b\int_0^1 f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)g\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dtdx$$

$$\le\frac{1}{s_1+s_2+1}\left[\int_a^b f(x)g(x)dx+(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{\Gamma(s_1+s_2+2)}\left[g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)dx+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx\right]$$

$$\le\frac{1}{s_1+s_2+1}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{(b-a)}{s_1+s_2+1}\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

$$+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{\Gamma(s_1+s_2+2)}\left[2(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{s_1+s_2+1}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{(b-a)}{4(s_1+s_2+1)}\left[M(a,b)+N(a,b)\right]$$
$$+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{2\Gamma(s_1+s_2+2)}(b-a)\left[M(a,b)+N(a,b)\right]$$
$$=\frac{1}{s_1+s_2+1}\int_a^b f(x)g(x)dx$$
$$+\left[\frac{1}{4(s_1+s_2+1)}+\frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{2\Gamma(s_1+s_2+2)}\right](b-a)\left[M(a,b)+N(a,b)\right]$$

elde edilir. Bu son ifadenin her iki tarafı $\frac{1}{b-a}$ ile çarpılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.5. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir iki dönüşüm olsun. Eğer f ve g, $t\in[0,1]$ için $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks iki fonksiyon ise

$$\begin{aligned}&\frac{3}{b-a}\int_a^b\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)g\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)dtdy\\&\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)dy+\frac{1}{2}\left[M(a,b)+N(a,b)\right]\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.3.2 deki gibidir.

İspat: f ve g, $[a,b]$ üzerinde konveks olduklarından $x\in[a,b]$ ve her $t\in[0,1]$ için

$$f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)\le tf\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-t)f(y)$$
$$g\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)\le tg\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-t)g(y)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonları negatif olmadığından

$$
\begin{aligned}
& f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)g\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right) \\
& \le t^2 f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-t)^2 f(y)g(y) \\
& \quad +t(1-t) f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(y)+t(1-t) f(y)g\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)g\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)dt \\
& \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^2 dt+ f(y)g(y)\int_0^1 (1-t)^2 dt \\
& \quad + f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(y)\int_0^1 t(1-t)dt+ f(y)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t(1-t)dt \\
& =\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)+ f(y)g(y)\right] \\
& \quad +\frac{1}{6}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)g(y)+ f(y)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıdaki ispatta olduğu gibi fg, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir. Bu eşitsizliğin de her iki yanının $[a,b]$ üzerinde y ye göre integrali alınır ve Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)g\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)dtdy \\
& \le\frac{1}{3}\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)+ f(y)g(y)\right]dy \\
& \quad +\frac{1}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(y)dy+\frac{1}{6}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(y)dy
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{(b-a)}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}\int_a^b f(y)g(y)dy$$

$$+\frac{1}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2} + \frac{1}{6} g\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\leq \frac{(b-a)}{3}\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} + \frac{1}{3}\int_a^b f(y)g(y)dy$$

$$+2\frac{(b-a)}{6}\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\int_a^b f(y)g(y)dy + \frac{(b-a)}{6}\left[M(a,b)+N(a,b)\right]$$

yazılır. Son olarak bu ifadenin her iki tarafı $\frac{3}{b-a}$ ile çarpılırsa

$$\frac{3}{b-a}\int_a^b\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right) g\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right) dtdy$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)dy + \left[\frac{M(a,b)+N(a,b)}{2}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.6. $a,b \in [0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to \mathbb{R}$ negatif olmayan ikinci anlamda *s*–konveks ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde $t\in[0,1]$ ve $s_1,s_2\in(0,1]$ için f, s_1-konveks ve g, s_2-konveks ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right) g\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right) dtdy$$

$$\leq \frac{1}{(s_1+s_2+1)(b-a)}\int_a^b f(y)g(y)dy \tag{4.3.5}$$

$$+\left[\frac{1}{4(s_1+s_2+1)} + \frac{\Gamma(s_1+1)\Gamma(s_2+1)}{2\Gamma(s_1+s_2+2)}\right]\left[M(a,b)+N(a,b)\right]$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$, $N(a,b)$ ve Γ fonksiyonu Teorem 4.3.2 deki gibidir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.3.4 e benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir.

4.4. Modül ve *s*–konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Teorem 4.4.1. I pozitif bir reel sayı aralığı $a,b \in I$, $a<b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ ikinci anlamda bir *s*–konveks fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{(b-a)(s+1)}\int_a^b f(x)\,dx - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\geq \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{s+1}\right| dx - 2^{s-1}\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: I aralığı üzerinde f nin *s*–konveksliğinden, (3.2.7) den ve modül özelliğinden her $x,y \in [0,\infty)$ ve $s \in (0,1]$ için

$$\frac{f(x)+f(y)}{s+1} - 2^{s-1} f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \left|\left|\frac{f(x)+f(y)}{s+1}\right| - 2^{s-1}\left| f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\right|$$

eşitsizliği yazılır. Şimdi $t \in [0,1]$ için $x = ta+(1-t)b$ ve $y=(1-t)a+tb$ yazılırsa, her $t \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{s+1} - 2^{s-1} f\left(\frac{ta+(1-t)b+(1-t)a+tb}{2}\right) \\
&= \frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{s+1} - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\geq \left|\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{s+1}\right| - 2^{s-1}\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\frac{\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt}{s+1}-2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\geq\left|\int_0^1\left|\frac{f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)}{s+1}\right|dt-2^{s-1}\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right| \tag{4.4.2}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt=\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)dt$$

ve $x=ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]$ için

$$\int_0^1\left|\frac{f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)}{s+1}\right|dt=\frac{1}{b-a}\int_0^1\left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{s+1}\right|dx$$

dir. Bu eşitlikler (4.4.2) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 4.4.2. Eğer Teorem 4.4.1 de $s=1$ seçilirse (4.4.1) eşitsizliği (3.2.6) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.4.3. Teorem 4.4.1 deki şartlara ek olarak her $x\in[a,b]$ için f, $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ise

$$\frac{2}{(b-a)(s+1)}\int_a^b f(x)\,dx-2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\geq\left|\frac{2}{(b-a)(s+1)}\int_a^b\left|f(x)\right|dx-2^{s-1}\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right| \tag{4.4.3}$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 4.4.4. $a,\ b$ pozitif reel sayılar olsun. $s\in(0,1]$ için

$$A_s=A_s(a,b)=\frac{a^s+b^s}{s+1} \tag{4.4.4}$$

ortalamasına *s*–aritmetik ortalama denir.

Tanım 4.4.5. $x_i,\ i=0,1,2,...$ pozitif reel sayılar olsun. $s\in(0,1]$ için

$$A_s(x_n)=\frac{\sum_{i=0}^{n}x_i^s}{s+n}=\frac{x_0^s+x_1^s+...+x_n^s}{s+n} \tag{4.4.5}$$

ortalamasına genelleştirilmiş *s*–aritmetik ortalama denir.

Uyarı 4.4.6. Tanım 4.4.4 ve 4.4.5 de $s=1$ seçilirse elde edilen bu yeni ortalamalar klasik anlamda aritmetik ortalamaya dönüşür.

Aritmetik ortalama ile *s*–aritmetik ortalama arasındaki ilişkiye bakılacak olunursa. $s=1$ seçilmesi durumunda aritmetik ortalama ile *s*–aritmetik ortalamanın birbirine eşit olduğu aşikardır. $s\in(0,1]$ için $a,b\in[2,\infty)$, $a,b\in[1,2]$ ve $a,b\in[0,1]$ durumları aşağıdaki sonuçlarda incelenmiştir.

Sonuç 4.4.7. $a,\ b$ pozitif reel sayılar ve $s\in(0,1]$ olsun. Eğer $a,b\in[2,\infty)$ ise

$$A_s(a,b)=\frac{a^s+b^s}{s+1}\le\frac{a+b}{2}=A(a,b) \tag{4.4.6}$$

eşitsizliği vardır.

Bu sonucun anlaşılması açısından $s\in(0,1]$ ve $a,b\in[2,\infty)$ şartları için aşağıdaki çizelge verilmiştir.

Çizelge 4.1. $s\in(0,1],\ a,b\in[2,\infty)$ için $A_s(a,b)=\frac{a^s+b^s}{s+1}\le\frac{a+b}{2}=A(a,b)$ ortalamalar çizelgesi

s	a	b	$A_s(a,b)=\frac{a^s+b^s}{s+1}$	$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$
0.1	2.00	2.00	1.9487	2.000
0.1	2.10	2.20	1.9628	2.150
0.1	2.20	2.40	1.9759	2.300
0.1	2.40	5.60	2.0723	4.000
0.1	3.33	3.34	2.0509	3.335

0.2	2.00	2.00	1.9145	2.000
0.2	2.10	2.20	1.9423	2.150
0.2	2.40	5.60	2.1689	4.000
0.2	3.33	3.34	2.1206	3.335
0.5	2.00	2.00	1.8856	2.000
0.5	2.20	2.40	2.0216	2.300
0.5	2.40	5.60	2.6104	4.000
0.5	3.33	3.34	2.4349	3.335
0.75	2.00	2.00	1.9220	2.000
0.75	2.20	2.40	2.1341	2.300
0.75	2.40	5.60	3.1820	4.000
0.75	3.33	3.34	2.8204	3.335
0.9	2.00	2.00	1.9643	2.000
0.9	2.10	2.20	2.0963	2.150
0.9	2.40	5.60	3.6382	4.000
0.9	3.33	3.34	3.1122	3.335
1.0	2.00	2.00	2.0000	2.000
1.0	2.10	2.20	2.1500	2.150
1.0	2.20	2.40	2.3000	2.300
1.0	3.33	3.34	3.3350	3.335

Sonuç 4.4.8. $a,\ b$ pozitif reel sayılar ve $s \in (0,1]$ olsun. Eğer $a,b \in [0,1]$ ise

$$A_s(a,b) = \frac{a^s + b^s}{s+1} \geq \frac{a+b}{2} = A(a,b) \tag{4.4.7}$$

eşitsizliği vardır.

Bu sonucun anlaşılması açısından $s \in (0,1]$ ve $a,b \in [0,1]$ şartları için aşağıdaki çizelge verilmiştir.

Çizelge 4.2. $s \in (0,1],\ a,b \in [0,1]$ için $A_s(a,b) = \frac{a^s + b^s}{s+1} \geq \frac{a+b}{2} = A(a,b)$ ortalamaları çizelgesi

s	a	b	$A_s(a,b) = \frac{a^s+b^s}{s+1}$	$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$
0.1	0.1	0.2	1.49610	0.15
0.1	0.1	0.9	1.62170	0.50
0.1	0.2	0.8	1.66300	0.50
0.1	0.4	0.6	1.69330	0.50

0.1	0.8	0.9	1.78860	0.85
0.2	0.1	0.9	1.34180	0.50
0.2	0.2	0.8	1.40090	0.50
0.2	0.4	0.6	1.44620	0.50
0.2	0.8	0.9	1.61290	0.85
0.5	0.1	0.2	0.50896	0.15
0.5	0.1	0.9	0.84327	0.50
0.5	0.2	0.8	0.89443	0.50
0.5	0.4	0.6	0.93803	0.50
0.5	0.8	0.9	1.22870	0.85
0.75	0.1	0.2	0.27251	0.15
0.75	0.2	0.8	0.65427	0.50
0.75	0.4	0.6	0.67697	0.50
0.75	0.8	0.9	1.01140	0.85
0.9	0.1	0.2	0.18990	0.15
0.9	0.1	0.9	0.54496	0.50
0.9	0.4	0.6	0.56307	0.50
0.9	0.8	0.9	0.90926	0.85
0.99	0.1	0.2	0.15355	0.15
0.99	0.2	0.8	0.50504	0.50
0.99	0.4	0.6	0.50591	0.50
0.99	0.8	0.9	0.85565	0.85

Sonuç 4.4.9. a, b pozitif reel sayılar ve $s \in (0,1]$ olsun. Eğer $a,b \in [1,2]$ ise, bu durumda bu iki ortalamanın sıralaması için kararsızlık durumları ortaya çıkmaktadır. Örneğin çalışmada kullanılan hesaplama programı yardımıyla uygun $s \in (0,1]$ ve $a,b \in [1,2]$ için farklı sıralamalar oluştuğu gözlenmiştir. Bu kararsızlık durumları aşağıdaki çizelgede incelenmiştir.

Çizelge 4.3. $s \in (0,1]$, $a,b \in [1,2]$ için $A_s(a,b)$ ve $A(a,b)$ ile ilgili ortalamalar çizelgesi

s	a	b	$A_s(a,b) = \frac{a^s + b^s}{s+1}$	$A(a,b) = \frac{a+b}{2}$
0.1	1.1	1.2	1.8436	1.1500
0.1	1.2	1.8	1.8899	1.5000
0.1	1.4	1.6	1.8930	1.5000
0.2	1.1	1.2	1.7137	1.1500
0.2	1.1	1.9	1.7968	1.5000
0.2	1.4	1.6	1.8068	1.5000

0.2	1.8	1.9	1.8848	1.8500
0.5	1.925	1.97	1.8607	1.9475
0.5	1.05	1.97	1.6188	1.5100
0.5	1.9	1.7	1.7882	1.8000
0.5	1.9	1.2	1.6492	1.5500
0.5	1.8	1.9	1.8134	1.8500
0.75	1.0	2.0	1.5325	1.5000
0.01	1.3	1.8	1.9886	1.5500
0.901	1.93	1.92	1.8981	1.9250
0.75	1.5	1.6	1.5874	1.5500
0.75	1.8	1.9	1.8128	1.8500
0.05	1.9	1.7	1.9614	1.8000
0.99	1.9	1.7	1.7984	1.8000
0.09	1.9	1.7	1.9343	1.8000
0.09	1.9	1.2	1.9046	1.5500

Örneklerden de görüldüğü gibi $[1,2]$ aralığı *s*–ortalamaları için sabit bir durum gösterememektedir.

Tanım 4.4.10. $a,\ b$ pozitif reel sayılar olsun. $s \in (0,1]$ için

$$L_s = L_s(a,b) = \begin{cases} \left[\dfrac{b^{s+1} - a^{s+1}}{(b-a)(s+1)} \right]^{\frac{1}{s}}, & a \neq b \\ a^s, & a = b \end{cases} \tag{4.4.8}$$

ortalamasına *s*–logaritmik ortalama denir.

Tanım 4.4.11. $a,\ b$ pozitif reel sayılar olsun. $s \in (0,1]$ için

$$L_{s,s} = L_{s,s}(a,b) = \begin{cases} \left[\dfrac{b^{s(s+1)} - a^{s(s+1)}}{(b^s - a^s)(s+1)} \right]^{\frac{1}{s}}, & a \neq b \\ a^s, & a = b \end{cases} \tag{4.4.9}$$

ortalamasına genelleştirilmiş *s*–logaritmik ortalama denir.

Uyarı 4.4.12. Tanım 4.4.10 da $s = p \in \mathbb{R} - \{-1,0\}$ seçilirse bu durumda (4.4.8) ifadesi literatürde iyi bilinen *p*–logaritmik ortalama tanımına dönüşür.

Hudzik ve Maligranda'nın *s*–konveks fonksiyonlar için vermiş oldukları örneğe (Örnek 2.3.3.2) bakacak olursak ($a = c = 0$, $b = 1$ ve $s \in (0,1)$ için) $f:[0,1] \to [0,1]$, $f(t) = t^s$ $f \in K_s^2$ dir.

Önerme 4.4.13. $a,b \in [0,1]$, $a < b$ olsun. Bu durumda $s \in (0,1)$ için

$$L_s^s(a,b) - 2^{s-1} A^s(a,b) \geq \left| \frac{2}{s+1} L_s^s(a,b) - 2^{s-1} A^s(a,b) \right| \tag{4.4.10}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.4.1 de $f:[0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^s$, $s \in (0,1)$ için *s*–konveks fonksiyonu uygun yerlere yazılırsa

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{(b-a)(s+1)} \int_a^b f(x)\,dx - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \geq M &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{s+1} \right| dx - 2^{s-1} \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right| \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

olur, *E* ve *M* ifadeleri ayrı ayrı yazılırsa

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{(b-a)(s+1)} \int_a^b f(x)\,dx - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \frac{2}{(b-a)(s+1)} \int_a^b x^s\,dx - 2^{s-1} \left(\frac{a+b}{2}\right)^s \\ &= \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{(b-a)(s+1)} - 2^{s-1} \left(\frac{a+b}{2}\right)^s \\ &= L_s^s(a,b) - 2^{s-1} A^s(a,b) \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

ve

$$
\begin{aligned}
M &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \frac{f(x) + f(a+b-x)}{s+1} \right| dx - 2^{s-1} \left| f\left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right| \\
&= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \frac{x^s + (a+b-x)^s}{s+1} \right| dx - 2^{s-1} \left| \left(\frac{a+b}{2} \right)^s \right| \right| \\
&= \left| \frac{2\left(b^{s+1} - a^{s+1}\right)}{(b-a)(s+1)^2} - 2^{s-1} \left| \left(\frac{a+b}{2} \right)^s \right| \right| \\
&= \left| \frac{2}{s+1} L_s^s(a,b) - 2^{s-1} A^s(a,b) \right|
\end{aligned} \tag{4.4.13}
$$

elde edilir. (4.4.12) ve (4.4.13) ifadeleri (4.4.11) de yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Tanım 4.4.14. $a,\ b$ pozitif reel sayılar olsun. $s \in (0,1]$ için

$$G_s = G_s(a,b) = \sqrt[s+1]{a^s b^s} \tag{4.4.14}$$

ortalamasına *s*–geometrik ortalama denir.

Tanım 4.4.15. $x_i,\ i = 0,1,2,...$ pozitif reel sayılar olsun. $s \in (0,1]$ için

$$G_s(x_n) = \sqrt[s+n]{\prod_{i=0}^{n} x_i^s} = \sqrt[n+s]{(x_0 x_1 .... x_n)^s} \tag{4.4.15}$$

ortalamasına genelleştirilmiş *s*–geometrik ortalama denir.

Uyarı 4.4.16. Tanım 4.4.18 ve 4.4.19 da $s = 1$ seçilirse, elde edilecek ortalamalar klasik anlamda geometrik ortalamaya dönüşür.

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\lambda_i \geq 0,\ (i = 1,2,...,n)$ sayıları $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu taktirde $x_i \in [a,b]$ için

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) \tag{4.4.16}$$

eşitsizliğine Jensen eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik yardımıyla, $f(x) = -\ln x$ konveks fonksiyon $x_1,...,x_n \geq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere Jensen eşitsizliğinden

$$-\ln\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\le\frac{-\ln x_1-\ln x_2-...-\ln x_n}{n}$$
$$\ln\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\frac{\ln x_1+\ln x_2+...+\ln x_n}{n}$$

yazılabilir. Buradan iyi bilinen

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2....x_n} \tag{4.4.17}$$

aritmetik ortalama–geometrik ortalama eşitsizliği vardır. Burada eşitlik durumu yalnızca $x_1=x_2=...=x_n$ için sağlanır. Şimdi $f(x)$ s–konveks fonksiyonu $s\in(0,1]$ için $f(x)=-\ln x^s$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\ln\frac{x_0^s+x_1^s+...+x_n^s}{n+s}&\ge\frac{\ln x_0^s+\ln x_1^s+...+\ln x_n^s}{n+s}\\&=\frac{\ln\left(x_0x_1...x_n\right)^s}{n+s}\\&=\ln\left(x_0x_1...x_n\right)^{\frac{s}{n+s}}\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

buradan

$$\frac{x_0^s+x_1^s+...+x_n^s}{n+s}\ge\sqrt[n+s]{\left(x_0x_1....x_n\right)^s} \tag{4.4.19}$$

eşitsizliği ile ifade edeceğimiz s–aritmetik ortalama – s–geometrik ortalama eşitsizliği yazılabilir. Burada da eşitlik durumu yalnızca $x_0^s=x_1^s=...=x_n^s$ için sağlanır.

Yukarıda bahsedilen ortalamaların yanı sıra, harmonik ortalama birim değerlerinin çarpmaya göre terslerinin aritmetik ortalamasının tersidir. Birim değerleri $x_0,x_1,...,x_n$ ile gösterilirse Harmonik ortalama

$$H\left(x_{n+1}\right)=\frac{n+1}{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}$$

şeklinde yazılır. İki reel sayının Harmonik ortalaması;

$$H=H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}\ \ a,b>0$$

dir.

Tanım 4.4.17. $a,\ b$ pozitif reel sayılar olsun. $s\in(0,1]$ için

$$H_s=H_s(a,b)=\frac{(s+1)a^s b^s}{a^s+b^s}\quad a,b>0 \tag{4.4.20}$$

ortalamasına *s*–harmonik ortalama denir.

Tanım 4.4.18. $x_i,\ i=0,1,2,...$ pozitif reel sayılar olsun. $s\in(0,1]$ için

$$H_s(x_{n+1})=\frac{n+s}{\frac{1}{x_0^s}+\frac{1}{x_1^s}+...+\frac{1}{x_n^s}} \tag{4.4.21}$$

ortalamasına genelleştirilmiş *s*–harmonik ortalama denir.

Uyarı 4.4.19. Tanım 4.4.17 de ve 4.4.18 de $s=1$ seçilirse bu yeni ortalamalar klasik anlamda harmonik ortalamaya dönüşür.

4.5. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımları için Eşitsizlikler

Yukarıdaki başlıklarda verilen konveks fonksiyonların çarpımlarının yanı sıra bu başlık altında birbirinden farklı türden, mesela bir *h*–konveks fonksiyon ile bir *s*–konveks fonksiyonun çarpımı, bir *m*–konveks fonksiyon ile bir (α,m)–konveks fonksiyonun çarpımı ve benzeri çarpımlara değinilecektir. Burada asıl amaç, konu ile ilgili yapılan çalışmalar doğrultusunda farklı türden konveks fonksiyonların çarpımları için Hadamard tipli yeni ve kullanışlı eşitsizlikler elde etmektir.

Teorem 4.5.1. $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $fg\in L^1([a,b])$, $h\in L^1([0,1])$ olsun. Eğer $s,t\in(0,1]$ için $f\in SX(h,I)$ ve $g\in K_s^2$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\le M(a,b)\int_0^1 h(t)t^s dt+N(a,b)\int_0^1 h(1-t)t^s dt \tag{4.5.1}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ ve $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ dır.

İspat: $[a,b]$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu h–konveks ve g fonksiyonu ikinci anlamda $s-$konveks olduklarından $s,t\in(0,1]$ için

$$f\left(ta+(1-t)b\right)\le h(t)f(a)+h(1-t)f(b),$$
$$g\left(ta+(1-t)b\right)\le t^s g(a)+(1-t)^s g(b)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonları negatif olmadığından

$$\begin{aligned}&f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)\\&\le h(t)t^s f(a)g(a)+h(t)(1-t)^s f(a)g(b)\\&\quad+h(1-t)t^s f(b)g(a)+h(1-t)(1-t)^s f(b)g(b)\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)dt&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\\&\le f(a)g(a)\int_0^1 h(t)t^s dt+f(b)g(b)\int_0^1 h(1-t)(1-t)^s dt\\&\quad+f(b)g(a)\int_0^1 h(1-t)t^s dt+f(a)g(b)\int_0^1 h(t)(1-t)^s dt.\end{aligned}$$

elde edilir. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ pozitif fonksiyonu için

$$\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt=\int_0^1 h_1(1-t)h_2(1-t)dt \quad \text{ve} \quad \int_0^1 h_1(1-t)h_2(t)dt=\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt$$

özelliği kullanılırsa

$$\int_0^1 h(t)t^s dt=\int_0^1 h(1-t)(1-t)^s dt \quad \text{ve} \quad \int_0^1 h(1-t)t^s dt=\int_0^1 h(t)(1-t)^s dt$$

yazılabilir. Bu ifadeler yukarıdaki eşitsizlikte yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
&\leq f(a)g(a)\int_0^1 h(t)t^s dt + f(b)g(b)\int_0^1 h(1-t)(1-t)^s dt \\
&\quad + f(b)g(a)\int_0^1 h(1-t)t^s dt + f(a)g(b)\int_0^1 h(t)(1-t)^s dt \\
&=\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\int_0^1 h(t)t^s dt \\
&\quad +\left[f(b)g(a)+f(a)g(b)\right]\int_0^1 h(1-t)t^s dt
\end{aligned}
$$

olur ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.5.2. Yukarıdaki teoremde eğer $s=1$ için $h(t)=t$ ve $g(x)=1$ olarak seçilirse, (4.5.1) eşitsizliği Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafına benzer. Eğer $s\in(0,1)$ için $h(t)=t$ ve $g(x)=1$ olarak seçilirse

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{4.5.2}
$$

(4.5.1) eşitsizliği (3.2.7) deki *s*–konveks fonksiyonlar için Dragomir ve Fitzpatrick tarafından verilen eşitsizliğin sağ tarafına benzer.

Teorem 4.5.3. $h: J\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki dönüşüm ve $fg\in L^1([a,b])$, $h\in L^1([0,1])$ olsun. Eğer $s,t\in(0,1)$ için $f\in SX(h,I)$ ve $g\in K_s^2$ ise

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^{s-1}}{h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \\
&\leq M(a,b)\int_0^1 h(1-t)t^s dt + N(a,b)\int_0^1 h(t)t^s dt
\end{aligned} \tag{4.5.3}
$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.5.1 deki gibidir.

İspat: $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonu h–konveks ve g fonksiyonu ikinci anlamda $s-$ konveks olduklarından $s,t\in(0,1)$ ve $\frac{a+b}{2}=\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)$$
$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right]$$
$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)=g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)$$
$$\le \frac{1}{2^s}\left[g\left(ta+(1-t)b\right)+g\left((1-t)a+tb\right)\right]$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonları negatif olmadığından

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right]\text{x}\left[g\left(ta+(1-t)b\right)+g\left((1-t)a+tb\right)\right]$$
$$=h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)\right]$$
$$+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)g\left((1-t)a+tb\right)+f\left((1-t)a+tb\right)g\left(ta+(1-t)b\right)\right]$$
$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)\right]$$
$$+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left\{\left[h(t)f(a)+h(1-t)f(b)\right]\left[(1-t)^s g(a)+t^s g(b)\right]\right.$$
$$\left.+\left[h(1-t)f(a)+h(t)f(b)\right]\left[t^s g(a)+(1-t)^s g(b)\right]\right\}$$
$$=h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)\right]$$
$$+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left\{\left[h(t)(1-t)^s+h(1-t)t^s\right]f(a)g(a)\right.$$
$$+\left[h(t)t^s+h(1-t)(1-t)^s\right]f(a)g(b)$$
$$\left.+\left[h(1-t)(1-t)^s+h(t)t^s\right]f(b)g(a)+\left[h(1-t)t^s+h(t)(1-t)^s\right]f(b)g(b)\right\}$$

$$= h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+ f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)\right]$$

$$+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^s}\left\{\left[h(t)(1-t)^s + h(1-t)t^s\right]\left[f(a)g(a)+ f(b)g(b)\right]\right.$$

$$\left. +\left[h(t)t^s + h(1-t)(1-t)^s\right]\left[f(a)g(b)+ f(b)g(a)\right]\right\}.$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{2^s}{h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$-\left[f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+ f\left((1-t)a+tb\right)g\left((1-t)a+tb\right)\right]$$

$$\leq\left[h(t)(1-t)^s + h(1-t)t^s\right]M(a,b)+\left[h(t)t^s + h(1-t)(1-t)^s\right]N(a,b)$$

olduğu görülmektedir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden *t* ye göre integrali alınırsa

$$\frac{2^s}{h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\leq M(a,b)\left\{\int_0^1 h(t)(1-t)^s dt+\int_0^1 h(1-t)t^s dt\right\}$$

$$+N(a,b)\left\{\int_0^1 h(t)t^s dt+\int_0^1 h(1-t)(1-t)^s dt\right\}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.5.4. Yukarıdaki teoremde $s\in(0,1)$ için $h(t)=t$ ve $g(x)=1$ olarak seçilirse, bu durumda (4.5.3) eşitsizliği

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{4.5.4}$$

eşitsizliğine dönüşür. (4.5.4) eşitsizliğinde $s=1$ olarak seçilirse

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.5.5. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ integrallenebilen, her ikisi de artan ya da azalan iki fonksiyon ve $fg\in L^1([a,b])$ olsun. $\alpha,m_1,m_2\in(0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonu m_1-konveks ve g fonksiyonu $(\alpha,m_2)-$konveks ise

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m_1b-a}\int_a^{m_1b}f(x)dx\frac{1}{m_2b-a}\int_a^{m_2b}g(x)dx\\&\le Ef(a)g(a)+Lf(a)g(b)+If(b)g(a)+Ff(b)g(b)\end{aligned}\tag{4.5.5}$$

eşitsizliği vardır. Burada $E=\frac{1}{\alpha+2}$, $L=\frac{m_2\alpha}{2(\alpha+2)}$, $I=\frac{m_1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$, $F=\frac{m_1m_2\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$ dır.

İspat: $\alpha,m_1,m_2\in(0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonu m_1-konveks, g fonksiyonu $(\alpha,m_2)-$konveks olduğundan, her $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}&f(ta+m_1(1-t)b)\le tf(a)+m_1(1-t)f(b),\\&g(ta+m_2(1-t)b)\le t^\alpha g(a)+m_2(1-t^\alpha)g(b)\end{aligned}$$

yazılır. f ve g fonksiyonları negatif olmadığından bu iki eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}&f(ta+m_1(1-t)b)g(ta+m_2(1-t)b)\\&\le f(a)g(a)t^{\alpha+1}+m_2f(a)g(b)t(1-t^\alpha)\\&\quad+m_1f(b)g(a)t^\alpha(1-t)+m_1m_2f(b)g(b)(1-t)(1-t^\alpha)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa ve Chebychev integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{m_1 b-a}\int_a^{m_1 b} f(x)dx \frac{1}{m_2 b-a}\int_a^{m_2 b} g(x)dx$$

$$\leq \int_0^1 f\left(ta+m_1(1-t)b\right)dt\int_0^1 g\left(ta+m_2(1-t)b\right)dt$$

$$\leq \int_0^1 f\left(ta+m_1(1-t)b\right)g\left(ta+m_2(1-t)b\right)dt$$

$$\leq f(a)g(a)\int_0^1 t^{\alpha+1}dt+m_2 f(a)g(b)\int_0^1 t\left(1-t^{\alpha}\right)dt$$

$$+m_1 f(b)g(a)\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)dt+m_1 m_2 f(b)g(b)\int_0^1 (1-t)\left(1-t^{\alpha}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\alpha+2}f(a)g(a)+\frac{m_2\alpha}{2(\alpha+2)}f(a)g(b)$$

$$+\frac{m_1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}f(b)g(a)+\frac{m_1 m_2\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}f(b)g(b)$$

yazılabileceği görülür ki bu aranan sonuçtur.

Uyarı 4.5.6. Yukarıdaki teoremde $m_1=m_2=\alpha=1$ olarak seçilirse, (4.5.5) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\\
&\leq \frac{1}{3}f(a)g(a)+\frac{1}{6}f(a)g(b)+\frac{1}{6}f(b)g(a)+\frac{1}{3}f(b)g(b)\\
&=\frac{M(a,b)}{3}+\frac{N(a,b)}{6}
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

(3.2.1) eşitsizliği elde edilir. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.5.1 deki gibidir.

Teorem 4.5.7. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ integrallenebilen, her ikisi de artan ya da azalan iki fonksiyon ve $fg\in L^1([a,b])$ olsun. (α_1,m_1), $(\alpha_2,m_2)\in[0,1]^2$, olmak üzere f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde sırasıyla $(\alpha_1,m_1)-$konveks, $(\alpha_2,m_2)-$konveks ise

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m_1b-a}\int_a^{m_1b} f(x)\,dx\,\frac{1}{m_2b-a}\int_a^{m_2b} g(x)\,dx\\&\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\&\le Sf(a)g(a)+Ef(a)g(b)+Mf(b)g(a)+Af(b)g(b)\end{aligned}\tag{4.5.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $S=\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+2}$, $E=\frac{m_2\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+1)}$, $M=\frac{m_1\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_2+1)}$, $A=\frac{m_1m_2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+2)}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}$ dır.

İspat: (α_1,m_1), $(\alpha_2,m_2)\in[0,1]^2$ için $[a,b]$ üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları sırasıyla $(\alpha_1,m_1)-$konveks, $(\alpha_2,m_2)-$konveks olduğundan $\forall t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}&f(ta+m_1(1-t)b)\le t^{\alpha_1}f(a)+m_1(1-t^{\alpha_1})f(b),\\&g(ta+m_2(1-t)b)\le t^{\alpha_2}g(a)+m_2(1-t^{\alpha_2})g(b)\end{aligned}$$

yazılır. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}&f(ta+m_1(1-t)b)g(ta+m_2(1-t)b)\\&\le\left[t^{\alpha_1}f(a)+m_1(1-t^{\alpha_1})f(b)\right]\left[t^{\alpha_2}g(a)+m_2(1-t^{\alpha_2})g(b)\right]\\&=t^{\alpha_1+\alpha_2}f(a)g(a)+m_2t^{\alpha_1}(1-t^{\alpha_2})f(a)g(b)\\&\quad+m_1t^{\alpha_2}(1-t^{\alpha_1})f(b)g(a)+m_1m_2(1-t^{\alpha_1})(1-t^{\alpha_2})f(b)g(b)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınır ve Chebychev integral eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(ta+m_1(1-t)b)g(ta+m_2(1-t)b)\,dt\\&\ge\int_0^1 f(ta+m_1(1-t)b)\,dt\int_0^1 g(ta+m_2(1-t)b)\,dt\\&\ge\frac{1}{m_1b-a}\int_a^{m_1b} f(x)\,dx\,\frac{1}{m_2b-a}\int_a^{m_2b} g(x)\,dx\end{aligned}$$

ifadesi ile

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m_1 b-a}\int_a^{m_1 b} f(x)\,dx \frac{1}{m_2 b-a}\int_a^{m_2 b} g(x)\,dx \\
&\le f(a)g(a)\int_0^1 t^{\alpha_1+\alpha_2}dt + m_2 f(a)g(b)\int_0^1 t^{\alpha_1}\left(1-t^{\alpha_2}\right)dt \\
&\quad + m_1 f(b)g(a)\int_0^1 t^{\alpha_2}\left(1-t^{\alpha_1}\right)dt + m_1 m_2 f(b)g(b)\int_0^1 \left(1-t^{\alpha_1}\right)\left(1-t^{\alpha_2}\right)dt \\
&= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+1}\left\{ f(a)g(a) + f(a)g(b)\frac{m_2\alpha_2}{\alpha_1+1} \right. \\
&\quad \left. + f(b)g(a)\frac{m_1\alpha_1}{\alpha_2+1} + f(b)g(b)\frac{m_1 m_2 \alpha_1 \alpha_2 \left(\alpha_1+\alpha_2+2\right)}{\left(\alpha_1+1\right)\left(\alpha_2+1\right)} \right\}
\end{aligned}
$$

olur, böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.5.8. Yukarıdaki teoremde $m_1 = m_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ olarak seçilirse, (4.5.7) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \\
&\le \frac{1}{3} f(a)g(a) + \frac{1}{6} f(a)g(b) + \frac{1}{6} f(b)g(a) + \frac{1}{3} f(b)g(b) \\
&= \frac{M(a,b)}{3} + \frac{N(a,b)}{6}
\end{aligned}
\tag{4.5.8}
$$

(3.2.1) eşitsizliği elde edilir. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.5.1 deki gibidir.

Teorem 4.5.9. $a,b \in [0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}_+$ integrallenebilen, her ikisi de artan ya da azalan iki fonksiyon ve $fg \in L^1([a,b])$ olsun. α, m_1, $m_2 \in (0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonu m_1-konveks ve g fonksiyonu $(\alpha, m_2)-$konveks ise

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \min\{E,L,I,F\} \tag{4.5.9}$$

eşitsizliği vardır. Burada *E*, *L*, *I*, *F* aşağıdaki gibidir.

$$E = f(a)g(a)\frac{1}{\alpha+2} + m_2 f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)} + m_1 g(a)f\left(\frac{b}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + m_1m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$L = f(b)g(b)\frac{1}{\alpha+2} + m_2 f(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)} + m_1 g(b)f\left(\frac{a}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + m_1m_2 f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$I = f(b)g(a)\frac{1}{\alpha+2} + m_2 f(b)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)} + m_1 g(a)f\left(\frac{a}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + m_1m_2 f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$F = f(a)g(b)\frac{1}{\alpha+2} + m_2 f(a)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)} + m_1 g(b)f\left(\frac{b}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + m_1m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

İspat: $\alpha,\ m_1,\ m_2 \in (0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonu m_1-konveks ve g fonksiyonu $(\alpha,m_2)-$konveks olduğundan, $\forall t\in[0,1]$ için

$$f\left(ta+(1-t)b\right) = f\left(ta+m_1(1-t)\frac{b}{m_1}\right) \le tf(a)+m_1(1-t)f\left(\frac{b}{m_1}\right),$$

$$g\left(ta+(1-t)b\right) = g\left(ta+m_2(1-t)\frac{b}{m_2}\right) \le t^{\alpha}g(a)+m_2\left(1-t^{\alpha}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonları negatif olmadığından bu iki eşitsizlik taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} &f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right) \\ &\le f(a)g(a)t^{\alpha+1} + m_2 f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right)t\left(1-t^{\alpha}\right) \\ &\quad + m_1 g(a)f\left(\frac{b}{m_1}\right)t^{\alpha}(1-t) + m_1m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)(1-t)\left(1-t^{\alpha}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)dt$$

$$\leq f(a)g(a)\int_0^1 t^{\alpha+1}dt + m_2 f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\int_0^1 t\left(1-t^{\alpha}\right)dt$$

$$+m_1 g(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right)\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)dt + m_1 m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\int_0^1 (1-t)\left(1-t^{\alpha}\right)dt$$

$$= f(a)g(a)\frac{1}{\alpha+2} + m_2 f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$$

$$+m_1 g(a) f\left(\frac{b}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + m_1 m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

elde edilir ve benzer şekilde f fonksiyonu m_1-konveks ve g fonksiyonu $(\alpha, m_2)-$ konveks olduğundan, $\forall t \in [0,1]$ için

$$f\left(tb+(1-t)a\right) \leq tf(b) + m_1(1-t) f\left(\frac{a}{m_1}\right)$$

$$g\left(tb+(1-t)a\right) \leq t^{\alpha} g(b) + m_2\left(1-t^{\alpha}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right),$$

$$f\left(tb+(1-t)a\right) \leq tf(b) + m_1(1-t) f\left(\frac{a}{m_1}\right)$$

$$g\left(ta+(1-t)b\right) \leq t^{\alpha} g(a) + m_2\left(1-t^{\alpha}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right),$$

$$f\left(ta+(1-t)b\right) \leq tf(a) + m_1(1-t) f\left(\frac{b}{m_1}\right)$$

$$g\left(tb+(1-t)a\right) \leq t^{\alpha} g(b) + m_2\left(1-t^{\alpha}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right).$$

farklı yazılımları için çarpımlar yapılır ve $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f\left(tb+(1-t)a\right)g\left(tb+(1-t)a\right)dt$$

$$\leq f(b)g(b)\frac{1}{\alpha+2} + m_2 f(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$$

$$+m_1 g(b) f\left(\frac{a}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + m_1 m_2 f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$\int_0^1 f\left(tb+(1-t)a\right)g\left(ta+(1-t)b\right)dt$$
$$\leq f(b)g(a)\frac{1}{\alpha+2}+m_2 f(b)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$$
$$+m_1 g(a)f\left(\frac{a}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+m_1 m_2 f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

ve

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(tb+(1-t)a\right)dt$$
$$\leq f(a)g(b)\frac{1}{\alpha+2}+m_2 f(a)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$$
$$+m_1 g(b)f\left(\frac{b}{m_1}\right)\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+m_1 m_2 f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right)\frac{\alpha(\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

elde edilir. Aşağıda verilen Chebyshev eşitsizliği

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$
$$=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

yukarıda elde edilen integral eşitsizliklerinde kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.5.10. Yukarıdaki teoremde $m_1=m_2=\alpha=1$ ve $g(x)=1$ olarak seçilirse, (4.5.9) eşitsizliği

$$(b-a)\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
$$\leq\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{6}f(a)+\frac{1}{6}f(b)+\frac{1}{3}f(b)=\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.5.10}$$

ifadesi ile Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafına dönüşür.

Teorem 4.5.11. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilen, pozitif ve bunlardan birisi artmayan, diğeri azalmayan iki fonksiyon ve

$f, g, fg \in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde $f \in SX(h,I)$, $g \in Q(I)$ ise bu durumda $h(1/2) \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \\ &< \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $[a,b]$ üzerinde $f \in SX(h,I)$, $g \in Q(I)$ olacak şekilde iki fonksiyon olduğundan ve $\frac{a+b}{2} = \frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\leq 2h(1/2)\left[f\left(ta+(1-t)b\right) + f\left((1-t)a+tb\right)\right]\left[g\left(ta+(1-t)b\right) + g\left((1-t)a+tb\right)\right] \\ &= 2h(1/2)\left[f\left(ta+(1-t)b\right) g\left(ta+(1-t)b\right) + f\left((1-t)a+tb\right) g\left((1-t)a+tb\right)\right. \\ &\quad \left. + f\left(ta+(1-t)b\right) g\left((1-t)a+tb\right) + f\left((1-t)a+tb\right) g\left(ta+(1-t)b\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &< 2h(1/2)\left\{\int_0^1 \left[f\left(ta+(1-t)b\right) g\left(ta+(1-t)b\right) + f\left((1-t)a+tb\right) g\left((1-t)a+tb\right)\right] dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right) dt \int_0^1 g\left((1-t)a+tb\right) dt + \int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right) dt \int_0^1 g\left(ta+(1-t)b\right) dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $x > 0$ için f ve g sınırlı, pozitif ve bunlardan birisi artmayan iken diğeri azalmayan iki fonksiyon ise

$$\int_0^x f(x) g(x) dx < \frac{1}{x}\int_0^x f(x) dx \int_0^x g(x) dx$$

Chebychev eşitsizliği yazılır. Yukarıdaki Chebychev integral eşitsizliği kullanılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{4h(1/2)}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{4h(1/2)}{b-a}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı da $1/4h(1/2)$ ile çarpılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.12. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilen iki fonksiyon ve ayrıca $f,\ g,\ fg\in L^1([a,b])$ olsun. Eğer $[a,b]$ üzerinde f negatif olmayan, konveks ve g de $P(I)$ sınıfından bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\le\frac{M(a,b)+N(a,b)}{2} \tag{4.5.12}$$

eşitsizliği vardır. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ Teorem 4.5.1 deki gibidir.

İspat: $[a,b]$ üzerinde f konveks, $g\in P(I)$ olacak şekilde iki fonksiyon ise her $t\in[0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b)\le tf(a)+(1-t)f(b)$$
$$g(ta+(1-t)b)\le g(a)+g(b)$$

vardır. Fonksiyonlar negatif olmadığından

$$\begin{aligned}&f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\\&\le[tf(a)+(1-t)f(b)][g(a)+g(b)]\\&=tf(a)g(a)+tf(a)g(b)+(1-t)f(b)g(a)+(1-t)f(b)g(b)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğinin her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)dt\\&\le[f(a)g(a)+f(a)g(b)]\int_0^1 tdt+[f(b)g(a)+f(b)g(b)]\int_0^1(1-t)dt\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifade de $x=ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılır ve integraller hesaplanırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.13. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Eğer $f\in Q(I)$ sınıfından ve g de $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{8\left(g(a)+g(b)\right)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.5.13}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $f\in Q(I)$ sınıfından ve g de $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar olsun. $\frac{a+b}{2}=\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\\ &\le 2\left(f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a+b}{2}\right)&=g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\\ &\le g\left(ta+(1-t)b\right)+g\left((1-t)a+tb\right)\le 2\left(g(a)+g(b)\right)\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 4\left(g(a)+g(b)\right)\left(f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right)$$

yazılabilir. Bu çarpım eşitsizliğinin $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)&\le 4\left(g(a)+g(b)\right)\int_0^1\left(f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right)dt\\ &=\frac{8\left(g(a)+g(b)\right)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.6. Logaritmik Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Logaritmik konveks fonksiyonlar konusu matematiğin ve fen bilimlerinin birçok dalında ilgi çekici bir konudur. Bu tür konveks fonksiyonlar, özel fonksiyonlar ve matematiksel istatistik teorisinde çok önemli bir role sahiptir. Burada log–konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard integral eşitsizliğine benzer yeni integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

Teorem 4.6.1. $I \subset \mathbb{R}$, $a,b \in I,\ a<b$ olmak üzere $f: I \to (0,\infty)$ log–konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, f(a+b-x)\,dx \le A\big(f(a), f(b)\big) L\big(f(a), f(b)\big) \tag{4.6.1}$$

eşitsizliği vardır, burada $A\big(f(a), f(b)\big) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ aritmetik ortalamayı ve

$$L\big(f(a), f(b)\big) = \begin{cases} f(a) & , \quad f(a)=f(b) \\ \dfrac{f(a)-f(b)}{\ln f(a) - \ln f(b)}, & \quad f(a)\neq f(b) \end{cases}$$

logaritmik ortalamayı göstermektedir.

İspat: $f(a)\neq f(b)$ için f, I reel aralığı üzerinde logaritmik konveks fonksiyon olduğundan her $a,b \in I$ ve her $t\in[0,1]$ için

$$f\big(ta+(1-t)b\big) \le [f(a)]^t\,[f(b)]^{1-t} \tag{4.6.2}$$

$$f\big((1-t)a+tb\big) \le [f(a)]^{1-t}\,[f(b)]^t \tag{4.6.3}$$

yazılabilir ve $x = ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, f(a+b-x)\,dx = \int_0^1 f\big(ta+(1-t)b\big)\, f\big((1-t)a+tb\big)\,dt \tag{4.6.4}$$

eşitliği kolaylıkla gösterilebilir. Bu eşitliğin sağ tarafına $G(p,q) \le K(p,q)$, $(p,q \ge 0)$ eşitsizliği uygulanır ve gerekli değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, f(a+b-x)\,dx \\ &= \int_0^1 f\big(ta+(1-t)b\big)\, f\big((1-t)a+tb\big)\,dt \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left\{ f\left(ta+(1-t)b\right)\right\}^2 + \left\{ f\left((1-t)a+tb\right)\right\}^2 \right] dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left\{ [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} \right\}^2 + \left\{ [f(a)]^{1-t} [f(b)]^t \right\}^2 \right] dt \tag{4.6.5}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ f^2(b)\int_0^1 \left(\frac{f(a)}{f(b)} \right)^{2t} dt + f^2(a)\int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)^{2t} dt \right\}$$

elde edilir. Ayrıca $2t = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, f(a+b-x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{4}\left\{ f^2(b)\int_0^2 \left(\frac{f(a)}{f(b)} \right)^{u} du + f^2(a)\int_0^2 \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)^{u} du \right\} \tag{4.6.6}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ f^2(b)\left[\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)} \right)^u}{\log \frac{f(a)}{f(b)}} \right]_0^2 + f^2(a)\left[\frac{\left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)^u}{\log \frac{f(b)}{f(a)}} \right]_0^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \frac{f^2(b)\left[\frac{f^2(a)}{f^2(b)} - 1 \right]}{\log f(a) - \log f(b)} + \frac{f^2(a)\left[\frac{f^2(b)}{f^2(a)} - 1 \right]}{\log f(b) - \log f(a)} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \frac{f^2(b) - f^2(a)}{\log f(a) - \log f(b)} + \frac{f^2(a) - f^2(b)}{\log f(b) - \log f(a)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(f(a) + f(b) \right)\left(f(a) - f(b) \right)}{\log f(a) - \log f(b)}$$

$$= A\left(f(a), f(b) \right) L\left(f(a), f(b) \right)$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizlikte ilk ve son terimden

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, f(a+b-x)\,dx \leq A\left(f(a), f(b) \right) L\left(f(a), f(b) \right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.2. $I \subset \mathbb{R}$, $a,b \in I$, $a<b$ olmak üzere $f: I \to (0,\infty)$ artan ve log–konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & L\big(f(a), f(b)\big) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \le \frac{1}{8(b-a)} \int_a^b f^4(x)\,dx \\ & + \frac{1}{8} K^2\big(f(a), f(b)\big) A\big(f(a), f(b)\big) L\big(f(a), f(b)\big) + 1 \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

eşitsizliği vardır. Burada $K\big(f(a), f(b)\big) = \sqrt{\dfrac{f^2(a)+f^2(b)}{2}}$, $A\big(f(a), f(b)\big) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$,

$$L\big(f(a), f(b)\big) = \begin{cases} f(a) & , \quad f(a) = f(b) \\ \dfrac{f(a)-f(b)}{\ln f(a) - \ln f(b)}, & \quad f(a) \ne f(b) \end{cases}$$

ifadeleri sırasıyla kuadratik, aritmetik ve logaritmik ortalamayı göstermektedir.

İspat: $f(a) \ne f(b)$ için f, I reel aralığı üzerinde logaritmik konveks fonksiyon olduğundan her $a,b \in I$ ve her $t \in [0,1]$ için

$$f\big(ta+(1-t)b\big) \le [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} \tag{4.6.8}$$

yazılır. Her $x,y \in \mathbb{R}$ için $8xy \le x^4 + y^4 + 8$ temel eşitsizliği kullanılarak (Manfrino *et. al.* 2009) her $a,b \in I$ ve her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} & 8 f\big(ta+(1-t)b\big)[f(a)]^t [f(b)]^{1-t} \\ & \le f^4\big(ta+(1-t)b\big) + [f(a)]^{4t} [f(b)]^{4(1-t)} + 8 \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin t ye göre $[0,1]$ üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & 8\int_0^1 f\big(ta+(1-t)b\big)[f(a)]^t [f(b)]^{1-t}\,dt \\ & \le \int_0^1 f^4\big(ta+(1-t)b\big)\,dt + \int_0^1 [f(a)]^{4t} [f(b)]^{4(1-t)} + 8 \end{aligned}$$

elde edilir. f nin artanlığından

$$\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t\right)b\right)\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}dt$$
$$\geq \int_0^1 f\left(ta+\left(1-t\right)b\right)dt\int_0^1\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}dt$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$8\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t\right)b\right)dt\int_0^1\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}dt$$
$$\leq \int_0^1 f^4\left(ta+\left(1-t\right)b\right)dt+\int_0^1\left[f(a)\right]^{4t}\left[f(b)\right]^{4(1-t)}dt+8 \tag{4.6.10}$$

yazılır. Bu integral probleminin her bir terimi ayrı ayrı hesaplanır ve $x=ta+\left(1-t\right)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 f\left(ta+\left(1-t\right)b\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx \tag{4.6.11}$$

ve

$$\int_0^1\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}dt=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{\ln f\left(b\right)-\ln f\left(a\right)}=L\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right) \tag{4.6.12}$$

ve $4t=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1\left[f(a)\right]^{4t}\left[f(b)\right]^{4(1-t)}dt$$
$$=f^4\left(b\right)\int_0^1\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{4t}dt=\frac{1}{4}f^4\left(b\right)\int_0^4\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{u}du$$
$$=\frac{1}{4}f^4\left(b\right)\left[\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^u}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]_0^4=\frac{1}{4}f^4\left(b\right)\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^4-1}{\ln f(a)-\ln f(b)} \tag{4.6.13}$$
$$=\frac{1}{4}\frac{f^4\left(a\right)-f^4\left(b\right)}{\ln f(a)-\ln f(b)}$$
$$=\frac{f^2\left(a\right)+f^2\left(b\right)}{2}\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}\frac{f\left(a\right)-f\left(b\right)}{\ln f(a)-\ln f(b)}$$

elde edilir. (4.6.11-12-13) eşitlikleri sırasıyla (4.6.10) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\frac{8L\left(f(a),f(b)\right)}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^4(x)\,dx \qquad\qquad (4.6.14)\\
&\quad + K^2\left(f(a),f(b)\right)A\left(f(a),f(b)\right)L\left(f(a),f(b)\right)+8
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu (4.6.14) eşitsizliğinin sol tarafındaki $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ifadesi yerine Hadamard eşitsizliğinde olduğu gibi daha küçüğü olan $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ifadesi yazılır ve eşitsizlik $1/8$ ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
&L\left(f(a),f(b)\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{8(b-a)}\int_a^b f^4(x)\,dx \\
&\quad + \frac{1}{8}K^2\left(f(a),f(b)\right)A\left(f(a),f(b)\right)L\left(f(a),f(b)\right)+1
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.3. $I\subset\mathbb{R}$, $a,b\in I$, $a<b$ olmak üzere $f,g:I\to(0,\infty)$ artan ve log–konveks iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)L\left(g(a),g(b)\right)+g\left(\frac{a+b}{2}\right)L\left(f(a),f(b)\right) \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx + L\left(G^2\left(f(a),g(a)\right),G^2\left(f(b),g(b)\right)\right)
\end{aligned}
\qquad (4.6.15)
$$

eşitsizliği vardır. Burada $L\left(f(a),f(b)\right)=\begin{cases} f(a) & , \quad f(a)=f(b) \\ \dfrac{f(a)-f(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)}, & \quad f(a)\neq f(b)\end{cases}$ logaritmik ortalamayı, $G\left(f(a),f(b)\right)=\sqrt{f(a)\,f(b)}$ geometrik ortalamayı göstermektedir.

İspat: $f(a)\neq f(b)$ için f ve g, I reel aralığı üzerinde logaritmik konveks fonksiyonlar olduğundan her $a,b\in I$ ve her $t\in[0,1]$ için

$$f\left(ta+(1-t)b\right)\leq [f(a)]^{t}[f(b)]^{1-t} \tag{4.6.16}$$

$$g\left(ta+(1-t)b\right)\leq [g(a)]^{t}[g(b)]^{1-t} \tag{4.6.17}$$

yazılabilir. Her $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in\mathbb{R}$ ve $\alpha\leq\beta,\ \gamma\leq\theta$ için $(\alpha-\beta)(\gamma-\theta)\geq 0$ temel eşitsizliği kullanılarak (Manfrino *et. al.* 2009) her $a,b\in I$ ve her $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}&f\left(ta+(1-t)b\right)[g(a)]^{t}[g(b)]^{1-t}+g\left(ta+(1-t)b\right)[f(a)]^{t}[f(b)]^{1-t}\\ &\leq f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)+[f(a)]^{t}[f(b)]^{1-t}[g(a)]^{t}[g(b)]^{1-t}\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin t ye göre $[0,1]$ üzerinden integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)[g(a)]^{t}[g(b)]^{1-t}\,dt\\ &\quad+\int_0^1 g\left(ta+(1-t)b\right)[f(a)]^{t}[f(b)]^{1-t}\,dt\\ \leq B&=\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)dt\\ &\quad+\int_0^1[f(a)]^{t}[f(b)]^{1-t}[g(a)]^{t}[g(b)]^{1-t}\,dt\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

elde edilir. *A* ve *B* ifadelerinin ayrı ayrı çözümlerinde;

A ifadesi için f ve g nin artanlığı ve $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ifadesi yerine Hadamard eşitsizliğinde olduğu gibi daha küçüğü olan $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)[g(a)]^{t}[g(b)]^{1-t}\,dt\\ &\quad+\int_0^1 g\left(ta+(1-t)b\right)[f(a)]^{t}[f(b)]^{1-t}\,dt\\ &\geq\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt\int_0^1[g(a)]^{t}[g(b)]^{1-t}\,dt\\ &\quad+\int_0^1 g\left(ta+(1-t)b\right)dt\int_0^1[f(a)]^{t}[f(b)]^{1-t}\,dt\end{aligned} \tag{4.6.20}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

$$\int_0^1 \left[f(a)\right]^t \left[f(b)\right]^{1-t} dt = f(b)\int_0^1 \left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^t dt$$

$$= f(b)\left[\frac{\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^t}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]_0^1 = f(b)\frac{\frac{f(a)}{f(b)}-1}{\ln f(a)-\ln f(b)}$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)} = L\left(f(a), f(b)\right)$$

elde edilir. Bu hesaplamalar yardımıyla ve Hadamard eşitsizliğin sol tarafının kullanılmasıyla A ifadesi

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\left[g(a)\right]^t\left[g(b)\right]^{1-t} dt + \int_0^1 g\left(ta+(1-t)b\right)\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t} dt \\
&\geq \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt\int_0^1\left[g(a)\right]^t\left[g(b)\right]^{1-t} dt + \int_0^1 g\left(ta+(1-t)b\right)dt\int_0^1\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t} dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.L\left(g(a),g(b)\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx.L\left(f(a),f(b)\right) \\
&\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)L\left(g(a),g(b)\right) + g\left(\frac{a+b}{2}\right)L\left(f(a),f(b)\right)
\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

olur. Benzer şekilde, B ifadesi de

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)g\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
&\quad + \int_0^1 \left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}\left[g(a)\right]^t\left[g(b)\right]^{1-t} dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx + f(b)g(b)\int_0^1\left[\frac{f(a)g(a)}{f(b)g(b)}\right]^t dt
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+f(b)g(b)\left[\frac{\left(\frac{f(a)g(a)}{f(b)g(b)}\right)^t}{\ln\frac{f(a)g(a)}{f(b)g(b)}}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+\frac{f(a)g(a)-f(b)g(b)}{\ln f(a)g(a)-\ln f(b)g(b)} \tag{4.6.22}$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx+L\big(f(a)g(a),f(b)g(b)\big)$$

olur. Burada hesaplanan A ve B ifadeleri (4.6.19) da yerlerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.4. $I\subset\mathbb{R}$, $a,b\in I$, $a<b$ olmak üzere $f:I\to(0,\infty)$ artan ve log–konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx+A\big(f(a),f(b)\big)L\big(f(a),f(b)\big)+\frac{\psi(a,b)}{3}\\ &\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)L\big(f(a),f(b)\big)\\ &+2A\big(f(a),f(b)\big)L\big(f(a),f(b)\big)-L^2\big(f(a),f(b)\big)\\ &+\frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(b-x)f(x)dx+\frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b(x-a)f(x)dx\end{aligned} \tag{4.6.23}$$

eşitsizliği vardır. Burada $L\big(f(a),f(b)\big)=\frac{f(a)-f(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)}$, $f(a)\neq f(b)$, $A\big(f(a),f(b)\big)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ sırasıyla logaritmik ve aritmetik ortalamayı, $\psi(a,b)=f^2(a)+f(a)f(b)+f^2(b)$ yi göstermektedir.

İspat: $f(a)\neq f(b)$ için f, I reel aralığı üzerinde logaritmik konveks fonksiyon olduğundan, her $a,b\in I$ ve her $t\in[0,1]$ için

$$f\big(ta+(1-t)b\big)\leq[f(a)]^t[f(b)]^{1-t}\leq tf(a)+(1-t)f(b) \tag{4.6.24}$$

eşitsizliği yazılır. Her $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ için $\alpha\beta+\beta\theta+\theta\alpha \le \alpha^2+\beta^2+\theta^2$ temel eşitsizliği kullanılarak (Manfrino *et. al.* 2009) her $a,b \in I$ ve her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& f^2\left(ta+(1-t)b\right)+\left[f(a)\right]^{2t}\left[f(b)\right]^{2(1-t)} \\
& \quad +t^2 f^2(a)+2t(1-t)f(a)f(b)+(1-t)^2 f^2(b) \\
& \ge f\left(ta+(1-t)b\right)\left[f(a)\right]^{t}\left[f(b)\right]^{1-t} \\
& \quad +t\left[f(a)\right]^{1+t}\left[f(b)\right]^{1-t}+(1-t)\left[f(a)\right]^{t}\left[f(b)\right]^{2-t} \\
& \quad +f(a)tf\left(ta+(1-t)b\right)+f(b)(1-t)f\left(ta+(1-t)b\right)
\end{aligned} \tag{4.6.25}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f^2\left(ta+(1-t)b\right)dt+\int_0^1\left[f(a)\right]^{2t}\left[f(b)\right]^{2(1-t)}dt \\
& \quad + f^2(a)\int_0^1 t^2dt+2f(a)f(b)\int_0^1 t(1-t)dt+f^2(b)\int_0^1(1-t)^2dt \\
\ge B &= \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\left[f(a)\right]^{t}\left[f(b)\right]^{1-t}dt \\
& \quad +\int_0^1 t\left[f(a)\right]^{1+t}\left[f(b)\right]^{1-t}dt+\int_0^1(1-t)\left[f(a)\right]^{t}\left[f(b)\right]^{2-t}dt \\
& \quad + f(a)\int_0^1 tf\left(ta+(1-t)b\right)dt+f(b)\int_0^1(1-t)f\left(ta+(1-t)b\right)dt
\end{aligned} \tag{4.6.26}$$

elde edilir. *A* ve *B* ifadelerinin ayrı ayrı çözümlerinde;

A ifadesi için her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa, $x=ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi için

$$\int_0^1 f^2\left(ta+(1-t)b\right)dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx$$

ve $2t=u$ değişken değiştirmesi için

$$\int_0^1 \left[f(a)\right]^{2t}\left[f(b)\right]^{2(1-t)}dt$$

$$= f^2(b)\int_0^1 \left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{2t} dt = \frac{1}{2} f^2(b)\int_0^2 \left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{u} du$$

$$= \frac{1}{2} f^2(b)\left[\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^u}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]_0^2 = \frac{1}{2} f^2(b)\left[\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^2 - 1}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{f^2(a)-f^2(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)} = \frac{\left(f(a)+f(b)\right)\left(f(a)-f(b)\right)}{2\left(\ln f(a)-\ln f(b)\right)}$$

$$= A\left(f(a), f(b)\right)L\left(f(a), f(b)\right)$$

ve

$$f^2(a)\int_0^1 t^2 dt + 2f(a)f(b)\int_0^1 t(1-t)dt + f^2(b)\int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$= f^2(a)\frac{1}{3} + 2f(a)f(b)\frac{1}{6} + f^2(b)\frac{1}{3}$$

$$= \frac{f^2(a)+f(a)f(b)+f^2(b)}{3} = \frac{\psi(a,b)}{3}$$

yazılır. Böylece A ifadesi

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f^2\left(ta+(1-t)b\right)dt + \int_0^1 \left[f(a)\right]^{2t}\left[f(b)\right]^{2(1-t)}dt \\ &+ f^2(a)\int_0^1 t^2 dt + 2f(a)f(b)\int_0^1 t(1-t)dt + f^2(b)\int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx + A\left(f(a), f(b)\right)L\left(f(a), f(b)\right) \\ &+ \frac{f^2(a)+f(a)f(b)+f^2(b)}{3} \end{aligned} \tag{4.6.27}$$

elde edilir.

B ifadesinde de f nin artanlığı ve Hadamard eşitsizliğinin daha küçük olan sol tarafı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}dt \\
&\geq \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)dt\int_0^1\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}dt \\
&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\frac{f(a)-f(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)}\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)L\left(f(a),f(b)\right)
\end{aligned}
\tag{4.6.28}
$$

ve $t=u,\ \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt=dv$ değişkenleri yardımıyla kısmi integrasyon kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 t\left[f(a)\right]^{1+t}\left[f(b)\right]^{1-t}dt=f(a)f(b)\int_0^1 t\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt \\
&=f(a)f(b)\left\{\left[\frac{t\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]_0^1-\frac{1}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\int_0^1\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt\right\} \\
&=f(a)f(b)\left\{\frac{\frac{f(a)}{f(b)}}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}-\frac{1}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\left[\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]_0^1\right\} \\
&=f(a)f(b)\left\{\frac{\frac{f(a)}{f(b)}}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}-\frac{\frac{f(a)}{f(b)}-1}{\left(\ln\frac{f(a)}{f(b)}\right)^2}\right\} \\
&=\frac{f^2(a)}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}-\frac{f^2(a)-f(a)f(b)}{\left(\ln\frac{f(a)}{f(b)}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{4.6.29}
$$

eşitliği kolaylıkla yazılabilir. Benzer şekilde $1-t=u,\ \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt=dv$ değişkenleri yardımıyla kısmi integrasyon kullanılarak

$$\int_0^1 (1-t)\left[f(a)\right]^t \left[f(b)\right]^{2-t} dt = f^2(b)\int_0^1 (1-t)\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt$$

$$= f^2(b)\left\{\left[\frac{(1-t)\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]_0^1 - \frac{1}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\int_0^1\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt\right\} \tag{4.6.30}$$

$$= f^2(b)\left\{\frac{-1}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}} + \frac{1}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\left[\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}}\right]_0^1\right\}$$

$$= f^2(b)\left\{\frac{-1}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}} + \frac{\frac{f(a)}{f(b)}-1}{\left(\ln\frac{f(a)}{f(b)}\right)^2}\right\} = \frac{-f^2(b)}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}} + \frac{f(a)f(b)-f^2(b)}{\left(\ln\frac{f(a)}{f(b)}\right)^2}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik toplanırsa

$$\int_0^1 t\left[f(a)\right]^{1+t}\left[f(b)\right]^{1-t} dt + \int_0^1 (1-t)\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{2-t} dt$$

$$= \frac{f^2(a)}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}} - \frac{f^2(a)-f(a)f(b)}{\left(\ln\frac{f(a)}{f(b)}\right)^2} + \frac{-f^2(b)}{\ln\frac{f(a)}{f(b)}} + \frac{f(a)f(b)-f^2(b)}{\left(\ln\frac{f(a)}{f(b)}\right)^2}$$

$$= \frac{f^2(a)-f^2(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)} - \left(\frac{f(a)-f(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)}\right)^2 \tag{4.6.31}$$

$$= \frac{2\big(f(a)+f(b)\big)\big(f(a)-f(b)\big)}{2\big(\ln f(a)-\ln f(b)\big)} - \left(\frac{f(a)-f(b)}{\ln f(a)-\ln f(b)}\right)^2$$

$$= 2A\big(f(a),f(b)\big)L\big(f(a),f(b)\big) - L^2\big(f(a),f(b)\big)$$

yazılır. Son olarak $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f(a)\int_0^1 tf\big(ta+(1-t)b\big)dt = \frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (b-x)f(x)dx \tag{4.6.32}$$

$$f(b)\int_0^1 (1-t)f\big(ta+(1-t)b\big)dt = \frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)f(x)dx \tag{4.6.33}$$

eşitlikleri kolaylıkla görülebilir. B ifadesine ait bu çözümler sırasıyla yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
B =& \int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right)\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{1-t}dt \\
&+\int_0^1 t\left[f(a)\right]^{1+t}\left[f(b)\right]^{1-t}dt+\int_0^1(1-t)\left[f(a)\right]^t\left[f(b)\right]^{2-t}dt \\
&+f(a)\int_0^1 tf\left(ta+(1-t)b\right)dt+f(b)\int_0^1(1-t)f\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
\geq& f\left(\frac{a+b}{2}\right)L\left(f(a),f(b)\right) \\
&+2A\left(f(a),f(b)\right)L\left(f(a),f(b)\right)-L^2\left(f(a),f(b)\right) \\
&+\frac{f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b(b-x)f(x)dx+\frac{f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b(x-a)f(x)dx
\end{aligned}
\tag{4.6.34}
$$

elde edilir. A ve B ifadeleri yukarıda yerlerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

4.7. *m* – konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Teorem 4.7.1. I, $I\subset[0,\infty)$ olacak şekilde açık reel bir aralık $a,b\in I$, $0\leq a<b<\infty$ ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $m\in(0,1]$ olmak üzere f, $[a,b]$ üzerinde *m*–konveks fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a)+mf(b)}{2}-\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)dx \\
&\geq\begin{cases}\left|\dfrac{m+1}{2}f(a)-\dfrac{1}{mb-a}\displaystyle\int_a^{mb}\left|f(x)\right|dx\right|, & f(a)=f(b) \text{ ise} \\[2ex] \left|\dfrac{1}{mf(b)-f(a)}\displaystyle\int_{f(a)}^{mf(b)}|x|dx-\dfrac{1}{mb-a}\displaystyle\int_a^{mb}\left|f(x)\right|dx\right|, & f(a)\neq f(b) \text{ ise}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.7.1}
$$

ve

$$\frac{mf(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-ma}\int_{ma}^{b} f(x)\,dx$$

$$\geq \begin{cases} \left| \left|\frac{m+1}{2} f(b)\right| - \frac{1}{b-ma}\int_{ma}^{b} \left| f(x)\right| dx \right|, & f(a)=f(b) \text{ ise} \\ \left| \frac{1}{f(b)-mf(a)}\int_{f(a)}^{f(b)} |x|\,dx - \frac{1}{b-ma}\int_{ma}^{b} \left| f(x)\right| dx \right|, & f(a)\neq f(b) \text{ ise} \end{cases} \quad (4.7.2)$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat: f nin m–konveksliğinden ve modül eşitsizliğinin süreklilik özelliğinden her $a,b\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned} & tf(a)+m(1-t)f(b)-f\left(ta+m(1-t)b\right) \\ &= \left| tf(a)+m(1-t)f(b)-f\left(ta+m(1-t)b\right)\right| \\ &\geq \left| \left| tf(a)+m(1-t)f(b)\right| - \left| f\left(ta+m(1-t)b\right)\right| \right| \geq 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & f(a)\int_0^1 t\,dt + mf(b)\int_0^1 (1-t)\,dt - \int_0^1 f\left(ta+m(1-t)b\right)dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \left| tf(a)+m(1-t)f(b)\right| dt - \int_0^1 \left| f\left(ta+m(1-t)b\right)\right| dt \right| \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

elde edilir. (4.7.3) deki her bir integral ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$\int_0^1 t\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}, \quad (4.7.4)$$

olur, $x = ta+m(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 f\left(ta+m(1-t)b\right)dt = \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx, \quad (4.7.5)$$

$$\int_0^1 \left| tf(a)+m(1-t)f(b)\right| dt = \begin{cases} \frac{m+1}{2} f(a), & f(a)=f(b) \text{ ise} \\ \frac{1}{mf(b)-f(a)}\int_{f(a)}^{mf(b)} |x|\,dx, & f(a)\neq f(b) \text{ ise} \end{cases}, \quad (4.7.6)$$

elde edilir. Son olarak

$$\int_0^1 \left| f\left(ta+m(1-t)b\right)\right| dt = \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} \left| f(x)\right| dx \tag{4.7.7}$$

yazılır. Bu eşitlikler sırasıyla yerlerine yazılırsa (4.7.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlanmış olur. (4.7.2) eşitsizliğinin ispatı da benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir.

Uyarı 4.7.2. Teorem 4.7.1 deki eşitsizliklerde $m=1$ olarak seçilirse (4.7.1-2) eşitsizlikleri (3.2.5) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.7.3. Yukarıdaki teoremdeki şartların yanı sıra, $\forall x \in [a,b]$ için $f(a+mb-x) = f(x)$ eşitliği ile birlikte

$$f(mb) - \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx \geq \left| \left| f(mb)\right| - \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} \left| f(x)\right| dx \right| \tag{4.7.8}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 4.7.4. I, $I \subset [0,\infty)$ olacak şekilde açık reel bir aralık $a,b \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $m \in (0,1]$ olmak üzere f, $[a,b]$ üzerinde *m*–konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx - f\left(\frac{a+mb}{2}\right) \\ &\geq \left| \left| \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} \left| \frac{f(x) - f(a+mb-x)}{2} \right| dx \right| - \left| f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right| \right| \end{aligned} \tag{4.7.9}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: f nin konveksliğinden ve modül eşitsizliğinin süreklilik özelliğinden her $x, y \in [0,\infty)$ için

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \left| \left| \frac{f(x)+f(y)}{2}\right| - \left| f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \right|$$

yazılabilir.

Yukarıdaki eşitsizlikte $t\in[0,1]$ için x yerine $ta+m(1-t)b$ ve y yerine $(1-t)a+mtb$ yazılırsa, her $t\in[0,1]$ için

$$\frac{f\left(ta+m(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+mtb\right)}{2}-f\left(\frac{ta+m(1-t)b+(1-t)a+mtb}{2}\right)$$
$$=\frac{f\left(ta+m(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+mtb\right)}{2}-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)$$
$$\geq\left|\left|\frac{f\left(ta+m(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+mtb\right)}{2}\right|-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t ye göre integrali alınırsa

$$\frac{\int_0^1 f\left(ta+m(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+mtb\right)dt}{2}-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)$$
$$\geq\left|\int_0^1\left|\frac{f\left(ta+m(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+mtb\right)}{2}\right|dt-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right| \qquad (4.7.10)$$

elde edilir.

Üstelik;

$$\int_0^1 f\left(ta+m(1-t)b\right)dt=\int_0^1 f\left((1-t)a+mtb\right)dt=\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx \qquad (4.7.11)$$

olduğu açıktır ve tekrar $x=ta+m(1-t)b$ alınırsa $(1-t)a+mtb=a+mb-x$ yazılabileceği aşikardır. Buradan

$$\int_0^1\left|\frac{f\left(ta+m(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+mtb\right)}{2}\right|dt$$
$$=\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\frac{f(x)+f(a+mb-x)}{2}\right|dx \qquad (4.7.12)$$

yazılır. Bu eşitlikler (4.7.10) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{\int_0^1 f\left(ta+m(1-t)b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t)a+mtb\right)dt}{2}-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx}{2}-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)$$

$$\geq\left|\int_0^1\left|\frac{f\left(ta+m(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+mtb\right)}{2}\right|dt-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|$$

$$=\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\frac{f(x)+f(a+mb-x)}{2}\right|dx-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Uyarı 4.7.5. Teorem 4.7.4 deki eşitsizlikte $m=1$ olarak seçilirse (4.7.9) eşitsizliği (3.2.6) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.7.6. Yukarıdaki teoremdeki şartların yanı sıra, $\forall x\in[a,b]$ için $f(a+mb-x)=f(x)$ eşitliği ile birlikte

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\\
&\geq\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\frac{f(x)+f(a+mb-x)}{2}\right|dx-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|\\
&=\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\frac{2f(x)}{2}\right|dx-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|\\
&=\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|f(x)\right|dx-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|
\end{aligned}\tag{4.7.13}$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 4.7.7. I bir reel sayı aralığı ve $a,b\in I$, $a<b$ için I^o üzerinde $f:I\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f'\in L^1([a,b])$ ve $m,t\in[0,1]$ ise

$$\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx = \frac{mb-a}{2}\int_0^1 (1-2mt)\, f'\big(ta+m(1-t)b\big)\,dt \tag{4.7.14}$$

eşitliği vardır. Burada I^o, I reel sayı aralığının içini göstermektedir.

İspat: Kısmi integrasyon yöntemi uygulanarak $(1-2mt)=u$ olarak seçilirse $-2mdt=du$ ve $f'\big(ta+m(1-t)b\big)dt=dv$ olarak seçilirse $\dfrac{f\big(ta+m(1-t)b\big)}{a-mb}=v$ olur, buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{mb-a}{2}\int_0^1 (1-2mt)\, f'\big(ta+m(1-t)b\big)\,dt \\
&= \frac{mb-a}{2}\left\{\left[(1-2mt)\frac{f\big(ta+m(1-t)b\big)}{a-mb}\right]_0^1 + 2m\int_0^1 \frac{f\big(ta+m(1-t)b\big)}{a-mb}\,dt\right\} \\
&= \frac{mb-a}{2}\left\{\frac{(1-2m)f(a)-f(mb)}{a-mb}-\frac{2m}{mb-a}\int_0^1 f\big(ta+m(1-t)b\big)\,dt\right\} \\
&= \frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-m\int_0^1 f\big(ta+m(1-t)b\big)\,dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte f fonksiyonu için $x=ta+m(1-t)b$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-m\int_0^1 f\big(ta+m(1-t)b\big)\,dt \\
&= \frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 4.7.8. Lemma 4.7.7 deki eşitlikte $m=1$ olarak seçilirse (4.7.14) eşitliği (3.2.15) eşitliğine dönüşür.

Teorem 4.7.9. I , $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde açık reel bir aralık $a,b\in I,\ 0\le a<b<\infty$ ve $f:I\to\mathbb{R}$, I^o de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $f'\in L^1([a,b])$ olsun. $m\in(0,1]$ ve $q\ge 1$ için $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde m–konveks fonksiyon ise bu durumda

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)dx\right|\\&\le\frac{mb-a}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{2m-1}{4}|f'(a)|^q+\frac{m}{4}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\\&=(mb-a)m^{\frac{q-1}{q}}2^{-\frac{2q+1}{q}}\left[(2m-1)|f'(a)|^q+m|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}\tag{4.7.15}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Farzedelim ki $q=1$ olsun. Lemma 4.7.7 den

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)dx\right|\\&\le\frac{mb-a}{2}\int_0^1|1-2mt|\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|dt\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|$, $[a,b]$ aralığı üzerinde m–konveks olduğundan, her $t\in[0,1]$ için

$$\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|\le t\left|f'(a)\right|+m(1-t)\left|f'(b)\right|$$

yazılır. Böylece yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)dx\right|\\&\le\frac{mb-a}{2}\int_0^1|1-2mt|\left[t\left|f'(a)\right|+m(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt\end{aligned}\tag{4.7.16}$$

olur. Bu eşitsizlikte her $m\in(0,1]$, $t\in[0,1]$ için $u=mt$, $\dfrac{du}{m}=dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa $u\in[0,1]$ olur ve

$$\int_0^1 |1-2mt|\left[t\left|f'(a)\right|+m(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt$$
$$=\frac{1}{m}\int_0^1 |1-2u|\left[\frac{u}{m}\left|f'(a)\right|+(m-u)\left|f'(b)\right|\right]du$$

elde edilir. Buradan mutlak değer özelliği kullanılırsa,

$$\int_0^1 |1-2u|\left[\frac{u}{m}\left|f'(a)\right|+(m-u)\left|f'(b)\right|\right]du$$
$$=\int_0^{1/2} (1-2u)\left[\frac{u}{m}\left|f'(a)\right|+(m-u)\left|f'(b)\right|\right]du \tag{4.7.17}$$
$$+\int_{1/2}^1 (2u-1)\left[\frac{u}{m}\left|f'(a)\right|+(m-u)\left|f'(b)\right|\right]du$$

yazılır. Burada her bir ifade ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\int_0^{1/2} (1-2u)\left[\frac{u}{m}\left|f'(a)\right|+(m-u)\left|f'(b)\right|\right]du$$
$$=\frac{\left|f'(a)\right|}{m}\int_0^{1/2}\left(u-2u^2\right)du+\left|f'(b)\right|\int_0^{1/2}\left(m-u-2mu+2u^2\right)du$$
$$=\frac{\left|f'(a)\right|}{m}\left[\frac{u^2}{2}-\frac{2u^3}{3}\right]_0^{1/2}+\left|f'(b)\right|\left[mu-\frac{u^2}{2}-mu^2+\frac{2u^3}{3}\right]_0^{1/2}$$
$$=\frac{3m-2m^2}{24}\left|f'(a)\right|+\frac{9m^2-4m^3}{24}\left|f'(b)\right|$$

ve

$$\int_{1/2}^1 (2u-1)\left[\frac{u}{m}\left|f'(a)\right|+(m-u)\left|f'(b)\right|\right]du$$
$$=\frac{\left|f'(a)\right|}{m}\int_{1/2}^1\left(2u^2-u\right)du+\left|f'(b)\right|\int_{1/2}^1\left(2mu-2u^2-m+u\right)du$$
$$=\frac{\left|f'(a)\right|}{m}\left[\frac{2u^3}{3}-\frac{u^2}{2}\right]_{1/2}^1+\left|f'(b)\right|\left[mu^2-\frac{2u^3}{3}-mu+\frac{u^2}{2}\right]_{1/2}^1$$
$$=\frac{14m^2-9m}{24}\left|f'(a)\right|+\frac{4m^3-3m^2}{24}\left|f'(b)\right|$$

elde edilir. Bu eşitlikler (4.7.16-17) ifadelerinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{mb-a}{2}\int_0^1 |1-2mt|\left[t\left|f'(a)\right|+m(1-t)\left|f'(b)\right|\right]dt$$

$$=\frac{mb-a}{2}\frac{1}{m}\left\{\left(\frac{3m-2m^2}{24}+\frac{14m^2-9m}{24}\right)\left|f'(a)\right|\right.$$

$$\left.\left(\frac{9m^2-4m^3}{24}+\frac{4m^3-3m^2}{24}\right)\left|f'(b)\right|\right\}$$

$$=\frac{mb-a}{2}\left\{\frac{2m-1}{4}\left|f'(a)\right|+\frac{m}{4}\left|f'(b)\right|\right\}$$

elde edilir. Bu $q=1$ olması durumu için ispatı verir.

Farzedelim ki $q>1$ olsun. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $q>1$ ve $p=\frac{q}{q-1}$ için iyi bilinen Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^1 |1-2mt|\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|dt$$

$$=\int_0^1 |1-2mt|^{1-\frac{1}{q}}|1-2mt|^{\frac{1}{q}}\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|dt \tag{4.7.18}$$

$$\leq\left(\int_0^1 |1-2mt|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2mt|\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılabilir. $|f'|$, $[a,b]$ aralığı üzerinde *m*–konveks olduğundan, her $t\in[0,1]$ için

$$\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|^q\leq t\left|f'(a)\right|^q+m(1-t)\left|f'(b)\right|^q$$

yazılır. Böylece

$$\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\,dx\right|$$

$$\leq\frac{mb-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2mt|\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2mt|\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{mb-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2mt|\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2mt|\left[t\left|f'(a)\right|^q+m(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{mb-a}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}\right)\left|f'(a)\right|^{q}+\frac{m}{4}\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{mb-a}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{2m-1}{4}\left|f'(a)\right|^{q}+\frac{m}{4}\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=(mb-a)\,m^{\frac{q-1}{q}}\,2^{-\frac{2q+1}{q}}\left[(2m-1)\left|f'(a)\right|^{q}+m\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.7.10. Teorem 4.7.9 daki eşitsizlikte $m=1$ olarak seçilirse, (4.7.15) eşitsizliği (3.2.16) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.7.11. I, $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde açık reel bir aralık $a,b\in I$, $0\leq a<b<\infty$ ve $f:I\to\mathbb{R}$, I^{o} üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $f'\in L^{1}([a,b])$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığı üzerinde bazı sabit $m\in(0,1]$ ve $q>1$ için $|f'|$, m–konkav fonksiyon ise

$$\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_{a}^{mb}f(x)\,dx\right| \leq \frac{mb-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}m^{\frac{1}{q}}\left[\left|f'\left(\frac{a+3mb}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+mb}{4}\right)\right|\right] \tag{4.7.19}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Lemma 4.7.7 den

$$\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_{a}^{mb}f(x)\,dx\right| \leq \frac{mb-a}{2}\int_{0}^{1}|1-2mt|\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|dt \tag{4.7.20}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte her $m\in(0,1]$, $t\in[0,1]$ için $u=mt$, $\frac{du}{m}=dt$ değişken değiştirmesi yapılırsa $u\in[0,1]$ olur ve

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |1-2mt|\left|f'\left(ta+m(1-t)b\right)\right|dt\\&=\frac{1}{m}\int_0^1 |1-2u|\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\end{aligned} \tag{4.7.21}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |1-2u|\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\\&=\int_0^{1/2}(1-2u)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\\&+\int_{1/2}^1(2u-1)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\end{aligned} \tag{4.7.22}$$

elde edilir. $q>1$ ve $p=\dfrac{q}{q-1}$ için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&\int_0^{1/2}(1-2u)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\\&\le\left(\int_0^{1/2}(1-2u)^{\frac{q}{q-1}}du\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{1/2}\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{4.7.23}$$

ve

$$\begin{aligned}&\int_{1/2}^1(2u-1)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\\&\le\left(\int_{1/2}^1(2u-1)^{\frac{q}{q-1}}du\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{1/2}^1\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{4.7.24}$$

eşitsizlikleri yazılır. (4.7.23-24) eşitsizliklerinin sağ tarafları ayrı ayrı çözümlenirse, ilk olarak

$$\int_0^{1/2}(1-2u)^{\frac{q}{q-1}}du=\int_{1/2}^1(2u-1)^{\frac{q}{q-1}}du=\frac{q-1}{2(2q-1)} \tag{4.7.25}$$

olduğu kolayca görülür.

$|f'|$, $[a,b]$ aralığı üzerinde m–konkav olduğundan her $t\in[0,1]$ için Jensen integral eşitsizliği kullanılarak (4.7.22) deki ifade

$$\int_0^{1/2}\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du$$

$$=\int_0^{1/2}u^0\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du$$

$$\leq\left(\int_0^{1/2}u^0du\right)\left|f'\left(\frac{1}{\int_0^{1/2}u^0du}\int_0^{1/2}\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)du\right)\right|^q$$

$$=\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{2}{m}\left[\frac{u^2}{2m}a+mbu-\frac{u^2}{2}b\right]_0^{1/2}\right)\right|^q \quad (u=mt)$$

$$=\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{2}{m}\left[\frac{m^2t^2}{2m}a+m^2tb-\frac{m^2t^2}{2}b\right]_0^{1/2}\right)\right|^q$$

$$=\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{a+3mb}{4}\right)\right|^q \tag{4.7.26}$$

ve benzer olarak (4.7.23) deki ifade

$$\int_{1/2}^{1}\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du$$

$$=\int_{1/2}^{1}u^0\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du$$

$$\leq\left(\int_{1/2}^{1}u^0du\right)\left|f'\left(\frac{1}{\int_{1/2}^{1}u^0du}\int_{1/2}^{1}\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)du\right)\right|^q$$

$$=\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{2}{m}\left[\frac{u^2}{2m}a+mbu-\frac{u^2}{2}b\right]_{1/2}^{1}\right)\right|^q \quad (u=mt)$$

$$=\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{2}{m}\left[\frac{m^2t^2}{2m}a+m^2tb-\frac{m^2t^2}{2}b\right]_{1/2}^{1}\right)\right|^q$$

$$=\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{3a+mb}{4}\right)\right|^q \tag{4.7.27}$$

şeklinde yazılabilir. (4.7.26-27) de elde edilen iki ifade ve (4.7.25) deki eşitlik (4.7.23) ve (4.7.24) deki yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{1/2}(1-2u)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\\
&\le\left(\int_0^{1/2}(1-2u)^{\frac{q}{q-1}}du\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{1/2}\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le\left(\frac{q-1}{2(2q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{a+3mb}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}m^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3mb}{4}\right)\right|\right)
\end{aligned}
\tag{4.7.28}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1}(2u-1)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\\
&\le\left(\int_{1/2}^{1}(2u-1)^{\frac{q}{q-1}}du\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{1/2}^{1}\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|^q du\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le\left(\frac{q-1}{2(2q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{3a+mb}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}m^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{3a+mb}{4}\right)\right|\right)
\end{aligned}
\tag{4.7.29}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. Elde edilen (4.7.28) ve (4.7.29) eşitsizlikleri (4.7.22) ve dolayısıyla (4.7.20) de yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)dx\right|\\
&\le\frac{mb-a}{2}\int_0^1|1-2mt|\left|f'(ta+m(1-t)b)\right|dt\\
&=\frac{mb-a}{2}\left\{\int_0^{1/2}(1-2u)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du+\int_{1/2}^{1}(2u-1)\left|f'\left(\frac{u}{m}a+(m-u)b\right)\right|du\right\}\\
&\le\frac{mb-a}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}m^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3mb}{4}\right)\right|\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}m^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{3a+mb}{4}\right)\right|\right)\right\}\\
&=\frac{mb-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}m^{\frac{1}{q}}\left[\left|f'\left(\frac{a+3mb}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+mb}{4}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.8. Özel Ortalamalar için Uygulamalar

Bu kısımda önceki başlıklarda elde edilen integral eşitsizlikleri için iki pozitif reel sayının özel ortalamalarına ait uygulamalar verilecektir.

4.1 başlığı altında konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni eşitsizliklere ait birkaç önerme;

Önerme 4.8.1. $0<a<b$ olsun. Böylece

$$\frac{4A(a,b)}{L(a,b)} \leq \frac{2K^2(a,b)}{3G^2(a,b)} + \frac{10}{3} \tag{4.8.1}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Eğer Teorem 4.1.1 de konveks fonksiyon olarak $f(x)=\dfrac{1}{x}$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{a(b-a)^2}\int_a^b\left(\frac{b}{x}-1\right)dx + \frac{2}{b(b-a)^2}\int_a^b\left(1-\frac{a}{x}\right)dx \\
&= \frac{2}{a(b-a)^2}\left[b(\ln b-\ln a)-(b-a)\right] \\
&\quad + \frac{2}{b(b-a)^2}\left[(b-a)-a(\ln b-\ln a)\right] \\
&= \frac{\ln b-\ln a}{b-a}\,\frac{4\left(\frac{a+b}{2}\right)}{ab} - \frac{2}{ab} = \frac{4A(a,b)-2L(a,b)}{L(a,b)G^2(a,b)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{3}\,\frac{a^2+b^2+ab}{a^2b^2} \\
&= \frac{1}{ab} + \frac{1}{3}\,\frac{2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)+ab}{(ab)^2} = \frac{2\mathrm{K}^2(\mathrm{a,b})+4\mathrm{G}^2(\mathrm{a,b})}{3\mathrm{G}^4(\mathrm{a,b})}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.1) eşitsizliğinden de görüleceği üzere P ifadesi R ifadesinden daha küçük veya eşittir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.8.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Önerme 4.8.2. $0<a<b$ olsun. Böylece

$$\frac{1}{L(a,b)}\le\frac{1}{2A(a,b)}+\frac{A(a,b)}{4G^2(a,b)}+\frac{A(a,b)\left(K^2(a,b)+2G^2(a,b)\right)}{12G^4(a,b)} \qquad (4.8.2)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Eğer Teorem 4.1.2 de konveks fonksiyon olarak $f(x)=\frac{1}{x}$ seçilirse;

$$U=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{1}{x}dx=\frac{1}{L(a,b)}$$

ve

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}\frac{2}{a+b}+\frac{1}{4\frac{2}{a+b}}\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{24\frac{2}{a+b}}\frac{a^2+b^2+4ab}{a^2b^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{A(a,b)}+\frac{1}{4\frac{1}{A(a,b)}}\frac{1}{G^2(a,b)}+\frac{1}{24\frac{1}{A(a,b)}}\frac{2K^2(a,b)+4G^2(a,b)}{G^4(a,b)}\\&=\frac{1}{2A(a,b)}+\frac{A(a,b)}{4G^2(a,b)}+\frac{A(a,b)\left(K^2(a,b)+2G^2(a,b)\right)}{12G^4(a,b)}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.9) eşitsizliğinden de görüleceği üzere U ifadesi V ifadesinden daha küçük veya eşittir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.8.2) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

4.2 başlığı altında konveks fonksiyonlar için Chebyshev eşitsizliğinin kullanılmasıyla elde edilen yeni eşitsizlikler için birkaç önerme;

Önerme 4.8.3. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{4A(a,b)}{L(a,b)} \le \frac{2K^2(a,b)}{3G^2(a,b)} + \frac{10}{3} \tag{4.8.3}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.2.1 de konveks fonksiyon olarak $f(x) = g(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{3}\frac{a^2+b^2+ab}{a^2b^2} \\
&= \frac{1}{ab} + \frac{1}{3}\frac{2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)+ab}{(ab)^2} \\
&= \frac{2K^2(a,b) + 4G^2(a,b)}{3G^4(a,b)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{a(b-a)^2}\int_a^b \left(\frac{b}{x} - 1\right)dx + \frac{1}{b(b-a)^2}\int_a^b \left(1 - \frac{a}{x}\right)dx \\
&\quad + \frac{1}{a(b-a)^2}\int_a^b \left(\frac{b}{x} - 1\right)dx + \frac{1}{b(b-a)^2}\int_a^b \left(1 - \frac{a}{x}\right)dx \\
&= \frac{2}{a(b-a)^2}\int_a^b \left(\frac{b}{x} - 1\right)dx + \frac{2}{b(b-a)^2}\int_a^b \left(1 - \frac{a}{x}\right)dx \\
&= \frac{2}{a(b-a)^2}\left[b(\ln b - \ln a) - (b-a)\right] \\
&\quad + \frac{2}{b(b-a)^2}\left[(b-a) - a(\ln b - \ln a)\right] \\
&= \frac{\ln b - \ln a}{b-a}\,\frac{4\left(\frac{a+b}{2}\right)}{ab} - \frac{2}{ab} \\
&= \frac{4A(a,b) - 2L(a,b)}{L(a,b)G^2(a,b)}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.1) eşitsizliğinden de görüleceği üzere ξ ifadesi τ ifadesinden daha büyük veya eşittir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.8.3) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır. Bu eşitsizliğin anlaşılması açışından aşağıdaki çizelge faydalı olacaktır.

Çizelge 4.4. $\frac{4A(a,b)}{L(a,b)} \leq \frac{2K^2(a,b)}{3G^2(a,b)} + \frac{10}{3}$ eşitsizliği çizelgesi

a	b	ξ	τ
		$\frac{2K^2(a,b)+4G^2(a,b)}{3G^4(a,b)}$	$\frac{4A(a,b)-2L(a,b)}{L(a,b)G^2(a,b)}$
4,10	5,00	9.8203×10^{-2}	9.8201×10^{-2}
4,91	5,00	8.1471×10^{-2}	8.1471×10^{-2}
4,991	5,00	8.0144×10^{-2}	8.0144×10^{-2}
4,00	5,00	0.10083	0.10083
4,00	15,00	4.4537×10^{-2}	4.2768×10^{-2}
4,00	150,00	0.02307	9.4098×10^{-3}
4,00	1500,00	2.1056×10^{-2}	1.6529×10^{-3}
0,254	1500,00	5.1702	4.0350×10^{-2}
0,254	0,255	30.879	30.879
4,10	0,255	6.4202	4.1050

Önerme 4.8.4. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{2}{3}+\frac{K^2(a,b)}{3G^2(a,b)}=\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{K^2(a^2,b^2)}{3G^2(a,b)}+\frac{2K^2(a,b)}{3}-G^2(a,b)\right) \tag{4.8.4}$$

eşitliği vardır.

İspat: Teorem 4.2.1 de konveks fonksiyon olarak $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, $x>0$ seçilirse;

$$U=\frac{1}{b-a}\int_a^b dx+\frac{2}{3}+\frac{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}{6}$$
$$=1+\frac{2}{3}+\frac{b^2+a^2}{6ab}=\frac{5}{3}+\frac{K^2(a,b)}{3G^2(a,b)}$$

ve

$$V=\frac{a}{(b-a)^2}\int_a^b\left(\frac{b}{x}-1\right)dx+\frac{b}{(b-a)^2}\int_a^b\left(1-\frac{a}{x}\right)dx$$
$$+\frac{1}{a(b-a)^2}\int_a^b\left(bx-x^2\right)dx+\frac{1}{b(b-a)^2}\int_a^b\left(x^2-ax\right)dx$$

$$=\frac{ab}{(b-a)^2}\left[\ln x\right]_a^b-\frac{a}{b-a}+\frac{b}{b-a}+\frac{ab}{(b-a)^2}\left[-\ln x\right]_a^b$$

$$+\frac{1}{a(b-a)^2}\left[\frac{bx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_a^b+\frac{1}{b(b-a)^2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_a^b$$

$$=1+\frac{1}{a(b-a)^2}\left(\frac{b^3}{6}-\frac{ba^2}{2}+\frac{a^3}{3}\right)+\frac{1}{b(b-a)^2}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{ab^2}{2}+\frac{a^3}{6}\right)$$

$$=1+\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{a^4+b^4}{6ab}+\frac{a^2+b^2}{3}-ab\right)$$

$$=1+\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{K^2\left(a^2,b^2\right)}{3G^2\left(a,b\right)}+\frac{2K^2\left(a,b\right)}{3}-G^2\left(a,b\right)\right)$$

elde edilir. Hesaplama programları yardımıyla $b>a>0$ olmak üzere $b-a=1$, $b-a>1$ ve $b-a<1$ durumlarının değerlendirilmesi sonucunda U ifadesinin V ifadesine eşit olduğu görülmektedir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.8.4) eşitliğinin ispatı tamamlanır. Aşağıda çizelgede a ve b sayılarının farklı seçimlerine ilişkin durumlar gösterilmektedir.

Çizelge 4.5. $\frac{2}{3}+\frac{K^2(a,b)}{3G^2(a,b)}=\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{K^2(a^2,b^2)}{3G^2(a,b)}+\frac{2K^2(a,b)}{3}-G^2(a,b)\right)$ eşitliği çizelgesi

a	b	U	V
		$\frac{2}{3}+\frac{K^2(a,b)}{3G^2(a,b)}$	$\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{K^2(a^2,b^2)}{3G^2(a,b)}+\frac{2K^2(a,b)}{3}-G^2(a,b)\right)$
4,91	*5,00*	*1,0001*	*1,0001*
4,51	*5,00*	*1,0018*	*1,0018*
4,01	*5,00*	*1,0081*	*1,0081*
4,00	*5,00*	*1,0083*	*1,0083*
14,00	*15,00*	*1,0008*	*1,0008*
10,00	*15,00*	*1,0278*	*1,0278*
6,00	*15,00*	*1,1500*	*1,1500*
4,00	*15,00*	*1,3361*	*1,3361*
6,00	*150,00*	*4,8400*	*4,8400*
6,00	*1500,00*	*42,334*	*42,334*
0,60	*1500,00*	*417,33*	*417,33*
0,60	*0,61*	*1,0000*	*1,0000*
0,60	*0,611*	*1,0001*	*1,0001*

4.3 başlığı altında s–konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni eşitsizlikler için birkaç önerme;

Hudzik ve Maligranda'nın s–konveks fonksiyonlar için vermiş olduğu örneğe tekrar baktığımızda, eğer $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir. Sonuç olarak $a = c = 0$, $b = 1$ ve $s = 1/2$ için $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(t) = t^{1/2}$, $f \in K_s^2$ dir.

Önerme 4.8.5. $a, b \in [0,1]$, $a < b$ olsun. Bu durumda

$$11K^2(a,b) + 7G^2(a,b) \leq \frac{4(b^3 - a^3)}{b-a} + \frac{6A^2(a,b)}{(b-a)^2} \tag{4.8.5}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Eğer $[a,b]$ üzerinde $t \in [0,1]$ ve $s_1, s_2 \in (0,1)$ için f, s_1–konveks ve g, s_2–konveks ise bu durumda Teorem 4.3.2 de f ve g fonksiyonları $f, g : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^{s_1}$, $g(x) = x^{s_2}$, $s_1 = s_2 = 1$ olarak seçersek;

$$\int_a^b \int_a^b \int_0^1 (tx + (1-t)y)^2 \, dtdydx \leq \frac{2(b-a)}{3} \int_a^b x^2 dx + \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{2\Gamma(4)} \left[a^2 + b^2 + 2ab\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{36}(b-a)^2 \left(11a^2 + 14ab + 11b^2\right) \leq \frac{2(b-a)}{9}\left(b^3 - a^3\right) + \frac{1}{12}(a+b)^2$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \left(11\left(a^2 + b^2\right) + 14ab\right) \leq 8(b-a)\left(b^3 - a^3\right) + 3(a+b)^2$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \left(22K^2(a,b) + 14G^2(a,b)\right) \leq 8(b-a)\left(b^3 - a^3\right) + 12A^2(a,b)$$

elde edilir. Şimdi bu eşitsizliğin her iki tarafı $\dfrac{1}{2(b-a)^2}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{2(b-a)^2}(b-a)^2\left(22K^2(a,b)+14G^2(a,b)\right)$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\left\{8(b-a)\left(b^3-a^3\right)+12A^2(a,b)\right\}$$
$$\Rightarrow 11K^2(a,b)+7G^2(a,b)\leq \frac{4\left(b^3-a^3\right)}{b-a}+\frac{6A^2(a,b)}{(b-a)^2}$$

elde edilir. Böylece (4.8.5) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Bu eşitsizlik, $0\leq a<b\leq 1$ için sağlandığı açıktır ve bunun doğruluğunu göstermek kolaydır. *s*–konveks fonksiyonların $[0,1]$ aralığında kullanışlı sonuçlar verdiğini ayrıca *a* ve *b* herhangi iki reel sayı olmak üzere $a<b$, $b-a\leq 1$ şartları altında da (4.8.5) eşitsizliğinin sağladığını göstermek için aşağıdaki çizelge verilmiştir.

Çizelge 4.6 $b-a\leq 1$ için $11K^2(a,b)+7G^2(a,b)\leq \frac{4\left(b^3-a^3\right)}{b-a}+\frac{6A^2(a,b)}{(b-a)^2}$ eşitsizliği

a	b	$11K^2(a,b)+7G^2(a,b)$	$\frac{4\left(b^3-a^3\right)}{b-a}+\frac{6A^2(a,b)}{(b-a)^2}$
1.00	*2.00*	*41. 500*	*41. 500*
1.10	*2.00*	*44. 055*	*47. 436*
1.21	*2.00*	*46. 993*	*56. 302*
1.321	*2.00*	*50. 092*	*69. 431*
1.50	*2.00*	*55. 375*	*110. 5*
1.75	*2.00*	*63. 344*	*379. 75*
1.875	*2.00*	*67. 586*	*1486. 6*
1.9	*2.00*	*68. 455*	*2327. 1*
1.9875	*2.00*	*71. 551*	1.5269×10^{5}
1.99	*2.00*	*71. 641*	2.3885×10^{5}
1.999	*2.00*	*71. 964*	2.3988×10^{7}
1.9999	*2.00*	*71. 996*	2.3999×10^{9}

Önerme 4.8.6. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ ve $b-a\geq 1$ olsun. Bu durumda

$$11K^2(a,b)+7G^2(a,b)\geq\frac{4(b^3-a^3)}{b-a}+\frac{6A^2(a,b)}{(b-a)^2} \qquad (4.8.6)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Önerme 4.8.5 in ispatına benzer şekilde kolaylıkla gösterilebilir.

Bu önermenin ispatında dikkat edilmesi gereken husus seçilen fonksiyonun $[0,1]$ üzerinde *s*–konveks oluşudur. Eğer aralığın boyu 1 birimden büyük seçilirse, o zaman fonksiyona ilişkin eşitsizlik *s*–konveksliğin bozulmasından dolayı yön değiştirecektir. Aşağıdaki çizelge bu durumun daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır.

Çizelge 4.7. $b-a\geq 1$ için $11K^2(a,b)+7G^2(a,b)\geq\frac{4(b^3-a^3)}{b-a}+\frac{6A^2(a,b)}{(b-a)^2}$ eşitsizliği

a	b	$11K^2(a,b)+7G^2(a,b)$	$\frac{4(b^3-a^3)}{b-a}+\frac{6A^2(a,b)}{(b-a)^2}$
1.00	2.00	41. 500	41. 500
0.9999	2.00	41. 498	41. 495
0.999	2.00	41. 475	41. 448
0.99	2.00	41. 251	40. 986
0.9875	2.00	41. 188	40. 860
0.9	2.00	39. 055	36. 866
0.875	2.00	38. 461	35. 859
0.75	2.00	35. 594	31. 51
0.50	2.00	30. 375	25. 167
0.1321	2.00	23. 945	19. 081
0.121	2.00	23. 775	18. 938
0.10	20.00	2214. 1	1609. 6
0.10	200.00	2.2014×10^5	1.6008×10^5
0.10	2000.00	2.2001×10^7	1.6001×10^7
0.10	20000.00	2.2×10^9	1.6×10^9

Önerme 4.8.7. $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olsun. Bu durumda

$$36G^2(a,b)K^2(a,b)\leq\frac{5\left(b^5-a^5\right)}{b-a}+9A\left(a^4,b^4\right)+2G^4(a,b) \tag{4.8.7}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.3.5 de $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ olmak üzere $f(x)=x^2$ ve $g(x)=x^2, x>0$ konveks fonksiyonları seçilirse, bu durumda

$$\frac{3}{b-a}\int_a^b\int_0^1\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)x\right)^4 dtdx\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b x^4dx+\frac{1}{2}\left[a^4+b^4+2a^2b^2\right]$$

$$\Rightarrow\frac{8}{25}a^4+\frac{18}{25}a^3b+\frac{23}{25}a^2b^2+\frac{18}{25}ab^3+\frac{8}{25}b^4\leq\frac{b^5-a^5}{5(b-a)}+\frac{a^4+b^4}{2}+a^2b^2$$

$$\Rightarrow\frac{18}{25}\left(ab\left(a^2+b^2\right)\right)\leq\frac{b^5-a^5}{5(b-a)}+\frac{9}{50}\left(a^4+b^4\right)+\frac{2}{25}a^2b^2$$

$$\Rightarrow 18\left(ab\left(a^2+b^2\right)\right)\leq\frac{5\left(b^5-a^5\right)}{b-a}+9\left(\frac{a^4+b^4}{2}\right)+2a^2b^2$$

yazılabilir. Gerekli ortalama ifadeleri yerlerine yazılırsa (4.8.7) eşitsizliği ispatlanmış olur.

4.5 başlığı altında bazı farklı türden konveks fonksiyonların çarpımları ile elde edilen yeni eşitsizlikler için birkaç önerme;

Önerme 4.8.8. $a,b\in\mathbb{R}_+$ ve $s\in(0,1]$ olsun. Bu durumda

$$L_{2s}^{2s}(a,b)\leq\frac{a^{2s}+b^{2s}}{2s+1}+2a^sb^s\beta(s+1,s+1) \tag{4.8.8}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.5.1 de $x\in\mathbb{R}_+$, $s\in(0,1]$ için $f(x)=g(x)=x^s$ ve $t\in[0,1]$ için $h(t)=t^s$ seçilirse ispat açıktır.

Önerme 4.8.9. $0<a<b<\infty$ olsun. Bu durumda

$$L_{2p}^{2p}(a,b)\le\frac{a^{2p}}{3}+\frac{a^p b^p}{6}\left[m_1^{1-p}+m_2^{1-p}\right]+\frac{(m_1m_2)^{1-p}b^{2p}}{3} \tag{4.8.9}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.5.9 de E durumu dikkate alınarak $x\in\mathbb{R}_+$, $p>1$ için $f(x)=g(x)=x^p$ ve $\alpha=1$, $m_1,m_2\in(0,1]$ seçilirse ispat elde edilir.

Önerme 4.8.10. $0<a<b<\infty$, $p\in\mathbb{N}$ ve $p\ge 2$ olsun. Bu durumda

$$A^{2p}(a,b)\le 2\left[L_{2p}^{2p}(a,b)+L_p^{2p}(a,b)\right] \tag{4.8.10}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.5.11 de $x\in\mathbb{R}_+$ için $f,g:[a,b]\to[0,\infty)$, $f(x)=g(x)=x^p$, $p\ge 2$ ve $h(t)=t$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2p}-\frac{1}{b-a}\int_a^b x^{2p}dx\le\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b x^p dx\int_a^b x^p dx$$

$$\frac{1}{2}A^{2p}(a,b)-L_{2p}^{2p}(a,b)\le L_p^{2p}(a,b)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.8.11. $a,b\in\mathbb{R}_+$ ve $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ olsun. Bu durumda

$$L_{2n}^{2n}(a,b)\le 2A^2(a^n,b^n) \tag{4.8.11}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.5.12 de $x\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ için $f(x)=g(x)=x^n$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le \frac{M(a,b)+N(a,b)}{2}\\
&\Rightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b x^{2n}dx \le \frac{a^{2n}+b^{2n}+2a^n b^n}{2}\\
&\Rightarrow \frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)} \le \frac{\left(a^n+b^n\right)^2}{2}\\
&\Rightarrow L_{2n}^{2n}(a,b) \le 2A^2\left(a^n,b^n\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 4.8.12. $0<a<b<\infty$ olsun. Bu durumda

$$16A^2(a,b) \ge H(a,b)\,L(a,b) \tag{4.8.12}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.5.13 de $x\in\mathbb{R}_+$ için $f(x)=g(x)=\dfrac{1}{x}$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{a+b}\,\frac{2}{a+b} \le 8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}dx\\
&\frac{1}{A^2(a,b)} \le 16\left(\frac{a+b}{2ab}\right)\frac{1}{L(a,b)}\\
&\frac{1}{A^2(a,b)} \le \frac{16}{H(a,b)\,L(a,b)}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.6 başlığı altında logaritmik konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen yeni eşitsizlikler için birkaç önerme;

$x\in(0,\infty)$ için $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığı üzerinde logaritmik konveks bir fonksiyondur. f nin log–konveks seçilmesi durumunda özel ortalamalar için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dx}{x} = L^{-1}(a,b), \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A^{-1}(a,b), \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} = H^{-1}(a,b)$$

eşitlikleri vardır (Dragomir and Pearce 2000)

Önerme 4.8.13. $0<a<b$ olsun. Bu takdirde,

$$A^{-1}(a,b)L^{-1}(a,b)\leq\frac{A(a,b)L(a,b)}{G^{4}(a,b)} \tag{4.8.13}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.6.1 de $x\in(0,\infty)$ için $f(x)=\frac{1}{x}$ logaritmik konveks fonksiyonu seçilirse

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)f(a+b-x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{dx}{x(a+b-x)}\\
&=\frac{1}{(b-a)(a+b)}\int_a^b\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x}\right\}dx=\frac{2}{a+b}L^{-1}(a,b)=A^{-1}(a,b)L^{-1}(a,b)\\
&\leq A\big(f(a),f(b)\big)L\big(f(a),f(b)\big)\\
&=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{2ab}\frac{b-a}{ab\ln\frac{b}{a}}=\frac{L(a,b)}{G^{2}(a,b)H(a,b)}=\frac{A(a,b)L(a,b)}{G^{4}(a,b)}
\end{aligned} \tag{4.8.14}$$

elde edilir. (4.8.14) eşitsizliğinin yeniden yazılmasıyla

$$G^{4}(a,b)\leq A^{2}(a,b)L^{2}(a,b) \tag{4.8.15}$$

ya da

$$G^{2}(a,b)H(a,b)\leq A(a,b)L^{2}(a,b) \tag{4.8.16}$$

gibi farklı eşitsizlikler yazılabilir. Burada $A(a,b)=\frac{a+b}{2}$, $L(a,b)=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$, $a\neq b$, $H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$ ve $G(a,b)=\sqrt{ab}$ sırasıyla aritmetik, logaritmik, harmonik ve geometrik ortalamayı göstermektedir.

Benzer eşitsizlikler $x\in(0,\infty)$ için $f(x)=x^{x}$, $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=e^{x}+1$ vb. gibi logaritmik konveks fonksiyonlar içinde uygulanabilir.

4.7 başlığı altında m–konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen yeni eşitsizlikler için birkaç önerme;

Aşağıda önermelerde kullanılacak birkaç m–konveks fonksiyon örneği verilmiştir.

i- $q \geq 1$ olmak üzere $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^q$

ii- $f:[0,\infty) \to (-\infty,0]$, $f(x) = -\ln(x+1)$ fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde m–konvekstir (Dragomir and Toader 1993).

Önerme 4.8.14. $a \in (0,1]$, $b \in [1,\infty)$, $m \in (0,1]$, $mb \geq 1$, ve $a \neq mb$ olmak üzere

$$\ln\left[\frac{I(a,mb)}{G(a,mb)}\right] \geq \left| \frac{K^2(\ln b^m, \ln a)}{\ln\left(\frac{b^m}{a}\right)} - \ln\left(\left(e^{2-(a+mb)}(mb)^{mb} a^a\right)^{\frac{1}{mb-a}}\right) \right| \tag{4.8.17}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.7.1 deki ilk eşitsizlikte konveks fonksiyon olarak $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ seçilirse;

$$\begin{aligned}
E &= \frac{f(a) + mf(b)}{2} - \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx \\
&= -\frac{\ln a + m\ln b}{2} + \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} \ln x\,dx \\
&= \frac{1}{mb-a}\left[mb\ln mb - mb - a\ln a + a\right] - \ln\sqrt{ab^m} \\
&= \frac{\ln(mb)^{mb} - \ln a^a}{mb-a} - 1 - \ln G(a,b^m) = \ln\left[\frac{I(a,mb)}{G(a,mb)}\right]
\end{aligned} \tag{4.8.18}$$

yazılır. Burada

$$M = \left| \frac{1}{mf(b) - f(a)} \int_{mf(b)}^{f(a)} |x|\,dx - \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} |f(x)|\,dx \right| \tag{4.8.19}$$

alınır ve terimler ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\frac{1}{mf(b)-f(a)}\int_{mf(b)}^{f(a)}|x|\,dx=\frac{1}{m\ln b-\ln a}\int_{m\ln b}^{\ln a}|x|\,dx=\frac{1}{m\ln b-\ln a}\frac{(m\ln b)^2+(\ln a)^2}{2} \quad (4.8.20)$$

ve

$$\int_a^{mb}|f(x)|\,dx=\int_a^{mb}|-\ln x|\,dx$$

$$=\left(\int_a^1(-\ln x)\,dx+\int_1^{mb}\ln x dx\right)=(x-x\ln x)\Big|_a^1+(x\ln x-x)\Big|_1^{mb} \quad (4.8.21)$$

$$=2-(a+mb)+\ln(mb)^{mb}+\ln a^a=\ln\left(e^{2-(a+mb)}(mb)^{mb}a^a\right)$$

elde edilir. (4.8.20-21) ifadeleri (4.8.19) da birleştirilirse

$$M=\left|\frac{1}{m\ln b-\ln a}\frac{(m\ln b)^2+(\ln a)^2}{2}-\frac{1}{mb-a}\text{n}\left(e^{2-(a+mb)}(mb)^{mb}a^a\right)\right|$$

$$=\left|\frac{K^2(\ln b^m,\ln a)}{\ln\left(\frac{b^m}{a}\right)}-\ln\left(\left(e^{2-(a+mb)}(mb)^{mb}a^a\right)^{\frac{1}{mb-a}}\right)\right| \quad (4.8.22)$$

olur. İlgili teoremde ifade edildiği gibi (4.8.18) deki E ifadesi (4.8.22) deki M ifadesinden daha büyük veya eşittir, yani $E\geq M\geq 0$ dır ve bu ispatı tamamlar.

Önerme 4.8.15. $a\in(0,1]$, $b\in[1,\infty)$, $m\in(0,1]$, $mb\geq 1$, $a\neq mb$ ve $p\in(-\infty,0)\cup[1,\infty)-\{-1\}$ olmak üzere

$$M_p^p\left(a,m^{1/p}b\right)\geq L_p^p(a,mb) \quad (4.8.23)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.7.1 deki ilk eşitsizlikte konveks fonksiyon olarak $p\in\mathbb{R}$ ve $p\geq 2$ olmak üzere $f(x)=x^p$, $x\in[a,mb]$, $m\in[0,1]$ seçilirse;

$$\frac{f(a)+mf(b)}{2}-\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\,dx=\frac{a^p+mb^p}{2}-\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}x^p dx$$

$$=\frac{a^p+mb^p}{2}-\frac{(mb)^{p+1}-a^{p+1}}{(mb-a)(p+1)}\geq 0$$

elde edilir, gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanır.

Önerme 4.8.16. $a,b\in(0,\infty)$, $a\neq mb$ ve $a<mb$ olmak üzere

$$\frac{A(a,mb)}{I(a,mb)}\geq \exp\left[\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\ln\sqrt{x(a+mb-x)}\right|dx-\left|\ln A(a,mb)\right|\right|\right] \qquad (4.8.24)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.7.4 deki eşitsizlikte konveks fonksiyon olarak $f(x)=-\ln x$, $x\in[a,mb]$ seçilirse, bu durumda

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)=\frac{-1}{mb-a}\int_a^{mb}\ln x dx+\ln\left(\frac{a+mb}{2}\right)\\
&=\ln\left(\frac{a+mb}{2}\right)-\frac{mb\ln mb-mb-a\ln a+a}{mb-a}\\
&=\ln\left(\frac{a+mb}{2}\right)-\ln I(a,mb)=\ln A(a,mb)-\ln I(a,mb)=\ln\left[\frac{A(a,mb)}{I(a,mb)}\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S&=\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\frac{f(x)+f(a+mb-x)}{2}\right|dx-\left|f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|\\
&=\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\frac{\ln x+\ln(a+mb-x)}{2}\right|dx-\left|\ln\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\right|\\
&=\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\left|\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln(a+mb-x)\right|dx-\left|\ln A(a,mb)\right|\right|\\
&=\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\ln\sqrt{x(a+mb-x)}dx-\left|\ln A(a,mb)\right|\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremden $T\geq S$ olduğu görülmektedir, eşitsizliğin her iki tarafı üstel ifade

$$\exp\left(\ln\left[\frac{A(a,mb)}{I(a,mb)}\right]\right)\geq \exp\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\ln\sqrt{x(a+mb-x)}dx-\left|\ln A(a,mb)\right|\right|$$

$$\frac{A(a,mb)}{I(a,mb)}\geq \exp\left|\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}\ln\sqrt{x(a+mb-x)}dx-\left|\ln A(a,mb)\right|\right|$$

olarak yazılırsa ispat tamamlanır.

Önerme 4.8.17. $a \in (0,1]$, $b \in [1,\infty)$, $m \in (0,1]$, $mb \geq 1$, $a \neq mb$ ve $p \in (-\infty,0) \cup [1,\infty) - \{-1\}$ olmak üzere

$$M_p^p\left(a, m^{1/p}b\right) \geq L_p^p(a,mb) - A^p(a,mb) \tag{4.8.25}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.7.4 deki eşitsizlikte konveks fonksiyon olarak $p \in \mathbb{R}$ ve $p \geq 2$ olmak üzere $f(x) = x^p$, $x \in [a,mb]$ seçilirse;

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)\,dx - f\left(\frac{a+mb}{2}\right) = \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} x^p\,dx - \left(\frac{a+mb}{2}\right)^p \\ &= \frac{(mb)^{p+1} - a^{p+1}}{(mb-a)(p+1)} - \left(\frac{a+mb}{2}\right)^p = L_p^p(a,mb) - A^p(a,mb) \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki (4.8.24) eşitsizliğinden $M_p^p\left(a, m^{1/p}b\right) \geq L_p^p(a,mb)$ olduğu bilinmektedir. Bu iki eşitsizlik birleştirilirse $M_p^p\left(a, m^{1/p}b\right) \geq L_p^p(a,mb) - A^p(a,mb) \geq 0$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 4.8.18. $a \in (0,1]$, $b \in [1,\infty)$, $m \in (0,1]$, $mb \geq 1$, $a \neq mb$, $p \geq 1$ ve $p \in (-\infty,0) \cup [1,\infty) - \{-1\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| M_p^p\left[(2m-1)^{1/p} a, mb\right] - mL_p^p(a,mb) \right| \\ &\leq \left[(mb-a)^q m^{q-1} 2^{-2q-1}\right]^{1/q} \left[(2m-1)\left|pa^{p-1}\right|^q + m\left|pb^{p-1}\right|^q\right]^{1/q} \\ &= \left[(mb-a)^q m^{q-1} 2^{-2q-1}\left((2m-1)\left|pa^{p-1}\right|^q + m\left|pb^{p-1}\right|^q\right)\right]^{1/q} \end{aligned} \tag{4.8.26}$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.7.9 da konveks fonksiyon olarak $p \in \mathbb{R}$ ve $p \geq 2$ olmak üzere $f(x) = x^p$, $x \in [a,mb]$ seçilirse önermenin ispatı açıktır.

Önerme 4.8.19. $a,b\in(0,\infty)$, $a\neq mb$, $a<mb$, $mb\geq 1$, ve $q\geq 1$ olmak üzere

$$\ln\frac{I(a,mb)}{G\left(a^{2m-1},mb\right)}\leq\left[(mb-a)^{q}m^{q-1}2^{-2q-1}\left((2m-1)a^{-q}+mb^{-q}\right)\right]^{1/q} \qquad (4.8.27)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Teorem 4.7.9 daki eşitsizlikte konveks fonksiyon olarak $f(x)=-\ln x$, $x\in[a,mb]$ seçilirse; böylece

$$\begin{aligned}
F&=\left|\frac{(2m-1)f(a)+f(mb)}{2}-\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\,dx\right|\\
&=\left|\frac{-(2m-1)\ln a-\ln mb}{2}+\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}\ln x\,dx\right|\\
&=\left|-\frac{\ln a^{2m-1}+\ln mb}{2}+\ln I(a,mb)\right|=\left|\ln I(a,mb)-\ln G\left(a^{2m-1},mb\right)\right|
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K&=(mb-a)m^{\frac{q-1}{q}}2^{-\frac{2q+1}{q}}\left[(2m-1)\left|f'(a)\right|^{q}+m\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&=(mb-a)m^{\frac{q-1}{q}}2^{-\frac{2q+1}{q}}\left[(2m-1)\left|-\frac{1}{a}\right|^{q}+m\left|-\frac{1}{b}\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&=(mb-a)m^{\frac{q-1}{q}}2^{-\frac{2q+1}{q}}\left[(2m-1)a^{-q}+mb^{-q}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&=\left[(mb-a)^{q}m^{q-1}2^{-2q-1}\right]^{1/q}\left[(2m-1)a^{-q}+mb^{-q}\right]^{1/q}\\
&=\left[(mb-a)^{q}m^{q-1}2^{-2q-1}\left((2m-1)a^{-q}+mb^{-q}\right)\right]^{1/q}
\end{aligned}$$

elde edilir, teoremdeki ifadeden de görüleceği üzere $F\leq K$ dır ve bu ispatı tamamlar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Eşitsizlikler sadece matematiğin dallarında değil, hemen hemen tüm bilim dallarında sıklıkla kullanılan bir olgudur. Bu bakımdan bütün bilim dallarıyla yakın ilişki içerisindedir. Bu tez çalışmasında bazı farklı türden konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğine benzer yeni integral eşitsizlikleri elde edildi. Elde edilen bu yeni integral eşitsizliklerinin kurulmasında temel analiz kuralları, kullanışlı yeni eşitsizlikler ve temel bazı özel ortalama kuralları dikkate alınmıştır.

Bu çalışmada incelenen bazı farklı tür konveks fonksiyonlar yardımıyla Hadamard ve Jensen tipli yeni eşitsizlikler inşa edilebilir.

Özellikle s–konveks fonksiyonların sonucu olarak ilk kez ortaya atılan özel s–ortalamalarının, konuyla ilgilenen, matematiksel istatistik, oyun teorisi, bulanık mantık teorisi veya soft ve fuzzy metrik uzaylar teorisi üzerine çalışmalar yapan araştırmacılar için kullanılışlı bir özel ortalama olacağına inanmaktayız. Bu ortalamaların $[0,1]$ aralığı üzerinde, sıralama bakımından kararlı sonuçlar vermesi bahsedilen alanlarda çalışan araştırmacılar için farklı bir bakış açısı oluşturacağı kanaatindeyiz.

Bunların yanı sıra Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.7.7 de verilen ifadeler yardımıyla s–konveks ve m–konveks fonksiyonlar için yeni bir bakış açısı oluşturulmuş ve bu alanda yeni çalışmalara olanak sağlayacak sonuçlar verilmiştir. Bu lemmalar yardımıyla da ilgili konveks fonksiyonlar için Hadamard tipli integral eşitsizlikleri yazılabilir.

KAYNAKLAR

Anton, H., 1994. Elementary Linear Algebra, Jhon Wiley & Sons, Inc.

Azpeitia, A. G., 1994. Convex Functions and the Hadamard Inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bertsekas, P.D., Nedić, A. and Ozdağlar, A.E., 2003. Convex Analysis and Optimization, Athena Sci., Belmont, Massachustts, 534, U.S.A.

Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen f¨ur eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen. Raumen, Pupl. Inst. Math., 23, 13–20.

Breckner, W.W., 1993. Continuity of generalized convex and generalized concave set-valued functions. Rev Anal. Num´er. Thkor. Approx., 22, 39–51.

Čebyšev, P. L., 1882. O. priblizennyh vyrazenijah odnih integralov cerez drugie. Soobscenija i protokoly zasedanii Matematiceskogo obcestva pri Imperatorskom Har'kouskom Universitete No.2, 93-98; Polnoe sobranie sodnenii P. *L.* Cebyseua. Moskva-Leningrad, 1948a, 128-131.

Čebyšev, P. L., 1883. Ob odnom rjade, dostavljajuscem predel'nye veliciny integralov pri razlozenii podintegral'noi funkcii na mnozeteli, Priloienik 57 tomu Zapisok Imp. Akad. Nauk, No.4; Polnoe sobranie socinenil P. *L.* Cebyseva. Moskva-Leningrad, 1948b, 157-169.

Cristescu, G., 2005. Improved Integral Inequalities for Products of Convex Functions. JIPAM, Vol. 6, (2), Art.35.

Dragomir, S. S., Pečarić, J., and Persson, L. E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow J.Math., 21, 335-341.

Dragomir, S. S., Pečarić, J. E., and Sandor, J., 1990. A note on the Jensen-Hadamard inequality. Anal. Num. Theo. Approx., 19, 29–34.

Dragomir, S. S., 1992. Two mappings in connection to Hadamard's inequalities, J.Math.Anal.Appl. 167, 49-56.

Dragomir, S. S., 1994. Some remarks on Hadamard's inequality for convex functions. Extracta Math., 9(2), 88–94.

Dragomir, S. S., 2000. Refinements of the Hermite-Hadamard inequality for log–convex functions. RGMIA Res. Rep. Coll., 3, 4, 527–533.

Dragomir, S. S., 2001. Refinements of Hermite-Hadamard's inequality for convex functions. Tamsui Oxford J. of Math. Sci. 17(2), (2001), 131-137.

Dragomir, S. S., 2002. On Some New Inequalities of Hermite-Hadamard type for m–Convex Functions. Tamkang J. of Math. 33 (1), Spring, 45-55.

Dragomir, S. S., Agarwal, R. P., 1998. Two inequalities for Differentiable and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula. App.Math.Lett. Vol. 11, No. 5, pp. 91-95.

Dragomir, S. S., Fitzpatrik, S., 1999. The Hadamard's inequality for s –convex functions in the second sense. Demonstration Math., 32 (4) (1999), 687–696.

Dragomir, S. S., Mond, B., 1997. On Hadamard's Inequality for a Class of Functions of Godunova and Levin. Indian J. of Math., 39, 1-9.

Dragomir, S. S., Mond, B., 1998. Integral inequalities of Hadamard's type for log–convex functions, Demonstratio Math., 31 (2), 354-364.

Dragomir, S. S., Pearce, C. E. M., 1998. Quasi–convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S. S., Pearce, C. E. M., 2000. Selected Topic on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, URL:http:// www. maths. adelaide. edu.au/ Applied/staff/ cpearce.html

Dragomir, S. S., Toader, Gh., 1993. Some Inequalities for *m*–Convex Functions. Studia Univ. Babes-Bolyai. Mathematica 38, 1, 21-28.

Godunova, E. K., Levin, V. I., 1985. Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkii. Vycislitel. Mat. i. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI,Moskva, pp. 138–142.

Hadamard, J., 1893. Etude sur les properties des fonctions entieres et en particulier d'une fonction consideree par Riemann, J.Math.Pures appl. 58, 171-215.

Hudzik, H., Maligranda, L., 1994. Some remarks on s–convex functions, Aequationes Math., 48, 100–111.

Hunter, J. K., Nachtergaele, B., 2000. Applied Analysis, Department of Mathematics, University of California at Davis, 446, California.

Jeffrey, A., Dai, H-H., 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

Jensen, J. L. W. V., 1905. Om konvexe funktioner og uligheder mellem Middelvaerdier. Nyt. Tidsskrift for Mathematik 16B, 49-69.

Jensen, J. L. W. V., 1906. Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes. Acta Math. 30, 175-193.

Kannappan, Pl., 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer, 817,

Kazarinoff, N. D., 1961. Analytic Inequalities, 85, U.S.A.

Kırmacı U. S., Bakula, M. K., Özdemir M. E., Pečarić J., 2007. Hadamard-type inequalities for *s*–Convex Functions, App.Math.Comp., 193, 26-35.

Kuczma, M., Gilanyi, A., 2009. An Intradodtion to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality, Second Edition, Institute of Mathematics, University of Debrecen, 595, Hungary.

Lupas, A., 1976. A generalisation of Hadamard's inequality for convex functions. Univ. Beograd.Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 544-576, 115-121.

Manfrino, R. B., Delgado, R. V. and Ortega, L. A. G., 2009. Inequalities a Mathematical Olympiad Approach. 210. Birkhäuser.

Miheşan, V. G, 1993. A generalisation of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania,

Mildorf, T., Olympiad Inequalities; January 20, 2006 http://www.mit.edu/ ~tmildorf/Inequalities.pdf

Mildorf, T.J., 2005. Olympiad Inequalities, www.artofproblemsolving.com/Resources/ Papers/ Mildorf**Inequalities**.pdf

Mitrinović, D. S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York

Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.

Mitrinović, D. S., Vasić, P. M., 1974. History, variations and generalisations of the Čebyčev inequality and the question of some priorities, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 461-497, 1-30.

Mitrinović, J. E., Pečarić, J. E., 1990. History, variations and generalisations of the Čebyčev inequality and the question of some priorities II, Rad JAZU (Zagreb), 450, fasc. 9, 139-156.

Niculescu, C. P., Persson, L. E., 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media,Inc. 253 .

Orlicz , W., 1961. A note on modular spaces I, Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.

Özdemir, M. E., 2007. Eşitsizlik Teorisi Üzerine Ders Notları, Atatürk Üniversitesi.

Özdemir, M. E., Bakula M.K., Pečarić J., 2008. Hadamard-type inequalities *m*–Convex and (α, m)–Convex Functions. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, v.9, Iss. 4, Article 96, 12pp.

Özdemir, M. E., Avcı, M., Set, E., 2010. On Some Inequalities of Hermite-Hadamard type via *m*–convexity. Appl. Math. Lett. 23, 9, 1065,1070.

Pachpatte, B. G., 2003. On some inequalities for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6 (E).

Pachpatte, B. G., 2004. A note on integral inequalities involving two log–convex functions, Math. Ineq.&Appl. 7, 4, 511-515.

Pachpatte, B. G., 2005. Mathematical Inequalities, Volume 67, Elsevier B.V., 606.

Pečarić, J., Beesack, P. R., 1986. On Jensen's inequality for convex functions II. Journal of Math. Anal. Appl. 118, 125-144.

Pečarić, J. E., Dragomir, S. S., 1991. A generalization of Hadamard's inequality for Isotonic linear functionals, Radovi Matematicki 7, 103-107.

Pečarić, J. E., Proschan, F., Tong, Y. L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Volume 187, Academic Press,Inc. 485, USA.

Roberts, A. W., Varberg, D. E., 1973. Convex Functions. Academic Press,New York. USA.

Sarıkaya, M. Z., Sağlam A., Yıldırım, H., 2008. On Some Hadamard-Type Inequalities for *h*–Convex Functions. Journal of Mathematical Inequalities. Vol. 2. No. 3, 335-341.

Sarıkaya, M. Z., Set, E., Özdemir, M. E., 2010. On some new inequalities of Hadamard type involving *h*–convex functions. Acta Math. Universitatis Comenianae. Vol. 79. Iss. 2, 265-272.

Set, E., Sardari, M., Özdemir, M.E., Rooin, J., 2009. On Generalizations of The Hadamard Inequality for (α, m)–Convex Functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 12, 4, Art.4.

Thomas, B. T., Finney, R. L., 1992. Calculus, Addison-Wesley Pub. Comp. 11. Edt.

Toader, Gh., 1984. Some generalisations of the convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca (Romania), 329-338.

Varošanec, S., 2007. On h –convexity. J. Math. Anal. Appl., 326 (1), 303–311.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Hatay ilinde doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Hatay'da tamamladı. 1999 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2003 yılında mezun oldu. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Dalında yüksek lisans ve yabancı dil hazırlık programına başladı, 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Dalında Doktora programına başladı. 2002-2009 yılları arasında Sağlık Bakanlığına bağlı çeşitli kurumlarda görev yaptı. 2009 yılında Kilis 7 Aralık Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Evli ve iki çocuk babasıdır.