T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
SAĞLIK BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK ÖRNEKLEME PLANLARINDA ÖRNEKLEME HATALARININ HESAPLANMASI

ERGUN KARAAĞAOĞLU

BİYOİSTATİSTİK
DOKTORA TEZİ

ANKARA, 1985

T.C.
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
SAĞLIK BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK ÖRNEKLEME PLANLARINDA ÖRNEKLEME HATALARININ HESAPLANMASI

ERGUN KARAAĞAOĞLU

BİYOİSTATİSTİK
DOKTORA TEZİ

Rehber Öğretim Üyesi
Doç.Dr. Kadir Sümbüloğlu

Ankara, 1985

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Araştırmalardaki hatalar birçok kaynaktan ortaya çıkabilir ve örnekleme hatası hatanın bileşenlerinden yanlız bir tanesidir. Bunun önemini anlayabilmek için toplam hata içerisindeki yerinin bilinmesi gerekir.

Örnekleme dayalı bir araştırmanın amacı, örneklem verilerinden kestirimler elde etmek ya da kitle hakkında çıkarsamalarda bulunabilmektir. Hata, genellikle bilinmeyen gerçek kitle değeri ile eldeki örneklemden hesaplanan örneklem değeri arasındaki fark olarak tanımlanabilir. Bu hata iki büyük sınıfta toplanır :

1. Örnekleme dışı hatalar : Bunlar ölçüm hatalarını,deneklе iyi iletişim kurulamamasından doğan hataları, kodlama hatalarını vb. içerirler.
2. Örnekleme hataları : Bunlar gözlenen birimlerden elde edilen sonuçların tüm kitleye genellenmesi sürecinden kaynaklanan hatalardır. Diğer bir deyişle, örneklemi düzenleme ve seçme sürecindeki hatalardır ve ölçüm hataları olmasa bile var olacaklardır.

Genel olarak, herhangi bir hata kaynağının araştırma sonuçları üzerine etkisi iki bileşene ayrılabilir : a) değişken hata ve b) yanlılık. Değişken hata, aynı koşullar altında yapılan farklı tekrarlardan elde edilen kestirimler arası değişkenliği ölçer. Bu tekrarlar iki biçimde düşünülebilir : aynı örneklem birimleri üzerinde tekrar tekrar ölçüm yapılması ya da araştırmanın farklı örneklemler üzerinde yinelenmesi. Ölçüm hatası ya da cevap hatası, aynı örneklem birimleri üzerinde birçok kez gözlem yapıldığında, tekrarlanan ölçümlerin değişkenliğinin bir ölçüsüdür. Bu ölçümlerin ortalamasının ya da beklenen değerinin farklı örneklemler üzerinden değişkenliğinin ölçüsü de örnekleme varyansıdır. Diğer bir deyişle, örnekleme varyansı, farklı örneklemlerden elde edilen kestirimler arası değişkenliğin ölçüsüdür.

Ortalama karesel hata da örneklem varyansı ile yanlılığın karesinin toplamıdır. Yanlılık, kullanılan kestiricinin istatistiksel bir özelliğidir ve yeterli büyüklükte ve iyi düzenlenmiş örneklemlerle, uygun kestirim yöntemleri kullanılarak ortadan kaldırılabilirler. Ancak bazı durumlarda (küme genişlikleri birbirlerinden çok farklı olduğunda küme örneklemesi yöntemi ile elde edilen oran kestirimlerinde olduğu gibi) kestirimin yanlılığı önemli sonuçlar doğurabilir.

Örnekleme hataları hakkındaki bilgi yorumlanırken, bunların toplam hatanın yalnızca bir bileşeni olduğu unutulmamalıdır. Küçük örneklemlerde belki bu, toplam hatanın büyük bir kısmını oluşturacaksa da diğer durumda örnekleme dışı hatalar çok daha önemli olabilecektir.

Örnekleme hatalarını hesaplama yöntemleri, çok amaçlı araştırmalar için hazırlanan örnekleme planlarında sıklıkla karşılaşılan karmaşıklık ve değişkenlikleri kapsayacak biçimde genel olmalıdırlar.

Kestirim işlemi örnekleme planının yapısını gözönüne almalıdır. Aynı zamanda kolay hesaplama formülleri verebilecek biçimde basit olmalıdır.

Çok aşamalı örnekleme planlarında her seçim aşamasının toplam örnekleme hatasına bir katkısı vardır. Ancak, araştırma sonuçlarının yorumlanmasında ve bu araştırma sonuçlarının diğer (ileride yapılacak) araştırmalar için bir yol gösterici, düzenleyici olarak kullanılması durumunda tek, tek aşamaların katkıları değil, toplam örnekleme hatası önem kazanır (Little, R.J.A., 1982).

Karmaşık örneklemler için örnekleme hatalarının hesaplanması zordur. Ancak bu tür hesaplama yöntemlerine seçenek olarak düşünülebilecek yöntemler uygulamada iyi sonuçlar vermediklerinden, istatistiksel çıkarsama için gerekli olan örnekleme hataları pratik yöntemlerle hesaplanmalıdır. Karmaşık örnekleme planlarından elde edilen analitik istatistiklere ilişkin örnekleme hatalarının hesaplanmasında önerilen yöntemlerle bunlara seçenek olarak verilen yöntemler karşılaştırılırsa konunun önemi daha iyi anlaşılabilir. Seçenekler şunlardır :

i) Verilerin çözümlemesini yalnızca belirli istatistiklerle sınırlamak,

ii) İstatistiksel dağılım kuramının uygulanabileceği bağımsız seçimlerle elde edilmiş örneklemler kullanmak. Ancak bu yöntem çoğunlukla pahalıya mal olacağından pratik değildir.

iii) Örnekleme hatalarını hesaplamaktan vazgeçmek. Bu çoğunlukla başvurulan yoldur.

iv) Örnekleme hatalarını, kullanılan örnekleme yöntemine bakmaksızın basit rasgele örneklemeymiş gibi düşünüp eldeki formüllerle hesaplamak. Bu da sıklıkla başvurulan bir yoldur. Bugün yaygın olarak kullanılan bazı paket programlar bile, gerçek örnekleme planını gözönüne almayıp, örnekleme hatalarını basit rasgele örnekleme formülleri ile hesaplamaktadır. Bu da yanlış kestirim yapmaya genellikle de olduğundan daha az kestirim yapmaya neden olmaktadır.

Örnekleme planı basitten karmaşığa geçtikçe ve kullanılan istatistiklerde betimsel yerine analitik olduğunda örnekleme hatalarının hesaplanabilmesi için ya yukarıdaki seçenekler yeğlenecek, ya bu boşluğu doldurabilecek kuramsal gelişmeler beklenecek ya da bu boşluk gözleme dayalı büyük çaplı araştırmalarla doldurulmaya çalışılacaktır.

Bu konudaki literatür gözlemsel yöntemlere dayalı araştırmaları teşvik etmektedir, ve alınan yolun önemini, birçok yönden birbirini destekleyen araştırmalar kanıtlamaktadır. Önerilen çözüm yöntemlerinin geçerliliğinin ve genelleştirilebilmesinin bu konuda çalışanlar arasında kurulacak iletişimle mümkün olduğu sıksık vurgulanmaktadır.

Bu çalışmada amaç, karmaşık örnekleme planlarından elde edilen betimsel ve analitik istatistiklere ilişkin standart hata değerlerinin, önerilen yöntemlerle hesaplanmasının sonuçların doğruluğu üzerine etkisini ortaya koyabilmektir. İstatistiksel çıkarsamada sıklıkla kullanılan t-dağılımının karmaşık örneklemlere uygulanabilirliği incelenecek ve önerilen yöntemlerin mi yoksa bunlara seçenek olarak gösterilen yöntemlerin mi daha geçerli olduğu araştırılacaktır.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

İstatistiksel literatür, gözlemlerin birbirinden bağımsız olması varsayımına dayanmaktadır. Kullanılan istatistiksel testler ve güven aralıkları örneklem birimlerinin bağımsız ve rasgele seçilmiş olmasını gerektirir, ve bunların geçerliliği bu varsayıma dayanır. İstatistik kuramında basit rasgele örnekleme varsayımının sıklıkla karşımıza çıkmasını, basit rasgele örneklemenin kuramsal sonuçları kolayca ortaya koyabilmesi ile açıklayabiliriz (Kish, L., 1957).

Diğer taraftan çoğu sosyal araştırma ve sağlık bilimlerindeki araştırmalar, saha araştırması gerektirdiğinden karmaşık örnekleme yöntemleri ile yürütülür. İnsan kitlelerinin basit rasgele seçimi çok seyrek kullanılan bir yoldur. Tıp bilimlerinde ve sosyal bilimler için temel öğe olan insan kitleleri genellikle büyük ve geniş alanlara yayılmışlardır. Bu nedenle de bunların basit rasgele örneklemi çoğu durumda ekonomik ve uygun olmaz. Böylece örnekleme problemlerinin karmaşıklığı örnekleme düzenine de yansıtılır. Ancak, karmaşık düzenlerin önemli istatistiksel sonuçları genellikle ihmal edilir (Kish, L., 1957). Karmaşıklık ile basit rasgele örneklemeden ayrılış kastedilmektedir. Basit rasgele seçimden ayrılan temel yöntemler, kümeleme, tabakalama, seçimin eşit olmayan olasılıklarla yapılması, sistematik örnekleme ve çok aşamalı örnekleme planlarıdır. Bu yöntemler arasında, küme örneklemesi ile elde edilen sonuçların dikkatli bir biçimde yorumlanması gerekir. Küme örneklemesinde örnekleme birimleri, bireylerin oluşturduğu kümelerdir (Cochran, W.G., 1963).

Kümelerdeki bireyler genellikle birbirlerini temsil etmeye yatkındır. Bazı özellikler bakımından homojenlik vardır (alışkanlıklar, davranışlar gibi). Bireylerin kümeler içi homojenliği sınıf içi korelasyon katsayısı (intraclass correlation coefficient) ile ölçülebilir. Bu değer, çoğu özellikler için pozitiftir. Sınıf içi korelasyon katsayısı, bir kitlenin öğeleri arasındaki toplam varyansın, kümelere ait olma ile açıklanan kısmının ölçüsüdür. Aynı genişlikteki bir basit rasgele örneklem ile karşılaştırıldığında, bu homojenlik küme örneklemesi ile elde edilen ortalamanın ve benzeri istatistiklerin varyansını artırır (Deming, W.E., 1947; Sukatme, P.V., 1954; Yates, F., 1960).

Yapılan çoğu araştırmalarda gerçek varyanslar basit rasgele örnekleme varyansının 1-2 katı kadar büyüktürler. Bu da 2000 birimlik bir örneklemin etkin genişliğinin 1000 basit rasgele örneklem birimine eşit olacağı anlamındadır. Yalnız unutmamak gerekir ki, örnekleme, birim başına maliyetten yapılacak tasarrufun bilgideki kayıptan daha büyük olacağı beklentisi ile düzenlenir. İyi düzenlenmiş araştırmalarda kümeleme etkisinin (gerçek varyans/basit rasgele örnekleme varyansı) büyük olduğu seyrek görülür. Eğer büyük etkilerin varlığı önceden sezilebilirse, iyi düzenlenmiş örnekleme planları ile bu önlenebilir.

(Gerçek varyans/basit rasgele örnekleme varyansı) oranlarının dağılımı da yapılan birçok araştırmaya dayanılarak incelenmiş ve bu oranların dağılımının verilen sınırlar olan 1 ile 2 arasında tekdüze (uniform) olmadığı görülmüştür. Büyük yığılımın altsınıra yakın bir yerde, 1.2 civarında olduğu görülmüştür (Kish, L., 1957).

Küme içi homojenliğin, varyansın artmasına neden olmasının yanı sıra, kümelerin örnekleme birimi olarak kullanılması durumunda doğuracağı önemli sonuçlar unutulmamalıdır. Örneklem birimlerinin bağımsızlığı varsayımı bozulur. Bu varsayıma dayalı formüllerin uygulanması da mümkün olmaz. Uygulandığında güven aralıklarının oluşturulmasında ve hipotezlerin testinde önemli yanılgılar olabilir.

2.1. Kümelemenin Etkileri

Düzen Etkisi ve Sınıf İçi Korelasyon

Çeşitli varyans ölçüleri arasında bağıntıları bilmek ve bunları birbirlerinden ayırtetmek gerekir. Küme örneklemesinde $var(\bar{y}) = (1-f)s_a^2/a$ formülünden, birim varyans $s_a^2 = \Sigma(\bar{y}_\alpha - \bar{y})^2/(a-1)$ birim ortalamaları arasındaki varyansdır. $s_a^2 = a\,[var(\bar{y})/(1-f)]$ dir.

Element varyansı

$$v^2 = n\,[var(\bar{y})/(1-f)] = (n/a)s_a^2 = bs_a^2$$

olarak tanımlanır. Burada,

A : kitledeki ilk örneklem birimi sayısı

a : örnekleme alınan ilk örneklem birim sayısı

B : İlk örneklem biriminin içerdiği birim sayısı

b : İkinci aşamada ilk örneklem biriminden örnekleme çekilen birim sayısıdır.

Her biri b birim içeren a tane ilk örnekleme birimi tüm örneklemi oluşturacaktır.

Belirli bir örnekleme planı için element varyansının aynı genişlikteki basit rasgele örneklemenin element varyansına oranı düzen etkisi olarak tanımlanır.

$$\text{düzen etkisi} = DE = \frac{var(\bar{y})}{(1-f)\frac{s^2}{n}} = \frac{s_a^2/a}{s^2/n} = \frac{v^2}{s^2}$$

Birçok örnekleme yöntemi arasında kümeleme gerek varyans ve gerekse de maliyet üzerinde en fazla etkiye sahip olanıdır. İki örnekleme yönteminin karşılaştırıldığını düşünelim. Birincisinde n tane bağımsız seçilmiş eleman bulunsun, ikincisi ise seçilen a tane kümede n eleman içersin. Küme örneklemesinde bağımsız seçim sayısı n den a ya inmiştir. Varyans üzerine kümelemenin etkisi de, oluşturulan kümelerde kitlenin dağılımının rasgele olmayışından kaynaklanmaktadır. Doğal kümeler kullanıldığında birimlerin homojenliği varyansı artırıcı etki gösterir.

Düzen etkisi, sınıf içi homojenliğin ölçüsü, roh (rate of homogenity), cinsinden kümelemenin etkisi için iyi bir yaklaşım sağlar.

$$DE = \frac{s_a^2/a}{s^2/a} = [1 + roh(B-1)]$$

Bu formülün geniş kullanılabilirliği ve esnekliği Kish tarafından gösterilmiştir (Kish,L., 1965). Eğer her kümeden b genişliğinde alt-örneklem alınmış ise DE = [1 + roh(b-1)] formülü kullanılabilir. Benzer biçimde küme genişlikleri eşit olmadığında b nin yerine $n/a = \bar{b}$ kullanmak yeterli yaklaşımı sağlayacaktır (Kish, L., 1965). Roh pozitif olduğunda düzen etkisi 1 den büyük olacaktır. Çünkü küme örneklemesi aynı genişlikteki basit rasgele örneklemden daha büyük varyansa sahiptir.

Roh'un alabileceği en büyük değer +1 dir. Bu, incelenen değişkenin kümelerde tamamen ayrışması anlamındadır. Başka bir deyişle, herhangi bir küme içerisinde kümeyi oluşturan elemanlar aynı değere sahiptir. Bu durumda düzen etkisi b ye eşittir.

Roh'un alabileceği en küçük değer -1/(b-1) dir. Bu, [1 + roh(b-1)] = 0 ya da küme ortalamaları arasındaki varyansin sıfır olması ile aynı şeydir. Roh'un negatif değerlerine pratikte pek seyrek rastlanır.

İncelenen değişken kümelere tamamen rasgele dağılmış ise roh'un sıfır olması ve düzen etkisinin de,

[1 + roh(b-1)] = 1

olması beklenir.

Bunu şu örnekle açıklayabiliriz :

İyi karışmış bir torbadan çekilen n tane topun beklenen varyansı, topları tek tek seçsekde ya da b genişliğinde kümeler halinde çeksekde eşit olacaktır.

Ancak çoğu kitle değişkenleri bu derece "iyi karışmış" değildir, gruplara ya da kümelere rasgele dağılmamışlardır. Pratikte kullanılan kümelerde roh sıfırdan büyük olma eğilimindedir. Bazen oldukça büyük olabileceği gibi bazen de oldukça küçüktür. Ancak, oldukça küçük pozitif bir roh değeri, eğer kümeden alınan örnek genişliği, b büyük ise varyans üzerinde büyük etkiye sahip olabilir.

Özellikle insan kitleleri ile ilgili araştırmalarda küme örneklemlerinin varyansı, element örneklemlerininkine oranla daha büyüktür. Bu, mantıksal olarak bir gereklilik olduğu gibi, bugüne değin çok değişik türde küme örneklemleri ile yapılan araştırmalara dayanılarak yapılan bir genellemedir. Çoğu grupta roh pozitif olma eğilimindedir, aynı grup içerisindeki bireyler birbirlerini temsil etmeye yatkındırlar.

Bu homojenlik, roh, farklı değişkenler ve farklı kitleler için değişik değerlere sahip olmaktadır. Belirli bir değişken ve kitle için roh'un değeri kümelerin özelliğine ve genişliğine bağlıdır. Roh, kümelerin bir özelliğidir ve bu nedenlede kümeler örneklem birimi olarak kullanıldığında varyansı etkiler.

Örneklem kümeleri içerisindeki homojenlik varyansı artırdığından, örneklemeci bu homojenliği azaltmak isteyecektir. Bunun için, öncelikle, b genişliğindeki alt örneklemini aldığı kümeyi daha büyük tutmayı (B yi büyük tutmayı) ister. Kümenin büyümesi ile homojenlikde azalacaktır. Genişliği büyük olan kümeler daha küçük roh değerine sahip olma eğilimindedirler. Roh değerinin, artan küme genişliği ile birlikte azalması birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir (Hansen, M.H., Hurwitz, W.N., Madow, W.G., 1953 ve Cochran, W.G., 1963). İkinci olarak da örneklemeci, örneklem kümelerini oluşturmada benzer olmayan birimleri almak için çaba gösterir. Örneğin, örnekleme çıkan şehir bloklarından konutları ikili ikili seçerken, örneklem kümesini oluşturacak olan konutları birbirinin zıttı olacak biçimde seçmeye uğraşır.

Kümelerin yapay bir biçimde (olması gerektiği biçimde) oluşturulması zor olduğundan, doğal olarak var olan gruplar (bütünler) küme olarak kullanılır. Böyle olunca, örneklemeci örneklem kümelerinin homojenliğini doğru seçilmiş alt örnekleme yöntemleri ile azaltabilir.

2.2. Varyansın Bileşenleri

Seçim aşamalarına karşılık gelen varyans bileşenlerini incelemek yararlı olacaktır. Element varyansı

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i-\bar{Y})^2/N = \sum_{\alpha}^{A} \sum_{\beta}^{B} (Y_{\alpha\beta}-\bar{Y})^2/AB$$

iki aşamalı örnekleme yönteminde iki bileşenine ayrılabilir.

$$\frac{1}{AB}\sum_{\alpha}^{A}\sum_{\beta}^{B}(Y_{\alpha\beta}-\bar{Y})^2 = \frac{1}{A}\sum_{\alpha}^{A}(\bar{Y}_{\alpha}-\bar{Y})^2 + \frac{1}{AB}\sum_{\alpha}^{A}\sum_{\beta}^{B}(Y_{\alpha\beta}-\bar{Y}_{\alpha})^2$$

Bu aynı zamanda

$\sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$ biçiminde yazılabilir. Burada σ_a^2, kümeler arası varyans bileşeni, $\bar{Y}_{\alpha}$ küme ortalamalarının kitle ortalaması, $\bar{Y}$ etrafındaki varyansını verir. σ_b^2 küme içi varyans bileşeni ise $Y_{\alpha\beta}$ elemanlarının $\bar{Y}_{\alpha}$ küme ortalaması etrafındaki varyansını gösterir. Bu model, A tane kümeden a kümenin ve B tane elemandan b elemanın seçildiği iki aşamalı yönteme ilişkindir. Seçim rasgele ve her iki aşamada da yerine koymadandır. Bu varyans bileşenlerine ilişkin istatistikler

$$s_b^2 = \frac{1}{a(b-1)}\sum_{\alpha}^{a}\sum_{\beta}^{b}(y_{\alpha\beta}-\bar{y}_{\alpha})^2$$

$$s_a^2 = \frac{1}{(a-1)}\sum_{\alpha}^{a}(\bar{y}_{\alpha}-\bar{y})^2$$

ve

$$var(\bar{y}) = (1-\frac{a}{A})\frac{s_a^2}{a} + (1-\frac{b}{B})\frac{a}{A}\frac{s_b^2}{ab} = \frac{s_a^2}{a} - [s_a^2 - (1-\frac{b}{B})\frac{s_b^2}{b}]\frac{1}{A}$$

dır. Bu istatistiklerin çıkarımı ve yansız oldukları çoğu temel örnekleme kitaplarından bulunabilir (Kish, L., 1965).

Yukarıda verildiği gibi ikinci aşama birimlerinin element olmaları gerekmez. Yukarıda verilen çözümleme ilk örnekleme birimlerinden kümelerin ikinci aşama olarak seçildiği durumlar için uyarlanabilir.

Varyansın bileşenleri cinsinden küme içi birimlerin homojenliği şöyle tanımlanabilir.

$$roh = \frac{s_a^2 - s_b^2/b}{s^2}$$

Genel varyansı bileşenlerine ayırmada etkin bir gösterim sağlaması açısından yöntem varyans analizi tablosu ile özetlenebilir. Çoğu çalışmada temel olarak alınan plan; üç aşamada rasgele olarak H tane ilk örnekleme biriminin seçimi, A tane ikinci örneklem biriminden a_c tanesinin seçimi, B tane üçüncü örneklem biriminden b tanesinin seçimidir. Daha özel olarak : H tane tabakanın herbirinden a_c/A kümenin seçimi, bundan sonra da b/B ikincil birimin seçimidir. Buna ilişkin varyans analizi tablosu aşağıda özetlenebilir.

Tablo 2.2.1. H Tane Tabakadan Yapılan İki Aşamalı Rasgele Örnekleme İçin Varyans Analizi Tablosu

Kaynak	sd	KT	KO
Tabakalar Arası	H-1	$\frac{1}{a_c b} \sum_h^H Y_h^2 - \frac{Y^2}{Ha_c b}$	$a_c b s_h^2$
Tabakalar İçinde Kümeler Arası	$H(a_c-1)$	$\frac{1}{b} \sum_h^H \sum_\alpha^{a_c} Y_{h\alpha}^2 - \frac{1}{a_c b} \sum_h^H Y_h^2$	bs_a^2
Küme İçi	$Ha_c(b-1)$	$\sum_h^H \sum_\alpha^{a_c} \sum_\beta^b Y_{h\alpha\beta}^2 - \frac{1}{b} \sum_h^H \sum_\alpha^{a_c} Y_{h\alpha}^2$	s_b^2
Genel	$Ha_c b-1$	$\sum_h^H \sum_\alpha^{a_c} \sum_\beta^b Y_{h\alpha\beta}^2 - \frac{Y^2}{Ha_c b}$	s^2

Bu formüller ve tablo her tabakadan iki küme seçiminin yapıldığı "ikili seçim" (paired selections) yönteminde daha da basitleştirilebilecektir.

Böyle bir uygulama Kish (1965) tarafından verilmiştir. Herbiri 199 küme içeren 20 tabakadan ikili seçim yönteme ile 40 kümenin örnekleme alındığı bu araştırmaya ilişkin gerekli değerler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 2.2.2. Herbiri 199 Küme İçeren 20 Tabakadan İkili Seçim Yöntemi İle 40 Kümenin Örneklendiği Araştırma İçin Varyans Analizi Tablosu

Kaynak	sd	KT	KO	Beklenen KO
Tabakalar Arası	19	29.99	1.5789	$10 \frac{197}{199} s_a^2 + 20s_h^2$
Tabaka İçinde Kümeler Arası	20	10.75	0.5375	$10\ s_a^2$
Küme İçi	360	58.70	0.1631	s_b^2
Genel	399	99.44	0.2492	

Bu tablodan:

$$s_b^2 = 0.1631 \text{ ve } \sigma_b^2 = \frac{B-1}{B} s_b^2 = \frac{9}{10} 0.1631 = 0.1468$$

$$s_a^2 = 0.05375 \text{ ve } \sigma_a^2 = \frac{A_h-1}{A_h} s_a^2 = \frac{198}{199} 0.05375 = 0.05348$$

$$s_h^2 = 0.05234 \text{ ve } \sigma_h^2 = 0.04972$$

kestirimleri elde edilir.

Kitlede kümelerin varyansı $\sigma_h^2 + \sigma_a^2 = 0.04972 + 0.05348$ $= 0.1032$ dir. Benzer biçimde kitlede element varyansı da şöyle kestirilebilir :

$$\sigma_h^2 + \sigma_a^2 + \sigma_b^2 = 0.04972 + 0.05348 + 0.1468 = 0.25$$

Bu kestirim de varyans analizi tablosundan elde edilen 0.2492 değerine çok yakın bir değerdir.

Basit rasgele örnekleme ile karşılaştırıldığında tabakalanmış küme örneklemesinin düzen etkisi

$$B\sigma_a^2/\sigma^2 = \frac{0.5348}{0.25} = 2.14$$

dür. Buradan,

$$D.E. = 2.14 = [1 + roh(b-1)]$$

eşitliğinden yararlanarak

roh = 0.127 dir. Bu, tabaka içindeki kümelerin homojenliğinin ölçüsüdür.

2.3. Örnekleme Düzeninin Karmaşıklığının Göz Önüne Alınmamasının Sonuçların Güvenilirliğine Etkisi

Kish (1957) bir çalışmasında, örnekleme düzeninin karmaşıklığı göz önüne alınmadan, basit rasgele örnekleme varsayımı altında sonuçların güvenilirliğinin nasıl etkilendiğini incelemiştir. Tıp bilimlerinde ve sosyal bilimlerde sık kullanılan karmaşık örnekleme planları ile elde edilen verilere basit rasgele örnekleme formüllerinin uygulanması ile küme birimleri arasındaki homojenlik, güven aralıklarının oluşturulmasında büyük hatalara yol açabilecektir. Kish, bu çalışmasında (gerçek standart hata/basit rasgele örnekleme standart hatası) oranının değerlerine göre güven sınırlarındaki yanlış kullanımı vermiştir. İyi düzenlenmiş örnekleme planlarında bu oran 1 ile 2 arasında değişir. Bu durumda bile basit rasgele örnekleme formüllerinin yanlışlıkla kullanımı, araştırmacının kullanmayı düşündüğü 0.05 yanılma düzeyi yerine 0.164 ($\sqrt{D.E.}$ = 2 olduğunda) yanılma düzeyi kullanmasına yol açacaktır.

Kümelemenin etkisi, aynı sayıda birim içeren basit rasgele örneklemin varyansından artış cinsinden düşünüldüğünde (gerçek varyans/basit rasgele örneklem varyansı) = [1 + roh(b-1)] olarak tanımlanmıştı. $\bar{b}$, örneklemdeki kümelerin içerdikleri birim sayısıdır. Pratikte, her kümede eşit sayıda birim içeren kümelerin oluşturulması pek olanaklı olmadığından $\bar{b}$ ortalama küme genişliği olarak ($\bar{b} = \frac{n}{a}$) kullanılabilecektir.

Kish, bu çalışmasında "Survey Research Centre' ın geçmiş 10 yıllık verilerinden yararlanarak bazı özelliklere ilişkin değişik istatistikler için varyansları hesaplamıştır. Küme içi homojenliği farklı olabileceği düşünülen beş özellik incelenmiştir. Önemli sonuçları olması açısından ilk üç özellik şu şekilde özetlenebilir :

1. Tüketim maddelerine ilişkin davranışlar ve beklentiler
2. Gerçek ve istenen çocuk sayısı; aile planlaması hakkında düşünceler
3. Seyahat alışkanlıkları; ne sıklıkla seyahat edildiği ve ulaşım araçları içerisindeki tercihler.

Bu özelliklerin incelenmesinde, tek aşamada küme örneklemesinden çok aşamalı örnekleme yöntemlerine kadar değişik yöntemler kullanılmıştır. Örneğin birinci özellikle ilgili olarak, üç aşamalı örnekleme yöntemi ile aile reisleri örneklenmiş ve örneklemin tamamına dayalı ve altsınıflara ilişkin 144 tane istatistik hesaplanmıştır. Bu 144 istatistiğe ilişkin elde edilen (gerçek varyans/basit rasgele örnekleme varyansı) oranları 1 ile 1.8 arasında değişmektedir. Bu nedenle gerçek standart hata da aynı sayıda birim içeren basit rasgele örnekleminkinden $\sqrt{1.8} = 1.34$ kadar büyük olabilecektir. Kullanılması gereken formülün kullanılmayıp yerine basit rasgele örnekleme formüllerinin kullanımı da, 1.96 lık doğru aralığın kullanılmayıp $1.96/1.34 = 1.46$ lık bir aralığın kullanılmasına neden olacaktır. Sonsuz serbestlik derecesinde $P(T > 1.46) = 0.14$ olduğundan, kullanılmak istenen 0.05 lik güven düzeyi yerine 0.14 lük bir güven düzeyi kullanılmış olacaktır.

Bu araştırmanın önemli bir yanı da, bazı analitik istatistiklere ilişkin varyans kestirimlerinin, betimsel istatistiklere ilişkin varyans kestirimlerine benzer davranış gösterebileceklerini ilk kez ortaya atmasıdır. Bu, özellikle son yıllarda yapılan çok amaçlı örnekleme planlarında sık sık kullanılmaktadır (Zarkovich, S.S., 1979).

Alt sınıflar ikişerli ikişerli karşılaştırıldıklarında ve iki ortalama arasındaki farklılığa ilişkin varyans hesaplandığında, (gerçek varyans/basit rasgele örnekleme varyansı) oranı, tek tek ortalamalara ilişkin olan orana benzer olmaktadır.

Örneğin 1.özelliğe ilişkin alt sınıflar arası yapılan karşılaştırmalarda gerçek varyansın basit rasgele örnekleminkinden en fazla 1.8 kat daha fazla olduğu gözlenmiştir.

İkinci özellik için de alt sınıflar arası farklar için hesaplanan varyans kestirimleri tek, tek ortalamalara ilişkin varyans kestirimlerine benzer etki göstermişlerdir. Bu özellikle ilgili olarak hesaplanan 48 ortalama ve orana ilişkin (gerçek varyans/basit rasgele örnekleme varyansı) oranı 1 ile 2.5 arasında değişmektedir. Alt sınıf çiftleri arası farklara ilişkin oran da aynı aralıkta değişmektedir.

Üçüncü özellik, küme içi yüksek homojenliğin doğuracağı sonuçları vermektedir. Her hanede ortalama 2.1 kişi olduğu gözönüne alınırsa yüksek kümeleme etkisi ortaya çıkacaktır. Çünkü aynı hanede yaşayan kişilerin seyahat alışkanlıkları çok benzerdir. Bunedenle de düzen etkisi (gerçek varyans/basit rasgele örnekleme varyansı oranı)6'ya kadar çıkabilmektedir. Oysa, her haneden bir kişi alındığında kümeleme etkisi en fazla 2.5 kadar olabilmektedir.

1950'li yılların sonlarında bu sorunları önlemek amacıyla bazı yollar önerilmiştir. Bunları şöyle özetleyebiliriz :

1. Eğer basit rasgele örnekleme düzeni varyans hesaplamalarında yeterince kolaylık sağlıyorsa araştırıcı, seçim ve ölçüm maliyetlerindeki bazı artışlara katlanarak

birimleri basit rasgele örnekleme yöntemi ile seçebilir.

2. Seçim işlemi, varyansın ve diğer gerekli istatistiklerin basit kestiricilerini verebilecek biçimde özel olarak düzenlenebilir.

Bu düşünce daha sonraki yıllardan günümüze kadar giderek önem kazanarak çok değişik uygulama alanları bulmuştur. Bu düşünce birkaç örnekle açıklanabilir : (a) Örneklemin tümü, belirli sayıda bağımsız tekrarlara bölünmüş gibi düşünülür. Bu tekrarların herbiri, incelenen değişkene ilişkin bağımsız kestirim verir. Bunların karşılaştırılmaları (farkları), tüm örneklemin varyansının birer kestirimini verir. Örneğin, aynı örneklemden bağımsız ve aynı olasılıksal örnekleme yöntemi ile seçilmiş 10 tane alt örneklem olduğunu düşünelim. Alt örneklem ortalamaları $\bar{y}_i$ olarak gösterilirse, tüm örneklemin ortalaması $\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \bar{y}_i$ olur ve $\bar{y}$ nın varyansı,

$$\mathrm{var}(\bar{y}) = \frac{1}{10}\,\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (\bar{y}_i-\bar{y})^2$$ olarak verilir.

(b) Eğer örneklem, genişlikleri eşit ya da hemen hemen eşit ve birbirinden bağımsız seçilmiş kümelerden oluşuyorsa oldukça basit yöntemler bulunabilir. Eğer doğal kümelerin genişlikleri birbirlerinden çok farklılaşıyorsa, kümeler genişliğe orantılı olasılıkla seçildikten sonra eşit genişlikte alt örneklemler yaratılabilir. (c) Diğer bir düşünce Nathan Keyfitz tarafından ortaya atılmıştır (Keyfitz, N., 1953). Bu yöntem her tabakadan iki seçim yapılması esasına dayanmaktadır.

Bugün de yaygın olarak kullanılan örnekleme planı, her tabakadan iki kümenin seçildiği örnekleme planıdır. Bu yöntemde varyans $(y_{h1}-y_{h2})^2$ değerlerinden hesaplanır. Burada y_{h1} ve y_{h2} h. tabakadan yapılan iki seçimin örneklem değerleridir.

3. Birçok istatistiğin varyansı için iyi yaklaşım sağlayabilecek genel bir yöntemin araştırılması. Özellikle analitik istatistikler için böyle bir genel yöntemin gerekliliği, bugün sıklıkla kullanılan "Dengeli Tekrarlanan Tekrarlar" yönteminin temelini oluşturmuştur. Örneğin, bir u kestiriminin varyansının hesaplanmasının istendiğini düşünelim. Örneklem planının tüm karmaşıklığını yansıtacak biçimde örneklemin yarısı seçilir. Çok aşamalı örnekleme planları için bu, tüm örneklemi oluşturan tabakaların her birinden, ilk örnekleme birimlerinin yarısını rasgele seçmek anlamına gelir. Her tabakadan iki seçimin yapıldığı "ikili seçim yöntemi" nde iki kümeden rasgele biri seçilir. Bundan sonra aynı kestirici yarım örnekleme (örneklemin yarısına) dayanılarak hesaplanır. Bu da $u_{1/2}$ ile gösterilsin. $(u_{1/2}-u)^2$ u nun varyansının yansız bir kestiricisidir. Bu, bir tek farklılığa dayandığından büyük örnekleme hatası içerecektir. Bunu giderebilmek için, her tabakadan farklı ilk örneklem birimleri alınarak farklı yarım örneklemler oluşturulur ve birçok kestirim elde edilir. Bunların ortalaması u nun varyansının bir kestirici olarak kullanılır. Bu yolla karmaşık örnekleme planları için güven aralığıda güvenilir bir biçimde oluşturulur. Böyle bir yöntemin geçer-

liliği 1950'li yılların sonlarında öncelikle betimsel istatistiklere ilişkin varyans kestirimlerinde daha sonra dan da analitik istatistiklere ilişkin varyans kestirimlerinde denenmeye başlanmış ve günümüze kadar birçok araştırmacı tarafından güvenilirliği incelenmiştir (Kish, L. ve I.Hess, 1959).

2.4. Sorunu Önleme Yolları

Karmaşık Örnekleme Düzenlerinde Örnekleme Hatasını Hesaplama Yöntemleri

Karmaşık örneklemlere ilişkin örnekleme hatalarını kestirmek için temel yöntem ilk kez basit tekrarların kullanılması ile Mahalanobis tarafından verilmiştir (Mahalanobis, P.C., 1944). Eğer örneklem, her biri aynı örnekleme tekniğine sahip kendi içerisinde bağımsız alt örneklemlere ya da tekrarlara bölünürse, bu alt örneklemlerin herbiri ilgilenilen parametrenin geçerli birer kestirimini verecektir. Örneğin, örneklem c tane bağımsız tekrara bölünmüş ise ve $\bar{y}_i$, i. tekrardan elde edilen örneklem ortalamasının bir kestirimi ise, tüm tekrarlar üzerinden ortalamanın bir kestirimi

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{c} \bar{y}_i / c$$

ve bunun kestirilen varyansı

$$\text{var}(\bar{y}) = \frac{1}{c(c-1)} \sum_{v=1}^{c} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

ile verilebilir. Bu şekilde tekrarların (alt-örneklemlerin) kullanılması, örnekleme planının karmaşıklığına bağlı olmaksızın varyansı kestirmede kolay ve uygun bir yöntemdir. Aynı yaklaşım, diğer karmaşık örnekleme düzenlerinde, örneklem hatasının kestirimi için kullanılabilmektedir. Örneğin, bir tabakadan bağımsız seçilmiş her ilk örneklem birimi o tabaka için uygun bir kestirim sağlamakta ve tabakalar içinde ilk örneklem birimleri arasındaki değişkenliğin ölçüsü de örneklem varyansının bir kestirimini vermektedir. Örnekleme düzeni, ve herbir ilk örneklem birimi içerisindeki seçim karmaşık olabilir ve bir ilk örneklem biriminden diğerine değişebilir. Ancak bu, varyans kestiriminin biçimini etkilemez. Bu yöntem, tüm aşamaların varyansa katkısını gözönüne alır. Gerçekte, birinci aşamadan sonraki aşamalar formülde açık olarak belirtilmez. Bunun nedeni de, daha sonraki aşamaların varyansa katkılarının birinci aşama birimleri arasındaki gözlenen değişkenlikte içerilmesidir (Kalton, G., 1977).

Burada gereksinim duyulan varsayımlar : (1) her tabakadan en az iki ilk örneklem biriminin seçilmiş olması, (2) bu seçimlerin birbirlerinden bağımsız, rasgele ve yerine koyularak yapılmış olmasıdır.

Kitlenin belirli sayıda tabakaya bölündüğü, ve her tabakadan ilk örneklem birimlerinin bağımsız, rasgele ve yerine koyularak çekildiği ve çekilen her ilk örneklem biriminden bir alt örneklemin çekildiği, böylece son örnekleme birimlerinden oluşan bir örneklemin elde edildiğini düşünelim.

y_{hij}, h. tabakadan, i. ilk örneklem birimindeki j. son örnekleme biriminin değeri ve w_{hij} de bu birime ilişkin ağırlık (eşit olmayan olasılıkla seçim yapılıyorsa bunun etkisini gidermek için kullanılacaktır) olduğunda,

$$y_{hi} = \sum_j y_{hij} \cdot w_{hij}$$

i. ilk örneklem biriminden seçilen örneklem için toplamın kestirimi,

$$y_h = \sum_i y_{hi}$$

tabaka toplamının kestirimi ve

$$y = \sum_h y_h$$

örneklem toplamıdır. Toplamların varyansı da şöyle kestirilir.

$$\begin{aligned} \text{var}(y_h) &= \frac{a_h}{a_h - 1} \cdot \sum_i \left(y_{hi} - \frac{y_h}{a_h}\right)^2 \\ &= \frac{a_h}{a_h - 1} \left(\sum_i y_{hi}^2 - \frac{y_h^2}{a_h}\right) \end{aligned} \qquad (2.4.1)$$

ve

$$\text{var}(y) = \sum_h \text{var}(y_h)$$

dir. Burada a_h, h.tabakadan seçilen ilk örneklem birimi sayısıdır.

Bu tür bir örnekleme planında oranlar için, iki oran arasındaki fark için ve oranların diğer doğrusal kombinasyonları için varyans kestirimleri Verma tarafından verilmiştir (Verma, V., 1982).

Bu basitleştirilmiş varyans kestirimi yöntemi, ilk örneklem birimlerinin yerine koyarak çekildiği varsayımını gerektirdiği halde yerine koymadan yapılan seçimler için sonlu kitle düzeltme faktörü'nün (2.4.1) denklemine eklenmesi ile iyi bir yaklaşım sağlanabilir.

Bu önerilen basit varyans kestirim yöntemi oldukça esnek bir yöntemdir. Her tabakadan bir ilk örneklem birimi seçildiğinde de uygulanabilirliği gösterilmiştir (Verma, V., C. Scott ve C.O. Muircheartaigh, 1980). Bu durumda varyans kestiriminin yapılabilmesi için gerçekte var olan tabakalar ikişerli olarak birleştirilmiş gibi düşünülüp, yapay olarak elde edilen tabakalardan iki tane bağımsız ilk örneklem birimi seçilmiş gibi işlem yapılır. Yalnız bu birleştirme işleminde birbirine benzer tabakaların birleştirilmesi gerekmektedir.

Bu yöntemin sağladığı bir kolaylık da, çok fazla sayıda ilk örneklem birimi olduğu durumda ve herbir ilk örneklem biriminden küçük örneklemler alındığında ekonomik olması ve uygulama kolaylığı açısından ilk örneklem birimlerinin gruplandırılmasına olanak sağlamasıdır. Bu durumda, ilk örneklem birimlerinin gruplandırılması rasgele olarak yapılmalıdır. Bunun nedeni, elementlerin rasgele gruplandırılması ile oluşturulan kümelerin küme içi korelasyon katsayılarının sıfır olması (roh = 0) beklendiği içindir. Böyle olunca, hesaplanan varyansın beklenen değeri, basit rasgele örneklemeninki ile yaklaşık aynı olacaktır (D.E. = 1).

Dünya Doğurganlık Araştırması'nın bazı ülkelerde uygulanması bu yolla yapılmıştır. Kırsal bölgelerden örneklemler çok aşamalı örnekleme yöntemi ile seçilmiştir. Kentsel bölgelerden hane halkları tek aşamalı rasgele örnekleme de seçilmiştir. Tüm örnekleme ilişkin örnekleme hatasının hesaplanabilmesi için kentsel bölgeden örnekleme giren hane halkları rasgele olarak gruplandırılarak kırsal bölgedeki gerçek kümelerin genişliğine yakın genişlikte yapay kümeler oluşturulmuştur (Verma, V., 1980).

2.5. Analitik İstatistikler İçin Örnekleme Hataları

Bilinen istatistiksel çıkarsama yöntemleri, birimlerin basit rasgele olarak çekildiği varsayımına dayanmaktadır. Eğer basit rasgele örnekleme yöntemi kullanılıyorsa ve kestirim bir ortalama, bir oran ya da toplam ise (betimleyici istatistik ise) örneklem genişliği yeterince büyük olduğunda

1. Kitle parametresinin örneklem kestiriminin yansız ($\hat{\theta} = E(\theta)$) olduğu
2. Bu kestirimin varyansının yaklaşık yansız bir kestiriminin örneklemden hesaplanabileceği,
3. Örneklem kestiriminin kendi beklenen değeri ile farkının kestirilen standart hataya oranının t dağılımına uyacağı

varsayımları sağlanacaktır (Cochran, W.G., 1963, Hansen, M.H., W.H. Hurwitz ve W.G. Madow, 1953). Bu varsayımlar çıkarsamalarda gereksinim duyulan varsayımlardır.

Ancak tüm örneklemler büyük olmayabilir. Bundan başka daha ekonomik olması açısından ve uygulama kolaylığı bakımından örneklem araştırmalarında basit rasgele örnekleme planından uzaklaşılır. Bunlara ek olarak bir de betimleyici istatistiklerin yanısıra kitledeki bazı ilişkilerin incelendiği analitik istatistiklerin kullanımı sözkonusu olursa yukarıda tanımlanan varsayımların geçerliliği iyice tartışma konusu olmaktadır (Kish, L., 1965).

İster betimleyici istatistikler için olsun, isterse analitik istatistikler için olsun örnekleme planının karmaşıklığına bağlı olarak varyans kestirimleri de karmaşıklaşmaktadır.

Son yıllarda, örnekleme planlarının karmaşıklığı ile birlikte çok amaçlı örnekleme araştırmalarının gündeme gelmesi daha kolay hesaplanabilen, çabuk ve yansız sonuçlar verebilen örnekleme hatası hesaplama yollarının araştırılmasını zorunlu kılmıştır. Çok amaçlı örnekleme araştırmalarında incelenen değişkenlerin sayısının çok fazla olması, bu değişkenlerin hepsi ya da bir kısmı arasında ortalamalar arası farklılıkların incelenmesi, bu değişkenler arasında kurulabilecek çok sayıdaki regresyon modellerinde regresyon katsayılarının, çoklu regresyon katsayılarının, korelasyon katsayılarının incelenmesi, ve bunlar hakkında çıkarsama yapılabilmesi,tüm bu istatistiklerin örneklem dağılımları hakkında bilgi gerektirir. Karmaşık örnekleme planlarının kullanılması ile çıkarsamanın temel varsayımları kuşkulu olabilir (Mc Carthy, P.J. 1966,b).

Analitik istatistikler için kestirim yöntemleri ve kestirimlerin standart hatalarının örneklemden hesaplanması uzun yıllardan beri incelenmektedir. Karmaşık örneklemlerden elde edilen analitik istatistiklerle ilgilenen yöntemlere gereksinim de git gide artmaktadır. Çıkarsama işlemleri için hem örneklemin seçim yöntemini ve hem de kestiricileri karmaşıklık düzeylerine göre üçe ayırıp incelemek olasıdır.

	İ S T A T İ S T İ K L E R		
SEÇİM YÖNTEMLERİ	I Tüm örnekleme ilişkin ortalama ve toplamlar	II Alt sınıflara ilişkin ortalamalar ve ortalamaların farkları	III Analitik istatistikler (Regresyon katsayıları gibi)
A Birimlerin basit rasgele seçimi	Uygun yöntemler var.	Uygun yöntemler var.	Uygun yöntemler var.
B Birimlerin tabakalı seçimi	Uygun yöntemler var.	Uygun yöntemler var.	Yöntemler kuramsal olarak yeterince açık değil.
C Karmaşık küme örneklemesi	Uygun yöntemler var.	Uygun yöntemler var.	Yöntemler kuramsal olarak zor, varsayımlar şüpheli. Taylor açılımı, Dengeli Tekrarlanan Tekrarlar, Jackknife Tekrarlanan Tekrarlar yöntemleri önerilmekte.

Bu tablodan görüldüğü gibi Kish ve Frankel (1974) asıl ilgi alanının (C,III) gözesi olduğunu vurgulamışlar ve bu konuda daha ileri çalışmalar gerektiğini belirtmişlerdir.

Analitik, istatistiklerin varyanslarının hesaplanmasında önerilen yöntemler Taylor açılımı yöntemi, dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi, Jack-knife tekrarlanan tekrarlar yöntemleridir. Son iki yöntem örneklemin tümünden rasgele olarak çekilen alt örneklemleri (tekrarlar) hesaplamalarda kullanırlar.

Burada hatırlanması gereken bir nokta da, bir örneklemden elde edilecek varyans kestirimlerinin kendilerinin değişkenlik göstereceğidir. Bu nedenle de, tek, tek sonuçların doğruluğuna güvenmemek gerekir. Frankel'in (1971)'de belirttiği gibi bu tür varyans kestirimlerinin doğruluğu, bu konuda yapılacak değişik örnekleme planları kullanan, farklı değişkenler üzerinde yürütülen çeşitli büyüklükteki örneklem sonuçlarının benzerliği ile gösterilebilecektir.

Varyans kestirimlerinin doğruluğunun incelenmesi oldukça karmaşık bir konudur. Büyük örneklemler için ve küme genişliklerinin yaklaşık aynı olduğu düzenler için varyans kestiriminin değişim katsayısının,

$$\text{değişim katsayısı} = \sqrt{2/\text{s.d.}}$$

olması istenir (Kish, L., 1965). Burada, s.d. (serbestlik derecesi) ilk örneklem birimi sayısından tabaka sayısının çıkarılması ile bulunur. Temel olarak alınan örnekleme planı her tabakadan iki ilk örneklem biriminin çekildiği ikili seçim yöntemi olduğundan

$$\text{s.d.} = (2H-H) = H$$

olarak yazılabilir. Burada H, tabaka sayısıdır. Buna göre

$$\text{değişim katsayısı} = \sqrt{2/H}$$

olacaktır. Basit olarak söylemek gerekirse 50 tabakadan 100 ilk örneklem biriminin çekildiği bir örnekleme planı için varyans kestiriminin değişim katsayısının

$$\text{değişim katsayısı} = \sqrt{2/50}$$

$$= 0.2$$

yi aşmaması istenir.

Karmaşık örnekleme planlarında betimleyici istatistiklerden analitik istatistiklere (örneğin ortalamalardan regresyon katsayılarına) geçildiğinde temel varsayımların iyice şüpheli olacağı vurgulanmıştı.

$$X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki})^T$$

ve

$$B = (B_1, B_2, \ldots, B_k)^T$$

olduğunda regresyon modeli,

$$Y_i = B^T X_i + \varepsilon_i$$

olarak yazılabilir. Bu regresyon modelinin varsayımları

1. Doğrusallık : $E(\varepsilon_i / X_i) = 0$ tüm i'ler için
2. Eş varyanslılık : $var(\varepsilon_i / X_i) = \sigma^2$ tüm i'ler için
3. Gözlemlerin bağımsızlığı : $cov(\varepsilon_i \varepsilon_j / X_i, X_j) = 0$ tüm $i \neq j$ için
4. Normallik : ε_i'ler normal dağılırlar.

(1), (2) ve (4) varsayımları modelin kurulduğu kitle ile ilgili iken, (3) bu kitleden örneklemlerin bağımsız çekilmiş olmasını gerektirir. Yani, karmaşık seçim yönteminin temel etkilerini gösterebilecek (3) nolu varsayımın sağlanamadığı bir kitle modeline gereksinim vardır. Kümeleme yöntemi, hatalar arasında pozitif korelasyon yaratma eğilimindedir, ve bu bazan önemli sonuçlardoğurabilir (Kish, L. ve M.R. Frankel, 1974). Elementler arası korelasyonlar, büyük örneklemlerden elde edilen birinci-derece istatistiklerin ilgili parametrelere yaklaşımını engellemez. Burada, birinci derece istatistik ile anlatılan,kitle dağılımının parametrelerinin kestirimleridir (ortalama, toplam, regresyon katsayısı vb.).

Diğer taraftan, ikinci derece istatistikler, birinci derece istatistiklerin değişkenlik ölçülerini (varyans, standart hata gibi) **tanımlarlar**. Bunlar ikinci derece parametreleri kestirirler, $E[y-E(y)]^2$ gibi, ve elementler arası korelasyondan etkilenirler (Kish, L., Namboodiri, N.K., ve Pillai, R.K., 1962).

Karmaşık örnekleme planlarında analitik istatistiklerin yanlılık açısından incelenmesi Frankel (1971) tarafından yapılmıştır. Kish ve Frankel'in (1974) belirttikleri gibi bu konuda kuramsal dayanak bazı durumlarda çok karmaşık, hatta bazı durumlarda yoktur. Bu nedenle çıkarsamalar büyük ölçüde gözlemsel sonuçlara dayandırılmak zorundadır. Bunun için araştırıcılara bu konuda değişik örnekleme planları ile değişik istatistiklerin kullanılması ve sonuçların birbirini destekleyip desteklemediklerinin araştırılması önerilmektedir.

Frankel (1971) 5 farklı kestirim için; oran, basit korelasyon regresyon katsayıları, kısmi korelasyonlar ve çoklu korelasyonlar için yanlılığı değişik örnekleme planlarında (6 tabakadan 12 ilk örneklem birimi olacak biçimde 300 ayrı örneklem, 12 tabakadan 24 ilk örneklem birimi olacak biçimde 300 ayrı örneklem ve 30 tabakadan 60 ilk örneklem birimi olacak biçimde 200 ayrı örneklem) çok küçük bulmuştur. Örneklem genişliği arttıkça yanlılık da azalma göstermiştir.

Küçük yanlılığa ek olarak, aynı çalışmada karmaşık örnekleme planlarından elde edilen analitik istatistiklerin normalliğe yaklaşımının küçük örneklemlerde bile iyi olduğu ve bunun örneklem genişliği arttıkça iyileştiği gösterilmiştir.

Örnekleme giren elementler arasındaki ilişkinin, birinci derece istatistiklerin kitlesel değere yaklaşımları için önemli bir etki sağlamadıkları ancak ikinci derece istatistikler için bu ilişki ile birlikte kitlesel değere yaklaşımın yavaşladığı belirtilmişti. Bu yavaşlamanın miktarı düzen etkisi :

D.E. $= [1 + roh(\bar{b}-1)]$ ile tanımlanmaktaydı.

Analitik istatistiklerin varyansı üzerine düzenin etkisi Kish ve Frankel (1970) ve Frankel (1971) tarafından incelenmiştir. İstatistik kuramının bu noktada yetersizliği ve sonuçların gözlemsel olarak çıkartılma zorunluluğu Kish ve Frankel (1970) tarafından vurgulanmıştır. Bu çalışmada düzen etkisinin ortalamalar için en büyük olduğu, analitik istatistikler için düzen etkisinin küçüldüğü ve tabaka sayısının artması ile düzen etkisinin de arttığı gözlemlenmiştir. Araştırma sonuçları bir kaç noktada şöyle özetlenebilir :

1. Tüm istatistikler için standart hataların hesaplanması ya da yeterince doğru hesaplanması çok zordur. Bu nedenle akla yatkın varsayımlar araştırıcılara daha yararlı olacaktır.

2. b, karmaşık bir örnekleme yöntemi ile elde edilen analitik istatistiği gösterdiğinde D.E. (b) $>$ 1 dir. Bu nedenle de basit rasgele örneklem varsayımına dayalı standart hatalar analitik istatistiklerin standart hatalarını olduğundan az kestirirler.

3. D.E.(b) $<$ D.E.($\bar{y}$)

4. D.E.(b), D.E.($\bar{y}$) ya bağlıdır. D.E.($\bar{y}$) sı yüksek olan değişkenler için D.E.(b) da yüksek olma eğilimindedir.

2.5.1. Analitik İstatistiklere İlişkin Örnekleme Hatasının Hesaplanmasında Önerilen Yöntemler

Tabakalı küme örneklemesinin kullanıldığı örnekleme düzenleri için örnekleme hatalarının hesaplanmasında en yaygın olarak kullanılan dört yöntem

1. Taylor açılımı yöntemi
2. Dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi
3. Jack-knife dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi
4. Örnekleme hatası bilinen bir değişkenden yararlanarak diğer değişkenlere değer sağlama (inputing ya da portability) yöntemi.

İlk üç yöntem arasında dengeli tekrarlanan tekrarlar yönteminin diğerlerine göre üstünlüğü bazı araştırıcılar tarafından gösterilmeye çalışılmıştır (Kish, L. ve M.R. Frankel, 1974; Frankel, M.R., 1971). Dördüncü yöntem ise 1980 li yıllarda uygulanmaya başlanmıştır. Uluslararası İstatistik Enstitüsü'nün yürüttüğü Dünya Doğurganlık Araştırması'nda (Word Fertility Survey) bu yöntemin, standart hataların hesaplanmasında güvenilirlikle kullanılabilebileceği gösterilmeye çalışılmaktadır. Bu konuda çalışmalar halen sürdürülmektedir.

2.5.1.1. Taylor Açılımı Yöntemi

Analitik istatistiklerin varyanslarının hesaplanmasında Taylor açılımı yöntemi birçok araştırıcı tarafından incelenmiştir (Tepping, B.J., 1968; Woodruff, R., 1971; Woodruff, R. ve B.Causey, 1976). Bu yöntem, birinci-derece kestirimin Taylor serisine açılımının birinci dereceden terimlerinin varyansına dayalı olarak varyansı kestirmede kullanılır.

g(Y), birinci derece kestirim, g(y) ile kestirilmek istenen parametre olsun. g(y) nin g(Y) etrafında Taylor açılımının birinci derece terimlerini düşünürsek

$$\text{var}\{g(y)\} = (1-f) \sum_h \{ \sum_i \frac{\partial g(Y)}{\partial Y_i} y_{ih1} - \sum_i \frac{\partial g(Y)}{\partial Y_i} y_{ih2} \}^2$$

yazılabilir. Bu yazılım, her tabakadan iki seçimin yapıldığı düzen içindir. Yani,

$$y_i = \sum_h \sum_a y_{iha} \text{ dır ve } h = 1,2,\ldots,H \text{ ve } a = 1,2 \text{ dir.}$$

$\partial g(Y)/\partial Y_i$ bilinmediğinden eldeki örneklemden kestirilmesi gerekir. Bunun için $\partial g(y)/\partial y_i$ değerleri kullanılır (Keyfitz, N., 1957).

Örneğin Z gibi bir kestiricinin varyansının kestirilmesi istendiğini düşünelim. Z, Z_k (örneğin örneklem toplamı) gibi doğrusal kestiricilerin bir fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$\text{var}(Z) = \text{var}(\sum_k d_k . Z_k)$$

olacaktır. Burada d_k, Z nin Z_k ya göre kısmi türevidir, yani,

$$d_k = \frac{\partial Z}{\partial Z_k}$$

dir. Gösterim için $Z = Z_1/Z_2$ (iki örneklem toplamının oranı) alınırsa

$$d_1 = \frac{\partial Z}{\partial Z_1} = \frac{1}{Z_2} \quad , \quad d_2 = \frac{\partial Z}{\partial Z_2} = - \frac{Z_1}{Z_2^2}$$

olur. Buradan,

$$var(Z) = var(d_1 Z_1 + d_2 Z_2)$$

elde edilir.

2.5.1.2. Dengeli Tekrarlanan Tekrarlar Yöntemi

Tekrarlanan tekrarlar (repeated replications) yaklaşımı Mahalonobis'in (1944) tekrar tekrar örnekleme alma kavramından esinlenilerek Deming (1956) tarafından geliştirilmiştir. Daha sonraları Mc Carthy (1966 a), Kish ve Frankel (1970) bu yönteme daha da işlerlik kazandıracak kolaylıklar getirmişlerdir.

Dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi standart hataların hesaplanması için genel bir yöntemdir. Bu yöntem özellikle istatistiksel dağılım kuramının yanıt veremediği durumlarda ve kümelemenin gözlemlerin bağımsızlığını bozduğu karmaşık örnekleme planlarına dayalı analitik istatistikler için kullanılabilmektedir (Kish, L. ve M.R. Frankel 1970).

Temel yöntemi, her tabakadan iki ilk örneklem biriminin çekildiği tabakalı küme örneklemesi olarak düşünelim. Her tekrar bir yarım örneklemdir ve her tabakadan bir ilk örneklem biriminin rasgele seçilmesi ile oluşturulur. Bu yöntemi kısaca şöyle açıklayabiliriz :

S tüm örneklemi göstersin,

H_i, her tabakadan örnekleme seçilen iki ilk örneklem biriminden, rasgele bir tanesinin alınması ile elde edilen i. yarım örneklemi (tekrarı) göstersin,

C_i, S de olup H_i de olmayan ilk örneklem birimlerinin oluşturduğu i.tümleyen yarım örneklemi göstersin.

Eğer k tane $(H_1, H_2, \ldots, H_k)$ yarım örneklem ve bunlara karşılık gelen k tane de $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ tümleyen yarım örneklem oluşturulursa, birinci dereceden bir kestirimin, f(S) nin, varyansının kestirimi dört yolla yapılabilir (Frankel, M.R., 1971) :

I.KESTİRİM : Yarım örneklem-tüm örneklem

$$var_I [f(s)] = \frac{1-f}{k} \sum_{i=1}^{k} [f(H_i) - f(S)]^2$$

II.KESTİRİM : Tümleyen yarım örneklem-tüm örneklem

$$var_{II} [f(s)] = \frac{1-f}{k} \sum_{i=1}^{k} [f(C_i) - f(S)]^2$$

III.KESTİRİM : I.KESTİRİM ile II.KESTİRİM'in ortalaması

$$var_{III} [f(s)] = \frac{var_I [f(S)] + var_{II} [f(S)]}{2}$$

IV.KESTİRİM : Yarım örneklem-tümleyen yarım örneklem

$$var_{IV} [f(s)] = \frac{1-f}{4k} \sum_{i=1}^{k} [f(H_i) - f(C_i)]^2$$

Yarım örneklem H_i'yi ve bunun tümleyen yarım örneklemi C_i yi oluşturan ilk örneklem birimlerini seçmek için bir çok yöntem vardır. H tane tabakadan 2H tane ilk örneklem biriminin elde edildiği ikili seçim yönteminde en yüksek duyarlılık, mümkün olan 2^{H-1} tane yarım örneklem çifti (H_i ve C_i) seçmekle elde edilebilecektir. Ancak Mc Carthy' nin önerdiği yöntemle, gerekli olan tekrar sayısı azalmaktadır (Mc Carthy, 1966 a ve 1966 b). Daha önceleri eldeki örneklemden tekrar tekrar örnekleme çekme işlemi, Mc Carthy' nin önerdiği "tam dik dengeli" (full-orthogonal balance) yöntem ile "dengeli tekrarlanan tekrarlar" (balanced repeated replication) yöntemi adını almıştır. Bu yöntem şu adımları izler :

1. H tane tabakanın her birindeki iki ilk örneklem birimine rasgele olarak 1 ve 2 sayıları verilir.

2. Tekrar sayısı (yarım örneklem ve tümleyen yarım örneklem) k, tabaka sayısı H den büyük 4 ile tam olarak bölünebilen en küçük sayı olacak biçimde seçilir.

3. Elemanları +1 ve -1 olan kxH boyutlu bir M matrisi oluşturulur öyle ki,

$$\sum_{i=1}^{k} m_{ij}.m_{ij'} = 0 \text{ tüm } j \neq j' \text{ için}$$

4. i. yarım örneklemde, H_i de,

$$m_{ij} = \begin{cases} +1 \text{ ise j.tabakadaki 1 no'lu ilk örneklem} \\ \text{birimi örnekleme alınır.} \\ -1 \text{ ise j.tabakadaki 2 no'lu ilk örneklem} \\ \text{birimi örnekleme alınır.} \end{cases}$$

Örneğin 6 tabakanın kullanıldığı bir örnekleme planı için, dengeli tekrarlanan tekrarlar kestirimi elde etmede kullanılacak tekrar sayısı 8 dir. Çünkü 6 dan büyük dört ile tam olarak bölünebilen en küçük sayı sekizdir.

Mc Carthy, dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi ile daha az sayıda tekrar kullanarak, 2^{H-1} mümkün tekrardan elde edilebilecek varyans kestirimine eşit kestirim elde edilebileceğini göstermiştir. Kish ve Frankel'de (1970) 47 tabaka kullanarak yürüttükleri çalışmalarında 48 tekrar kullanarak, tüm tabakalardan elde edilecek doğruluğu elde ettiklerini göstermişlerdir.

2.5.1.3. Jack-knife Tekrarlanan Tekrarlar Yöntemi

Bu yöntem bir tekrarı, (bir tabakanın yarısı) + (örneklemin geri kalan kısmı) olarak alır ve her tekrarda bir tabakanın varyansa katkısını ölçer. Dengeli tekrarlanan tekrarlar yönteminde k tane tekrarın her biri tüm örneklemin varyansını kestirmekteydi (Brillinger, D.R., 1966; Tukey, J.W., 1958).

H tane tabakanın herbirinden iki ilk örneklem biriminin çekildiğini düşünelim.

S, tüm örneklemi;

J_i, (i = 1,2,...,H) i.tabakadaki ilk örneklem birimlerinden biri S den çıkarıldıktan sonra elde edilen tekrarı,

CJ_i, (i = 1,2,...,H) i.tabakadaki ilk örneklem birimlerini değiştirerek (diğer ilk örneklem birimini çıkartarak) S den elde edilen tümleyen tekrarı gösterdiğinde, birinci derece f(S) kestiriminin dört tane jack-knife tekrarlanan tekrarlar kestiricisi şöyle verilmektedir (Frankel, M.R., 1971):

I.KESTİRİM :

$$var_{I}[f(S)] = (1-f) \sum_{i=1}^{H} [f(J_i)-f(S)]^2$$

II.KESTİRİM :

$$var_{II}[f(S)] = (1-f) \sum_{i=1}^{H} [f(CJ_i)-f(S)]^2$$

III.KESTİRİM :

$$var_{III}[f(S)] = \frac{var_{I}[f(S)] + var_{II}[f(S)]}{2}$$

IV.KESTİRİM :

$$var_{IV}[f(S)] = (1-f) \frac{1}{4} \Sigma [f(J_i)-f(CJ_i)]^2$$

Dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi ile yansız varyans kestiricileri elde edilebilmesine karşın jack-knife tekrarlanan tekrarlar yöntemi yanlı kestiriciler sağlamaktadır.

2.5.1.4. Örnekleme Hatası Bilinen Bir Değişkenden Yararlanarak Diğer Değişkenlere Değer Sağlama Yöntemi

Çok amaçlı örnekleme araştırmalarında incelenen değişken sayısının çok fazla olması, standart hataların hesaplanmasında bir başka istatistiğin standart hatasından yararlanma yolunu gündeme getirmiştir.

Kish ve diğerleri (Kish, L., M.R. Groves, K.P. Krotki, 1976) beş ülkenin (G.Kore, Tayvan, Malesya, Peru ve A.B.D.) doğurganlık araştırması sonuçlarına dayanarak böyle bir yöntemin uygulanabilirliğini göstermişlerdir. Her doğurganlık araştırması için 30-40 farklı değişkene ilişkin örnekleme hatası hesaplanmıştır. Her değişken için tüm örnekleme dayalı örnekleme hatası elde edilmiştir. Bunun yanında 24 tane farklı altsınıf için ve 12 altsınıf çiftleri arası farklılık için örnekleme hataları hesaplanmıştır. Böylece her bir doğurganlık araştırması için

(30 - 40)	x	(1	+	24	+	12)
değişken sayısı		tüm örnekleme ilişkin		24 alt sınıfa ilişkin		ikişerli, ikişerli altsınıf arası farklılığa ilişkin

1000 ile 1600 arasında örnekleme hatası hesaplanmıştır.

Her örnekleme hatası hesaplaması varyans ve standart hataların yanısıra düzen etkilerini ve roh değerlerini de içermektedir. Bu çalışmanın amacı ileride yapılacak araştırmalara, örnekleme hatalarının hesaplanması, analizi ve yorumlanması için yol göstermektir. Bu amaca ulaşabilmek için de hesaplanan örnekleme hatalarından bilinmeyen örnekleme hatalarına değer sağlayabilecek yollar önerilmiştir.

Her değişkenin ortalaması için tek, tek örnekleme hatası hesaplamanın, alt sınıflar için ve alt sınıf çiftleri arasındaki farklılıklar için bu hesaplamayı yapmanın uygun olmayacağı ileri sürülmüştür. Bir değişkenin örnekleme hatasından yararlanarak diğer değişkenlere değer sağlamak için gözlemsel (gözleme dayalı) ilişkilerin kullanılabileceği önerilmiştir. Öyle ki, tüm örnekleme ilişkin örnekleme hatasını alt sınıflara ilişkin örneklem hatalarını bulmada ve sonradan da bunları alt sınıf ortalamaları arası farklılık için örneklem hatası bulmada kullanmayı önermişlerdir. Aynı zamanda, bir araştırma içerisinde farklı değişkenler arasında ya da farklı örneklemlerde benzer değişkenler için örneklem hatası değeri sağlama yolları da önerilmiştir. Hesaplanan varyanslardan, değer sağlama sürecinde çok sık kullanılan düzen etkileri ve sınıf içi korelasyonlar elde edilmiştir.

Değişken değerlerinin örneklem kümeleri içerisinde ne derece homojen olduğunu gösteren roh değerleri farklı genişlikteki alt sınıflar için

$$roh = (D.E. - 1)/(\bar{b} - 1)$$

ile hesaplanabilmektedir.

Hesaplanan bir standart hatadan (sh_0), bilinmeyen bir standart hataya (sh_1) gidebilmek için direkt olmayan şu yol önerilmektedir :

Hesaplanan standart hata   değeri bulunacak standart hata

$$\begin{array}{ccc} (sh_0) & & (sh_1) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ \sqrt{D.E.}_0 & & \sqrt{D.E.}_1 \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ roh_0 & \Longrightarrow & roh_1 \end{array}$$

Daha az değişkenlik göstermesi açısından roh değerlerinden yararlanılarak değer sağlama işlemi yapılmaktadır. Standart hata değerleri $\sqrt{D.E.}$ değerlerine dönüştürülmekte, sonra bu roh'a çevrilmektedir. Bundan sonra yeni bir istatistik için roh'a değer sağlayarak bu, yeni bir $\sqrt{D.E.}$ ne çevrilir ve son olarak da istenen standart hataya geçilir. Direkt olarak sh_0 dan sh_1 e geçiş genellikle başarılı olmaz. Bir istatistik için hesaplanan standart hata değeri yalnız benzer örnekleme teknikleri ile elde edilen yaklaşık olarak aynı alt sınıf genişliğine dayalı benzer istatistiklere değer sağlamak için kullanılabilirler. Aynı şekilde $\sqrt{D.E.}_0$ dan $\sqrt{D.E.}_1$ e geçiş de zordur. Bunun da nedeni farklı alt sınıflar için örneklem genişliklerindeki ve küme genişliklerindeki farklılıktır. Bununla birlikte düzen etkileri standart hatalara oranla değer sağlamada daha güvenilirlikle kullanılabilirler. Bunlar yaygın bir biçimde $sh_{BRÖ}$ $(\bar{y})$ yı belirli bir örnekleme planı için $\sqrt{D.E.}$ x $sh_{BRÖ}(\bar{y})$ biçiminde düzeltmek amacıyla da kullanılırlar (Kish, L., R.M. Groves, K.P. Krotki, 1976).

Indisler farklı değişkenleri gösterdiğinde $\sqrt{D.E._0} = \sqrt{D.E._1}$ kabul edebiliriz. Bu, $sh_1 = sh_0$ ya da $sh_1 = sh_{BRÖ}$ kabul etmekten çok daha akılcıdır. Ancak, bu varsayımda bazan yanlış kullanılabilmektedir. Aynı araştırmada, çoğu istatistikler genişlikleri değişebilen alt örneklemlere dayanmaktadır. Eğer $\sqrt{D.E._0}$ tüm örneklemden hesaplanmışsa, aynı değişken için bir alt sınıfa dayalı $\sqrt{D.E._1}$ daha küçük olacaktır. Alt sınıflar için düzen etkileri örneklem genişliği ile azalacaktır, ve tüm örneklemden hesaplanan $\sqrt{D.E.}$ değerlerini kullanmak alt sınıflar üzerinde düzenin etkisini olduğundan çok fazla gösterecektir. İkinci olarak da $\sqrt{D.E.}$ değerleri, kullanılan örneklem kümelerinin genişliğine çok bağlıdır. Küme genişlikleri de bir araştırmadan diğerine çok fazla değişim gösterebilmektedir.

Düzen etkisi iki bileşkenin bir fonksiyonu olarak gösterilebilir.

1. sınıf içi korelasyon ile ölçülen (roh) örneklem kümeleri içerisindeki homojenliğin derecesi
2. örneklem kümeleri içindeki eleman sayısı ($\bar{b}$).

D.E. $= 1 + roh(\bar{b} - 1)$ olduğundan, örneklem küme genişliği arttıkça (büyük alt sınıflar için ya da daha büyük küme kullanan yeni örneklem için) herhangi bir değişken için D.E. de artma eğilimi gösterir.

Bir araştırma içerisinde ya da başka bir araştırma düzenlerken, bir dizi sonuçtan, farklı $\bar{b}$ değerlerine sahip diğer bir dizi değişken hakkında çıkarsama yapabilmek için değer sağlamada güvenilir bir ölçüye gerek duyulur. Bu amaç için roh değerleri, $\sqrt{D.E.}$ değerlerinden ya da standart hata değerlerinden daha güvenilirdir (Kish, L., R.M. Groveç, K.T., Krotki, 1976).

Bu araştırmada Kish ve arkadaşları, alt sınıf ortalamaları için roh değerleri ile tüm örnekleme ilişkin ortalamalar için roh değerleri arasında çok yakın ilişki olduğunu ve bu ilişkinin $\sqrt{D.E.}$ ve standart hataların ilişkilerine göre çok daha fazla olduğunu ortaya koymuşlardır.

Amaç, hesaplanan standart hatalardan (sh_0) diğer istatistiklere ilişkin bilinmeyen standart hatalara(sh_1) değer sağlamak olduğuna göre düzen etkisi kullanılarak

$sh_0 = [\sigma_0/\sqrt{n_0}]\ \sqrt{D.E._0}$ dan $sh_1 = [\sigma_1/\sqrt{n_1}]\ \sqrt{D.E._1}$ e

geçilebilir. σ_1 ve n_1, σ_0 ve n_0 dan önemli ölçüde ayrılış gösterdiğinde $\sqrt{D.E._0} = \sqrt{D.E._1}$ varsayımı ancak benzer istatistikler için pek güvenilir olmamakla birlikte kullanılabilecektir. Bu nedenle daha az değişkenlik gösteren roh değerleri ile değer sağlamak daha akılcıdır. roh değerleri kullanıldığında $roh_0 = roh_1$ alınıp alınamıyacağı Kish ve arkadaşlarınca incelenmiştir. Bunun için önerilen, hesaplanan roh_0 değerinden roh_1 e değer sağlarken $roh_1 = \lambda_1\ roh_0$ gibi bir çarpan önermişlerdir. Buradan bilinmeyen $\sqrt{D.E._1}$ in kestirilmesi gerekmektedir. Bu da

$$D.E._1 = [1 + roh_1(\bar{b}_1 - 1)] = [1 + \lambda_1\, roh_0(\bar{b}_1 - 1)]$$

ile elde edilir. Burada

$\bar{b}_1 = \frac{n_1}{a}$ dır. n_1, örneklem genişliği ve a küme sayısıdır.

Bu noktada λ_1 in değeri önem kazanmaktadır. Bu da ancak verilerin incelenmesi ile yapılabilmektedir. Kish ve arkadaşları 5 ülkenin doğurganlık araştırması verilerinden ortalama bir λ değeri elde etmişlerdir. Bu, şöyle tanımlanmaktadır :

$$\lambda_s = \frac{roh_s}{roh_t} \sim 1.2$$

Burada roh_t, tüm örnekleme ilişkin roh değeri

roh_s, altsınıflar için ortalama roh değeridir.

Bundan sonra M_s, örneklemde bir altsınıfın oranı olduğunda altsınıf orlatamasının bilinmeyen $\sqrt{D.E._s}$ değeri

$$D.E._s = [1 + roh_s(\bar{b}_s - 1)] = [1 + 1.2\, roh_t(\bar{b}_t M_s - 1)]$$

ile kestirilebilecektir.

Bu araştırmalarında Kish ve arkadaşları bir değişken için tüm örnekleme ilişkin $D.E._t$ değerini 5.9 olarak bulmuşlardır. Bu araştırmada ortalama örneklem kümesi genişliği, $\bar{b}_t = 50$ dir. Bundan sonra

$$D.E._t = [1 + roh_t(\bar{b}_t - 1)] = 5.9 = [1 + roh_t(50-1)]$$

eşitliğinden yararlanılarak $roh_t = 0.10$ olarak kestirilmiştir.

Böylece, tüm örneklem içindeki payı, $M_s = 0.20$ olan bir altsınıf için düzen etkisine değer sağlanabilecektir.

$$D.E._s = [1 + \lambda roh_t (\bar{b}_t M_s - 1)]$$

$$= [1 + 1.2(0.1)(50x0.2-1)]$$

$$= 2.08$$

Düzen etkisi kestirildikten sonra, basit rasgele örnekleme ilişkin standart hata, elde edilen düzen etkisi ile düzeltildikten sonra gerçek standart hata elde edilecektir.

BÖLÜM 3

YÖNTEM

Bu çalışmada, Eskişehir'de yapılan "İşgücü ve Tüketim" anketinin verileri kullanılmıştır. "İşgücü ve Tüketim" araştırmasında hane halkı bilgileri gerekli olduğundan örnekleme biriminin, hane halkı ya da birkaç hane halkının oluşturduğu bir grup olması tasarlanmıştır. Örnekleme planı temel olarak iki aşamalı olarak düşünülmüştür. Yaklaşık olarak eşit büyüklükte olmasına dikkat edilen kümeler (ilk örnekleme birimleri) eldeki olanaklara göre şehir planından oluşturulmuştur. Bu ilk örnekleme birimleri 1/4 oranında örneklenmişlerdir.Örnekleme, çıkan ilk örnekleme birimleri içerisinde yaklaşık 10 hanehalkının oluşturduğu gruplar saptanmış ve bu gruplardan rasgele olarak iki tanesi örnekleme dahil edilmiştir. "İşgücü ve Tüketim" anketi böylece 260 grubun oluşturduğu bir örneklem üzerinde uygulanmıştır.

Bu çalışmada ise, "İşgücü ve Tüketim" araştırmasının son örnekleme birimi olan yaklaşık 10 ar hanelik grupların aynı ilk örneklem biriminden çekilenleri birleştirilmiş ve bunlar bu çalışmada ilk örneklem birimi olarak kullanılmıştır. Böylece bu çalışmanın temelini 130 ilk örneklem birimi oluşturmaktadır. Kitlede gerçekte var olan kümeleme etkisinin kaybolmaması için " İşgücü ve Tüketim" araştırmasının son örnekleme biriminden tekrar bir alt örneklem çekme yoluna gidilmemiştir.

Bu çalışmada çeşitli karşılaştırmalara olanak sağlaması açısından iki örnekleme planı uygulanmıştır. Temel yöntem olarak anlatılan ikili seçim yöntemi her iki örnekleme planının da temelini oluşturmaktadır. Buna göre her tabakadan iki ilk örnekleme birimi,basit rasgele olarak seçilecektir. Bu araştırmaya esas olan 130 ilk örnekleme birimi, birinci örnekleme planında herbiri 26 ilk örnekleme birimi içeren 5 tabakaya dağıtılmışlardır.İkinci örnekleme planında ise herbiri 13 ilk örnekleme birimi içeren 10 tabaka kullanılmıştır. Tabakalar kentin yapısal biçimine göre oluşturulmuştur.

Kısaca özetlemek gerekirse, I.Örnekleme planında 26 şar ilk örnekleme birimi içeren 5 tabakanın herbirinden 2 ilk örnekleme birimi rasgele seçilmiş ve 10 ilk örnekleme birimi örnekleme dahil edilmiştir. II.Örnekleme planında ise her biri 13'er ilk örnekleme birimi içeren 10 tabakanın herbirinden 2 ilk örnekleme birimi rasgele seçilmiş ve böylece 20 ilk örneklem birimi örneklemeye dahil edilmiştir. Bu şekilde her iki örnekleme planı altında 50 şer bağımsız örneklem çekilmiştir.

Bu çalışmada kullanılan ilk örnekleme birimleri ortalama olarak 19.2 haneden oluşmaktadır. Buna göre de I.Örnekleme planı altında elde edilen ortalama örneklem genişliği 194 hane ve II.Örnekleme planı altında da 385 hane olarak elde edilmiştir.

"İşgücü ve Tüketim" araştırmasında 30 a yakın değişken incelenmiştir. Bu çalışmaya ise bunlardan dördü alınmıştır. Bu değişkenler :

I. Beslenme için harcanan para

II. Hane halkının toplam geliri

III. Hane halkını oluşturan birey sayısı

IV. Lüks tüketim mallarına karşı eğilim

dir.

Bu çalışmada ele alınan birinci derece kestirimlerin (kitle parametrelerinin örneklem kestirimleri) ve ikinci derece kestirimlerin (birinci derece kestirimlerin örneklem değişkenliğinin kestirimleri) gösteriminde yararlanılacak temel öğe şöyle verilebilir.

x_{dhai} = örneklemdeki h.(h = 1,2,...,H) tabakanın, a.(a = 1,2) ilk örneklem biriminin i. (i = 1,2,...,n_{ha}) elementi için d. (d = 1,2,...,D) değişkenin değeridir.

Buna göre birinci derece kestirimler :

a) Ortalama $\bar{x}_d = \dfrac{\sum'_h \sum_a \sum_i x_{dhai}}{n}$

b) Korelasyon katsayısı

$$r = \frac{\sum_h \sum_a \sum_i x_{dhai} \cdot x_{d'hai} - \dfrac{\left(\sum_h \sum_a \sum_i x_{dhai}\right)\left(\sum_h \sum_a \sum_i d'hai\right)}{n}}{\left[\sum'_h \sum_a \sum_i x^2_{dhai} - \dfrac{\left(\sum_h \sum_a \sum_i x_{dhai}\right)^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_h \sum_a \sum_i x^2_{h'dai} - \dfrac{\left(\sum_h \sum_a \sum_i x_{d'hai}\right)^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

c) Regresyon katsayıları

$$b_{(px1)} = u^{-1}_{(pxp)}\ \underline{v}_{(px1)}$$

Burada p-1 tane bağımsız değişken olduğu ve p.değişkenin bağımlı değişken olduğu düşünülmektedir. [U] matrisinin ℓm. elemanı

$$v_{\ell m} = \sum_h \sum_a \sum_i x_{\ell hai} \cdot x_{mhai}$$

$\ell = 0,1,\ldots,p-1$ ve $m = 0,1,\ldots,p-1$

dir, ve $\underline{v}$ vektörünün ℓ.elemanı

$$v_\ell = \sum_h \sum_a \sum_i x_{phai} \cdot x_{\ell hai}$$

$\ell = 0,1,\ldots,p-1$

dir.

d) Oran $R = \dfrac{\sum_h \sum_a \sum_i x_{dhai}}{\sum_h \sum_a \sum_i x_{d'hai}}$

İkinci derece kestirimlerin elde edilmesinde dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi kullanılmıştır. Her tabakadan iki ilk örnekleme biriminin alınması ile elde ettiğimiz örneklemi S ile gösterelim. Buna göre H_i, her tabakadan seçilen iki ilk örnekleme biriminden bir tanesinin alınması ile oluşturulan i. yarım örneklemi (tekrarı) ve C_i, örnekleme giren ancak H_i ye dahil edilmeyen ilk örneklem birimlerinin oluşturduğu i. tümleyen yarım örneklemi oluştursun.

Her bir yarım örneklem ve bu yarım örnekleme ilişkin tümleyen yarım örneklem bir tekrar olarak düşünülür. Varyans kestirimi tek bir tekrara dayandırılamayacağından ne kadar tekrar yapılması gerektiği önem kazanır [Bkz.2.5.1.2.]. Yapılabilecek en fazla tekrar sayısı 2^{H-1} dir. Burada H, tabaka sayısıdır. Ancak,dengeli tekrarlanan tekrarlar yöntemi gerekli olan tekrar sayısını azaltmaktadır. Bu yönteme göre tekrar sayısı, k, tabaka sayısından büyük dört ile tam olarak bölünebilen en küçük sayı olarak alınır. Elemanları -1 ve +1 lerden oluşan kxH boyutlu M matrisi

$$\sum_{i=1}^{k} m_{ij} \cdot m_{ij'} = 0$$

olacak biçimde oluşturulur. Buna göre $m_{ij} = +1$ ise j.tabakadan 1 nolu ilk örnekleme birimi, $m_{ij} = -1$ ise j.tabakadan 2 nolu ilk örneklem birimi yarım örneklemi oluşturmak üzere alınır.

Bu çalışmada ele alınan iki örnekleme planından birincisi 5 tabakadan 10 ilk örnekleme biriminin seçildiği ikincisi de 10 tabakadan 20 ilk örnekleme biriminin seçildiği ikili seçim yöntemi idi. Dengeli tekrarlanan tekrarlar kestiricilerini elde edebilmek için kullanılan M matrisleri sırasıyla şöyledir.

I.Örnekleme planına (5 tabakanın kullanıldığı plan) ilişkin M matrisi :

Yarım Ör-neklemler (Tekrarlar)	Tabakalar 1	2	3	4	5
1	+1	-1	-1	+1	-1
2	-1	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	+1	-1
5	+1	+1	-1	-1	+1
6	-1	-1	-1	-1	-1
7	-1	-1	+1	+1	+1
8	-1	+1	-1	+1	+1

Sekiz tekrarın gerekli olduğu I.Örnekleme planı için yukarıda oluşturulan matrise göre birinci tekrar;

1. Tabakadan 1 nolu ilk örnekleme birimi,
2. Tabakadan 2 nolu ilk örnekleme birimi,
3. Tabakadan 2 nolu ilk örnekleme birimi,
4. Tabakadan 1 nolu ilk örnekleme birimi,
5. Tabakadan 2 nolu ilk örnekleme biriminin alınması ile oluşturulur.

II.Örnekleme planına (10 tabakanın kullanıldığı plan) ilişkin M matrisi :

Yarım Ör-neklemler (Tekrarlar)	Tabakalar 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1
2	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1
3	-1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1
5	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1
6	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
7	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1
9	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1
10	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1
11	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1
12	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1

Yukarıda tanımlanan matrisler yardımı ile yarım örneklemler ve bunlara karşılık gelen tümleyen yarım örneklemler kullanılarak birinci derece kestirimlerin $[f(s)]$ varyanslarının kestirimi dört farklı yolla elde edilmiştir. Bunlar :

$$\mathrm{var}_{I}\,[f(s)] = \frac{1-f}{k}\sum_{i=1}^{k}[f(H_i)-f(S)]^2$$

$$\mathrm{var}_{II}\,[f(s)] = \frac{1-f}{k}\sum_{i=1}^{k}[f(C_i)-f(S)]^2$$

$$\text{var}_{III}[f(s)] = \frac{\text{var}_I[f(s)] + \text{var}_{II}[f(S)]}{2}$$

$$\text{var}_{IV}[f(s)] = \frac{1-f}{4k} \sum_{i=1}^{k} [f(H_i)-f(C_i)]^2$$

Bu dört varyans kestirimi de

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{k} [f(H_i) + f(C_i)]$$

nin varyansını kestirirler.

Bu elde edilen varyans kestiricilerinin kare kökleri (kestirilen standart hata değerleri), birinci derece kestirim ile bunun beklenen değeri arasındaki farkım kestirilen standart hataya bölümünün t-dağılımına yaklaşıp yaklaşmadığının incelenmesinde ve düzen etkilerinin saptanmasında kullanılmıştır.

BÖLÜM 4

BULGULAR VE TARTIŞMA

Birinci derece kestirimler ve ikinci derece kestirimler birlikte düşünüldüğünde istatistiksel çıkarsamada sıklıkla gerek duyulan t-dağılımına yaklaşımın karmaşık örnekleme planlarında nasıl etkilendiği incelenmiştir. İncelenen kitlenin normal dağıldığından kuşku duyulduğu ve örneklemin basit rasgele olmadığı durumlarda t-dağılımının kullanımının ne derece başarılı sonuçlar vereceği tartışma konusudur.

Düzen etkisi kavramından da anlaşılacağı gibi, gerçek varyanslar yerine basit rasgele örnekleme varyanslarının kullanımı güven aralıklarının oluşturulmasında istenilen güven düzeyinden oldukça farklı düzeylerin kullanımına neden olabilmekteydi. Bu çalışmada, kullanılan dört değişkene ilişkin düzen etkileri iki örnekleme planı için şöyle özetlenebilir.

Tablo 4.1. Farklı örnekleme planlarında ortalamalara ilişkin düzen etkisi değerleri

Kestirim ($\bar{x}$)	Düzen Etkisi 5 Tabaka	Düzen Etkisi 10 Tabaka
I.değişkene ilişkin ort.($\bar{x}_1$)	2.21	2.02
II.değişkene ilişkin ort.($\bar{x}_2$)	2.01	2.02
III.değişkene ilişkin ort.($\bar{x}_3$)	1.68	1.72
IV.değişkene ilişkin ort.($\bar{x}_4$)	1.58	1.44

Tablo 4.2. Farklı örnekleme planlarında korelasyon katsayılarına ilişkin düzen etkisi değerleri

Kestirim (r)	Düzen etkisi 5 Tabaka	10 Tabaka
I.ve II.değişken arasında(r_1)	1.98	2.06
I.ve III.değişken arasında(r_2)	1.37	1.40
I.ve IV.değişken arasında(r_3)	1.69	2.01
II.ve III.değişken arasında(r_4)	2.12	2.08

Birinci değişken (beslenme için harcanan para) bağımlı değişken olarak alınıp kurulan çoklu regresyon denkleminin katsayıları için de düzen etkileri elde edilmiş ve aşağıdaki tabloda verilmiştir model :

Y : Beslenme için harcanan para

X_1 : Hane halkının toplam geliri

X_2 : Hane halkını oluşturan birey sayısı

X_3 : Lüks tüketim mallarına karşı eğilim (1-var 0-Yok)

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$$

biçimindedir.

Tablo 4.3. : Farklı örnekleme planlarında regresyon katsayılarına ilişkin düzen etkisi değerleri

Kestirim (b)	Düzen etkisi 5 Tabaka	10 Tabaka
b_0	1.04	0.99
b_1	1.12	1.18
b_2	1.09	1.07
b_3	1.10	1.12

İki değişkenin oranı hesaplandığında düzen etkisinin alacağı değerleri görebilmek amacı ile, hane halkının toplam gelirinin ne kadarının beslenme giderlerine harcandığı (Y/X_1) ve hanedeki birey başına düşen gelir (X_1/X_2) incelenmiştir. Sonuçlar aşağıdaki taploda verilmiştir.

Tablo 4.4. : Farklı örnekleme planlarında oranlara ilişkin düzen etkisi değerleri

Kestirim (R)	Düzen etkisi 5 Tabaka	10 Tabaka
Y/X_1 (R_1)	2.23	2.36
X_1/X_2 (R_2)	2.76	2.59

Hesaplanan düzen etkisi değerleri bu konuda yapılan çalışmalarla büyük benzerlik göstermektedir. Düzen etkisi değerleri, Tablo 4.1.-Tablo 4.4. incelendiğinde en belirgin olarak şu özellikleri göstermektedir.

a) Tabaka sayısını, diğer bir değişle incelenen ilk örnekleme birimi sayısını ya da örneklem genişliğini artırmak düzen etkisi değerlerini azaltmamaktadır. Bunun nedeni de şöyle açıklanabilir. Düzen etkisi sınıf içi korelasyona ve küme genişliğine bağlı olduğundan her iki örnekleme planında da kullanılan ilk örnekleme birimleri aynı yapıda olduklarından düzen etkisi bir örnekleme planından diğerine geçişte azalma göstermemektedir.

b) Bu konuda yapılan çalışmalara benzer olarak, en küçük düzen etkisi değerleri regresyon katsayılarına ilişkin olanlardır.

c) En yüksek düzen etkisi değerleri oranlara ilişkin olanlardır. Bunu açıklamak için elde yeterli bir dayanak yoktur. Bundan önce yapılan çalışmalarda oransal kestirimlerle pek ilgilenilmemiştir. Bunun nedeni de oransal kestirimlerin bazı durumlarda önemli sayılabilecek yanlılık içermeleridir.

Oransal kestirim bir yana bırakılırsa bulunan düzen etkileri yaklaşık olarak 1 ile 2.21 arasında değişmektedir. 2.21 lik bir düzen etkisi ise önemli sonuçlar doğurabilecek bir değerdir. Gerçek varyans formüllerinin kullanımı yerine basit rasgele örnekleme varyans formüllerinin kullanımı gerçekte kullanılmak istenen 0.05 önemlilik düzeyi yerine 0.110 luk güven düzeyi kullanılmasına neden olur. Güven sınırlarındaki bu bozulma benzer biçimde hipotezlerin testinde de gözlenir. Yokluk hipotezini reddedilmemesi gerekirken red etmek gibi hatalara sık sık rastlanır.

Kümelemenin yol açtığı bu tür etkilerin yanı sıra varsayımların bozulması ile çıkarsamalarda t-dağılımının güvenilirlikle kullanılıp kullanılamıyacağı da araştırılmıştır. Bunun için izlenen yol şöyledir :

$$t = \frac{\text{Birinci derece kestirim-Beklenen değeri}}{\text{Kestirilen standart hata}}$$

olarak verildiğine göre, çekilen örneklemlerin yüzde kaçında elde edilen t değerinin belirli bir aralık içerisine düştüğü incelenmiştir. Aralık olarak, sonsuz serbestlik derecesinde hesaplanan t-değerlerinin % 99 unu içermesi beklenen

-2.576; +2.576 aralığı; t değerlerinin % 95 ini içermesi beklenen -1.96; +1.96 aralığı ve t değerlerinin % 90 ını içermesi beklenen -1.645; +1.645 aralığı alınabilir mi? Burada belirtilmesi gereken bir nokta, serbestlik derecesi olarak ∞ değerinin alınamıyacağıdır. 2.Bölümde de verildiği gibi burada serbestlik derecesi tabaka sayısına eşittir. Bu nedenle, 5 tabakalı düzen için (5 serbestlik derecesinde) t değerlerinin sırasıyla % 99 unu, % 95 ini, % 90 ını ve % 80 ini içermesi beklenen [-4.032; +4.032], [-2.571; +2.571] , [-2.015; +2.015] ve [-1.476; +1.476] aralıkları alınmıştır. 10 tabakanın kullanıldığı düzen için bu aralıklar sırasıyla [-3.169; +3.169], [-2.28; +2.28] , [-1.812; +1.812] ve [-1.372; +1.372] dir.

t değerlerinin hesaplanmasında standart hata kestirimleri dört farklı dengeli tekrarlanan tekrarlar kestiricileri ile elde edilmiştir. Her bir kestiricinin sağladığı sonuçlar aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.5.(a) $var_I[f(s)]$ kestiricisi kullanarak hesaplanan t değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (5 tabaka)

Kestirim	A r a l ı k l a r			
	[-4.032;+4.032]	[-2.571;+2.571]	[-2.015;+2.015]	[-1.476;+1.476]
$\bar{x}_1$	1.00	0.98	0.94	0.84
$\bar{x}_2$	0.96	0.94	0.88	0.78
$\bar{x}_3$	0.98	0.96	0.92	0.84
$\bar{x}_4$	0.98	0.96	0.88	0.82
r_1	0.98	0.96	0.92	0.80
r_2	0.96	0.92	0.84	0.80
r_3	0.98	0.92	0.86	0.76
r_4	0.94	0.90	0.84	0.74
b_0	0.98	0.94	0.90	0.82
b_1	1.00	0.94	0.88	0.80
b_2	0.98	0.96	0.88	0.78
b_3	0.98	0.92	0.86	0.82
R_1	1.00	0.96	0.92	0.84
R_2	1.00	0.98	0.92	0.82

Tablo 4.5(b) $var_I[f(s)]$ kestiricisi kullanarak hesaplanan t-değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (10 tabaka)

	Aralıklar			
Kestirim	[-3.169;+3.169]	[-2.28;+2.28]	[-1.812;+1.812]	[-1.372;+1.372]
$\bar{x}_1$	0.98	0.94	0.90	0.82
$\bar{x}_2$	1.00	0.96	0.92	0.84
$\bar{x}_3$	0.96	0.94	0.88	0.82
$\bar{x}_4$	0.98	0.96	0.90	0.82
r_1	0.96	0.92	0.86	0.80
r_2	0.98	0.92	0.88	0.78
r_3	1.00	0.96	0.92	0.84
r_4	0.96	0.94	0.92	0.82
b_0	0.98	0.94	0.90	0.82
b_1	0.98	0.96	0.88	0.76
b_2	1.00	0.94	0.92	0.82
b_3	0.98	0.94	0.90	0.82
R_1	1.00	0.96	0.92	0.84
R_2	0.96	0.90	0.86	0.76

Tablo 4.6.(a) $var_{II}[f(s)]$ kestiricisi kullanarak hesaplanan t değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (5 Tabaka)

Kestirim	A r a l ı k l a r			
	[-4.032;+4.032]	[-2.571;+2.571]	[-2.015;+2.015]	[-1.476;+1.476]
$\bar{x}_1$	0.98	0.96	0.92	0.82
$\bar{x}_2$	1.00	0.96	0.90	0.78
$\bar{x}_3$	1.00	0.96	0.92	0.80
$\bar{x}_4$	0.98	0.94	0.86	0.82
r_1	0.96	0.92	0.90	0.82
r_2	0.98	0.94	0.86	0.76
r_3	0.96	0.92	0.88	0.82
r_4	0.96	0.94	0.86	0.82
b_0	1.00	0.96	0.92	0.80
b_1	0.98	0.94	0.86	0.76
b_2	0.98	0.92	0.88	0.82
b_3	1.00	0.96	0.88	0.84
R_1	0.96	0.92	0.88	0.82
R_2	0.98	0.90	0.86	0.76

Tablo 4.6.(b) $var_{II}[f(s)]$ kestiricisi kullanarak hesaplanan t değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (10 tabaka)

Kestirim	Aralıklar			
	[-3.169;+3.169]	[-2.28;+2.28]	[-1.812;+1.812]	[-1.372;+1.372]
$\bar{x}_1$	0.96	0.90	0.86	0.74
$\bar{x}_2$	0.98	0.94	0.90	0.78
$\bar{x}_3$	0.98	0.92	0.88	0.76
$\bar{x}_4$	1.00	0.96	0.92	0.84
r_1	0.98	0.94	0.88	0.78
r_2	0.96	0.92	0.86	0.74
r_3	0.96	0.94	0.90	0.82
r_4	1.00	0.92	0.88	0.76
b_0	0.98	0.94	0.90	0.82
b_1	0.98	0.92	0.88	0.76
b_2	1.00	0.94	0.90	0.82
b_3	0.96	0.94	0.88	0.82
R_1	0.96	0.92	0.86	0.78
R_2	0.98	0.92	0.88	0.76

Tablo 4.7.(a) var_{III} f(s) kestirici kullanarak hesaplanan t değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (5 tabaka)

Kestirim	A r a l ı k l a r			
	[-4.032;+4.032]	[-2.571;+2.571]	[-2.015;+2.015]	[-1.476;+1.476]
$\bar{x}_1$	0.98	0.94	0.90	0.82
$\bar{x}_2$	0.98	0.96	0.90	0.80
$\bar{x}_3$	0.96	0.94	0.88	0.78
$\bar{x}_4$	0.98	0.94	0.88	0.80
r_1	1.00	0.96	0.92	0.82
r_2	0.96	0.94	0.90	0.82
r_3	0.96	0.92	0.88	0.78
r_4	1.00	0.94	0.92	0.80
b_0	0.98	0.96	0.92	0.82
b_1	0.98	0.94	0.90	0.78
b_2	1.00	0.96	0.92	0.80
b_3	0.98	0.94	0.90	0.80
R_1	0.96	0.92	0.86	0.76
R_2	0.96	0.94	0.88	0.84

Tablo 4.7.(b) $var_{III}[f(s)]$ kestiricisi kullanarak hesaplanan t değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (10 tabaka)

	Aralıklar			
Kestirim	[-3.169;+3.169]	[-2.28;+2.28]	[-1.812;+1.812]	[-1.372;+1.372]
$\bar{x}_1$	0.96	0.92	0.88	0.80
$\bar{x}_2$	1.00	0.96	0.90	0.82
$\bar{x}_3$	0.98	0.94	0.90	0.80
$\bar{x}_4$	0.98	0.94	0.92	0.82
r_1	0.96	0.92	0.86	0.80
r_2	0.96	0.94	0.88	0.82
r_3	0.94	0.92	0.86	0.78
r_4	0.98	0.96	0.88	0.78
b_0	0.98	0.96	0.90	0.82
b_1	1.00	0.94	0.90	0.80
b_2	0.96	0.94	0.92	0.80
b_3	0.98	0.94	0.90	0.82
R_1	0.96	0.92	0.86	0.80
R_2	0.94	0.90	0.84	0.78

Tablo 4.8.(a) $var_{IV}[f(s)]$ kestiricisi kullanarak hesaplanan t değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (5 tabaka)

Kestirim	Aralıklar [-4.032;+4.032]	[-2.571;+2.571]	[-2.015;+2.015]	[-1.476;+1.476]
$\bar{x}_1$	0.96	0.92	0.88	0.82
$\bar{x}_2$	0.98	0.94	0.90	0.82
$\bar{x}_3$	0.98	0.96	0.92	0.80
$\bar{x}_4$	0.96	0.94	0.90	0.80
r_1	0.96	0.92	0.86	0.78
r_2	0.98	0.94	0.88	0.78
r_3	0.98	0.94	0.90	0.80
r_4	1.00	0.96	0.90	0.82
b_0	0.98	0.94	0.88	0.78
b_1	0.96	0.92	0.86	0.80
b_2	0.98	0.96	0.92	0.82
b_3	0.98	0.96	0.90	0.80
R_1	0.96	0.92	0.88	0.78
R_2	0.94	0.90	0.84	0.76

Tablo 4.8.(b) $var_{IV}[f(s)]$ kestiricisi kullanarak hesaplanan t değerlerinin saptanan aralıklara düşme sıklıkları (10 tabaka)

Keştirim	Aralıklar			
	[-3.169;+3.169]	[-2.28;+2.28]	[-1.812;+1.812]	[-1.372;+1.372]
$\bar{x}_1$	0.96	0.94	0.90	0.82
$\bar{x}_2$	0.96	0.92	0.88	0.80
$\bar{x}_3$	0.98	0.96	0.90	0.80
$\bar{x}_4$	0.98	0.94	0.90	0.78
r_1	0.94	0.92	0.86	0.78
r_2	0.96	0.92	0.84	0.78
r_3	0.96	0.92	0.86	0.80
r_4	1.00	0.94	0.90	0.82
b_0	0.98	0.96	0.90	0.80
b_1	0.98	0.94	0.90	0.80
b_2	1.00	0.94	0.88	0.80
b_3	0.98	0.96	0.92	0.82
R_1	0.96	0.94	0.90	0.78
R_2	0.98	0.92	0.86	0.76

Tablo 4.5.-Tablo 4.8. genel olarak incelendiğinde dengeli tekrarlanan tekrarlar kestiricilerin t-değerlerinin hesaplanmasında kullanımının oldukça tutarlı sonuçlar verdiği görülür. Hesaplanan t değerlerinin, belirlenen sınırlar içerisine düşme olasılıkları teorik t-dağılışının olasılıkları ile çok fazla uyum sağlamaktadır. Görülen ayrılışlar ise çekilen örneklem sayısının azlığına bağlanabilir. Bu çalışmada 50 bağımsız örneklem çekilmişti. Bu sayı oldukça küçüktür. Ancak bu tür çalışmalar çok fazla zaman, büyük çapta veri ve sınırsız sayılabilecek bilgisayar kullanımı gerektirdiğinden böyle bir sınırlama her zaman zorunlu olmaktadır. Çekilen örneklem sayısının azlığına karşın t, dağılımına yaklaşım çok başarılı sayılabilir. Bu başarılı yaklaşım bize,dengeli tekrarlanan tekrarlar kestiricilerinin istatistiksel çıkarsamada güvenilirlikle kullanılabileceğini göstermektedir.

Bundan sonra şu sorulara yanıt aranabilir.

1) Dört dengeli tekrarlanan tekrarlar kestiricileri arasında t-dağılımına yaklaşımı daha başarılı olan varmıdır?
2) Kestirimler ($\bar{x}$,r,b,R) arası t-dağılımına uygunluk açısından farklılık varmıdır?
3) Beş tabakanın kullanıldığı düzen ile on tabakanın kullanıldığı düzen arasında t-dağılımına yaklaşım açısından bir farklılık varmıdır?

Bu soruları yanıtlamak için Tablo 4.5.-Tablo 4.8.'de herbir kestirim türü (ortalama, korelasyon katsayısı, regresyon katsayısı ve oran) için hesaplanan, belirli aralıklara düşme sıklıklarının ortalamaları alınıp aşağıdaki özet tablo elde edilmiştir.

Tablo 4.9. Farklı varyans kestiricileri ve farklı örnekleme planları için kestirim türlerine ilişkin gözlenen ortalama sıklıklar

varyans kestiricisi	Örnekleme planı	Kestirim türü	Beklenen sıklık			
			0.99	0.95	0.90	0.80
$var_I[f(s)]$	5 tabakalı	$\bar{x}$	0.980	0.960	0.905	0.820
		r	0.965	0.925	0.865	0.775
		b	0.985	0.940	0.880	0.805
		R	1.00	0.970	0.920	0.830
	10 tabakalı	$\bar{x}$	0.980	0.950	0.900	0.825
		r	0.975	0.935	0.895	0.810
		b	0.985	0.945	0.900	0.805
		R	0.980	0.940	0.890	0.800
$var_{II}[f(s)]$	5 tabakalı	$\bar{x}$	0.990	0.955	0.900	0.805
		r	0.965	0.930	0.875	0.805
		b	0.990	0.945	0.885	0.805
		R	0.970	0.910	0.870	0.790
	10 tabakalı	$\bar{x}$	0.980	0.930	0.890	0.780
		r	0.975	0.930	0.880	0.775
		b	0.980	0.935	0.890	0.805
		R	0.970	0.920	0.870	0.770
$var_{III}[f(s)]$	5 tabakalı	$\bar{x}$	0.975	0.945	0.890	0.800
		r	0.980	0.940	0.905	0.805
		b	0.985	0.950	0.910	0.800
		R	0.960	0.930	0.870	0.800
	10 tabakalı	$\bar{x}$	0.980	0.940	0.900	0.810
		r	0.960	0.935	0.870	0.795
		b	0.980	0.945	0.905	0.810
		R	0.950	0.910	0.850	0.790
$var_{IV}[f(s)]$	5 tabakalı	$\bar{x}$	0.970	0.940	0.900	0.810
		r	0.980	0.940	0.885	0.795
		b	0.975	0.945	0.890	0.800
		R	0.950	0.910	0.860	0.770
	10 tabakalı	$\bar{x}$	0.970	0.940	0.895	0.800
		r	0.965	0.925	0.865	0.795
		b	0.985	0.950	0.900	0.805
		R	0.97	0.930	0.880	0.770

Tablo 4.9. dikkatli bir biçimde incelenirse, regresyon katsayıları için ve ortalama için hesaplanan t değerlerinin korelasyon katsayıları ve oran için hesaplananlardan çok daha iyi bir yaklaşım sağladığı görülür. En başarısız yaklaşım oranların yaklaşımıdır.

Daha iyi karşılaştırma olanağı sağlıyacağı düşünülerek dört ayrı beklenen sıklık değerlerine göre dört ayrı tablo düzenlenebilir. Bu tablolar yardımı ile yukarıdaki üç sorunun yanıtı daha kolay alınabilecektir.

Tablo 4.10. 0.99 beklenen sıklık değeri için, farklı varyans kestiricileri, örnekleme planları ve kestirim türlerine göre gözlenen sıklıklar

Kestirim türü	Örnekleme planı	Varyans kestiricileri			
		$var_{I}[f(s)]$	$var_{II}[f(s)]$	$var_{III}[f(s)]$	$var_{IV}[f(s)]$
$\bar{x}$	5 tabakalı	0.980	0.990	0.975	0.970
	10 tabakalı	0.980	0.980	0.980	0.970
r	5 tabakalı	0.965	0.965	0.980	0.980
	10 tabakalı	0.975	0.975	0.960	0.965
b	5 tabakalı	0.985	0.990	0.985	0.975
	10 tabakalı	0.985	0.980	0.980	0.985
R	5 tabakalı	1.00	0.970	0.960	0.950
	10 tabakalı	0.980	0.970	0.950	0.970

Bu tablo incelendiğinde ortalamalar ve regresyon katsayılarına ilişkin t değerlerinin beklenen sıklıklarla çok iyi uyum sağladığı görülür. Tabaka sayısının artması uyumu iyileştirme açısından bir katkı sağlayamamıştır. Ortalamalar ve regresyon katsayıları için bakıldığında $var_{II}[f(s)]$ kestiricisi diğer kestiricilere göre daha iyidir.

Tablo 4.11. 0.95 beklenen sıklık değeri için farklı varyans kestiricileri, örnekleme planları ve kestirim türlerine göre gözlenen sıklıklar

Kestirim türü	Örnekleme planı	Varyans kestiricileri			
		$var_{I}[f(s)]$	$var_{II}[f(s)]$	$var_{III}[f(s)]$	$var_{IV}[f(s)]$
$\bar{x}$	5 tabakalı	0.960	0.955	0.945	0.940
	10 tabakalı	0.950	0.930	0.940	0.940
r	5 tabakalı	0.925	0.930	0.940	0.940
	10 tabakalı	0.935	0.930	0.935	0.925
b	5 tabakalı	0.940	0.945	0.950	0.945
	10 tabakalı	0.945	0.935	0.945	0.950
R	5 tabakalı	0.970	0.910	0.930	0.910
	10 tabakalı	0.940	0.920	0.910	0.930

Bu tablodan da, korelasyon katsayılarına ve oranlara ilişkin t değerlerinin t dağılımına uyumunun pek iyi olmadığı, buna karşın ortalamalar ve regresyon katsayılarına ilişkin hesaplanan t değerlerinin yaklaşımının çok iyi olduğu söylenebilir. Yine tabaka sayısının artması uyumu iyileştirici bir etki gösterememiştir. $var_{III}[f(s)]$ kestiricisi diğerlerine göre biraz daha üstündür.

Tablo 4.12. 0.90 beklenen sıklık değeri için, farklı varyans kestiricileri, örnekleme planları ve kestirim türlerine göre gözlenen sıklıklar

Kestirim türü	Örnekleme planı	Varyans kestiricileri			
		$var_I[f(s)]$	$var_{II}[f(s)]$	$var_{III}[f(s)]$	$var_{IV}[f(s)]$
$\bar{x}$	5 tabakalı	0.905	0.900	0.890	0.900
	10 tabakalı	0.900	0.890	0.900	0.895
r	5 tabakalı	0.865	0.875	0.905	0.885
	10 tabakalı	0.895	0.880	0.870	0.865
b	5 tabakalı	0.880	0.885	0.910	0.890
	10 tabakalı	0.900	0.890	0.905	0.900
R	5 tabakalı	0.920	0.870	0.870	0.860
	10 tabakalı	0.890	0.870	0.850	0.880

Bundan önceki tablolarda olduğu gibi ortalamalara ve regresyon katsayılarına ilişkin t değerlerinin t dağılımına uyumunun çok iyi olduğu görülebilir. Bu tablo, diğerlerinden farklı olarak, tabaka sayısının artmasının uyumu iyileştirdiğini de göstermektedir. Daha tutarlı sonuçlar vermesi açısından ortalamalar ve regresyon katsayıları için bakıldığında bu daha açık görülebilir. $var_I[f(s)]$ ve $var_{IV}[f(s)]$ kestiricileri diğerlerine göre daha iyi yaklaşım sağlamaktadır.

Tablo 4.13. 0.80 beklenen sıklık değeri için farklı varyans kestiricileri, örnekleme planları ve kestirim türlerine göre gözlenen sıklıklar.

Kestirim türü	Örnekleme planı	varyans kestiricileri			
		$var_I[f(s)]$	$var_{II}[f(s)]$	$var_{III}[f(s)]$	$var_{IV}[f(s)]$
$\bar{x}$	5 tabakalı	0.820	0.805	0.800	0.810
	10 tabakalı	0.825	0.780	0.810	0.800
r	5 tabakalı	0.775	0.805	0.805	0.795
	10 tabakalı	0.810	0.775	0.795	0.795
b	5 tabakalı	0.805	0.805	0.800	0.800
	10 tabakalı	0.805	0.805	0.810	0.805
R	5 tabakalı	0.830	0.790	0.800	0.770
	10 tabakalı	0.800	0.770	0.790	0.770

Bu tablo incelendiğinde, korelasyon katsayıları ve oranlara ilişkin t-değerlerinin de teorik t dağılışına çok iyi uyum sağladıkları görülebilir. Ortalamaların ve regresyon katsayılarının uyumunun iyiliği de belirgin olarak görülmektedir. Tabaka sayısını artırmanın uyumu iyileştirdiği söylenememektedir. $var_{III}[f(s)]$ diğerlerine göre taha iyi yaklaşım vermektedir.

Tablo 4.10.-Tablo 4.13.'ün yorumları birleştirilerek üç sorunun yanıtı şöyle verilebilir :

1) Kesin bir üstünlük sağlamamakla birlikte, dört farklı durumun ikisinde diğer varyans kestiricilerinden daha iyi yaklaşım sağlaması ve $var_I[f(s)]$ ve $var_{II}[f(s)]$ nin ortalaması olması nedeni ile $var_{III}[f(s)]$ daha iyi bir kestirici olarak önerilebilir.

2) Kestirim türleri arasında ortalama ve regresyon katsayılarına ilişkin hesaplanan t değerlerinin daha iyi uyum sağladıkları söylenebilir.

3) Tabaka sayısının artması uyuma bir katkıda bulunmamıştır. Küçük örneklemlerde bile dengeli tekrarlanan tekrarlar kestiricileri başarılı sonuçlar verebilmektedirler.

ÖZET

Bu çalışmada, karmaşık örnekleme planlarında istatistiksel çıkarsamanın gerek duyduğu bazı varsayımların sağlanamamasının etkileri incelenmiştir. Kümeleme ile gözlemlerin bağımsızlığı varsayımı bozulmakta, gözlemler arası ilişki ile doğru varyans kestiricisi bulabilmek zorlaşmaktadır. Bu durumda basit rasgele örnekleme kestiricileri yaklaşık sonuç verememektedirler. Bunu önlemek için, üç farklı varyans kestiricisi kullanılmacı önerilmektedir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde "Dengeli Tekrarlanan Tekrarlar" yönteminin kullanılması ile çıkarsamalarda gerek duyulan t-dağılımına yaklaşımın ne derece başarılı sonuçlar verebileceği tartışılmıştır. Küçük örneklemlerde bile çok iyi yaklaşım sağlaması açısından Dengeli Tekrarlanan Tekrarlar yönteminin karmaşık örnekleme planlarında varyans kestiricisi olarak kullanılması önerilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Brillinger, D.R. (1966) : The application of the Jack-knife to the analysis of sample surveys, Commentary. 8 : 74-80.

2. Cochran, W.G. (1963) : Sampling Techniques, John Wiley and Sons, New York.

3. Deming, W.E. (1947) : Some Theory of Sampling, John Wiley and Sons, New York.

4. Deming, W.E. (1956) : On simplification of sample design through replication with equal probabilities and without stages, Journal of The American Statistical Association, 51 : 24-53.

5. Frankel, M.R. (1971) : Inferance From Survey Samples, Institute For Social Research, The University of Michigan; Ann Arbor.

6. Hansen, M.H., Hurwitz, W.N. and Madow, W.G. (1953) : Sample Survey Methods and Theory, Vol.I and II., John Wiley and Sons, New York.

7. Kalton, G. (1977) : Practical methods for estimating survey sampling errors, Bulletin of International Statistical Institute, 46(3).

8. Keyfitz, N. (1953) : A factorial arrangement of Comparisons of family size, American Journal of Sociology, 58 : 470-480.

9. Keyfitz, N. (1957) : Estimates of sampling variance when two units are selected from each stratum, Journal of the American Statistical Association, 52 : 503-510.

10. Kish, L. (1957) : Confidence intervals for clustered samples, American Sociological Review, 22 : 154-165.

11. Kish, L. (1965) : Survey Sampling, John Wiley and Sons, New York.

12. Kish, L. ve Frankel, M.R. (1970) : Balanced repeated replications for standard errors, Journal of the American Statistical Association, 65 : 1071-1094.

13. Kish, L. ve Frankel, M.R. (1974) : Inference from complex samples, Journal of Royal Statistical Society, B, 36(1) : 1-37.

14. Kish, L. ve Hess, I. (1959) : On variance of ratios and their differences in multi-stage samples, Journal of the American Statistical Association, 54 : 416-446.

15. Kish, L., Namboodiri, N.K. ve Pillai, R.K.(1962) : The ratio bias in surveys, Journal of the American Statistical Association, 57 : 863-876.

16. Kish, L., Groves, R.M. ve Krotki, K.P. (1976) : Sampling errors for fertility surveys, World Fertility Survey, Occasional Papers No :17.

17. Little, R.J.A. (1982) : Sampling errors of fertility rates from the World Fertility Survey, World Fertility Survey, Technical Bulletin No : 10.

18. Mahalonobis, P.C. (1944) : On large scale sample surveys, Phil. Trans. Royal Soc. B, 231 : 329-451.

19. Mc Carthy, P.J. (1966 a) : Replication An approach to the analysis of data from complex surveys, National Center for Health Statistics, Series 2, No : 14.

20. Mc Carthy, P.J. (1966 b) : Further evaluation and application of the balanced half-sample Technique, National Center for Health Statistics, Series 2, No : 31.

21. Sukatme, P.V. (1954) : Sampling Theory of Surveys with Applications, Ames, Iowa State University Press, Iowa.

22. Tepping, B.J. (1968) : The estimation of variance in complex surveys, Proceedings of the Social Statistics Section of the American Statistical Association, 11-18.

23. Tukey, J.W. (1958) : Bias and confidence in not-quite large samples. Annals of Mathematical Statistics, 29 : 614.

24. Verma, V. (1980) : Sampling for national fertility surveys, World Fertility Survey Conference, Record of Proceedings, 3 : 389.

25. Verma, V. (1981) : Assessment of errors in household surveys, Bulletin of International Statistical Institute 49.

26. Verma, V. (1982) : The estimation and presentation of sampling errors, World Fertility Survey Technical Bulletin No : 14.

27. Verma, V., Scott, C. ve C.O' Muircheartaigh (1980) : Sample designs and sampling errors for the World Fertility Survey, Journal of the Royal Statistical Society, A, 143 : 431-473.

28. Woodruff, R. (1971) : A simple method for approximating the variance of a complicated estimate, Journal of the American Statistical Association, 67 : 411-414.

29. Woodruff, R. ve Causey, B. (1976) : Computerised method for approximating the variance of a complicated estimate, Journal of the American Statistical Association, 71 : 315-321.

30. Yates, F. (1960) : Sampling Methods for Censuses and Surveys, 3 rd ed. Chas. Griffin and Co., London.

31. Zarkovich, S.S. (1979) : Stability of variance patterns, Journal of Indian Society of Agricultural Statistics, 31 : 23-48.