HEMEN HEMEN PARA-HERMİTİAN YAPI İLE DONATILMIŞ WALKER METRİĞİ

Selahattin GENÇ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN PARA-HERMİTİAN YAPI İLE DONATILMIŞ WALKER METRİĞİ

Selahattin GENÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

HEMEN HEMEN PARA-HERMİTİAN YAPI İLE DONATILMIŞ
WALKER METRİĞİ

Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN danışmanlığında, Selahattin GENÇ tarafından hazırlanan bu çalışma 25 /01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda Geometri tezi olarak **oybirliği (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN PARA-HERMİTİAN YAPI İLE DONATILMIŞ WALKER METRİĞİ

Selahattin GENÇ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN

Bu tezde, ilk olarak Walker metriği koordinatlarla tanımlanmıştır. Daha sonra para-Hermitian yapı ile donatılmış Walker metriği araştırılmıştır. Bu tezdeki asıl amacımız Einstein para-Hermitian Walker metriklerini araştırmaktır. Bunun için ilk önce hemen hemen para-Hermitian yapının para-Hermitian olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Daha sonra para-Hermitian Walker metrikler için Eğrilik tensörleri hesaplanılmıştır. Son olarak, hemen hemen para-Hermitian yapı ile donatılmış Walker metriğinin Einstein para-Hermitian olması için gerek ve yeter şarta bakılmıştır.

2011, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Nijenhuis tensörü, Walker metrik, Einstein metrikler, para-Hermitian yapılar, Einstein denklemi.

ABSTRACT

Master Thesis

WALKER METRIC EQUIPPED WITH
A PARA-HERMITIAN STRUCTURE

Selahattin GENÇ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Murat İŞCAN

In this thesis; first as, a Walker metric with coordinates are defined. Then, Walker metric equipped with para-Hermitian structure was investigated. That the main goal of this thesis is to be Einstein para-Hermitian given the necessary and sufficient condition. Then, curvature tensors fort he para-Hermitian Walker metrics are calculated. Finally, The necessary and sufficient conditions of the Walker metric equipped with almost para-Hermitian structure in order to be Einstein para-Hermitian to be examined.

2011, 50 pages

Keywords: Nijenhuis tensor, Walker metric, Einstein metrics, para-Hermitian structures, Einstein equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV, Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Doç. Dr. Nejmi CENGİZ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKÇI, Sayın Yrd. Doç. Dr. Aydın GEZER, Sayın Yrd. Doç. Dr. Kürşat AKBULUT ve Sayın Furkan YILDIRIM' a saygı ve şükranlarımı arz etmeyi bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca kendisinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı eşime teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Selahattin GENÇ

Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

D	Null Dağılım
F	Einstein Tensörü
J	Hemen hemen Para Kompleks Yapısı
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
N_φ	φ'nin Nijenhuis Tensörü
R_{ijk}^h	Eğrilik Tensörü
S_{ij}^h	Burulma Tensörü
$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T^*(M_n)$	M_n Manifoldunun Kotanjant Demeti
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu Üzerinde (p,q) tipli Tensör Demeti
(g,J)	Para-Hermitian Yapı
(M,g,D)	Walker Manifoldu
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ_{ij}^h	Cristoffel Sembolü
π	Tabii İzdüşüm
ρ	Ricci Tensörü
τ	Skaler Eğrilik

1. GİRİŞ

Manifoldlar üzerindeki yapılar teorisi modern diferensiyel geometrinin en ilgi çekici konularındandır. Bu konulardan biriside para-Hermitian yapılardır. Böyle yapılara sahip manifoldların diferensiyel geometrik yönleri, Riemannian geometri için çok geniş ve çok verimli alanlardır.

Walker manifoldu (M, g, D) şeklindeki üçlüdür. Burada M , n-boyutlu bir manifoldu, g belirsiz (indefinite) bir metriği, D ise r-boyutlu paralel sıfır (null) dağılımı ifade eder. Böyle metriklerin kanonik formları Walker (1950) tarafından elde edilmiştir. Burada (x_1, x_2, x_3, x_4) şeklindeki uygun koordinatların var olduğu gösterilmiş ve metriğin (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinatları üzerinde bazı a , b ve c fonksiyonlarına bağlı olan

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu ifade edilmiştir.

Walker manifoldu üzerindeki en yoğun çalışmalar 2004 yılından sonra başlamıştır. Matsushita (2005) Walker 4-manifoldlar için uygun hemen hemen kompleks yapılar inşa etmiş. Chaichi (2005) 4-boyutlu Walker metriklerinin eğrilik özelliklerini incelemiş. Davidov (2007) Almost Kahler-Walker 4-manifoldları ve (2008) Hermitian-Walker 4-manifoldları araştırmış. Salimov (2010) Norden-Walker metriklerinin bazı özelliklerini inceledi.

Sunulan bu tezde ise para-Hermitian yapı ile donatılmış Walker metriği araştırılmıştır. Bu amaçla, çalışmamızın anlaşılabilmesi için ve konunun sınırlanması bakımından ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Tanjant Demet, Nijenhuis Tensörü, Skaler Eğrilik, Hermitian ve Kahlerian Manifoldlar ve Paralel Null-Dağılımı hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk önce hemen hemen para-Hermitian yapının para-Hermitian olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Daha sonra para-Hermitian Walker metrikler için eğrilik tensörleri hesaplanılmıştır. Son olarak, hemen hemen para-Hermitian yapı ile donatılmış Walker metriğinin Einstein para-Hermitian olması için gerek ve yeter şarta bakılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Skaler Çarpım Uzayları

2.1.1. Simetrik bilineer formları

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun. $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

(ii) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

özelliklerine sahip ise $<,>$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2: $<,>$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

(i) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna pozitif definit,

(ii) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna negatif definit,

(iii) $\forall\ \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna pozitif semi-definit,

(iv) $\forall\ \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna negatif semi-definit,

(v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ olduğunda $\vec{v} = 0$ olmak zorunda ise $<,>$ simetrik bilineer formuna non-dejenere, değilse dejeneredir denir (O'Neill 1983).

Bu tanımdaki (i) ve (ii) özelliklerine sahip $<,>$ simetrik bilineer formuna definit'dir, (iii) ve (iv) özelliklerine sahip $<,>$ simetrik bilineer formuna semi-definit'dir.

Eğer $<,>$ definit ise hem semi-definit hemde non-dejeneredir. $<,>$ definit değilse $<,>$ ye V üzerinde indefinitdir denir.

V vektör uzayı üzerinde $<,>$ simetrik bilineer formu indefinit ise, $\vec{v} \in V$ vektörler için

$$\langle \vec{v},\vec{v} \rangle > 0 \text{ veya } \langle \vec{v},\vec{v} \rangle < 0 \text{ veya } \langle \vec{v},\vec{v} \rangle = 0$$

olur. V üzerinde bir simetrik bilineer form $<,>$ ise V nin herhangi bir W altuzayı için $<,>\big|_W$ kısıtlaması da yine simetrik ve bilineerdir.

Tanım 2.1.3: V bir vektör uzayı ve $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun.

$$<,>\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $<,>$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Buna göre $1 \leq \nu \leq boyV$ dir. $\nu = 0$ olması için gerek ve yeter şart $<,>$ nın pozitif semi-definit olmasıdır.

V nin bir bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ olsun. $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ olarak tanımlanan $n \times n$ tipindeki (g_{ij}) matrisine, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ bazına göre $<,>$ simetrik bilineer formunun matrisi denir. $<,>$ simetrik olduğundan (g_{ij}) matrisi de simetriktir. Ayrıca

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} w^j \vec{e}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j$$

olduğundan (g_{ij}) matrisi $<,>$ yi belirtir.

Teorem 2.1.1: Bir $<,>$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $<,>$ nın herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4: Bir $\vec{v} \in V$ vektörü için

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne space-like vektör,

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne time-like vektör,

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ ve $\vec{v} \neq 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne null vektör denir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.1: $\mathbb{R}^2$ de $\vec{X}=(x_1, x_2)$, $\vec{Y}=(y_1, y_2)$ olmak üzere $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2$ olarak tanımlansın. Buna göre,

$\vec{X}=(1,0)$ için $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = -1$ olduğundan $\vec{X}$ bir time-like vektördür.

$\vec{Y}=(0,1)$ için $\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle = 1$ olduğundan $\vec{Y}$ bir space-like vektördür.

$\vec{Z}=(1,1)$ için $\langle \vec{Z}, \vec{Z} \rangle = 0$ olduğundan $\vec{Z}$ bir null vektördür.

2.1.2. Skaler çarpım

Tanım 2.1.5: Bir V vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik bilineer formuna V vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım denir. V üzerindeki bir skaler çarpım $<,>$ ise $(V,<,>)$ ikilisine skaler çarpım uzayı denir.

Pozitif definit skaler çarpıma bir iç çarpım denir. Buna örnek olarak, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\vec{v}.\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$ şeklinde tanımlanan nokta çarpmasını verebiliriz.

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1: X Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine

$\varphi : U \to V$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U, φ) şeklinde de gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$

olur. $x^1, ..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.2.2: Eğer X Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, (A-indisler kümesi)

ise X ‘ e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n boyutlu manifold denir.

Tanım 2.2.3: X topolojik Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k \le \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X ‘i örter, yani X, n boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \ne \phi$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j = 1,...,n\right)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatlar, u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.2.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.2.5: *X* Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir.

C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasa maksimal C^k atlas adı verilir. *X* üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, *X* üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.2.6: *M*, Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, *M* üzerinde *n*- boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse *M* uzayına *n*-boyutlu C^∞ sınıfından difernsiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008).

2.3. Tensör Alanları

Tanım 2.3.1: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p, \forall p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren *X* vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

f, M_n manifoldunda bir fonksiyon ise Xf de M_n manifoldunda bir fonksiyon tanımlar. Bu ise

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanır. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i, ..., x^n\right), \quad i = 1, ..., n$$

olur.

Tanım 2.3.2: $\vec{x}_j \in B_n, j = 1, ..., q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*, i = 1, ..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer bu fonksiyon *her bir* değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, multilineer fonksiyon denir. Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\omega = t\ (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve $T_q^p\left(B_n\right)$ ile gösterilir. $p \geq 0, q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına ise tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. ($p,0$) tipli tensöre kontravaryant tensörler, ($0,q$) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $T_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım;

$$g(\vec{x},\vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartından $\vec{x} = 0$ alınırsa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir. Koordinatlarla (2.1) eşitliği

$$g_{ij} x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik $\forall y^j$ için sağlandığından

$$g_{ij} x^i = 0, j = 1,...,n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n de esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\tilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik} x^k, (\eta_i = g_{ik} y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümüne bakalım. Buradan (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \tilde{g}^{ki} \xi_i, (y^k = \tilde{g}^{ki} \eta_i) \tag{2.4}$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invariant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij} x^i y^j$$

yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini dikkate alırsak

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$$

olur. Yani, g_{ij} esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenerinin $\omega = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$ invaryant bilineer formunu alırız. Buna göre de $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g_{ij} tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\widetilde{g}(\eta,\xi)=\widetilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j=\eta_i x^i=g_{ik}y^k x^i,$$
$$\widetilde{g}(\xi,\eta)=\widetilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i=\xi_j y^j=g_{jk}x^k y^j$$
$$=g_{ki}x^i y^k=g_{ki}y^k x^i=\widetilde{g}(\eta,\xi)$$

olduğundan $\widetilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n de g_{ij} tensörü verildiğinde $B_n \to B_n^*$ izomorfizmi bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k=g_{ki}x^i,\ x^i=\widetilde{g}^{ik}x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $\left(x^i \to x_k\right)$ ve yükseltilmesi $\left(x_k \to x^i\right)$ işlemleri denir. Buna göre $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörünü göz önüne alalım:

$$S^{p}_{.j}=\widetilde{g}^{pi}S_{ij},\ S^{p}_{i.}=\widetilde{g}^{pj}S_{ij},\ S^{pq}_{..}=\widetilde{g}^{pi}\widetilde{g}^{pj}S_{ij}$$

verilmiş S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemleridir.

$$S^{.j}_{p}=g_{pi}S^{ij},\ S^{i.}_{p}=g_{pj}S^{ij},\ S^{..}_{pq}=g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x},\vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, $\forall\vec{x},\vec{y}\in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x},\vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$\vec{x}\vec{y}=g(\vec{x},\vec{y})=g_{ij}x^i y^j \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $Det(g_{ij})\neq 0$ olursa bu taktirde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m\in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T^p_q(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.3.3: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m), \forall m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren *T* fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, (1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde *f* fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece *f* fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü ifadesi (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise *T* tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir bir *m* noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise *T* tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (*p,q*) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ (0,1) tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m), X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre *T* tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p_1}} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q}, \partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop ve Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^{∞} sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^{∞} sınıfındandır denir. C^{∞} sınıfından olan (0,1) tipli tensör alanına 1-form (pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^{∞} sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve herbir C^{∞} sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^{∞} sınıfından olmasıdır.

2.4. Diferensiyellenebilir Manifold Üzereinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durunda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca parelel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Tanım 2.4.1: M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{T}^1_0(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : \mathcal{T}^1_0(M_n) \times \mathcal{T}^1_0(M_n) \to \mathcal{T}^1_0(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z(fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \mathcal{T}^1_0(M_n) \to \mathcal{T}^1_0(M_n)$$

dönüşümüne kovariant diferensiyellenme denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasında $\underset{k}{a}^{i}, k=1,...n$ lokal bazını alalım ve farzedelim ki $\underset{k}{a}^{i}(t)$ nin bağımlılığı baz vektörlerin verilmiş eğri boyunca paralel kaydırılması kuralını ifade etsin. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^{i}$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d \underset{k}{a}^{i} \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^{i}$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i v^i \tag{2.7}$$

yazılır. Burada $\underset{k}{a}^{i}$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir.

Dolayısıyla $\underset{k}{a}^{i} \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) de kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.8}$$

yazılır. (2.8) denkleminde

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i \, d \underset{s}{a}^{k} \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde dahil edilen ω_i^k objelerine konneksiyon (bağlantı) formları denir.

Teorem 2.4.1: 1. Konneksiyon formları $\underset{k}{a}^{i}, k=1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdır.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatkarın dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

(2.10) ve (2.11) şartlarından, v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralını yazalım.

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12) in ikinci şartından

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

yazarız. (2.9) denkleminde (2.12) in birinci şartını ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

veya

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.14}$$

olur. (2.14) eşitliği gösterir ki ω_j^i konneksiyon formları tensörün koordinatları olamaz.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim;

Tanım 2.4.2: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i\omega_i\right)=dv^i\omega_i+v^i d\omega_i=0 \tag{2.15}$$

olur. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i=-\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

yazılır. (2.16) eşitliğini (2.15) ifadesinde kullanırsak,

$$\left(d\omega_i-\omega_i^k\omega_k\right)v^i=0$$

bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i-\omega_i^k\omega_k=0 \tag{2.17}$$

biçimindedir. Vektörün ve kovektörün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z=t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{\omega}_{i_1}\dots\overset{p}{\omega}_{i_p}$$

verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned}dZ&=dt_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{\omega}_{i_1}\dots\overset{p}{\omega}_{i_p}+t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\,d\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{\omega}_{i_1}\dots\overset{p}{\omega}_{i_p}\\&\quad+\dots+t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{\omega}_{i_1}\dots d\overset{p}{\omega}_{i_p}\\&=\left(dt_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}-\omega_{j_1}^s t_{sj_2\dots j_q}^{i_1\dots i_p}-\dots-\omega_{j_q}^s t_{sj_2\dots s}^{i_1\dots i_p}+\omega_s^{i_1}t_{sj_2\dots j_q}^{si_2\dots i_p}+\omega_s^{i_p}t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots s}\right)\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{\omega}_{i_1}\dots\overset{p}{\omega}_{i_p}\end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}=dt_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}-\omega_{j_1}^s t_{sj_2\dots j_q}^{i_1\dots i_p}-\dots-\omega_{j_q}^s t_{sj_2\dots s}^{i_1\dots i_p}+\omega_s^{i_1}t_{j_1\dots j_q}^{si_2\dots i_p}+\omega_s^{i_p}t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots s} \tag{2.19}$$

olarak alınırsa

$$dZ=\delta t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\,\underset{1}{v}^{j_1}\dots\underset{q}{v}^{j_q}\,\overset{1}{\omega}_{i_1}\dots\overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.20}$$

yazılır. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir. Tensörün mutlak diferensiyeli ile tüm eğri boyunca keyfi noktalarda uygulanmış tensörler arasındaki eşleme (2.20) eşitliği ile verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün parelel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \qquad \delta \omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta^j_i\right) = 0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$ - tensör çarpımıdır.

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir.

2.4.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

Tanım 2.4.3: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun herbir eğrisi boyunca afin konneksiyon verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Lineerlik şartı:

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v^i_k, v^i ye ve noktaya bağlı fonksiyondur. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + \omega^i_k v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega^i_k v^k = \left(v^i_s - \partial_s v^i\right) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. $v^k, \partial_s v^i$ ve v^i_s u^i lerin fonksiyonarıdır. ω^i_k forumları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω^i_k forumları du^k nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega^i_k = \Gamma^i_{sk} du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada Γ^i_{sk} katsayıları afin uzayın noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ^i_{sk} afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega^{i'}_{j'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} du^{k'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} A^{k'}_{k} du^{k}$$

yazılır. Ayrıca

$$A^{j'}_{j} dA^{i}_{j'} = A^{j'}_{j} \left(\partial_k A^{i}_{j'}\right) du^{k} \tag{2.25}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A^{j'}_{j} A^{i}_{j'} = \delta^{i}_{j}$ eşitliğinin ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\left(\partial_k A^{j'}_{j}\right) A^{i}_{j'} + A^{j'}_{j}\left(\partial_k A^{i}_{j'}\right) = 0$$
$$\Rightarrow A^{j'}_{j}\left(\partial_k A^{i}_{j'}\right) = -\left(\partial_k A^{j'}_{j}\right) A^{i}_{j'}$$

olur. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırda

$$A^{j'}_{j} dA^{i}_{j'} = -A^{i}_{j'}\left(\partial_k A^{j'}_{j}\right) du^{k} \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) , (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma^{i}_{kj} = A^{i}_{i'} A^{j'}_{j} A^{k'}_{k} \Gamma^{i'}_{k'j'} + A^{i}_{i'} A^{i'}_{kj} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A^{i'}_{kj} = \partial_k A^{i'}_{j}$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyeli

$$\delta v^{i} = (\ \partial_k v^{i} + \Gamma^{i}_{ks} v^{s}\ )\, du^{k} \tag{2.28}$$

biçiminde olur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^{i} = \partial_k v^{i} + \Gamma^{i}_{ks} v^{s} \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür. Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^{s}_{kj} \omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür. (2,24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (\partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q})\, du^{k} \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q} \tag{2.32}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türev tanımından görülür ki (p,q) tipli tensörünün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensördür.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikler yazılır:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \overline{+} \underset{2}{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = \nabla_k \underset{1}{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \overline{+} \nabla_k \underset{2}{t}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \overline{+} \lambda \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, $\lambda \in F$ (F fonksiyonlar kümesi)

3. $\nabla_k (t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q}) = \nabla_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q} + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \dots l_p}_{s_1 \dots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir.

Tanım 2.4.4: $[X,Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j$ eşitliği ile tanımlanan $[X,Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir. Özel olarak $\partial_i = \delta^k_i \partial_k$, $\partial_j = \delta^k_j \partial_k$ vektör alanları alınırsa, $[X,Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j$ formülünden $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğu görülür. $[X,Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j$ formülü yardımıyla Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir:

1. $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$

2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$

3. $[X,Y] = -[Y,X]$

4. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

Tanım 2.4.5: $D = L_X, X \in \Im_0^1(M_n)$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa buna vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir:

1. $L_X f = Xf, \forall f \in \Im_0^0(M_n)$

2. $L_X Y = [X,Y], \forall X, Y \in \Im_0^1(M_n)$

Burada $[X,Y]$ Lie parantezidir. $X(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_x, \forall f \in C_x^k$ ifadesine göre $L_X Y$ 'nin lokal koordinatlardaki ifadesi

$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$

biçiminde yazılır. Lie diferensiyellenmesi işlemi sonucunda bulunan değere Lie türevi denir.

2.4.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1,...,u^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve *df* fonksiyonunun du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre *f* fonksiyonunun gradienti, *f* fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olmasıdır (Yano 1965).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde *j* ve *i* indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j}V_{i]} = S^k_{ij}V_k \tag{2.36}$$

bulunur. Burada

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S^k_{ij} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör ifade eder. (2.37) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifolundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parentezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^k vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sm} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm} (\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &\partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.39}$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$\begin{aligned}R^i_{rsk} &= \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \\ &= 2(\partial_{[r} \Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|} \Gamma^m_{s]k})\end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan $\mathbb{R}^i_{rsk}$ ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffer tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k = -R^m_{rsk}\omega_m - 2S^m_{rs}\nabla_m\omega_k\,, \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^j_i = R^j_{rsm}\varphi^m_i - R^m_{rsi}\varphi^j_m - 2S^k_{rs}\nabla_k\varphi^j_i\,, \tag{2.42}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = R^{i_1}_{rsm}t^{mi_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \ldots + R^{i_p}_{rsm}t^{i_1\ldots m}_{j_1\ldots j_q} \tag{2.43}$$

$$-R^m_{rsj_1}t^{i_1\ldots i_p}_{mj_2\ldots j_q} - \ldots - R^m_{rsj_q}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots m} - 2S^k_{rs}\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\,.$$

(2.42) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X,Y,Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.4.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların diffeomorfizmine bakalım. Bu durımda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma konneksiyonların birinden diğerine geçmeye konneksiyonların dönüştürülmesi veya parelel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Bu konneksiyonların katsayılarını Γ^k_{ij} ve $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ ile gösterelim. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{km} v^m , \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}^i_{km} v^m$$

biçiminde olur. Sonuncu eşitlikten

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T^i_{km} v^m \tag{2.45}$$

yazılır. Burada

$$T^i_{km} = \overline{\Gamma}^i_{km} - \Gamma^i_{km} \tag{2.46}$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T^i_{km}, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü denir.

Teorem 2.4.2: (1,2) tipli T^i_{km} tensörü ve Γ^i_{km} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}^i_{km}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij}$$

yazılır. Γ^k_{ij} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \left(\overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} - T^{k'}_{i'j'} \right) + A^k_{k'} A^{k'}_{ij} \tag{2.47}$$

olur. Burada T^k_{ij} tensör olduğundan,

$$T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j T^{k'}_{i'j'} \tag{2.48}$$

yazılır. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} + A^k_{k'} A^{k'}_{ij}$$

olduğu bulunur. Yani $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ ‘ler konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi kuralına göre değişir. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim;

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaler için

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij} - \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılır. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 2.3.1.Teoremine göre Γ^k_{ij} afin konneksiyon olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{2} \tag{2.51}$$

buluruz. $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ^k_{ij} afin konneksiyon verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} + 2S^k_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} \tag{2.52}$$

yazılır. 2.3.1. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ ve Γ^k_{ji} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.4.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} = \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^{1},...,\overset{\circ}{u}{}^{n}$ olan O $(\overset{\circ}{u}{}^{i})$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta_{k}^{i'}$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_{k}^{i'}\{(u^{k} - \overset{\circ}{u}{}^{k}) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{pq}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p})(u^{q} - \overset{\circ}{u}{}^{q})\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^{i} koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_{i}^{i'} = \delta_{i}^{i'} + \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ip}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p}), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği *0* noktasında ve civarında $\det\left(A_{i}^{i'}\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları *0* noktasında yazılırsa,

$$A_{i}^{i'} = \delta_{i}^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.55}$$

olur. Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre *O* noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^{i} = \delta_{j}^{j'}\delta_{k}^{k'}\delta_{i'}^{i}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^{i}\delta_{l}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{kj}^{l}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın herbir noktasında öyle koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianci-Padov eşitliği).

Bu eşitliklerin her üçünün invaryant (tensör) karekter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

olarak gösterilsin. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} = \nabla_k a_{ij},$$
$$\partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} = \nabla_i a_{jk},$$
$$\partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} = \nabla_j a_{ki}.$$

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma^r_{ij} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

biçimindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.4.6: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}$, $e = e_{1,2,\ldots,n}$

n- vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ vektörlerin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_i \ldots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_i \ldots i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_i \ldots i_n} - \Gamma^s_{k i_1} e_{s i_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{k i_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{2.62}$$

biçiminde yazılır. n – vektörün antisimetrikliğine göre (2.61) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12 \ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2 \ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12 \ldots s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12 \ldots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. (2.64) eşitliği eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonunu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edebiliriz.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,\ R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını gözönüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

yazarız. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile karekterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.4.7: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör de denir.

Tanım 2.4.8: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ oluyorsa böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 2.4.9: Eğer Weyl uzayı eş-afin uzay olursa bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

şartı ile karekterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

biçimide verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g_{ij} tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(ij)kl}=0$
2. $R_{[ijk]l}=0$
3. $\nabla_{[s}R_{ij]kl}=0$
4. $R_{ij(kl)}=0$
5. $R_{ijkl}=R_{klij}$.

2.4.5. Riemannian manifoldu

Herbir $x\in M_n$ noktasında $\forall Y\in T_x(M_n)$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y)=0$ eşitliğinden $X=0$ oluyorsa g'ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $Det(g_{ij})\neq 0$ şartına denktir. g' nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2=g_{ij}du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n,g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i g_{sj}+\partial_j g_{is}-\partial_s g_{ij}\right)$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian konneksiyonu denir.

2.4.6. Pseudo-Riemannian manifoldu

(M_n,g) pseudo-Riemannian manifoldu g metrik tensörü simetrik, bilineer ve non-dejenere olan M_n Riemannian manifolddur. Burada g metrik tensörünün pozitif tanımlı olması gerekmez, fakat non-dejenere olmak zorundadır. Böyle metriklere de pseudo-Riemannian metrik denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından *n*- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$' nin herhangi bir $\widetilde{p}$ noktası, yani $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet projeksiyonu $\widetilde{p} \mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\widetilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının p noktasındaki fibre denir.

M_n temel uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada $(x^h), U$ komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizmdir. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ reel alan üzerindeki *n*- boyutlu vektör uzayı olur. $\widetilde{p} \in T_p(M_n)$ $(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $\left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\widetilde{p}$ nın $(y^h) = (x^{\bar{h}})$ $\bar{h} = n+1,...,2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\widetilde{p})$ nin koordinatları (x^h) $h = 1,..,n$ ile gösterilirse $\widetilde{p}$ noktası uygun $(x^h, x^{\bar{h}}) \mapsto \widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Biz $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Burada $(x^h, x^{\bar{h}})$ ya (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p = \pi(\widetilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U^{'}, x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U^{'})$ koordinat komşuluğu $\widetilde{p}$ ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U^{'})$ ya göre $\widetilde{p}$ nın indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'}, y^{h'}\right)$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x), \\ y^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} y^{h}, \end{cases} \tag{3.2}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^{∞} sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x). \quad p^{'} = 1,...2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h} \partial x^{i}} y^{i} & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

matrisi ile verilir. (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}(x'), \\ y^{h} = \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^{p} = x^{p}(x'), \quad p = 1,...,2n \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} y^{i'} & \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir, çünkü, $Det\left(\frac{\partial x^{p^{'}}}{\partial x^{p}}\right) > 0 \quad (Det\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p^{'}}}\right) > 0)$.

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfında (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $\mathcal{T}^r_s(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise $\mathcal{T}(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(M_n)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $\mathcal{T}^r_s(T(M_n))$ ve $\mathcal{T}(T(M_n))$ olarak göstereceğiz.

3.2. Nijenhuis Tensörü

Nijenhuis tensörü yapıların integrallenebilme şartlarının incelenmesinde gerekli tensördür. A ve B afinorlarının verildiğini kabul edelim. $X,Y \in T^1_0(M_n)$ için $N_{AB}(X,Y)$ tensörünü şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned} N_{AB}(X,Y) &= [AX,BY]+[BX,AY]+AB[X,Y]+BA[X,Y] \\ &\quad -A[X,BY]-A[BX,Y]-B[X,AY]-B[AX,Y] \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\varphi^i_j X^j = \varphi^i$ ifadesi bir vektör alanı olduğundan, (3.16) eşitliğinin sağ tarafı vektör alanı olup $N_{AB}(X,Y)\in T^1_2(M_n)$ bir tensör alanıdır. X ve Y ye göre lineerdir.

Çeşitli kaynaklarda Nijenhuis tensörüne A,B afinorlarının Torsion'u denir. $A=B$ alınırsa bir tek afinor için Nihjenhuis tensörü ifadesi kullanılır (Torsion denilmez). Bir afinor yapı için Nijenhuis tensörü, $A=B=\varphi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} N_\varphi(X,Y) = N(X,Y) &= [\varphi X,\varphi Y]+[\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]+\varphi^2[X,Y] \\ &\quad -\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y] \\ &= 2([\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]) \end{aligned}$$

şeklindedir. Parantezin içi $N(X,Y)$ olarak alınır.

$$N_\varphi(X,Y)=N(X,Y)=[\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y] \tag{3.17}$$

eşitliğindeki φ afinoru için $\varphi^2=-I$ ise yapıya almost kompleks yapı, $\varphi^2=I$ ise almost product yapı, $\varphi^2=0$ ise dual yapı denilir. Bu yapılar için $N(X,Y)=0$ olması yapıların integrallenebilme şartıdır.

Şimdi de Nijenhuis tensörünü lokal koordinatlarda yazmaya çalışalım:

Bunun için Lie parantezinin

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \tag{3.18}$$

özelliğinden faydalanacağız. $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ eşitliklerini (3.17) ve (3.18) eşitliklerinde yerine yazacağız. İlk önce (3.17) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$[f\partial_i, g\partial_j] = fg[\partial_i, \partial_j] + f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i$$

eşitliği elde edilir. $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan

$$[f\partial_i, g\partial_j] = f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i \tag{3.19}$$

yazılır. Şimdi de (3.18) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$N_\varphi(\partial_i, \partial_j) = N^k_{(\varphi)ij}\partial_k = N^k_{ij}\partial_k$$

$$N^k_{ij}\partial_k = [\varphi\partial_i, \varphi\partial_j] + \varphi^2 \underbrace{[\partial_i, \partial_j]}_{=0} - \varphi[\partial_i, \varphi\partial_j] - \varphi[\varphi\partial_i, \partial_j]$$

$$= [\varphi^s_i\partial_s, \varphi^l_j\partial_l] - \varphi[\partial_i, \varphi^l_j\partial_l] - \varphi[\varphi^s_i\partial_s, \partial_j]$$

ve Lie parantezinin özelliğinden, yani (3.19) eşitliğinden

$$N^k_{ij}\partial_k = \varphi^s_i\varphi^l_j \underbrace{[\partial_s, \partial_l]}_{=0} + \varphi^s_i(\partial_s\varphi^l_j)\partial_l - \varphi^l_j(\partial_l\varphi^s_i)\partial_s$$

$$-\varphi\{\varphi^l_j \underbrace{[\partial_i, \partial_l]}_{=0} + (\partial_i\varphi^l_j)\partial_l - \varphi^l_j \underbrace{(\partial_l.1)}_{=0}\partial_i\}$$

$$-\varphi\{\varphi^s_i \underbrace{[\partial_s, \partial_j]}_{=0} + \varphi^s_i \underbrace{(\partial_s.1)}_{=0}\partial_j - (\partial_j\varphi^s_i)\partial_s\}$$

$$N^k_{ij}\partial_k = \varphi^s_i\partial_s\varphi^l_j\partial_l - \varphi^l_j\partial_l\varphi^s_i\partial_s - \partial_i\varphi^l_j\varphi^k_l\partial_k + \partial_j\varphi^s_i\varphi^k_s\partial_k$$

$$= (\varphi^s_i\partial_s\varphi^k_j - \varphi^l_j\partial_l\varphi^k_i - \partial_i\varphi^l_j\varphi^k_l + \partial_j\varphi^s_i\varphi^k_s)\partial_k$$

$$N^k_{ij}\partial_k = (\varphi^s_i\partial_s\varphi^k_j - \varphi^l_j\partial_l\varphi^k_i - \partial_i\varphi^l_j\varphi^k_l + \partial_j\varphi^s_i\varphi^k_s)\partial_k \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. (3.20) eşitliği Nijenhuis tensörünün lokal koordinatlarla yazılımıdır.

3.3. Skaler Eğrilik

M_n, n-boyutlu C^∞-sınıfından olan Riemannian manifoldu olsun. g_{ij} metriğimiz ise simetrik, regüler ve konneksiyonumuz da Levi-Cvita konneksiyonu olsun.

Riemannian manifoldunda $R_{ijk}^{s} = R(X,Y)Z$ eğrilik tensöründeki s indisini 4. yere indirdiğimizde

$$R_{ijkt} = g_{st} R_{ijk}^{s} \Rightarrow R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

şeklinde (0,4) tipli tensör elde edilir.

Ricci tensörü $R_{ij} = R_{sisj}^{s}$ şeklinde idi. Ricci tensörüne öyle bir skaler dahil edelim ki, tam kontraksiyon yapalım ve

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

olsun. Bu R eğriliğine skaler eğrilik denir. Genelde R eğriliği manifoldun noktasına bağlı fonksiyon olmuş olur.

Şimdi skaler eğriliğinin yüzeyde neye karşılık geldiğini bulalım:
κ gauss eğriliği olsun.

$$\kappa = \kappa_1 . \kappa_2 = \frac{Det(h_{ij})}{Det(g_{ij})}$$

$$\kappa = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12}^{\;2}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^{\;2}}$$

şeklindedir. Yüzeyler için eğrilik tensörü,

$$\kappa = -\frac{R_{12} R_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^{\;2}}$$

şeklindedir. Bu son eşitlik Gauss eğriliği için önemli bir teoremidir ve diğer adı da tam eğriliktir. Skaler eğrilik yüzeyler için (n=2 için) Gauss eğriliğidir:

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} R_{sij}^{s} = g^{ij} g^{ts} R_{sijt}$$

$$= g^{21} g^{21} R_{1212} + g^{11} g^{22} R_{2112} + g^{22} g^{11} R_{1221} + g^{12} g^{12} R_{2121}$$

ilk iki indis ve son iki indis aynı olanlar (yani 12 terim) sıfır olur.

$$R = g^{12}g^{12}R_{1212} - g^{11}g^{22}R_{1212} - g^{11}g^{22}R_{1221} + g^{12}g^{12}R_{1212}$$

$$= ((g^{12})^2 - g^{11}g^{22} - g^{11}g^{22} + (g^{12})^2)R_{1212}$$

$$= (-2(-(g^{12})^2 + g^{11}g^{22}))R_{1212},$$

$$R = -2(Det(g^{-1}))R_{1212},$$

$$R = -2\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2},$$

$$R = 2\kappa.$$

Yüzeyler için skaler eğrilik gauss eğriliğinin 2 ile çarpılmış halidir. Yüzeyler bilinen 2-boyutlu Riemannian manifoldudur.

3.4. Hermitian ve Kahlerian Manifoldlar

M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -1$ olan tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) ise hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır. M_{2n} üzerindeki Hermitian metrik, M_{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{3.21}$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğidir. (3.21) şartını sağlayan g metriğine hybrid metrik denir.

Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifolda hemen hemen Hermitian manifold, Hermitian metriğe sahip komleks manifolda ise Hermitian manifold denir.

Teorem 3.4.1: M_{2n}, φ almost hemen hemen yapısına sahip almost hemen hemen manifold olsun. M_{2n} nin kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi = 0$ ve $T = 0$ olacak şekilde ∇ afin konneksiyonunun olmasıdır. Burada T, ∇ nın burulma tensörüdür.

M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip hemen hemen hermitian manifold olsun. M_{2n} üzerindeki Ω fundamental 2-formu

$$\Omega(X,Y)=g(X,\varphi Y)=(g\circ\varphi)(X,Y) \tag{3.22}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.4.2: M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifold olsun. ∇, g ile tanımlanan Riemannian konneksiyonunun kovaryant türevlemesi olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

a) $\nabla\varphi=0$

b) $\nabla\Omega=0$

c) φ hemen hemen kompleks yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olması ve Ω fundamental 2-formunun kapalı olması, yani $N_\varphi=0$ ve $d\Omega=0$.

M_{2n} hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki g Hermitian metriği için Ω fundamental 2-formu kapalı ise g'ye Kahlerian metrik denilir. Kahlerian metriğine sahip M_{2n} hemen hemen kompleks manifolduna hemen hemen Kahlerian manifold denilir. Kahlerian metriğine sahip M_{2n} kompleks manifolduna da Kahlerian manifold denilir. Teorem 3.5.2 den açıktır ki, M_{2n} Hermitian manifoldunun Kahlerian manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi=0$ olmasıdır. Yani Kahlerian manifoldu, $\varphi^2=-I$ şartını sağlayan φ hemen hemen kompleks yapısına, her X,Y vektör alanı için

$$g(\varphi X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{3.23}$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğine ve $\nabla\varphi=0$ şartını sağlayan $2n-$boyutlu bir manifolddur. (3.23) ile verilen g metriğine pür metrik denir (Yano and Kon, 1984).

3.5. Paralel Null-Dağılımı

M , (p,q) işaretli pseudo-Riemannian manifold olsun. $T(M)$ Tanjant demetinin $T(M) = V_1 \oplus V_2$ şeklindeki parçalanışı verilsin. Burada V_1 ve V_2 diferensiyellenebilir alt demetlerine dağılımlar (tamamlayıcı dağılımlar) denir.

$$\pi_1 : T(Mn) \to V_1$$
$$\pi_2 : T(Mn) \to V_2$$

tamamlayıcı izdüşüm operatörleri tanımlanır. Eğer $\nabla \pi_1 = 0$ ise V_1'e paralel dağılım denir. (Buna denk olarak, X_1 , V_1 de değerini alan herhangi bir diferensiyellenebilir vektör alanı ise, $\nabla \pi_1$ de yine V_1 de değerini alır.)

V_1 paralel dağılım olsun. V_1'e kısıtlanmış metriğin rank'ı sabit olsun. V_1 paralel ve V_1'e kısıtlanmış metrik sıfıra eşit ise V_1'e paralel null dağılım denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Walker Metrikler

Walker manifoldu (M,g,D) şeklindeki üçlüdür. Burada M, n-boyutlu bir manifoldu, g belirsiz (indefinite) bir metriği, D ise r-boyutlu paralel sıfır (null) dağılımı ifade eder. Böyle metriklerin kanonik formları Walker tarafından (Walker, 1950) elde edilmiştir. Burada (x_1,x_2,x_3,x_4) şeklindeki uygun koordinatların var olduğu gösterilmiş ve metriğin (x_1,x_2,x_3,x_4) koordinatları üzerinde bazı a, b ve c fonksiyonlarına bağlı olan

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde olduğu ifade edilmiştir.

Burada para-Hermitian yapı ile donatılmış 4-boyutlu Walker manifoldlarını ele alacağız.

4.2. Einstein Para – Hermitian Walker Metrikler

4.2.1. Para-Hermitian yapılar

Hemen hemen para-Hermitian manifold (M,g,J) şeklindeki üçlüdür. M manifoldu üzerindeki her X, Y vektör alanı için $g(JX,JY)=-g(X,Y)$ şartını sağlayan J hemen hemen parakompleks yapısını içerir.

Hemen hemen para-Hermitian yapı (g,J) çifti ile gösterilir. J hemen hemen para kompleks yapısı integrallenebilirse (g,J) yapısına para-Hermitian yapı denir.

$\Omega(X,Y)=g(JX,Y)$ esas (fundamental) iki formu kapalı ise ($d\Omega=0$ ise) yapıya hemen hemen para-Kahler yapı denir. Sonuç olarak, yapımız hem integrallenebilir hemde $d\Omega=0$ ise yapıya para-Kahler yapı denir. (Bu ifadeye denk olarak, $\nabla_J=0$ şartını sahip ∇ Levi-Civita konneksiyona sahip olmasıdır diyebiliriz.)

Şimdi (4.1) Walker metriğiyle ilişkili

$$J\partial_2=\partial_2,\quad J\partial_3=-a\partial_1+\partial_3,\quad J\partial_4=b\partial_2-\partial_4, \tag{4.2}$$

ile tanımlanan doğal olan J hemen hemen para-Hermitian yapısını ele alalım. Burada ve bundan sonra $\{\partial_i\}$' yi koordinat bazı olarak alacağız. Ayrıca kısmi türevler için indisler kullanacağız. Yani (x_1,x_2,x_3,x_4)'e bağlı herhangi h fonksiyonunun kısmi türevini $h_{i_1}\cdots_{i_r}=\dfrac{\partial h}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_r}}$ şeklinde ifade edeceğiz.

Walker metriğinin Levi-Civita konneksiyonu (Diaz Ramos et al, 2006)

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\partial_1}\partial_3=\frac{1}{2}a_1\partial_1+\frac{1}{2}c_1\partial_2\quad,\qquad \nabla_{\partial_1}\partial_4=\frac{1}{2}c_1\partial_1+\frac{1}{2}b_1\partial_2\\
&\nabla_{\partial_2}\partial_3=\frac{1}{2}a_2\partial_1+\frac{1}{2}c_2\partial_2,\qquad \nabla_{\partial_2}\partial_4=\frac{1}{2}c_2\partial_1+\frac{1}{2}b_2\partial_2\\
&\nabla_{\partial_3}\partial_3=\frac{1}{2}(aa_1+ca_2+a_3)\partial_1+\frac{1}{2}(ca_1+ba_2-a_4+2c_3)\partial_2-\frac{a_1}{2}\partial_3-\frac{a_2}{2}\partial_{4,}\\
&\nabla_{\partial_3}\partial_4=\frac{1}{2}(a_4+ac_1+cc_2)\partial_1+\frac{1}{2}(b_3+cc_1+bc_2)\partial_2-\frac{c_1}{2}\partial_3-\frac{c_2}{2}\partial_4,\\
&\nabla_{\partial_4}\partial_4=\frac{1}{2}(ab_1+cb_2-b_3+2c_4)\partial_1+\frac{1}{2}(cb_1+bb_2+b_4)\partial_2-\frac{b_1}{2}\partial_3-\frac{b_2}{2}\partial_4.
\end{aligned}\tag{4.3}$$

ile verilir.

J hemen hemen para-Hermitian yapısını incelediğimizde aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.2.1.1: (4.2) hemen hemen para-Hermitian yapı ile donatılmış (4.1) Walker metriğinin para-Hermitian olması için gerek ve yeter şart

$$a_2=b_1=0. \tag{4.4}$$

olmasıdır. Ayrıca yapının hemen hemen para-Kahler olması için gerek ve yeter şart $c_1 = c_2 = 0$ olmasıdır. Burada para-Kahler olma şartı $a_2 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$ olması şartına denktir.

İspat:

J 'nin

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + [X, Y]$$

Nijenhuis tensörü için $N_{ij} = N_J(\partial_i, \partial_j)$ yazarsak Nijenhuis tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$N_{14} = -2b_1\partial_2, \quad N_{23} = -2a_2\partial_1, \quad N_{34} = ba_2\partial_1 - ab_1\partial_2$$

ile tanımlanır. Buradan da J 'nin integrallenebilir olması için $a_2 = b_1 = 0$ olması gerektiğini söyleyebiliriz. Teoremin 2. kısmının ispatı ise (4.3) den direk hesaplamayla elde edilir.

4.2.2. Einstein denklemi

R Rieman eğrilik tensörü $R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$ ile tanımlanır. (4.3) den herhangi bir (4.1) Walker metriğinin eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri (Diaz Ramos *et al.* 2006)

$$R_{1313} = -\frac{1}{2}a_{11},\ R_{1314} = -\frac{1}{2}c_{11},\ R_{1323} = -\frac{1}{2}a_{12},\ R_{1324} = -\frac{1}{2}c_{12},$$

$$R_{1334} = \frac{1}{4}(-a_2b_1 + c_1c_2 + 2a_{14} - 2c_{13}),$$

$$R_{1414} = -\frac{1}{2}b_{11},\quad R_{1423} = -\frac{1}{2}c_{12},\quad R_{1424} = -\frac{1}{2}b_{12},$$

$$R_{1434} = \frac{1}{4}(-c_1^2 + a_1b_1 - b_1c_2 + b_2c_1 - 2b_{13} + 2c_{14}),$$

$$R_{2323} = -\frac{1}{2}a_{22},\ R_{2324} = -\frac{1}{2}c_{22},$$

$$R_{2334} = \frac{1}{4}(c_2^2 - a_2b_2 - a_1c_2 + a_2c_1 + 2a_{24} - 2c_{23}),$$

$$R_{2424} = -\frac{1}{2}b_{22}, \; R_{2434} = \frac{1}{4}(a_2b_1 - c_1c_2 - 2b_{23} + 2c_{24}), \tag{4.5}$$

$$R_{3434} = \frac{1}{4}(-ac_1^2 - bc_2^2 + aa_1b_1 + ca_1b_2 - a_1b_3 + 2a_1c_4$$
$$+ ca_2b_1 + ba_2b_2 + a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2 - 2a_4c_1$$
$$+ 2b_2c_3 - 2b_3c_2 - 2cc_1c_2 - 2a_{44} - 2b_{33} + 4c_{34}),$$

ile verilir.

ρ ve τ, (4.1) Walker metriğinin Ricci tensörü ve skaler eğriliği olsun. Buradan Ricci tensörü koordinatlarla $\rho_{ij} = R^s{}_{sij} = g^{ts}R_{tijs} = g^{ts}R_{itsj}$ ile verilen eğrilik tensörünün kontraksiyonudur (daralmasıdır). Skaler eğrilik ise, τ =iz ρ ve koordinatlarla $\tau = g^{ij}\rho_{ij}$ ile verilen Ricci tensörünün kontraksiyonuyla elde edilir. Ayrıca, Einstein tensörünü de F ile tanımlayacağız. Yani, Einstein tensörü $F = \rho - \frac{\tau}{4}g$ ile verilir.

Yardımcı teorem 4.2.2.1: (4.1) Walker metriğinin skaler eğriliği

$$\tau = a_{11} + b_{22} + 2c_{12}$$

ile verilir.

İspat: (4.5) den,

$$\rho_{13} = \frac{1}{2}(a_{11} + c_{12}), \qquad \rho_{14} = \frac{1}{2}(b_{12} + c_{11}),$$
$$\rho_{23} = \frac{1}{2}(a_{12} + c_{22}), \qquad \rho_{24} = \frac{1}{2}(b_{22} + c_{12}),$$
$$\rho_{33} = \frac{1}{2}(-c_2^2 + a_1c_2 + a_2b_2 - a_2c_1 + aa_{11} + 2ca_{12} + ba_{22} + 2c_{23} - 2a_{24}), \tag{4.6}$$
$$\rho_{34} = \frac{1}{2}(-a_2b_1 + c_1c_2 + a_{14} + b_{23} + ac_{11} + 2cc_{12} - c_{13} + bc_{22} - c_{24}),$$
$$\rho_{44} = \frac{1}{2}(-c_1^2 + a_1b_1 - b_1c_2 + b_2c_1 + ab_{11} + 2cb_{12} - 2b_{13} + bb_{22} + 2c_{14}),$$

şeklinde Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenlerini elde edebiliriz. Skaler eğriliğin tanımından ispat kolayca yapılır.

Şimdi asıl sonucumuzun ispatını vereceğiz.

Teorem 4.2.2.1: (4.2) hemen hemen para-Hermitian yapı ile donatılmış (4.1) Walker metriğinin Einstein para-Hermitian olması için gerek ve yeter şart $a(x_1,x_2,x_3,x_4)$,$b(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ve $c(x_1,x_2,x_3,x_4)$ fonksiyonlarının aşağıdakiler gibi tanımları olmasıdır.

Tip A: τ skaler eğriliği sıfır ve a, x_2'den bağımsız, x_1' e göre lineer fonksiyon, b, x_1' den bağımsız x_2' ye göre lineer fonksiyon ve c ise x_1 ve x_2 ye göre lineer fonksiyondur. Yani

$$\begin{aligned} a(x_1,x_3,x_4) &= x_1P(x_3,x_4)+\xi(x_3,x_4) \\ b(x_2,x_3,x_4) &= x_2Q(x_3,x_4)+\eta(x_3,x_4) \\ c(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1S(x_3,x_4)+x_2T(x_3,x_4)+\gamma(x_3,x_4), \end{aligned} \tag{4.7}$$

olmasıdır. Burada ξ,η ve γ keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. P, Q, S, T ise

$$PT-T^2+2T=0, \quad QS-S^2+2S_4=0, \quad ST+Q_3-S_3+P_4-T_4=0, \tag{4.8}$$

şartlarını sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Veya

Tip B: τ skaler eğriliği sıfırdan farklı, a $x_2$den bağımsız x_1'e göre 2. dereceden bir fonksiyon, b, x_1' den bağımsız x_2'ye göre 2. dereceden fonksiyon, c ise sadece x_3 ve x_4'e bağlı bir fonksiyon ve $P(x_3,x_4)$, $Q(x_3,x_4)$, $\xi(x_3,x_4)$, $\eta(x_3,x_4)$ herhangi keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} a(x_1,x_3,x_4) &= \frac{\tau}{4}x_1^2+x_1P(x_3,x_4)+\xi(x_3,x_4) \\ b(x_2,x_3,x_4) &= \frac{\tau}{4}x_2^2+x_2Q(x_3,x_4)+\eta(x_3,x_4) \\ c(x_3,x_4) &= \frac{2}{\tau}(P(x_3,x_4)+Q(x_3,x_4)), \end{aligned} \tag{4.9}$$

şartlarını sağlarlar.

Veya

Tip C: τ skaler eğriliği sıfırdan farklı, a x_2'den bağımsız x_1'e göre 2. dereceden bir fonksiyon, b, x_1'den bağımsız x_2'ye göre 2. dereceden bir fonksiyon, c ise x_1 ve x_2'ye göre lineer fonksiyondur ve $P(x_3,x_4)$, $Q(x_3,x_4)$, $S(x_3,x_4)$ ve $T(x_3,x_4)$ keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
a(x_1,x_3,x_4) &= \frac{\tau}{6}\, x_1^2 + x_1 P + \frac{6}{\tau}(PT - T^2 + 2T_3\ ),\\
b(x_2,x_3,x_4) &= \frac{\tau}{6} x_2^2 + x_2 Q + \frac{6}{\tau}(QS - S^2 + 2S_4),\\
c(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \frac{\tau}{6} x_1 x_2 + x_1 S + x_2 T + \frac{6}{\tau}(ST + Q_3 - S_3 + P_4 - T_4)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

şartları sağlanmalıdır.

İspat: (4.1) Walker metriği için Einstein denklemleri

$$\begin{aligned}
&F_{13} = -F_{24} = F_{31} = -F_{42} = \frac{1}{4}(a_{11} - b_{22}) = 0,\\
&F_{14} = F_{41} = \frac{1}{2}(b_{12} + c_{11}) = 0,\\
&F_{23} = F_{32} = \frac{1}{2}(a_{12} + c_{22}) = 0,\\
&F_{33} = \frac{1}{4}(2a_1c_2 + 2a_2b_2 - 2a_2c_1 - 2c_2^2 + a(a_{11} - b_{22})\\
&\qquad + 4ca_{12} + 2ba_{22} - 4a_{24} - 2ac_{12} + 4c_{23}) = 0,\\
&F_{44} = \frac{1}{4}(2a_1b_1 - 2b_1c_2 + 2b_2c_1 - 2c_1^2 - b(a_{11} - b_{22})\\
&\qquad + 2ab_{11} + 4cb_{12} - 4b_{13} - 2bc_{12} + 4c_{14}) = 0,\\
&F_{34} = F_{43} = \frac{1}{4}(-2a_2b_1 + 2c_1c_2 - ca_{11} + 2a_{14} - cb_{22}\\
&\qquad + 2b_{23} + 2ac_{11} + 2cc_{12} - 2c_{13} + 2bc_{22} - 2c_{24}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde hesaplanır.

İlk önce yapımız integrallenebilir olsun yani (g,J) para-Hermitian manifold olsun. Teorem 4.2.1.1 den $a_2 = b_1 = 0$ yazabiliriz. Dolayısıyla a, x_2 den bağımsız b ise x_1 den bağımsızdır. Yani $a = a(x_1, x_3, x_4)$ ve $b = b(x_2, x_3, x_4)$ şeklindedir. Dolayısıyla (4.11) denklemlerini

$$\begin{aligned} & a_{11} - b_{22} = 0\,,\; c_{11} = 0\,,\; c_{22} = 0\,, \\ & a_1 c_2 - c_2^2 - a c_{12} + 2c_{23} = 0, \\ & b_2 c_1 - c_1^2 - b c_{12} + 2c_{14} = 0, \\ & c_1 c_2 - c a_{11} + a_{14} + b_{23} + c c_{12} - c_{13} - c_{24} = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

şekline indirgemiş oluruz.

Teoremin ispatını 3 adımda yapacağız.

1.Adım: Bu adımda a ve b 2. dereceden fonksiyon ve c'nin ise (x_1, x_2) koordinatlarının lineer fonksiyonu olduğunu göstereceğiz. Gerçekten (4.12) deki birinci denklemden a fonksiyonunun x_3 ve x_4 parametrelerine bağlı ve x_1'e 2. dereceden fonksiyon, b fonksiyonu ise x_3 ve x_4 parametrelerine bağlı ve x_2'ye göre 2. dereceden bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz. Yani $\kappa(x_3, x_4)$, $Q(x_3, x_4)$, $P(x_3, x_4)$, $\xi(x_3, x_4)$ ve $\eta(x_3, x_4)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} a(x_1, x_3, x_4) &= x_1^2 \kappa(x_3, x_4) + x_1 P(x_3, x_4) + \xi(x_3, x_4), \\ b(x_2, x_3, x_4) &= x_2^2 \kappa(x_3, x_4) + x_2 Q(x_3, x_4) + \eta(x_3, x_4) \end{aligned} \tag{4.13}$$

şekline sahip fonksiyonlar olmak zorundadır.

Diğer taraftan (4.12) denklemindeki 2. ve 3. denklemlerden

$$c(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \alpha(x_3, x_4) + x_1 S(x_3, x_4) + x_2 T(x_3, x_4) + \gamma(x_3, x_4) \tag{4.14}$$

şartı sağlayan x_1 ve x_2 ye göre lineer olan bir fonksiyon olduğunu görebiliriz. Burada $\alpha(x_3, x_4)$, $S(x_3, x_4)$, $T(x_3, x_4)$ ve $\gamma(x_3, x_4)$ bazı fonksiyonlardır.

2.Adım: (4.13) ve (4.14) deki a, b ve c fonksiyonlarının skaler eğriliğinin

$$\tau = a_{11} + b_{22} + 2c_{12}$$

ifadesinde yerine yazarsak

$$\tau = 4\kappa(x_3, x_4) + 2\alpha(x_3, x_4)$$

elde edilir. Burada τ sabittir. Bu denklemden α yı yalnız bırakırsak

$$\alpha(x_3, x_4) = \frac{\tau}{2} - 2\kappa(x_3, x_4)$$

elde ederiz.

(4.12) deki 4. denklemin x_1 'e göre iki defa diferensiyelini alarak

$$\tau^2 - 10\tau\kappa(x_3, x_4) + 24\kappa(x_3, x_4)^2 = 0 \tag{4.15}$$

denklemini elde etmiş oluruz. Burada $\tau \neq 0$ ise (4.15) denkleminden $(\tau - 4\kappa)(\tau - 6\kappa) = 0$ olup $\kappa = \dfrac{\tau}{4}$ veya $\kappa = \dfrac{\tau}{6}$ olmalıdır. τ sabit olduğundan $\kappa(x_3, x_4)$ sabit olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
a(x_1, x_3, x_4) &= \kappa x_1^2 + x_1 P(x_3, x_4) + \xi(x_3, x_4), \\
b(x_2, x_3, x_4) &= \kappa x_2^2 + x_2 Q(x_3, x_4) + \eta(x_3, x_4) \\
c(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\frac{\tau}{2} - 2\kappa)x_1 x_2 + x_1 S(x_3, x_4) + x_2 T(x_3, x_4) + \gamma(x_3, x_4)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde etmiş oluruz.

3.Adım: Bu adımda a, b ve c fonksiyonları için mümkün olan üç durumu elde etmeye çalışacağız.

TİP A: $\kappa = \tau = 0$ olsun. (4.16) denkleminden

$$\begin{aligned}
a(x_1, x_3, x_4) &= x_1 P(x_3, x_4) + \xi(x_3, x_4), \\
b(x_2, x_3, x_4) &= x_2 Q(x_3, x_4) + \eta(x_3, x_4), \\
c(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 S(x_3, x_4) + x_2 T(x_3, x_4) + \gamma(x_3, x_4),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde etmiş oluruz. Ayrıca (4.12) deki son üç denklemde (4.17) deki a, b ve c fonksiyonlarını yerine yazarsak

$$PT - T^2 + 2T_3 = 0, \quad QS - S^2 + 2S_4 = 0, \quad ST + Q_3 - S_3 + P_4 - T_4 = 0,$$

denklemlerini yani (4.8) deki denklemleri elde etmiş oluruz.

TİP B: $\kappa = \tau \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.16) denklemi

$$a(x_1, x_3, x_4) = \frac{\tau}{4}x_1^2 + x_1 P(x_3, x_4) + \xi(x_3, x_4),$$

$$b(x_2, x_3, x_4) = \frac{\tau}{4}x_2^2 + x_2 Q(x_3, x_4) + \eta(x_3, x_4),$$

$$c(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 S(x_3, x_4) + x_2 T(x_3, x_4) + \gamma(x_3, x_4), \tag{4.18}$$

şeklini alır. (4.9) denklemini elde etmek için (4.12) deki son üç denklemin c fonksiyonu üzerindeki etkisine bakmamız lazım. (4.12) deki 4. ve 5. denklemden

$$(\tau x_1 + 2P(x_3, x_4))T(x_3, x_4) - 2T(x_3, x_4)^2 + 4T_3(x_3, x_4) = 0,$$
$$(\tau x_2 + 2Q(x_3, x_4))S(x_3, x_4) - 2S(x_3, x_4)^2 + 4S_4(x_3, x_4) = 0,$$

Denklemlerini elde edebiliriz. Son iki denklemin sağlaması için gerek ve yeter şart

$$T(x_3, x_4) = S(x_3, x_4) = 0 \tag{4.19}$$

olmasıdır.

Bu durumu kullanarak (4.12) deki son denklemi

$$\tau\gamma(x_3, x_4) - 2(P_4(x_3, x_4) + Q_3(x_3, x_4)) = 0$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\gamma(x_3, x_4) = \frac{2}{\tau}(P_4(x_3, x_4) + Q_3(x_3, x_4)). \tag{4.20}$$

elde edilir.

Sonuç olarak (4.19) ve (4.20) denklemlerinden

$$c(x_3, x_4) = \frac{2}{\tau}(P_4(x_3, x_4) + Q_3(x_3, x_4)),$$

elde edilmiş olur. Böylece (4.9) denklemi elde edilir.

TİP C: $\kappa = \dfrac{\tau}{6} \neq 0$ olsun. Bu son durumu (4.16) denkleminde yerine yazarsak

$$a(x_1,x_3,x_4)=\frac{\tau}{6}x_1^2+x_1P(x_3,x_4)+\xi(x_3,x_4),$$

$$b(x_2,x_3,x_4)=\frac{\tau}{6}x_2^2+x_2Q(x_3,x_4)+\eta(x_3,x_4), \tag{4.21}$$

$$c(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{\tau}{6}x_1x_2+x_1S(x_3,x_4)+x_2T(x_3,x_4)+\gamma(x_3,x_4),$$

elde edilir.

(4.21) deki a, b ve c fonksiyonlarını (4.12) deki son üç denklemde yerine yazarsak

$$\frac{\tau}{6}\xi(x_3,x_4)-(P_4(x_3,x_4)T(x_3,x_4)-T(x_3,x_4)^2+2T_3(x_3,x_4)=0,$$

$$\frac{\tau}{6}\eta(x_3,x_4)-(Q(x_3,x_4)S(x_3,x_4)-S(x_3,x_4)^2+2S_4(x_3,x_4))=0,$$

$$\frac{\tau}{6}\gamma(x_3,x_4)-(S(x_3,x_4))T(x_3,x_4)+Q_3(x_3,x_4)$$

$$-S_3(x_3,x_4)+P_4(x_3,x_4)-T_4(x_3,x_4))=0.$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $\xi(x_3,x_4)$, $\eta(x_3,x_4)$ ve $\gamma(x_3,x_4)$ fonksiyonları

$$\xi(x_3,x_4)=\frac{6}{\tau}(P(x_3,x_4)T(x_3,x_4)-T(x_3,x_4)^2+2T_3(x_3,x_4)),$$

$$\eta(x_3,x_4)=\frac{6}{\tau}(Q(x_3,x_4)S(x_3,x_4)-S(x_3,x_4)^2+2S_4(x_3,x_4)), \tag{4.22}$$

$$\gamma(x_3,x_4)=\frac{6}{\tau}(S(x_3,x_4)T(x_3,x_4)+Q_3(x_3,x_4)$$

$$-S_3(x_3,x_4)+P_4(x_3,x_4)-T_4(x_3,x_4)).$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak (4.22) deki $\xi(x_3,x_4)$, $\eta(x_3,x_4)$ ve $\gamma(x_3,x_4)$ ifadelerini (4.21) de yerine yazarak (4.10) denklemi elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ

Bu tezde para-Hermitian yapı ile donatılmış Walker metriği araştırılmıştır. Bu çalışmada ilk olarak Walker manifoldun tanımı verilmiş ve Walker metriğin (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinatları üzerinde bazı a, b ve c fonksiyonlarına bağlı olan

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu ifade edilmiştir.

İkinci olarak para-Hermitian yapılar hakkında bilgi verilmiş ve Walker metriği üzerinde

$$J\partial_2 = \partial_2, \quad J\partial_3 = -a\partial_1 + \partial_3, \quad J\partial_4 = b\partial_2 - \partial_4$$

şeklinde bir para-Hermitian yapı kurulmuştur. Daha sonra bu yapının integrallanebilmesi için gerek ve yeter şartın

$$a_2 = b_1 = 0$$

olduğu gösterilmiştir.

Son olarak Walker metriği için eğrilik tensörüne bakılmıştır. Eğrilik tensörü için Einstein denklerleri araştırılmış ve Einstein denklemleri için genel çözümler elde edilmeye çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

Bishop, L., Goldberg, S. I., Tensör Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, 280, Newyork, 1968.

Blažić, N.; Bokan, N.; Rakić, Z., Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature (2,2), J. Aust. Math. Soc. 71, (2001), 367-395.

Bonome, A.; Castro, R.; García-Río, E.; Hervella, L.; Vázquez-Lorenzo, R., Pseudo-Riemannian manifolds with simple Jacobi operators, J. Math. Soc. Japan 54, (2002), 847-875.

Chaichi M., García-Río E., Matsushita Y., Curvature properties of four-dimensiol Walker metric. Class. Quantum. Grav. (2005). V.22, no.3 P.559-577.

Cruceanu V., Fortuny P. And Gadea, A survey on paracomplex Gemetry, Rocky Mountain J. Math., 26 (1995), 83-115.

Davidov J., Díaz Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Muskarov O., Vázquez-Lorenzo
R., Almost Kähler Walker 4-manifolds, J. Geom. Phys., 57 (2007), 1075-1088.

Davidov J., Díaz Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Muskarov O., Vázquez-Lorenzo
R., Hermitian-Walker 4-manifolds, J. Geom. Phys., 58 (2008), 307-323.

Díaz Ramos, J. C.; García Río, E.; Vázquez Lorenzo, R., Four-dimensional Osserman metrics with nondiagonalizbe Jacobi operators, J. Geom. Anal. 16, (2006), 39-52.

Gilkey, P., Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemannian Curvature Tensor, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

Gil-Medrano O., Naveira A. M., Some remarks about the Riemannian curvature operator of a Riemannian almost-product manifold, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 30 (18) (1985), 647-658.

Gil-Medrano O., Geometric properties of some classes of Riemannian almost-product manifolds, Rend. Circ. Mat. Palermo, 32 (2) (1983), no.3, 315-329.

Kobayashi, S. And Nomızu, K., 1963, Foundations of Differantial Geometry., Interscience Publishers, 1 p.26-38.

Matsushita Y., Walker 4-manifolds with proper almost complex structure, j. Geom. Phys.,55 (2005), 385-398.

Matsushita Y., Four-dimensional Walker metrics and symplectic structure, J. Geom. Phys., 52 (2004), 89-99.

Miquel V., Some examples of Riemannian almost-product manifolds, Pacific J. Math.,111 (1984), no. 1, 163-178.

Naveira A. M., Aclassification of Riemannian almost-product manifolds, Rend. Mat., (7) 3 (1983), no. 3, 577-592.

O' Neill, B., Semi Riemann Geometry. Academic Pres, 468, Newyork, London, 1983.

Salimov A.A., Iscan M., Some properties of Norden-Walker metrics. Kodai Mathematical Journal, (to appear).

Salimov A.A., Iscan M. And Etayo F., Paraholomorphic B-manifold and its properties, Topology Appl., 154 (2007), 925-933.

Salimov, A., Mağden A., Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi, 326, 2008, Erzurum

Yano, K. and Ishihara, S. Tangent and Cotangent Bundles, (Marcel Dekker Inc., N.Y., 1973).

Yano, K., Differantial Geometry on complex and Almost Complex spaces., The Macmillan Company, New York, p.49-206, 1965.

Yano, K. and Kon, M. Structure on manifolds, (World Scientific, Singapore, 1984).

Walker A.G., Canonical form for a Riemannian space with a paralel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford, 1 (2) (1950), 69-79.

ÖZGEÇMİŞ

Selahattin GENÇ 20.01.1980 tarihinde Horasan'da dünyaya geldi. İlk ve Orta öğretimini Horasanda tamamladı. 1998 tarihinde Atatürk Üniversitesi K.K.E.F İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne girdi. 2002 tarihinde mezun oldu. Aynı yıl Horasan ilçesi Hacıhalil Köyü İlköğretim Okulunda Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2004 yılında Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans'a girdi. 2004-2006 tarihleri arasında Horasan ilçesi Fatih İlköğretim Okulunda görev yaptı. 2006-2010 tarihleri arasında Erzurum Nihat Kitapçı İlköğretim Okulunda görev yaptı. 26 Mart 2010 tarihinde Aziziye Halk Eğitimi Merkezi Müdür Yardımcısı olarak atandı. Halen bu görevine devam ediyor. Evli ve 1 çocuk babasıdır.