WEYL MANİFOLDLARI

Gülnur ÇAĞLAR

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Nejmi CENGİZ
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

WEYL MANİFOLDLARI

Gülnur ÇAĞLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

<u>ERZURUM</u>
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

WEYL MANİFOLDLARI

Doç. Dr. Nejmi CENGİZ danışmanlığında, Gülnur ÇAĞLAR tarafından hazırlanan bu çalışma 25/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Arif SALİMOV *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Nejmi CENGİZ *İmza* :

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

WEYL MANİFOLDLARI

Gülnur ÇAĞLAR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nejmi CENGİZ

Bu tezde M_n diferensiyellenebilir manifoldunun tanımından yararlanılarak ∇ afin konneksiyonu, invaryant formda $S(X,Y)$ burulma tensörü ve eğrilik tensörü verildi. Ayrıca Metrik uzayın tanımı ve bu tanımdan yararlanılarak $W_n(\nabla, g, w)$ Weyl uzayı ve burulmalı ∇^*konneksiyonuna ve simetrik olmayan konform g^* metriğine sahip $W_n^*(\nabla^*, g^*, w^*)$ Genelleştirilmiş Weyl uzayı tanımlandı. Genelleştirilmiş Weyl uzayının burulma tensörü, eğrilik tensörü ve Bianchi özdeşliği gösterildi. Son olarak Weyl uzayının konneksiyonu farklı bir Riemann uzayı olduğu gösterilerek Riemann konneksiyonu tanımlandı.Ayrıca Schur lemması ile $n > 2$ boyutlu, bağlantılı Riemann uzayının izotropik ve sabit eğrilikli Riemann uzayı olduğu ispatlandı.

2011, 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyellenebilir manifold, konneksiyon, burulma tensörü, eğrilik tensörü, Metrik uzay, Weyl uzayı, Genelleştirilmiş Weyl uzayı, Riemann uzayı.

ABSTRACT

MS Thesis

WEYL MANİFOLDS

Gülnur ÇAĞLAR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nejmi CENGİZ

In this thesis, ∇ affine connection was given by making use of the definition of M_n differential manifold and also $S(X,Y)$ torsion tensor and curvature tensor were given in invariant form. The definition of metric space, with the help of this definition $W_n(\nabla, g, w)$ Weyl space and $W_n^*(\nabla^*, g^*, w^*)$ Generalized Weyl space having torsion ∇^* connection and asymmetrical conformal g^* metric were defined. The torsion tensor of Generalized Weyl space, curvature tensor and Bianchi identity were shown. Finally, Riemann connection was defined by showing Weyl space connection as a different Riemann space. Also, it is proved that Schur lemma and $n > 2$ dimensional, connected Riemann space were isotropic and fixed curvature Riemann space.

2011, 54 pages

Keywords: Differentiable manifold, connection, torsion tensor, curvature tensor, Metric space, Weyl space, Generalized Weyl space, Riemann space.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezi hazırlamamdaki yardımlarından ve ilgisinden dolayı Sayın hocam Doç. Dr. Nejmi Cengiz'e, bilgilerinden yararlandığım anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Arif Salimov, Sayın Prof. Dr. Abdullah Mağden ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer Tarakçı'ya en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Ayrıca arkadaşlarım Sayın Arş.Gör. Semra Kaya ve Sayın Arş. Gör. Seher Aslancı'ya da teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım ve eğitim hayatım boyunca desteğini hiç esirgemeyen başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme, eşime, kayınvalideme ve sevgisi ve enerjisiyle ışığım olan oğluma da teşekkürlerimi sunarım.

Gülnur ÇAĞLAR

Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

T_{ij}^{k}	Afin Deformasyon Tensörü
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
$\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$	Christoffel Sembolü
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
$W_n^*\left(\nabla^*, g^*, w^*\right)$	Genelleştirilmiş Weyl Uzayı
L_{ij}^{k}	Genelleştirilmiş Weyl Uzayında Konneksiyon Katsayıları
K	Kesit Eğriliği
Γ_{kj}^{i}	Konneksiyon Katsayıları
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
$W_n\left(\nabla, g, w\right)$	Weyl Uzayı

1.GİRİŞ

Weyl manifoldu ilk olarak XX. yüzyılın ilk yarısında Alman matematikçi Hermann Weyl tarafından bulunmuştur. Çünkü bu dönemde Diferensiyel Geometride gelişen metotlardan biri, geometride lokal incelemelerden global incelemelere geçiştir. Modern Diferensiyel Geometride, Klasik Diferensiyel Geometrinin esas inceleme konuları olan eğri ve yüzeyler, üzerinde çeşitli geometrik yapıların verildiği n-boyutlu diferensiyellenebilen manifold tarafından ikinci plana atılır.

Weyl uzayları ile ilgili çalışmalar, özellikle 1990'lı yıllarda ve sonrasında sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu konuda Zlatanov, Tsareva, Özdeğer ve yanı sıra Çivi, Canfes ve Altay gibi isimlerin büyük katkıları vardır.

Sunulan bu tezde ise Weyl uzayları, Genelleştirilmiş Weyl uzayları ile bunların konneksiyonları ve bununla birlikte Weyl uzayının tanımından yararlanılarak diğer uzayların nasıl oluştuğunu incelenmiştir.

Birinci bölümde diferensiyellenebilir manifoldun tanımından yola çıkarak diferensiyellenebilir manifold üzerindeki afin konneksiyon, afin konneksiyonlu uzaylar ve konneksiyon katsayılarından bahsedilmiştir. Eğrilik ve burulma tensörlerinin tanımları ve invaryant formda yazılışları da yine bu bölümde açıklanmıştır.

İkinci bölümde burulmasız afin konneksiyonlu uzayın nasıl oluştuğu ve burulmasız afin konneksiyonlu uzay kullanılarak Eş afin uzay ve eş afin konneksiyonu, Metrik uzayı, simetrik (0,2) tipli g_{ij} metrik tensörü ve pisagto tensör anlatılmıştır. Yine ikinci bölümde

$$\nabla_k g_{ij} = 2w_k g_{ij}$$

eşitliğini sağlayan, simetrik ∇ konneksiyonuna, ∇ tarafından korunan simetrik, konform g metriğine ve w_k 1-formuna sahip metrik uzaya Weyl uzayı denildiği, simetrik olmayan (burulmalı) bir ∇^* konneksiyonuna ve simetrik olmayan konform g^*

metrik tensörüne sahip uzaya da Genelleştirilmiş Weyl uzayı denildiği ifade edilmiştir. Ayrıca Weyl uzaylarının ve Genelleştirilmiş Weyl uzaylarının konneksiyon katsayılarından da yine bu bölümde söz edilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Weyl uzayı konneksiyonu farklı bir Riemann uzayıdır ifadesinden yola çıkarak Riemann uzayından ve $\nabla_k g_{ij} = 0$ Riemann konneksiyonundan, Sabit eğrilikli Riemann uzaylarından, konform dönüşümün Weyl uzayına indirgenmesiyle ulaştığımız afin deformasyon tensöründen bahsedilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: X Hausdorff uzay olsun. Herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset R^n$ bölgesine;

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu harita veya n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, ..., x^n\right) \in R^n$$

olur. Burada $x^1, ..., x^n$ reel sayıları φ haritasında x noktasının koordinatlarıdır.

Tanım 2.1.2: X Hausdorff uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, A \text{ indisler kümesi}$$

ise, X 'e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n - boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: X Hausdorff topolojik uzay ve k ise $0 \le k \le \infty$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. $\alpha \in A, U_\alpha \subset X$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ lokal haritalar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X 'i örter $\left(X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right)$, yani X , n boyutlu topolojik manifolddur.

2.Keyfi $\alpha,\beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \mapsto \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Buna $\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)$ haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü denir. Burada u_β^i, $\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları ve u_α^j ise $\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatları olmak üzere $u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,...,n$ yazılır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ olması durumunda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü elde edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasını ifade eder.

Tanım 2.1.4: $\left\{\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}$ ve $\left\{\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)\right\}$ C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)$ haritaları C^k uzlaşmış ise yani , $\left\{\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}$ ve $\left\{\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)\right\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.1.5: X Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir.

C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasa maksimal C^k atlas adı verilir. X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir.

Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0 yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan düzgün yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: M, Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmiş ise M uzayına n- boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 1999).

Eğer 2.1.6.Tanımda C^∞ sınıfı yerine C^w sınıfı (analitik fonksiyonlar sınıfı) alınırsa, 2.1.6.Tanım reel analitik manifoldun veya C^w sınıfından olan manifoldun tanımı olur.

2.1.1. Diferensiyellenebilir dönüşümler

X_n ve Y_p sırasıyla C^k ve C^q sınıfından diferensiyellenebilir manifoldlar ve $G \subset X_n$ açık küme olmak üzere sürekli $f : G \to Y_p$ dönüşümü verilsin. φ, bölgesi $U \subset G$ olan harita, ψ ise bölgesi $V \supset f(U)$ olan harita olsun. Keyfi (U,φ) haritası için

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V), \varphi(U) \subset R^n, \psi(V) \subset R^p$$

dönüşümü C^m sınıfından ise f dönüşümüne $C^m\left(m \le \min(k,q)\right)$ sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. $f \in C^m\left(X_n, Y_p\right)$ için $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ dönüşümü $\varphi(x) \in \varphi(U) \subset R^n$ noktasını $y \in \psi(V) \subset R^p$ noktasına götürür. Eğer $\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ (yani x^i, $i = 1,...,n$, $x \in U$ noktasının (U,φ) haritasındaki koordinatları) ve $y = \left(y^1, y^2, ..., y^p\right)$ ise bu takdirde

$$y^{\alpha} = y^{\alpha}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), \quad \alpha = 1, ..., p$$

olur. Tanıma göre $f \in C^m\left(X_n, Y_p\right)$ olması için gerek ve yeter şart $y^{\alpha} \in C^n\left(R^n, R^p\right)$ olmasıdır.

C_x^k, $x \in X_n$ noktasını ihtiva eden $G \subset X_n$ açık kümesinde tayin edilmiş C^k sınıfından *f* fonksiyonların kümesi olsun. Eğer φ, x noktasındaki harita olmak üzere $\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ ise,

$$x = \varphi^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$$

yazılır ve

$$y = f\left(x\right) = f\left(\varphi^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)\right) = f^*\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$$

olur. $f^* = f \circ \varphi^{-1}$ biçimindedir.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x = \left.\frac{\partial f^*}{\partial x^i}\right|_{\varphi(x)}$$

olarak tanımlanmış olsun. n sayıda $\xi^i \in R$ sayıları için

$$X\left(f\right) = \xi^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_x, \forall f \in C_x^k$$

biçiminde tanımlanan $X = C_x^k \to R$ lineer fonksiyonu,

$$X = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$$

şeklinde verilir. Bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesini T_x ile gösterelim. Bu küme üzerinde

$$\left(X_1 + X_2\right)\left(f\right) = X_1\left(f\right) + X_2\left(f\right),$$

$$\left(\alpha X\right)\left(f\right) = \alpha X\left(f\right)$$

biçiminde toplama ve skalerle çarpma işlemini tanımlayalım.

Bu işlemlere göre T_x, R üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya M_n manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına ise M_n manifoldunun x noktasındaki tanjant vektörleri denir.

Böylece M_n manifoldunun $x \in M_n$ noktasında tanjant vektör $X = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ fonksiyoneli ile aynılaştırılır ve (U,φ) koordinat komşuluğunda $X \in T_x$ vektörü n sayıda ξ^i sayıları ile tayin edilir.

Eğer $\xi_k^i = \delta_k^i$, $i,k = 1,...,n$ ise $X = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ eşitliğinden n sayıda

$$X_k^0 = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad k = 1,...,n$$

vektörleri bulunur. Bu vektörler T_x uzayının bir bazıdır ve $BoyT_x = n$ olur. Bu baz kısaca ∂_k ile gösterilir.

$f \in C_x^k$ fonksiyonunun x noktasındaki diferensiyeli $df = \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_x dx^k$ biçiminde tanımlanır. C_x^k fonksiyonlarının x noktasındaki diferensiyeli R üzerinde T_x^* vektör uzayını oluşturur. $x^i \in C_x^k$ için $dx^i \in T_x^*$ olduğu aşikardır. $\left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_x \in R$ olduğundan $df = \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_x dx^k$ eşitliğine göre $\forall df \in T_x^*$ diferensiyeli dx^i diferensiyellerinin lineer terkipleri olurlar. dx^i 'ler bağımsız olan $x^i (i = 1,...,n)$ değişkenlerinin diferensiyelleri olduğundan, bunların dx^i diferensiyelleri de lineer bağımsız olacaktır. Bu durumda $\{dx^i\}$ ler T_x^* uzayının bazı ve $BoyT_x^* = n$ olur. T_x^* uzayının keyfi df elemanı

$$(df)(X) = X(f), \quad \forall X \in T_x$$

biçiminde verilen $df : T_x \to R$ lineer dönüşümünü tayin eder.

Eğer,

$$(df)(X) = X(f), \quad \forall X \in T_x$$

eşitliğinde $f = x^i$, $X = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ alınırsa,

$$\left(dx^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \delta_k^i$$

bulunur. Dolayısıyla $\left\{dx^i\right\}$ bazına karşılık gelen baz ∂_k bazı olduğundan T_x^*, T_x vektör uzayının dual uzayı olur. T_x^* uzayına M_n manifoldunun x noktasındaki kotanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına ise M_n manifoldunun x noktasındaki kovektörleri veya lineer formları denir.

T_x uzayının $\{X_i\}$ $(i = 1,...,n)$ bazına X_n manifoldunun x noktasındaki çatısı denir. Bu çatıya T_x^* uzayında karşılık gelen $\left\{\theta^i\right\}$ bazına, yani

$$\theta^i(X_k) = \delta_k^i$$

şartını sağlayan θ^i kovektörlerine X_n manifoldunun x noktasındaki koçatısı (coframe) adı verilir. Özel halde, $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\} \in T_x$ ve $\left\{dx^i\right\} \in T_x^*$ çatılarına sırasıyla (U,φ), $\varphi(x) = \left(x^1,...,x^n\right)$ haritasındaki standart çatı ve koçatı denir.

Teorem 2.1.1: (U,φ) haritasından (U,ψ) haritasına geçildiğinde T_x uzayının baz vektörleri

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right|_x = \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|_x \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$$

kuralına göre ve T_x^* uzayının baz vektörleri ise

$$dx^{i'} = \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right|_x dx^k$$

kuralına göre dönüşürler (Salimov ve Mağden 1999).

2.1.2. Dönüşümün diferensiyeli

X_n ve Y_p diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Açık $G \subset X_n$ kümesi ve $f : G \to Y_p$ diferensiyellenebilir dönüşümü her bir $x \in G$ noktasında

$$\left(f_{*_x}\left(X \right) \right)\left(g \right) = X\left(g \circ f \right), X \in T_x, g \in C^k_{f(x)} \tag{2.1}$$

biçiminde lineer

$$f_{*_x} : T_x \to T_{f(x)}$$

dönüşümünü tayin eder. Burada T_x, $x \in X_n$ noktasındaki tanjant uzay, $T_{f(x)}$ ise $f\left(x \right) \in Y_p$ noktasındaki tanjant uzaydır. (2.1) eşitliği ile tanımlanan f_{*_x} dönüşümüne f dönüşümünün x noktasındaki diferensiyeli denir. $g \in C^k_{f(x)}$ olduğundan, $g \circ f \in C^k_x$ olur.

$x \in X_n$ noktasının U komşuluğundaki harita $\left(U, \varphi \right)$, $y = f\left(x \right) \in Y_p$ noktasının V komşuluğundaki harita ise $\left(V, \psi \right)$ olsun. Bu takdirde,

$$\varphi\left(x \right) = \left(x^1, x^2, ..., x^n \right)$$

$$\psi\left(y \right) = \left(y^1, y^2, ..., y^p \right)$$

olur. Diğer taraftan

$$x = \varphi^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n \right),$$

$$y = f\left(x \right) = f\left(\varphi^{-1}\left(x^1, x^2, ..., x^n \right) \right) = \left(f \circ \varphi^{-1} \right)\left(x^1, x^2, ..., x^n \right)$$

ve buradan da

$$y^a = y^a\left(x^1, x^2, ..., x^n \right), a = 1, ..., p \tag{2.2}$$

yazılır. (2.2) denklemi f dönüşümünün koordinat fonksiyonlarıyla yazılışıdır.

$f_{*_x}\left(X \right)$, $C^k_{f(x)}$ cebiri üzerinde tayin edilmiş reel değerli lineer dönüşümdür. Buna göre $f_{*_x}\left(X \right) \in T_{f(x)}$ olur.

$$X = \xi^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x$$

ve $h = g \circ f$ olsun. $g^* = g \circ \psi^{-1}$ olmak üzere

$$h(x) = g(f(x)) = g(y) = (g \circ \psi^{-1})(y^1, y^2, ..., y^p) = g^*(y^1, ..., y^p)$$

$$= g^*\left(y^1\left(x^1, ...x^n\right), ..., y^p\left(x^1, ...x^n\right)\right)$$

olur. Buradan,

$$X(g \circ f) = \xi^i (\frac{\partial}{\partial x^i})_x (h) = \xi^i (\frac{\partial h}{\partial x^i})_x$$

$$= \xi^i (\frac{\partial h}{\partial y^a})_{f(x)} (\frac{\partial y^a}{\partial x^i})_x$$

veya

$$X(g \circ f) = (\frac{\partial y^a}{\partial x^i})_x \xi^i (\frac{\partial}{\partial y^a})_{f(x)} (h) \tag{2.3}$$

yazılır. (2.1) ve (2.3) eşitliklerinin mukayesesinden $f_{*_x}(X)$ vektörünün $(\frac{\partial}{\partial y^a}) f(x)$ bazında

$$\eta^a = (\frac{\partial y^a}{\partial x^i}) \xi^i \tag{2.4}$$

şeklinde koordinatlara sahip olduğu ortaya çıkar. ξ^i, $(\frac{\partial}{\partial x^i})_x$ bazında $X \in T_x$ vektörünün koordinatlarıdır.

Böylece, f dönüşümü koordinatlarla

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : y^a = y^a\left(x^1, ..., x^n\right), \quad a = 1, ..., p$$

şeklinde verilirse, f_{*_x} türevi $(\frac{\partial y^a}{\partial x^i})$ Jacobian matrisi kullanılarak (2.4) biçiminde koordinatlarla verilebilir.

$f : G \to Y_p$, $G \subset X_n$ dönüşümü, f_{*_x} dönüşümünden başka f_{*_x} ’in transpoz dönüşümü adı verilen $f_x^* : T_{f(x)}^* \to T_x^*$ lineer dönüşümü

$$f_x^*\left(dg\right)=d\left(g\circ f\right)_x,\ f\in C_x^k,\ g\in C_{f(x)}^k \tag{2.5}$$

kuralı ile tanımlanır. Burada $dg=\left(dg\right)_{f(x)}\in T_{f(x)}^*$ biçimindedir. Ayrıca T_x^* ve $T_{f(x)}^*$ ise sırasıyla $x\in G$ ve $f\left(x\right)\in Y_p$ noktalarındaki kovektör uzaylardır.

f dönüşümü koordinatlarla

$$y^a=y^a\left(x^1,...,x^n\right),\quad a=1,...,p$$

biçiminde ve $g\in C_{f(x)}^k$ fonksiyonu ise

$$g=g^*\left(y^1,...,y^p\right),\quad g^*=g\circ\psi^{-1}$$

biçiminde olsun. Bu takdirde , $g\circ f\in C_x^k$ dönüşümü

$$g\circ f=g^*\left(y^1\left(x^1,...,x^n\right),...,y^p\left(x^1,...,x^n\right)\right)$$

şeklinde olur. Buradan da,

$$d\left(g\circ f\right)_x=(\frac{\partial g}{\partial y^a})_{f(x)}(\frac{\partial y^a}{\partial x^i})_x dx^i,\quad \left.\frac{\partial g}{\partial y^a}\right|_{f(x)}=\left.\frac{\partial g^*}{\partial y^a}\right|_{\psi(f(x))}$$

yani (2.5) eşitliğine göre

$$f_x^*\left(dg\right)=(\frac{\partial y^a}{\partial x^i})_x(\frac{\partial g}{\partial y^a})_{f(x)}dx^i \tag{2.6}$$

bulunur. $\left\{dy^a\right\}$ koçatısındaki koordinatları

$$\eta_a=(\frac{\partial g}{\partial y^a})_{f(x)}$$

olan $dg\in T_{f(x)}^*$ vektörüne f_x^* kodiferensiyeline karşılık gelen $f_x^*\left(dg\right)\in T_x^*$ kovektörünün $\left\{dx^i\right\}$ koçatısındaki koordinatları

$$\xi_i=(\frac{\partial y^a}{\partial x^i})_x\eta_a \tag{2.7}$$

biçiminde olur. Bu eşitliğe f_x^* kodiferensiyelinin koordinatlarla ifadesi denir. (2.7) eşitliğinin matris dilinde yazılımı ise (2.4)'ün matris dilinde yazılışının transpozu olur. Bu sebepten dolayı f_x^* dönüşümüne f_{*_x} dönüşümünün transpoz dönüşümü denir.

$$f : X_n \to Y_p$$

ve

$$g : Y_p \to Z_q$$

diferensiyellenebilir dönüşümü verilmiş olsun. Bu durumda

$$f_{*_x} : T_x \to T_{f(x)}$$

ve

$$g_{*f(x)} : T_{f(x)} \to T_{(g\circ f)_x}$$

dönüşümü elde edilmiş olur. Diğer taraftan $g \circ f$ dönüşümü de $(g \circ f)_{*_x} : T_x \to T_{(g\circ f)_x}$ dönüşümünü oluşturacaktır.

2.1.3. Altmanifoldlar

Tanım 2.1.7: X_n ve Y_p diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. C^k sınıfından diferensiyellenebilir $f : X_n \to Y_p\ (n \le p)$ dönüşümünü göz önüne alalım. Eğer $\forall x \in X_n$ için f_{*_x} dönüşümünün rankı n ise f dönüşümüne immersiyon denir (Salimov ve Mağden1999).

Tanım 2.1.8: $f : X_n \to Y_p$ immersiyonu verilmiş olsun. Eğer, $f : X_n \to f(X_n) \subset Y_p$ immersiyonu, indirgenmiş topolojiye göre homeomorfizm ise f dönüşümüne imbedding (içine daldırma) denir (Salimov ve Mağden 1999).

Bu tanımdan, imbedding'in bire-bir immersiyon olduğu çıkar. Ama tersi her zaman doğru değildir. Herbir immersiyon lokal olarak imbeddingdir.

$f : X_n \to Y_p$ immersiyonu verilmiş olsun. $\forall x \in X_n$ noktasının (U, φ), $\varphi(x) = (x^1, ..., x^n)$ haritasını ve $f(x) = y \in Y_p$ noktasının (V, ψ), $\psi(y) = (y^1, ..., y^p)$ haritası alınırsa, f immersiyonu koordinatlarla

$$y^a = y^a\left(x^1,...,x^n\right), a = 1,..., p \tag{2.8}$$

biçiminde yazılabilir. Öyle ki, $\forall x \in U$ için $rank(\frac{\partial y^a}{\partial x^i})_{\varphi(x)} = n$ olur. y^a koordinatları içerisinde $\det(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}) \neq 0$ olacak şekilde n tane y^j koordinatları seçilebilir. Bu takdirde, belirli $U_0 \subset U$ komşuluğunda (2.8) eşitliğinin n sayıdaki denklemin x^i değişkenlerine göre çözümü

$$x^i = x^i\left(y^1, y^2,..., y^n\right) \tag{2.9}$$

biçiminde yazılır. Burada x^i 'ler U_0 komşuluğunda C^k sınıfından olan fonksiyonlardır. Böylece, U_0 bölgesinde φ haritasından başka $\overline{\varphi}$ haritası da vardır ve

$$\overline{\varphi}(x) = \left(y^1,..., y^n\right)$$

olur. (2.9) değeri (2.8) denkleminin kalan denklemlerinde yerine yazarsak,

$$y^\alpha = y^\alpha\left(x^1,...,x^n\right), \alpha = n+1,..., p \tag{2.10}$$

bulunur.

Şimdi, $\left(U_0, \overline{\varphi}\right)$ haritasına geçelim ve y^i yerine x^i alalım. Bu durumda, (2.10) eşitlikleri kullanılırsa, (2.8) eşitliği

$$\begin{cases} y^i = x^i, i = 1,..., n \\ y^\alpha = y^\alpha\left(x^1,...,x^n\right), \alpha = n+1,..., p \end{cases} \tag{2.11}$$

biçiminde yazılır. Burada $y^\alpha \in C_x^k$ sınıfındandır. Bu yazılışın terside doğrudur. Yani, $\forall x \in X_n$ noktasının herhangi bir komşuluğunda f dönüşümü (2.11) şeklinde gösterilebilirse, f dönüşümü immersiyon olur.

X_n, Y_p diferensiyellenebilir manifoldlar ve $X_n \subset Y_p$ altkümesi olsun. $\imath : X_n \to Y_p$ içerme dönüşümü ve ayrıca $e : Y_p \to Y_p$ özdeşlik dönüşümü olmak üzere $\imath = e \mid X_n$ olur ve bu dönüşüm birebirdir.

Tanım 2.1.9: X_n ve Y_p diferensiyellenebilir manifoldları verilmiş olsun. $\imath : X_n \to Y_p$ dönüşümü immersiyon ise X_n manifolduna (Y_p manifolduna) daldırılmış altmanifoldu denir. Eğer $\imath$ dönüşümü imbedding ise X_n manifolduna Y_p manifoldunun imbedding altmanifoldu veya sadece altmanifoldu denir (Salimov ve Mağden 1999).

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: M_n**,** C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p, $\forall p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 1999).

f, M_n manifoldunda bir fonksiyon ise Xf de M_n manifoldunda bir fonksiyon tanımlar.

Bu ise,

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanır. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i \left(x^1, ..., x^n \right) \quad i = 1, ..., n$$

olur.

Tanım 2.2.2: B_n bir vektör uzay olsun $w = t\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}\right)$ multilineer fonksiyonuna karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to R$$

reel değerli operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.3: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, $\forall m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ ise vektör alanları elde edilir. Yani,(1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise $\forall m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall x \in U$ için $df_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonun diferensiyeli olan $df : U \to T_1^0(M_n)$ ifadesi (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ (0,1) tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T\left(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q\right)(m)=T_m\left(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m)\right)$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özellikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q},\partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan (0,1) tipli tensör alanına 1-form (pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T\left(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q\right)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma:u^i=u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur.

Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olurlar. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılığı korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Tanım 2.3.1: M_n manifoldu üzerinde $T_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümü

$$\textbf{i.}\, \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z\,, \quad \forall f,g \in F(M_n)$$

$$\textbf{ii.}\, \nabla_Z (fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovaryant diferensiyelleme denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasında $\underset{k}{a}^i, k = 1,...,n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$ nin bağımlılığı baz vektörlerin verilmiş eğri boyunca paralel kaydırılmasını ifade etsin. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d\underset{k}{a}^i \tag{2.12}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i v^i \tag{2.13}$$

yazılır.

Burada $\overset{s}{a}_i$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\underset{k}{a}^i$ ile gösterilir.

Dolayısıyla $\underset{k}{a}^i \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.13) ifadesi (2.12) de kullanılırsa,

$$dv^i + w_k^i v^k = 0 \tag{2.14}$$

yazılır. (2.14) denkleminde

$$w_i^k = -\overset{s}{a}_i \, d \, \underset{s}{a}^k \tag{2.15}$$

biçimindedir. (2.14) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.15) biçiminde dahil edilen w_i^k objelerine konneksiyon (bağlantı) formları denir.

Teorem 2.3.1: 1. Konneksiyon formları $\underset{k}{a}^i$, $k = 1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdır.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

İspat: 1. w_i^k ve $\overline{w}_i^k$ farklı iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$dv^i + w_k^i v^k = 0 \tag{2.16}$$

$$dv^i + \overline{w}_k^i v^k = 0 \tag{2.17}$$

(2.16) ve (2.17) şartlarından, v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $w_k^i = \overline{w}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralını yazalım.

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.18}$$

Burada $A_{i'}^{i} = \dfrac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}}$, $A_{i}^{i'} = \dfrac{\partial u^{i'}}{\partial u^{i}}$ biçimindedir. (2.18) in ikinci şartından

$$d\underset{k}{a}^{i} = dA_{i'}^{i}\underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^{i}d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.19}$$

olarak yazarız. (2.15) denkleminde (2.18) in birinci şartını ve (2.19) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$w_{j}^{i} = -\overset{k}{a}_{j}\, d\underset{k}{a}^{i} = -A_{j}^{j'}\overset{k}{a}_{j'}\left(dA_{i'}^{i}\underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^{i}d\underset{k}{a}^{i'}\right)$$

veya

$$w_{j}^{i} = A_{j}^{j'}A_{i'}^{i}w_{j'}^{i'} - A_{j}^{j'}dA_{j'}^{i} \tag{2.20}$$

olur. (2.20) eşitliği gösterir ki w_{j}^{i} konneksiyon formları tensörün koordinatları olamaz.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

Tanım 2.3.2: w_{i} kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^{i} vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa w_{i} kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir.

2.3.2 Tanıma göre

$$d\left(v^{i}w_{i}\right) = dv^{i}w_{i} + v^{i}dw_{i} = 0 \tag{2.21}$$

olur. v^{i} paralel kaydırılması şartından

$$dv^{i} = -w_{k}^{i}v^{k} \tag{2.22}$$

yazılır. (2.22) eşitliğini (2.21)ifadesinde kullanırsak,

$$\left(dw_{i} - w_{i}^{k}w_{k}\right)v^{k} = 0$$

bulunur. v^{i} vektörünün keyfiliğinden dolayı w_{i} kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$dw^{i} - w_{i}^{k}w_{k} = 0 \tag{2.23}$$

biçimindedir.

Vektörün ve kovektörün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün paralel kaydırılmasını verebiliriz. (p,q) tipli keyfi tensörün izi ve bu tensörün koordinatları γ eğrisi boyunca

$$Z = t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{w}_{i_1}\dots\overset{p}{w}_{i_p}$$

verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{w}_{i_1}\dots\overset{p}{w}_{i_p} + t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\,d\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{w}_{i_1}\dots\overset{p}{w}_{i_p} \\ &+\dots+ t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{w}_{i_1}\dots d\,\overset{p}{w}_{i_p} \\ &= \Big(dt^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} - w^s_{j_1} t^{i_1\dots i_p}_{sj_2\dots j_q} - \dots - w^s_{j_q} t^{i_1\dots i_p}_{sj_2\dots s} + w^{i_1}_s t^{si_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \\ &+ w^{i_p}_s t^{i_1\dots s}_{j_1\dots j_q}\Big)\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{w}_{i_1}\dots\overset{p}{w}_{i_p} \end{aligned} \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\begin{aligned} \delta t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} &= dt^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} - w^s_{j_1} t^{i_1\dots i_p}_{sj_2\dots j_q} - \dots - w^s_{j_q} t^{i_1\dots i_p}_{sj_2\dots s} \\ &+ w^{i_1}_s t^{si_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + w^{i_p}_s t^{i_1\dots s}_{j_1\dots j_q} \end{aligned} \tag{2.25}$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{w}_{i_1}\dots\overset{p}{w}_{i_p} \tag{2.26}$$

yazılır. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.25) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ tensörüne $t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir. Tensörün mutlak diferensiyeli ile tüm eğri boyunca keyfi noktalarda uygulanmış tensörler arasındaki eşleme (2.26) eşitliği ile verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \quad \delta w_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

olur.

(2.25) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz.

1. $\delta\left(\underset{1}{t} \mp \underset{2}{t}\right) = \delta \underset{1}{t} \mp \delta \underset{2}{t}$**,** $\underset{1}{t}$ ve $\underset{2}{t}$ aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$**,** λ - skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$**,** A ve B keyfi tipli tensörlerdir,

4. Tensörlerin simetrikleşme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilirler.

2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

Tanım 2.3.3: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyon verilmiş ve aşağıdaki lineerlik şartı sağlanıyorsa X_n diferensiyellenebilir manifolduna n - boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani lineerlik şartı

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.27}$$

olarak yazılır. Burada v^i_k, v^i ye ve noktaya bağlı fonksiyondur. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + w^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + w^i_k v^k \tag{2.28}$$

olur. (2.27) ve (2.28) eşitliklerinden

$$w^i_k v^k = \left(v^i_s - \partial_s v^i \right) du^s \tag{2.29}$$

ifadesi bulunur. v^k, $\partial_s v^i$ ve v^i_s u^i lerin fonksiyonlarıdır. w^i_k forumları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından w^i_k forumları du^k nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$w^i_k = \Gamma^i_{sk} du^s \tag{2.30}$$

olarak yazılır. Burada Γ^i_{sk} katsayıları afin uzayın noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ^i_{sk} afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim.(2.30) eşitliği kullanılarak

$$w^{i'}_{j'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} du^{k'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} A^{k'}_k du^k$$

yazılır.

Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i \right) du^k \tag{2.31}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğinin ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\left(\partial_k A_j^{j'} \right) A_{j'}^i + A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i \right) = 0$$

$$\Rightarrow A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i \right) = -\left(\partial_k A_j^{j'} \right) A_{j'}^i$$

olur. Bu son eşitlik (2.31) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i \left(\partial_k A_j^{j'} \right) du^k \tag{2.32}$$

elde edilir. (2.32), (2.30) ve (2.20) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{i'} \tag{2.33}$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'} = \partial_k A_j^{i'}$ biçimindedir.

(2.30) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i = \left(\partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s \right) du^k \tag{2.34}$$

biçiminde olur. (2.34) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s \tag{2.35}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür. Benzer şekilde w_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k w_j = \partial_k w_j - \Gamma_{kj}^s w_s \tag{2.36}$$

olur, ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür. (2.30) eşitliğinden, (p,q) tipli $t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} = \left(\partial_k t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{ks}^{i_\lambda} t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots s \ldots i_p} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{kj_\mu}^{s} t_{j_1 \ldots s \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \right) du^k \tag{2.37}$$

biçiminde olur.

(2.37) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q} \tag{2.38}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türev tanımından görülür ki (p,q) tipli tensörün kovaryant türevi $(p,q+1)$ tipli bir tensördür.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özellikler yazılır:

1. $\nabla_k \left(\underset{1}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \pm \underset{2}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \right) = \nabla_k \underset{1}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \pm \nabla_k \underset{2}{t}{}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

2. $\nabla_k \left(\lambda t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \right) = \left(\partial_k \lambda \right) t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \lambda \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, $\lambda \in F$ (F lineer fonksiyonlar kümesi)

3. $\nabla_k \left(t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q} \right) = \left(\nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \right) \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q} + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleşme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile yerleri değişebilir.

2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f\left(u^1, \dots, u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonunun du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.39}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanının potansiyel fonksiyonu denir.

Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j}V_{i]} = 0 \tag{2.40}$$

olmasıdır (Yano 1965).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.41}$$

biçimindedir. (2.41) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.40) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j}V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.42}$$

bulunur. Burada,

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} \tag{2.43}$$

olarak verilmiştir. (2.42) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S^k_{ij} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör ifade eder. (2.43) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X ve Y vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$ X ve Y vektör alanlarının Lie parantezidir:

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Keyfi v^k vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sm} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}
\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\
&= \partial_r \left(\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k \right) + \Gamma^i_{rm} \left(\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k \right) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\
&= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i = R^i_{rsk}v^k - 2S^k_{rs}\nabla_k v^i \tag{2.45}$$

denklemi elde edilir. (2.45) denkleminde

$$\begin{aligned} R^i_{rsk} &= \partial_r\Gamma^i_{sk} - \partial_s\Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^m_{rk} \\ &= 2\left(\partial_{[r}\Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|}\Gamma^m_{s]k}\right) \end{aligned} \tag{2.46}$$

olarak alınmıştır. (2.45) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemann-Christoffel tensörü denir.

(2.45) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}w_k = -R^m_{rsk}w_m - 2S^m_{rs}\nabla_m w_k\,, \tag{2.47}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^j_i = R^j_{rsm}\varphi^m_i - R^m_{rsi}\varphi^j_m - 2S^k_{rs}\nabla_k\varphi^j_i\,, \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} &= R^{i_1}_{rsm}t^{mi_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \ldots + R^{i_p}_{rsm}t^{i_1\ldots m}_{j_1\ldots j_q} - R^m_{rsj_1}t^{i_1\ldots i_p}_{mj_2\ldots j_q} \\ &- \ldots - R^m_{rsj_q}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots m} - 2S^k_{rs}\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \end{aligned} \tag{2.49}$$

(2.48) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği de denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.50}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların diffeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme aynı bir X_n diferensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu durumda konneksiyonların birinden diğerine geçmeye konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir.

Bu konneksiyonların katsayılarını Γ_{ij}^{k} ve $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ ile gösterelim. Keyfi v^{i} vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^{i} v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}_{km}^{i} v^m$$

biçiminde olur. Sonuncu eşitlikten,

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^{i} v^m \tag{2.51}$$

yazılır. Burada,

$$T_{km}^{i} = \overline{\Gamma}_{km}^{i} - \Gamma_{km}^{i} \tag{2.52}$$

biçimindedir. (2.51) eşitliği ile verilen T_{km}^{i}, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü denir.

Teorem 2.3.2: (1,2) tipli T_{km}^{i} tensörü ve Γ_{km}^{i} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.52) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}_{km}^{i}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.52) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k}$$

yazılır. Γ_{ij}^{k} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \left(\overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'} \right) + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'} \tag{2.53}$$

olur. Burada T_{ij}^{k} tensör olduğundan,

$$T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} T_{i'j'}^{k'} \tag{2.54}$$

yazılır. (2.54) eşitliği (2.53) de kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'}$$

olduğu bulunur. Yani $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ ‘ ler konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi kuralına göre değişir. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim.

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{1+\lambda} \tag{2.55}$$

değeri de bir afin konneksiyon katsayılarıdır.

İspat: (2.55) eşitliği

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij} - \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}\right) \tag{2.56}$$

biçiminde yazılabilir. (2.56) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 2.3.2. Teoreme göre Γ^k_{ij} afin konneksiyon olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{2} \tag{2.57}$$

buluruz. $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ^k_{ij} afin konneksiyon verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: :Burulma tensörünün ifadesi

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} + 2S_{ij}^{k}, \tilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} \tag{2.58}$$

yazılır. 2.3.2. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ ve Γ_{ji}^{k} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyonlar denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Burulması Sıfır Olan Uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^1,...,\overset{\circ}{u}{}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta^{i'}_k$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{3.1}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. (3.1) dönüşümü diferensiyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i + \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p), A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{3.2}$$

biçiminde yazılır. (3.2) eşitliği O noktasında ve civarında $\det(A^{i'}_i) \neq 0$ şartını sağlar. Ayrıca (3.1) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (3.2) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i, A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{3.3}$$

olur. Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (3.3) ve (2.33) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \delta^{j'}_j \delta^{k'}_k \delta^i_{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta^i_{i'} \delta^{i'}_l \overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{k'j'} = 0$$

bulunur.

Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu verilen sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (3.1) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği)

Bu eşitliklerden her üçünün de invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{3.4}$$

olarak gösterilsin. (3.4) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} = \nabla_k a_{ij},$$
$$\partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} = \nabla_i a_{jk},$$
$$\partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} = \nabla_j a_{ki}.$$

Son iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{3.5}$$

bulunur. (3.5) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma^r_{ij} = \begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{3.6}$$

olur.

Burada,

$$\begin{Bmatrix} r \\ ij \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} \left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} \right) \tag{3.7}$$

biçimindedir. (3.7) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri ile ifade edilir.

Tanım 3.1.1: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \pm e & e_s \neq e_n \\ 0 & e_s = e_n \end{cases}$ n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{\upsilon}, \underset{2}{\upsilon}, \ldots, \underset{n}{\upsilon}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{\upsilon}^{i_1} \underset{2}{\upsilon}^{i_2} \ldots \underset{n}{\upsilon}^{i_n} \tag{3.8}$$

olsun. $\underset{1}{\upsilon}, \underset{2}{\upsilon}, \ldots, \underset{n}{\upsilon}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa burulmasız A_n uzayına eş (denk) afin uzay denir.

(3.8) denkleminden

$$\delta e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0 \tag{3.9}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (3.9) denklemiyle belirlenir.(3.9) şartı

$$\partial_k e_{i_1 i_2 \ldots i_n} - \Gamma^s_{k i_1} e_{s i_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{k i_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{3.10}$$

biçiminde yazılır. n-vektörün antisimetrikliğine göre (3.9) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12\ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2\ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12\ldots s} = 0 \tag{3.11}$$

denklemine denk olur. $e_{12\ldots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (3.11) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{3.12}$$

yazılır. (3.12) eşitliği eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyenttir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ dir.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^i_{lj} \tag{3.13}$$

tensörüne Ricci tensörü denir.

Eş afin konneksiyonunu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{3.14}$$

şartı ile de karakterize edebiliriz.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0, R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığı göz önüne alınırsa

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{3.15}$$

yazılır. (3.14) ve (3.15) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

3.2. Metrik uzaylar

Tanım 3.2.1: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör de denir.

Esas polariteat 2. defa kovaryant g_{ij} simetrik tensörüyle verilir. Yani paralel taşınma esnasında g_{ij} korunur. Böylelikle υ^{i}, ω^{j} iki vektör alındığında

$$g_{ij}\upsilon^{i}\omega^{j} = 0 \tag{3.16}$$

eşleniklik şartıdır. Bunun mutlak diferensiyeli alınırsa

$$\delta g_{ij}\upsilon^{i}\omega^{j} + g_{ij}\delta\upsilon^{i}\omega^{j} + g_{ij}\upsilon^{i}\delta\omega^{j} = 0 \tag{3.17}$$

paralel taşındığı için $\delta\upsilon^{i}, \delta\omega^{j} = 0$ olur. Sonuç olarak

$$\delta g_{ij}\upsilon^{i}\omega^{j} = 0 \tag{3.18}$$

olur.

Polariteat korunursa

$$\delta g_{ij} = \lambda g_{ij} \tag{3.19}$$

olur. (3.19) ifadesinin kovaryant türevini alırsak

$$\left(\nabla_k g_{ij}\right) du^k = \lambda g_{ij} \Rightarrow \lambda = 2\omega^k du^k$$

$$\nabla_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij} \tag{3.20}$$

olur. Burada g_{ij} 'ye esas polariteatin esas tensörü, ω_k 'ya ise ilave kovektör denir. Böylelikle metrik uzay 2 defa kovaryant g_{ij} simetrik tensörüyle verilir. Bu uzayın konneksiyonu ise (3.20) şartı ile karakterize olur. Esas polariteat λg_{ij} biçiminde pisagto tensörlerlede verilebilir.

Tanım 3.2.2: Bir tensör bir skalerle çarpılarak aynılaştırılıyorsa bu tensöre pisagto tensör denir. Şimdi $\lambda^2 g_{ij}$ esas tensörünü verelim. O halde esas polariteati

$$\lambda^2 g_{ij} = \breve{g}_{ij}$$

biçiminde tanımlayıp, kovaryant türevini alalım.

$$\begin{aligned}
\nabla_k \breve{g}_{ij} &= 2\lambda \partial_k \lambda g_{ij} + 2\lambda^2 \omega_k g_{ij} \\
&= 2\left(\frac{\partial_k \lambda}{\lambda} + \omega_k\right)\lambda^2 g_{ij} \\
&= 2(\partial_k \ln \lambda + \omega_k)\breve{g}_{ij}\,, \quad \breve{\omega}_k = \omega_k + \partial_k \ln \lambda \\
&= 2\breve{\omega}_k \breve{g}_{ij}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olur. Esas tensörün (3.20) biçiminde normalleşmesi halinde ilave kovektör (3.21) kanunu üzere değişecektir.

3.3. Weyl uzayları

Tanım 3.3.1: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise (yani $\det\left(g_{ij}\right) \neq 0$) ise böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

$Det(g_{ij}) \neq 0$ ise $\tilde{g}_{ij}$ terside vardır. Bu matrislerin tersi özelliğine göre $\tilde{g}_{ij} g_{ik} = \delta_k^i$ şartı verilmiş olur. Böylelikle Weyl uzayı burulmasız uzayda esas tensörün (simetrik ve regüler) verilmesiyle karakterize olur. Weyl uzayı aslında bir Riemann uzayı fakat konneksiyonları farklıdır.

Buna göre, yerel bir koordinat sisteminde

$$\nabla_k g_{ij} - 2w_k g_{ij} = 0 \tag{3.22}$$

olacak şekilde bir w_k 1-formu mevcuttur. w_k 1-formuna Weyl uzayının komplemanter kovektörü denir. Böyle bir Weyl uzayını $W_n(\nabla, g, w)$ ile göstereceğiz.

g metrik tensörünün $\tilde{g} = \lambda^2 g$ değişimine karşılık $\tilde{A} = \lambda^p A$ şeklinde değişen A büyüklüğüne g tensörünün $\{p\}$ ağırlıklı bir uydusu denir (Zlatanov and Norden 1975; Norden 1976).

A büyüklüğünün $\dot{\nabla} A$ ile gösterilen genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\dot{\nabla}_k A = \nabla_k A - p w_k A \tag{3.23}$$

şeklinde tanımlanır (Norden and Yafarov 1974).

Tanım 3.3.2: Simetrik olmayan (burulmalı) bir ∇^* konneksiyonuna ve bu konneksiyon tarafından korunan simetrik olmayan konform g^* metrik tensörüne sahip bir manifolda genelleştirilmiş Weyl uzayı denir. Buna göre, yerel koordinatlarda,

$$\nabla_k^* g_{ij}^* - 2w_k^* g_{ij}^* = 0 \tag{3.24}$$

olacak şekilde bir w_k^* 1-formu mevcuttur. Böyle bir Weyl uzayını $W_n^*(\nabla^*, g^*, w^*)$ ile göstereceğiz.

$g^*_{(ij)}$ ve $g^*_{[ij]}$, sırasıyla, g^*_{ij} tensörünün simetrik ve antisimetrik kısmını göstermek üzere,

$$g^*_{ij} = g^*_{(ij)} + g^*_{[ij]} \tag{3.25}$$

olduğundan, (3.24) den

$$\textbf{a)}\ \nabla^*_k g^*_{(ij)} - 2w^*_k g^*_{(ij)} = 0 \qquad \textbf{b)}\ \nabla^*_k g^*_{[ij]} - 2w^*_k g^*_{[ij]} = 0 \tag{3.26}$$

elde edilir (Çivi 1999).

A büyüklüğünün $\overset{*}{\nabla}_k A$ ile göstereceğimiz genelleştirilmiş kovaryant türevini

$$\overset{*}{\nabla}_k A = \nabla^*_k A - p w^*_k A \tag{3.27}$$

şeklinde tanımlayalım.

g, g^* tensörünün simetrik kısmı olmak üzere, $W_n(\nabla, g, w)$ Weyl uzayı ile aynı komplemanter vektöre sahip genelleştirilmiş $W^*_n(\nabla^*, g^*, w)$ Weyl uzayını göz önüne alalım. $W_n(\nabla, g, w)$ uzayına $W_n^*(\nabla^*, g^*, w)$ uzayının eş-uzayı denir (Çivi 1999).

$\det g^*_{(ij)} = \det g_{ij} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $g^{*(ij)}$ ters tensörü

$$g^*_{(ij)} g^{*(jk)} = \delta^k_i \tag{3.28}$$

denklemi yardımıyla tanımlanır.

$g^*_{ik,j} = \dfrac{\partial g^*_{ik}}{\partial u^j}$ olmak üzere,

$$\Delta_{ijk} = \frac{1}{2}\left(g^*_{ik,j} + g^*_{kj,i} - g^*_{ij,k} \right), \ \Delta^h_{ij} = g^{*(hk)} \Delta_{ijk} \tag{3.29}$$

$$\Delta_{ijk} = g^*_{(hk)} \Delta^h_{(ij)} \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanan Δ_{ijk} ve Δ^h_{ij} büyüklüklerini göz önüne alalım. Burada $\Delta^h_{(ij)} = \dfrac{1}{2}(\Delta^h_{ij} + \Delta^h_{ji})$ olur. (3.29) bağıntılarının birincisinden

$$\Delta_{ijk} + \Delta_{kji} = g^*_{(ik),j} \tag{3.31}$$

olduğunu görürüz. (3.30) göz önüne alınırsa

$$\overset{*}{g}_{(hk)}\Delta^{h}_{(ij)} + \overset{*}{g}_{(hi)}\Delta^{h}_{(kj)} = \overset{*}{g}_{(ik),j} \tag{3.32}$$

bulunur. Buradan da,

$$\Delta^{h}_{(ij)} = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

elde edilir. Burada $\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$, $\overset{*}{g}_{(ij)}$ metrik tensörüne göre 2. Christoffel sembolleridir.

3.4. Weyl Uzaylarının Konneksiyonu

Burulmasız uzayda konneksiyonu

$$\Gamma^{k}_{ij} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(A_{ijk} + A_{jki} - A_{kij}\right)$$

ile göstermiştik. Bu formülü kullanarak ($\nabla_k a_{ij} = A_{kij}$ ile göstermiştik Weyl uzayında ise $\nabla_k g_{ij} = A_{kij}$ olduğundan) ve (3.20) formülü vasıtasıyla

$$\begin{aligned}\Gamma^{k}_{ij} &= \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{rk}\left(2w_i g_{jk} + 2w_j g_{ki} - 2w_k g_{ij}\right) \\ &= \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \left(w_i\delta^{r}_{j} + w_j\delta^{r}_{i} - w_k\tilde{g}^{rk}g_{ij}\right)\end{aligned} \tag{3.34}$$

yazılır.

Böylelikle Weyl uzayındaki Weyl konneksiyonu yukarıdaki gibi formülüze edilir.

Weyl uzayında esas tensör için Ricci özdeşliğini kullanalım.

$$2\nabla_{[k}\nabla_{l]}g_{ij} = -R^{m}_{kli}g_{mj} - R^{m}_{klj}g_{im}$$

Bu formülde (3.20) formülünü kullanırsak

$$R^{m}_{kli}g_{mj} + R^{m}_{klj}g_{mi} = -4\nabla_{[k}w_{l]}g_{ij} \qquad \left(\tilde{g}^{ij}g_{ij} = \delta^{i}_{i} = n\right)$$

olur.

Bu son formülü $\tilde{g}^{ij}$ ile çarparsak

$$R^m_{kli}\delta^i_m + R^m_{klj}\delta^j_m = -4n\nabla_{[k} w_{l]}$$

$$2R^i_{kli} = -2n\nabla_{[k} w_{l]} \tag{3.35}$$

olur.

3.5. Genelleştirilmiş Weyl Uzayının Konneksiyon Katsayıları

Bu kısımda, önce $W^*_n(\nabla^*, g^*, w)$ genelleştirilmiş Weyl uzayının ∇^* konneksiyonunun katsayılarını belirleyecek, daha sonra ∇^* ve ∇ konneksiyonları arasındaki ilişkiden faydalanarak kovaryant ve kontravaryant vektör alanlarının ∇^* ve ∇ konneksiyonlarına göre mutlak türevleri arasındaki ilişkiyi elde edeceğiz.

∇^* konneksiyonunun katsayılarını L^i_{jk} ile gösterelim. Buna göre, (3.24) koşulu

$$\nabla^*_k g^*_{ij} - 2w^*_k g^*_{ij} = \frac{\partial g^*_{ij}}{\partial u^k} - g^*_{hj}L^h_{ik} - g^*_{ih}L^h_{jk} - 2w^*_k g^*_{ij} = 0 \tag{3.36}$$

şeklinde olur. (3.36) da önce i ve k indislerinin, sonra da j ve k indislerinin yer değiştirmesiyle, sırasıyla,

$$\nabla^*_i g^*_{kj} - 2w^*_i g^*_{kj} = \frac{\partial g^*_{kj}}{\partial u^i} - g^*_{hj}L^h_{ki} - g^*_{kh}L^h_{ji} - 2w^*_i g^*_{kj} = 0 \tag{3.37}$$

ve

$$\nabla^*_j g^*_{ik} - 2w^*_j g^*_{ik} = \frac{\partial g^*_{ik}}{\partial u^j} - g^*_{hk}L^h_{ij} - g^*_{ih}L^h_{kj} - 2w^*_j g^*_{ik} = 0 \tag{3.38}$$

elde edilir.

Bu iki denklemin toplamından (3.36) denklemi çıkarılır ve (3.29) kullanılırsa

$$\Delta_{ijk} + L^h_{[ik]}g^*_{hj} + L^h_{[jk]}g^*_{ih} - \frac{1}{2}\Big[L^h_{ji}(g^*_{(kh)} + g^*_{[kh]}) + L^h_{ij}(g^*_{(hk)} + g^*_{[hk]})\Big] - (w^*_j g^*_{ik} + w^*_i g^*_{kj} - w^*_k g^*_{ij})$$
$$= \Delta_{ijk} + L^h_{[ik]}g^*_{hj} + L^h_{[jk]}g^*_{ih} - L^h_{(ij)}g^*_{(hk)} + L^h_{[ij]}g^*_{[kh]} - (w_i g^*_{kj} + w_j g^*_{ik} - w_k g^*_{ij}) = 0$$

veya (3.30) dan

$$
\begin{aligned}
& \overset{*}{g}_{(hk)}\Delta^h_{(ij)} + \frac{1}{2}\left(S^h_{ik}\overset{*}{g}_{hj} + S^h_{jk}\overset{*}{g}_{ih} + S^h_{ij}\overset{*}{g}_{[kh]}\right) - L^h_{(ij)}\overset{*}{g}_{(hk)} \\
& -\left(w_i\overset{*}{g}_{kj} + w_j\overset{*}{g}_{ik} - w_k\overset{*}{g}_{ij}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

bulunur. Burada $S^i_{jk} = L^i_{jk} - L^i_{kj} = 2L^i_{[jk]}$ tensörü ∇^* konneksiyonunun burulma tensörüdür. (3.39) da i ve j indislerinin yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilen denklemin (3.39) ile toplamının yarısı alınarak

$$
\begin{aligned}
& \overset{*}{g}_{(hk)}\Delta^h_{(ij)} + \frac{1}{2}\left(S^h_{jk}\overset{*}{g}_{(ih)} + S^h_{ik}\overset{*}{g}_{(hj)}\right) - L^h_{(ij)}\overset{*}{g}_{(hk)} \\
& -\left(w_i\overset{*}{g}_{(kj)} + w_j\overset{*}{g}_{(ik)} - w_k\overset{*}{g}_{(ij)}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

denklemi elde edilir.

(3.40) denklemi $g^{*(kl)}$ ile çarpılır ve k üzerine toplam alınırsa, $\Gamma^i_{jk} = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} - \left(\delta^i_j w_k + \delta^i_k w_j - g^{li} g_{jk} w_l\right)$, (3.28) ve (3.33) yardımıyla

$$
L^l_{(ij)} = \Gamma^l_{ij} + \frac{1}{2}\left[S^h_{jk}\overset{*}{g}_{(ih)} + S^h_{ik}\overset{*}{g}_{(hj)}\right] g^{*(kl)}
\tag{3.41}
$$

elde edilir. Böylece,

$$
L^i_{jk} = L^i_{(jk)} + L^i_{[jk]}
\tag{3.42}
$$

olduğu göz önüne alınarak, $W^*_n(\nabla^*, g^*, w)$ uzayının L^i_{jk} konneksiyon katsayıları için

$$
L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\left[S^h_{kl}\overset{*}{g}_{(jh)} + S^h_{jl}\overset{*}{g}_{(hk)} + S^h_{jk}\overset{*}{g}_{(hl)}\right] g^{*(li)}
\tag{3.43}
$$

veya

$$
Q^i_{jk} = \frac{1}{2}\left[S^h_{kl}\overset{*}{g}_{(jh)} + S^h_{jl}\overset{*}{g}_{(hk)} + S^h_{jk}\overset{*}{g}_{(hl)}\right] g^{*(li)}
\tag{3.44}
$$

denirse,

$$
L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + Q^i_{jk}
\tag{3.45}
$$

bulunur.

∇^* konneksiyonunun L^i_{jk} katsayılarının simetrik kısmı genel olarak Γ^i_{jk} dan ibaret değildir. (3.41) den $L^i_{(jk)}$ nın Γ^i_{jk} dan ibaret olması için gerek ve yeter şartın

$$\left[S^h_{jk}\overset{*}{g}_{(ih)} + S^h_{ik}\overset{*}{g}_{(hj)}\right] g^{*(kl)} = 0 \qquad (3.46)$$

olduğu kolayca görülür.

Özel olarak, (3.44) de i ve k indisleri üzerinde kontraksiyon yapılırsa,

$$L^i_{ji} = \partial_j \ln\sqrt{g} - nw_j + S^i_{ji} \qquad (3.47)$$

ve nihayet i ve j indisleri üzerinde daraltma yapılırsa,

$$Q^i_{ik} = 0, \qquad L^i_{ik} = \Gamma^i_{ik} = \partial_k \ln\sqrt{g} - nw_k \qquad (3.48)$$

bulunur.

$W^*_n(\nabla^*, g^*, w)$ genelleştirilmiş Weyl uzayının

$$L^l_{ijk} = \partial_j L^l_{ik} - \partial_k L^l_{ij} + L^h_{ik}L^l_{hj} - L^h_{ij}L^l_{hk} \qquad (3.49)$$

eğrilik tensöründe, i, j, k indislerinin devirsel olarak yer değiştirmesiyle elde edilen

$$L^l_{jki} = \partial_k L^l_{ji} - \partial_i L^l_{jk} + L^h_{ji}L^l_{hk} - L^h_{jk}L^l_{hi} \qquad (3.50)$$

$$L^l_{kij} = \partial_i L^l_{kj} - \partial_j L^l_{ki} + L^h_{kj}L^l_{hi} - L^h_{ki}L^l_{hj} \qquad (3.51)$$

eşitliklerinin (3.49) ile taraf tarafa toplanmasıyla

$$L^l_{ijk} + L^l_{jki} + L^l_{kij} = \partial_k S^l_{ji} + \partial_i S^l_{kj} + \partial_j S^l_{ik} + L^l_{hk}S^h_{ji} + L^l_{hi}S^h_{kj} + L^l_{hj}S^h_{ik} \qquad (3.52)$$

özdeşliği bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Riemann Uzayı

Tanım 4.1.1: Eş afin Weyl uzayına Riemann uzayı denir. Eş afin uzayı $R^i_{ijk}=0$ şartı ile karakterize olduğundan (3.35) formülünde Riemann uzayında

$$\nabla_{[k}w_{l]}=0 \tag{4.1}$$

olur. (4.1) şartı ise w_l ilave kovektörünün (vektörünün) gradyentlik şartıdır. Buradan şunlar söylenir:

Riemann uzayı öyle Weyl uzayıdır ki buradaki ilave kovektör gradyenttir. w nın gradyentlik şartı

$$w_l=\partial_l f \tag{4.2}$$

ile veriliyordu.

(3.21) formülünde (4.2) formülünü kullanırsak

$$\breve{w}_k=\partial_k f+\partial_k \ln\lambda$$

λ yı öyle alalım ki $\breve{w}_k=0$ olsun. Burada $f+\ln\lambda=c$ ise

$$\ln e^f+\ln\lambda=\ln e^c$$
$$\ln e^f\lambda=\ln e^c$$
$$e^f\lambda=e^c$$

ise $\lambda=ce^{-f}$ olarak seçersek $\breve{w}_k=0$ olur.

Bundan sonra esas tensör denildiğinde $\lambda=ce^{-f}$ skaleri ile normalleşen esas tensör anlaşılacaktır. $\breve{g}_{ij}=\lambda g_{ij}$ şartı için $\breve{w}_k=0$ olur.

Bu şart dahilinde (3.34) formülünden Riemann konneksiyonu

$$\Gamma_{ij}^{k} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_{g} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{kr}\left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij}\right)$$

olur.

Ayrıca (3.20) formülünden

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{4.3}$$

olur. Böylelikle Riemann manifoldu burulmasız konneksiyona sahip manifolddur. Öyle ki iki kez kovaryant, simetrik, regüler tensör verilmiş olur. Bu uzayın konneksiyonu (4.3) şartı ile karakterize olur (Kobayashi and Nomizu 1969).

Sonuç olarak Riemann uzayı bir metrik uzaydır.

Riemann manifoldu üzerinde çeşitli konneksiyonlar vermek mümkündür ve bu konneksiyonlar burulmasızdırlar.

Yani V_n Riemann manifoldu üzerinde g_{ij} esas (metrik) tensörü olsun. Bu uzayda $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız konneksiyonu tektir ve bu $\Gamma_{ij}^{k} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_{g}$ dir. Buna Riemann konneksiyonu veya Levi Chivita konneksiyonu denir. Ama Riemann manifoldu üzerinde $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulması olan konneksiyonlarda vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyonlar denir.

Ayrıca burulmasız uzaylarda

1. $R^{l}_{(ij)k} = 0$

2. $R^{l}_{[ijk]} = 0$

3. $\nabla_{[s} R^{l}_{ij]k} = 0$

eşitlikleri vardı.

Riemann uzayında ise bu eşitliklere ilave olarak Ricci özdeşliğinden yararlanırsak yani $R^{m}_{kli}g_{mj}+R^{m}_{klj}g_{mi}=-4\nabla_{[k}w_{l]}g_{ij}$ formülünden ve $R_{ijkl}=R^{s}_{ijk}g_{sl}$ olduğundan

$$R^{m}_{kli}g_{mj}+R^{m}_{klj}g_{mi}=0$$

$$R_{klij}+R_{klji}=0$$

olur. Yani,

4. $R_{ij(kl)}=0$ olur.

1) $R_{ijkl}+R_{jkil}+R_{kijl}=0$

2) $R_{jkli}+R_{klji}+R_{ljki}=0$

3) $R_{klij}+R_{likj}+R_{iklj}=0$

4) $R_{lijk}+R_{ijlk}+R_{jlik}=0$

eşitliklerinin hesaplanmasından ise,

5. $R_{ijkl}=R_{klij}$ sonucu çıkar.

4.2. Sabit Eğrilikli Riemann Uzayları

Tanım 4.2.1: M_n Riemann uzayı verilmiş olsun. Bu Riemann uzayının her bir noktasında polineer olmayan iki tane $X=\xi^{i}x_{i}$, $Y=\eta^{j}y_{j}$ vektörlerini alalım. Bu vektörler vasıtasıyla oluşan düzleme kesit denir.

X,Y nin oluşturduğu kesiti $\Pi(X,Y)$ ile gösterelim. Bu $\Pi(X,Y)$ kesitine karşılık gelen eğriliğe kesit eğrilik denir ve bunu K ile gösterirsek

$$K=-\frac{R_{ijkl}\xi^{i}\mu^{j}\xi^{k}\mu^{l}}{Det\begin{pmatrix} g_{ik} & g_{jk} \\ g_{il} & g_{jl}\end{pmatrix}\xi^{i}\mu^{j}\xi^{k}\mu^{l}} \tag{4.4}$$

olarak tanımlanır.

Bu formülü kontrol etmek için $n=2$ alırsak

$$K=-\frac{R_{1212}\xi^1\mu^2\xi^1\mu^2+R_{2112}\xi^2\mu^1\xi^1\mu^2+R_{1221}\xi^1\mu^2\xi^2\mu^1+R_{2121}\xi^2\mu^1\xi^2\mu^1}{\left(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}\right)\xi^i\mu^j\xi^k\mu^l}$$

$$=-\frac{R_{1212}\left(\left(\xi^1\right)^2\left(\mu^1\right)^2-\xi^1\xi^2\mu^1\mu^2-\xi^1\xi^2\mu^1\mu^2+\left(\xi^2\right)^2\left(\mu^2\right)^2\right)}{\left(g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2\right)\xi^1\mu^2\xi^1\mu^2+\left(g_{12}{}^2-g_{11}g_{22}\right)\xi^1\mu^1\xi^2\mu^2+\left(g_{11}g_{22}-g_{22}{}^2\right)\xi^2\mu^1\xi^2\mu^1+\left(g_{12}{}^2-g_{11}g_{22}\right)\xi^1\mu^1\xi^2\mu^2}$$

$$=-\frac{R_{1212}}{g}$$ olur.

Farzedelim ki kesit eğriliği yönden bağımsız olsun. O halde (4.4) den $\left(R_{ijkl}+K\left(g_{ik}g_{jl}-g_{jk}g_{il}\right)\right)\xi^i\mu^j\xi^k\mu^l=0$ ise $R_{ijkl}=-K\left(g_{ik}g_{jl}-g_{jk}g_{il}\right)$ dir. Bu ifadeyi g^{ls} ile çarparsak

$$\begin{aligned} R^s_{ijk} &= -K\left(g_{ik}\delta^s_j-g_{jk}\delta^s_i\right) \\ &= K\left(g_{jk}\delta^s_i-g_{ik}\delta^s_j\right) \end{aligned}$$

olur.

Buradan Ricci tensörüne geçersek

$$R_{jk}=R^i_{ijk}=K\left(ng_{jk}-g_{jk}\right)=Kg_{jk}\left(n-1\right) \qquad (4.5)$$

bulunur.

Tanım 4.2.2: $R=R_{ij}g^{ij}$ skalerine Riemann manifoldunda skaler eğrilik denir.

Bunu (4.5) formülünde kullanırsak yani herhangi bir p noktasında g^{jk} ile çarparsak

$$R=Kn(n-1) \qquad (4.6)$$

formülünü elde ederiz. (4.6) formülü herhangi bir p noktasında kesit eğriliği $\Pi\left(X,Y\right)$ den ayrı değilse (4.6) formülü elde edilir. Bu tür uzaylara p noktasında izotropiktir denir. Eğer Riemann manifoldu her bir noktasında izotropik ise bu Riemann manifolduna izotropik manifold denir. Yüzeyler özel olarak izotropiktir.

Schur Lemması: Riemann manifoldu izotropiktir ise $n > 2$ olduğunda bağlantılı Riemann uzayı için K sabittir.

İspat: Riemann uzayında Bianchi-Padov özdeşliğini yazarsak

$$\nabla_k R^l_{ijs} + \nabla_i R^l_{jks} + \nabla_j R^l_{kis} = 0$$

$l = k$ alınırsa

$$\nabla_k R^k_{ijs} + \nabla_i R^k_{jks} + \nabla_j R^k_{kis} = 0$$

$$\nabla_k R^k_{ijs} - \nabla_i R^k_{kjs} + \nabla_j R_{is} = 0$$

$$\nabla_k R^k_{ijs} = \nabla_i R_{js} - \nabla_j R_{is}$$

g^{js} ile çarparsak

$$\nabla_k R^k_i = \nabla_i R - g^{js} \nabla_j R_{is}$$

olur. Burada $R_{jk} = K g_{jk}(n-1)$ ve $R = Kn(n-1)$ dir. Buradan

$$R_{jk} = g_{jk} \frac{R}{n}$$

olur. O halde $\nabla_j R_{is} = g_{is} \frac{1}{n} \partial_j R$ olur. Bu $\nabla_k R^k_i = \nabla_i R - g^{js} \nabla_j R_{is}$ formülünde yerine yazılırsa

$$\nabla_k R^k_i = \nabla_i R - \delta^j_i \frac{1}{n} \partial_j R$$

$$= \nabla_i R - \frac{1}{n} \partial_i R$$

$$= \partial_i R - \frac{1}{n} \partial_i R$$

olur.

Not: $\nabla_l \left(g^{js} R_{is} \right) = \nabla_l R^j_i \Rightarrow g^{js} \nabla_l R_{is} = \nabla_l R^j_i$ ifadesinde $l = j$ alınırsa $g^{js} \nabla_j R_{is} = \nabla_j R^j_i$ olur.

$$2\nabla_k R^k_i = \nabla_i R \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.5) formülünden $R_{jk} = K(n-1)g_{jk}$ ifadesini g^{ks} ile çarparsak

$$R_j^s = K(n-1)\delta_j^s$$

$$R_j^s = \frac{R}{n}\delta_j^s$$

olur. $\nabla_l R_j^s = \left(\nabla_l R\right)\frac{1}{n}\delta_j^s$ formülünde $s = l$ alınırsa

$$\nabla_l R_j^l = \frac{1}{n}\nabla_j R \tag{4.8}$$

olur. (4.7) ‘i (4.8) de kullanırsak

$$\frac{2}{n}\nabla_i R = \nabla_i R$$

$$\Rightarrow \nabla_i R\frac{(n-2)}{n} = 0$$

olur. Eğer $n \geq 2$ ise $\nabla_i R = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\partial_i R = 0$ olur. Burada R sabit olur. R sabit ise (4.6) dan K sabit olur. Bu tür uzaylara sabit eğrilikli Riemann uzayları denir.

Yani izotropik Riemann uzayının tüm noktalarındaki kesit eğrilikleri aynı ise buna sabit eğrilikli Riemann uzayı denir. Schur lemmasına göre eğer Riemann manifoldunun boyutu $n > 2$ ise ve izotropik ve bağlantılı ise bu tür uzaylar sabit eğrilikli Riemann uzayı olur.

(4.6) da $K = 0$ ise eğrilik tensörü sıfır olur. Öklid uzayları buna örnektir. Eğer $n < 0$ ise buna Lobaçevski uzayı denir. $n > 0$ ise eliptik geometri olur.

Tanım 4.2.3: Riemann uzayı $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ şartını sağlıyorsa bu tür uzaylara Einstein uzayı denir.

$R_{ij} = \lambda g_{ij}$ ifadesini g^{ij} ile çarparsak $R = \lambda n \quad \Rightarrow \lambda = \dfrac{R}{n}$ olur. Dolayısıyla $R_{ij} = \dfrac{R}{n} g_{ij}$ yazılır. Bu da gösterir ki sabit eğrilikli uzay Einstein uzayıdır. Peki S_2 yani 2 boyutlu yüzeyde Einstein uzayı mıdır? Bunu gösterelim:

$$R = R_{ij} g^{ij} = g^{ij} R^{s}_{sij}$$

$$= g^{ij} g^{ks} R_{sijk}$$

yüzeyde ise $2K = -\dfrac{2}{g} R_{1212}$ olur. Yani $R = 2K \Rightarrow K = \dfrac{R}{2}$ dir.

Buradan

$$g^{ij} R_{ij} = 2K$$

$$g_{ij} g^{ij} R_{ij} = 2K g_{ij}$$

$$R_{ij} = K g_{ij}$$

$$R_{ij} = \frac{R}{2} g_{ij}$$

olur. Bu da yüzeyin bir Einstein uzayı olduğunu gösterir.

4.3. Konform Dönüşüm

Tanım 4.3.1: $f : \left(M_n, \Gamma\right) \rightarrow \left(\bar{M}_n, \bar{\Gamma}\right)$ diffeomorfizmi verilmiş olsun. M_n nin metrik tensörü g ve $\bar{M}_n$ nin de $\bar{g}$ olsun. f diffeomorfizminin konform dönüşüm olması için bu uzayların bu dönüşüme esas polariteatlerinin çakışmış olması gerekir. Burada $g_{ij} \square \lambda g_{ij}$ ve $\bar{g}_{ij} \square \mu \bar{g}_{ij}$ olur.

Böylelikle metrik uzayların konform dönüşümleri için gerek ve yeter şart onların metrik tensörlerinin çakışmasıdır. Diğer taraftan konform dönüşüm $g_{ij} = \lambda \bar{g}_{ij}$ şartıyla tanımlanır.

Kısaca $\left(M_n, g\right) \underset{\rightarrow}{f} \left(\bar{M}_n, \bar{g}\right)$ dönüşümünde açı korunuyorsa buna konform dönüşüm denir. Yani iki metrik uzayın konform olması için gerek ve yeter şart ortak koordinat sisteminde metriklerin çakışmasıdır.

Şimdi ∇ konneksiyonu için

$$\nabla_k g_{ij} = 2w_k g_{ij} \text{ ve } \breve{\nabla}_k g_{ij} = 2\breve{w}_k g_{ij}$$

alalım. Buradan

$$p_k = w_k - \breve{w}_k$$

olur. Buna konform dönüşümün kovektörü denir.

Şimdi bu metrik uzayları özelleştirip Weyl uzayı alırsak konneksiyonlar

$$\breve{\Gamma}_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \left(\breve{w}_i \delta_j^k + \breve{w}_j \delta_i^k - \breve{w}_m g^{km} g_{ij}\right)$$

ve

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \left(w_i \delta_j^k + w_j \delta_i^k - w_m g^{km} g_{ij}\right)$$

olarak yazılır.

$$\underbrace{\breve{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k}_{T_{ij}^k} = \underbrace{\left(w_i - \breve{w}_i\right)}_{p_i} \delta_j^k + \underbrace{\left(w_j - \breve{w}_j\right)}_{p_j} \delta_i^k - \underbrace{\left(w_m - \breve{w}_m\right)}_{p_m} g^{km} g_{ij}$$

olur.

$$T_{ij}^k = p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - p_m g^{km} g_{ij} \tag{4.9}$$

olarak afin deformasyon (gerginlik) tensörü elde edilir. Hatta burada iki uzayın konform olması için bu son şartı sağlaması gerekir.

Afin deformasyon denklemi $T_{kj}^i = \delta_k^i q_j + \delta_j^i q_k$ ve (4.9) denklemi kullanılarak

$$\delta_k^i q_j + \delta_j^k q_i = p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - p_m g^{km} g_{ij} \tag{4.10}$$

elde edilir ve $k = i$ kontraksiyonu yapılarak

$$\delta_k^k q_j + \delta_j^k q_k = p_k \delta_j^k + p_j \delta_k^k - p_m g^{km} g_{kj}$$

$$n q_j + q_j = p_j + n p_j - p_j$$

ve sonuç olarak

$$(n+1) q_j = n p_j \tag{4.11}$$

bulunur.

Şimdi g^{ij} ile (4.10) denklemini kontraksiyon yaparsak

$$g^{kj} q_j + g^{ik} q_i = g^{ik} p_i + g^{jk} p_j - p_m g^{km} n$$

ve g^{kj} parantezine alırsak g^{kj} yok olur ve

$$q_j + q_j = p_j + p_j - n p_j$$

elde ederiz.

Buradan

$$2 q_j = (2-n) p_j \tag{4.12}$$

olur. (4.11) ve (4.12) denklemlerinin katsayılar matrisini yazarsak

$$\begin{pmatrix} n+1 & -n \\ 2 & n-2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Bu matrisin determinantını aldığımızda elde ettiğimiz sonuç $n=1$ dir. Yani boyut sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $p_j, q_j = 0$ olur.

$n > 1$ ise konneksiyonlar çakışır (konform ve geodezik uzayda). Dolayısıyla uzaylar aynıdır. Konform dönüşümün afin deformasyon tensörü

$$T_{ij}^k = p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - p_m g^{km} g_{ij}$$

$$= p_m \delta_i^m \delta_j^k + p_m \delta_j^m - p_m g^{km} g_{ij}$$

$$\Rightarrow T_{ij}^k = T_{..ij}^{mk} p_m$$

olarak yazılır.

Eğer uzay Riemann uzayı ise konformluğu $\overline{g} = \lambda^2 g$ olur. Konform dönüşüm için afin deformasyon tensörü $T_{ij}^{k} = \breve{\Gamma}_{ij}^{k} - \Gamma_{ij}^{k}$ ve vektörün gradyentinden

$$= \partial_j \ln \sqrt{\breve{g}} - \partial_j \ln \sqrt{g}$$

$$= \partial_j \ln \sqrt{\frac{\breve{g}}{g}} = \partial_j \ln \sqrt{\lambda^{2n}}$$

$$= n\partial_j \ln \lambda$$

olur. Burada

$$T_{kj}^{k} = T_{..kj}^{mk} p_m = np_j = n\partial_i \ln \lambda$$

gradienttir. Dolayısıyla konform dönüşüm deformasyon tensörü gradienttir.

Şimdi

$$\overline{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij} \text{ ve } p_j = \partial_j \ln \lambda$$

ise $\lambda = e^p$ alırsak

$$p_j = \partial_j p$$

olur. λ değerini $\overline{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ de kullanırsak

$$\overline{g}_{ij} = e^{2p} g_{ij}$$

olur.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde burulmasız uzaylardan olan Metrik uzaylar, Weyl uzayları ve bunlara bağlı olarak Rieman uzayları verilmiştir

Bu çalışmada ilk olarak Hausdorff ve sayılabilir baza sahip olan M topolojik uzayının üzerinde n-boyutlu C^{∞} atlaslarının C^{∞} yapısı verildiğinde M uzayına n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold denildiği anlatılmıştır ve bu manifold üzerinden ∇ afin konneksiyonunun tanımı ve

$$\textbf{i.}\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z\,, \quad \forall f, g \in F\left(M_n\right)$$

$$\textbf{ii.}\nabla_Z\left(fX + gY\right) = \left(Zf\right)X + f\nabla_Z X + \left(Zg\right)Y + g\nabla_Z Y$$

şartlarını sağlaması gerektiği gösterilmiştir. Eğrilik ve burulma tensörleri ile φ_i^j afinorunun Ricci özdeşliği verilmiştir. 2.3.2. Teoremde

$$T_{km}^i = \overline{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i$$

eşitliği ile verilen afin deformasyon tensörünün $\overline{\Gamma}_{km}^i$ katsayılarının da başka bir afin konneksiyonun katsayıları olduğu ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde burulmasız uzaylarda $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ olduğu yani konneksiyon katsayılarının alt indislerine göre simetrik olduğu verilmiştir. $\Gamma_{ij}^r = 0$ olmasından yararlanarak a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü yazılmıştır. Burulmasız uzaylardan olan Metrik uzay ve

$$\nabla_k g_{ij} - 2w_k g_{ij} = 0$$

eşitliği ile gösterilen Weyl manifoldu ve Weyl uzayı, Genelleştirilmiş Weyl uzayı ile bunların konneksiyonu gösterilmiştir. Genelleştirilmiş Weyl uzayının burulma tensörü $\Omega_{jk}^i = L_{jk}^i - L_{kj}^i = 2L_{[jk]}^i$ ve eğrilik tensörü $L_{ijk}^l = \partial_j L_{ik}^l - \partial_k L_{ij}^l + L_{ik}^h L_{hj}^l - L_{ij}^h L_{hk}^l$ verilmiş ve bunların üzerinde yapılan işlemlerle Bianchi özdeşliği çıkarılmıştır.

Tezin son bölümünde ise Riemann uzayında

$$\nabla_{[k} w_{l]} = 0$$

olduğunda w_l ilave kovektörünün gradyentlik şartı olduğu görülmüş ve buradan $\breve{w}_k = 0$ sonucuna ulaşılmıştır. Bu şart dahilinde Riemann konneksiyonu

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g = \frac{1}{2} \tilde{g}^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij} \right)$$

yazılmıştır. Riemann manifoldunun burulmasız konneksiyona sahip olduğu gösterilmiştir ve $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartı ile karakterize edilmiştir. Sabit eğrilikli Riemann uzayları başlığı altında kesit eğriliği ve izotropik manifoldun tanımları verilerek Schur Lemması ispatlanmıştır. Ve nihayetinde Einstein uzayı tanımlanarak 2 boyutlu yüzeyin Einstein uzayı olduğu gösterilmiştir.

Son olarak konform dönüşümün kovektörü yazılıp, metrik uzayları Weyl uzayı olarak özelleştirildiğinde konform dönüşümler için afin deformasyon tensörü $T_{ij}^{k} = T_{..ij}^{mk} p_m$ elde edilmiştir ve gradyent olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Bishop, R.L., Goldberg, S. I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, 288p, New York, USA.

Cengiz, N., 2002. Cebirsel Poliafinor Yapılar ve Liftler. Doktora Tezi, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Çivi, G., 1999. Genelleştirilmiş Weyl Uzaylarında Eğri Şebekeleri Teorisi. Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kobayashi, S., Nomizu, K.,1963. Foundations of Differential Geometry I. Willy (Interscience), 344p, New York-London

Kobayashi, S., Nomizu, K., 1969. Foundations of Differential Geometry. Vol. II. Interscience Publishers, New York-London-Sydney.

Lang, S., 1995. Differential and Riemannian Manifolds. Springer-Verlag No:160, 364p, New York, USA.

Lee, J.M., 1997. Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature. Springer-Verlag No:176, 224p, New York, USA.

Norden, A. and Yafarov, S., 1974. Theory of Non-Geodesic Vector Fields in Two-Dimensional Affinely Connected Spaces. *Izv. Vuzov, Matem.*, No.12, 29-34. (in Russian)

Norden, A., 1976. Affinely Connected Spaces. *GRFML*, *Moscow* (in Russian).

Salimov, A., Mağden, A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş, Erzurum, TÜRKİYE.

Yano, K., 1965.Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces. The Macmillan Company, New York, USA.

Zlatanov, G. and Norden, A., 1975. Orthogonal Trajectories of a Geodesic Field. *Izv. Vuzov, Matem.*, No.7, 42-46 (in Russian)

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sincan'da tamamladı. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2007 yılında buradan mezun oldu ve Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

2009 yılından beri Artvin Çoruh Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.