KOMPLEKS DÜZLEMİN BAZI ALT BÖLGELERİNDE TANIMLI ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN ÜNİVALENTLİK KRİTERLERİ

Erhan DENİZ

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Halit ORHAN
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KOMPLEKS DÜZLEMİN BAZI ALT BÖLGELERİNDE TANIMLI ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN ÜNİVALENTLİK KRİTERLERİ

Erhan DENİZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

Kompleks Düzlemin Bazı Alt Bölgelerinde Tanımlı Analitik Fonksiyonlar İçin Ünivalentlik Kriterleri

Doç. Dr. Halit ORHAN danışmanlığında, Arş. Gör. Erhan DENİZ tarafından hazırlanan bu çalışma 04/03/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Osman ALTINTAŞ *İmza*

Üye : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Ahmet IŞIK *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Halit ORHAN *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Sezgin AKBULUT *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

KOMPLEKS DÜZLEMİN BAZI ALT BÖLGELERİNDE TANIMLI ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN ÜNİVALENTLİK KRİTERLERİ

Erhan DENİZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halit ORHAN

Bu tezde Loewner zincirler metodu kullanılarak analitik fonksiyonların ünivalentliği için yeter şart problemleri üzerine çalışılmıştır. Bu problem literatürde ünivalentlik kriteri olarak bilinmekterdir.

Öncelikle kompleks düzlemin $\mathbb{U}$ açık birim diskinde tanımlı integral operatörleri, $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ delinmiş açık birim diskte ve Δ kapalı birim diskin tümleyeninde tanımlı meromorf fonksiyonlar için yeter şart problemi çözülmüş daha sonra buradan elde edilen şartlar doğrultusunda $\mathcal{S}, \mathcal{S}^{*}, \mathcal{C}$ ve $\widetilde{\Sigma}$ sınıflarına ait fonksiyonların genelleştirilmiş integral operatörlerinin ünivalentliği için yeter şartları içeren teoremler ispatlanmıştır.

2011, 114 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Meromorf fonksiyon, Yıldızıl ve Konveks fonksiyon, Ünivalentlik kriteri, Loewner zinciri, İntegral Operatör.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

UNIVALENCE CRITERIA FOR ANALYTIC FUNCTIONS DEFINED IN SOME SUBDOMAINS OF COMPLEX PLANE

Erhan DENİZ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Halit ORHAN

In this thesis was worked on sufficient condition problems for univalence of analytic functions by using Loewner chains method. This problem is called as univalence criterion in literature.

First of all, sufficient condition problems were solved for integral operators defined in the open unit disk $\mathbb{U}$ of complex plane, meromorphic functions defined in the punctured unit disk $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ and complement of the closed unit disk Δ. Subsequently, by using earlier conditions theorems are proved which are contain for sufficient conditions for univalence of generalized integral operators for functions belonging to the classes $\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, \mathcal{C}$ and $\widetilde{\Sigma}$.

2011, 114 pages

Keywords: Analytic function, Univalent function, Meromorphic function, Starlike and Convex function, Univalence criterion, Loewner chain, Integral Operator.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bana bu konuyu veren ve çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. Halit ORHAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm Sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a, Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT'a ve Matematik bölümünde hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen başta bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere, anabilim dalımızın değerli öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kendisiyle çalışma şansını yakaladığım için kendimi ayrıcalıklı bulduğum, değerli bilgilerini benimle paylaşan, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim Sayın Doç. Dr. Dorina RADUCANU'ya ve tezin yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen çalışma arkadaşım Arş. Gör. Murat ÇAĞLAR'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme teşekkür ederim.

Erhan DENİZ
Şubat 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	:	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	$\mathbb{N}=\{1,2,...\}$ Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\varnothing$	:	Boş küme
I	:	İndis kümesi
$\mathbb{U}_r$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<r<1\}$ şeklindeki açık disk
$\overline{\mathbb{U}}_r$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert\leq r<1\}$ şeklindeki kapalı disk
$\mathbb{U}$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$ açık birim disk
$\overline{\mathbb{U}}$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert\leq 1\}$ kapalı birim disk
$\overset{\circ}{\mathbb{U}}$	:	$\{z\in\mathbb{C}:0<\lvert z\rvert<1\}$ şeklindeki delinmiş açık birim disk
Δ	:	$\{\xi\in\mathbb{C}:\lvert\xi\rvert>1\}$ şeklindeki kapalı birim diskin dışı
$\mathcal{A}$	:	$\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	:	Ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	:	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	:	Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	:	Caratheodory fonksiyonların sınıfı
Ω	:	Schwarz fonksiyonların sınıfı
$\prod$	:	$\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ kümesinde tanımlı $g(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta}+b_0+b_1\zeta+...$ şeklindeki meromorf fonksiyonların sınıfı
$\widetilde{\Sigma}$	:	$\prod$ sınıfına ait ünivalent meromorf fonksiyonların sınıfı

$\mathcal{M}$	:	Δ kümesinde tanımlı $h(\xi)=\xi+c_0+\dfrac{c_1}{\xi}+...$ şeklindeki meromorf fonksiyonların sınıfı
Σ	:	$\mathcal{M}$ sınıfına ait ünivalent meromorf fonksiyonların sınıfı
$\prec$	:	subordinasyon
$f \prec g$	:	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$f(z,t)$	:	subordinasyon (veya Loewner) zinciri
$\arg f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\Re f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı
$S_f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun Schwarz türevi
$\mathcal{R}^n f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun $n.$ mertebeden Ruscheweyh türev operatörü
$S^n f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun $n.$ mertebeden Sălăgean türev operatörü
$\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}$	:	$f(z,t)$ fonksiyonunun t ye göre kısmi türevi
$\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial z}$	:	$f(z,t)$ fonksiyonunun z ye göre kısmi türevi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile ilgilenen yani analiz ile geometri arasında ilişki kuran, kompleks analizin özel bir dalıdır. Bu teori, ilk olarak G. Bernard Riemann'ın 1851 yılında kompleks düzlemin basit bağlantılı bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\,(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ alt bölgesini, $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonunun varlığını gösteren ve literatürde "Riemann dönüşüm teoremi" olarak bilinen teoremiyle ortaya çıkmıştır. Fakat bu teorem, 20. yüzyılın başlarına kadar bir kısım araştırmacılara göre kullanışlı olmadığından bir kısmına göre de önemi fazla anlaşılamadığından teoride pek fazla uygulama alanı bulamamıştır. Öyle ki, Koebe'nin 1907 yılında bu teoremi analitik ve ünivalent fonksiyonlar için vermesi, 1914 yılında Gronwall'ın alan teoremini ispatı ve 1916 yılında Bieberbach'ın ortaya koyduğu normalize edilmiş fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları, geometrik fonksiyonlar teorisine uygulama alanını ve bu teorinin önemli bir dalı olan ünivalent fonksiyonlar teorisinin de doğuşunu başlatmıştır. Bu yıllarda ünivalent fonksiyonların yapısı üzerine kurulan problemler o dönemin popüler konuları olmuştur.

1920 li yıllarından sonra Bieberbach'ın $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2,3,...$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ tahmininin ispatı problemi birçok matematikçi tarafından önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk defa 1916 yılında Bieberbach tarafından gösterilmiştir. Daha sonra Loewner (1923), kendi bulduğu ve parametrik metod (Loewner motodu) olarak isimlendirdiği bir metodla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968 yılında Pederson (1969 yılında Ozawa) $|a_6| \leq 6$ ve 1972 yılında da Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliklerini ispatlamışlardır. Tahminin genel hali uzun yıllar boyunca birçok matematikçi tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve nihayet 1985 yılında Fransız matematikçi Louis de-Branges, Loewner teorisini kullanarak tüm $n = 2,3,...$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin doğruluğunu göstermiş ve probleme son noktayı koymuştur. Problemin çözülmüş olması, bu alanda çalışılacak bir şeyin kalmadığı anlamına gelmemiş, aksine birçok yeni problemin ortaya çıkmasına zemin oluşturmuştur. $\mathcal{S}$ sınıfı için; alt sınıflar, katsayı tahminleri, growth ve distortion teoremleri, yarıçap problemleri, komşuluklar, kısmi toplamlar, integral ve diferensiyel operatörler ve ayrıca son zamanların gözde konularından olan subordinasyon ve süperordinasyon önemli gerek şart problemlerinden bazılarıdır.

Geometrik fonksiyonlar teorisi içinde ele alınan önemli problemlerden birisi de verilen bir analitik fonksiyonun ünivalent olup olmadığının araştırılmasıdır. Doğal olarak burada akla gelen ilk soru "Bir fonksiyonun $\mathcal{S}$ sınıfına ait olması için yeter şart ya da şartlar elde edilebilir mi?" sorusudur. Bu soruya günümüze kadar birçok araştırmacı değişik yöntemler kullanarak cevap aramaya çalışmış ve probleme ünivalentlik kriteri veya şartı bulma problemi denilmiştir. Kullanılan yöntemlerin en önemlilerinden birisi Loewner zincirler metodu ya da diğer bir ifade ile subordinasyon zincirler metodudur. Özellikle ters sınır değer problemlerin çözümü, akışkanlar mekaniği, elektroteknik, nükleer fizik ve olasılık-istatistik gibi birçok alanda uygulaması olan ünivalentlik kriteri, bu alanda çalışmak isteyenler için bir ilham kaynağı olmuştur.

1920 li yıllarda geliştirilen Loewner metodu, ünivalent fonksiyonlar teorisinin çok güçlü tekniklerinden birisi olmuştur. Bu metod bize, göz önüne alınan bir meselenin elementer yöntemlerle elde edilemeyen önemli sonuçlarını elde etme imkanı sunar. Loewner metodunun temel uygulamalarından birisi Bieberbach tahminini ispatlamaktı. Bu metodun de-Branges tarafından verilen meşhur Bieberbach tahmininin ispatında merkezi bir rol oynaması hiç de şaşırtıcı değildi. Bununla birlikte Loewner'in metodu $\mathcal{S}$ sınıfı için dönme teoremi ve yıldızıllık yarıçapı gibi ilginç geometrik sonuçları da verdi. Teorinin gelişmesine Kufarev ve Goodman'ın yanı sıra özellikle Pommerenke 1965 yılında Loewner zincirler metodunu tanımlayarak önemli katkılarda bulunmuşlardır. Pommerenke'nin, aynı yıl bir fonksiyonun Loewner zinciri veya ünivalent olması için yeterli şartları içeren teoremi vermesi bu teoriye değişik bir boyut getirmiştir. Onun bu teoremi ünivalentlik için yeter şart niteliği taşımaktadır. Pommerenke'nin teoreminin birim diskte bir uygulaması ilk defa 1972 yılında Becker tarafından vermiştir. Becker'ın bu temel kriteri, 1974 yılında Ahlfors, 1976 yılında Ruscheweyh, 1981 yılında Lewandowski ve 1986 yılında da Pommerenke tarafından genelleştirilmiştir. Daha sonra 1987 yılında Pascu ilk defa aynı metodu kullanarak bu sonucu bir integral operatör için genelleştirmiştir. Son yıllarda Becker'ın ünivalentlik kriterinin bazı genelleştirmeleri Pescar (1997), Kanas and Srivastava (1997), Kanas and Lecko (1998) ve Ovesea (Tudor) (1997, 2001, 2003, 2007) tarafından verilmiştir.

Loewner zincirler metodundan farklı olarak 1949 yılında Nehari ve 1972 yılında Ozaki ve Nunokawa Schwarz türevini ayrıca 1969 da Goluzin farklı bir metod kullanarak birim diskte analitik bir fonksiyonun ünivalentliği için yeter şartlar elde etmişlerdir. Yazarlar buldukları bu kriterlerde her ne kadar Loewner zincirler metodunu kullanmamış olsalar da, günümüzde artık bu teoremleri Loewner zincirler metodunu kullanarak daha kolay ispatlamak mümkündür. Son yıllarda Loewner zincirler metodunu kullanarak bu ünivalentlik kriterlerinin bazı genelleştirmeleri Wesolowski (1988), Răducanu (2004), Răducanu *et al.* (2004) ve Ovesea (Tudor) (2007, 2008) tarafından çalışılmıştır.

Ünivalentlik kriterlerinde amaç yeter şartlar doğrultusunda verilen bir fonksiyonun ünivalent olduğunu göstermektir. Dolayısıyla fonksiyon tiplerinin (veya tanım bölgelerinin) farklı oluşuna göre ünivalentlik kiterleri elde etmek amaç için önemlidir. Birim diskte tanımlı fonksiyonlar için yeter şart probleminin yanı sıra kapalı birim diskin dışı ve delinmiş açık birim diskte tanımlı meromorf fonksiyonlar için de yeter şart problemi bir o kadar önemlidir. Meromorf fonksiyonlar için yeter şart problemleri veya diğer bir ifadeyle ünivalentlik kriterleri ilk olarak Nehari (1949), Aksent'ev (1958) ve Becker (1973) tarafından verilmiştir. Daha sonra 1981 ile 1991 yılları arasında Lewandowski, Miazga ve Wesolowski bu konuya önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde ele alınan önemli problemlerden bir diğeri de analitik fonksiyonların farklı sınıflarında tanımlı integral operatörlerin özelliklerini araştırmaktır. İntegral operatörler üzerine ilk çalışma 1915 yılında Alexander tarafından verilmiştir. Daha sonra Libera (1965), Royster (1965), Causey (1967), Nunukawa

(1968), Bernardi (1969), Kim and Merkes (1972) ve Miller *et al*. (1978) gibi pek çok araştırmacı farklı integral operatörleri tanımlayarak bunların ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği gibi özelliklerini incelemişlerdir. Sonraki yıllarda ise birçok araştırmacı mevcut integral operatörlerini genelleştirerek onların ünivalentliğini ve analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları üzerindeki özelliklerini incelemişlerdir. Özellikle son yıllarda Pescar (1997a, 1997b, 1998a, 1998b, 2000, 2001, 2003, 2004, 2006), Frasin (2009) ve Pescar and Breaz (2010) ın çalışmaları bu alanda çalışanlara öncülük etmiştir.

Bizi bu konu üzerine çalışmaya sevkeden unsurlardan bazıları;

- Bunlardan ilki, mevcut ünivalentlik kriterlerinin verilen bir analitik fonksiyonun veya integral operatörlerinin ünivalentliğini test etmede yetersiz kalmasıdır. Dolayısıyla, burada doğan bu eksikliği kapatabilmek için yeni ünivalentlik kriterleri elde etme ya da mevcut ünivalentlik kriterlerini genişletme ihtiyacının ortaya çıkması,
- İkincisi, genel integral operatörlerin ünivalentliği için yeter şartlara duyulan ihtiyacın ortaya çıkması,
- Son olarak da, farklı fonksiyon sınıflarındaki fonksiyonların ünivalentliği için ünivalentlik kriterlerine duyulun ihtiyacın ortaya çıkmasıdır.

Bu çalışmada amacımız teorinin bu eksikliklerini az da olsa kapatmaya yardımcı olmaktır.

Sunulan bu tezde, analitik, meromorf fonksiyonlar ve genelleştirilmiş integral operatörleri için ünivalentlik kriterleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak hem pür matematikteki temel tanım ve kavramlar hem de analitik ve ünivalent fonksiyonlar ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci olarak, birim diskte tanımlı normalize edilmiş analitik fonksiyonlara bağlı olarak analitik fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca delinmiş açık birim diskte ve kapalı birim diskin dışında tanımlı meromorf fonksiyonların alt sınıflarının bazı özellikleri incelenmiştir.

Materyal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde, ilk olarak, single-slit dönüşümler, bu dönüşümlerin parametrik (Loewner) temsili ve bu temsilin Loewner diferensiyel denklemi ile arasındaki ilişkiyi anlatan bazı teoremler verilmiştir. İkinci olarak, tezin temelinde yatan subordinasyon ve Loewner zincirleri tanıtılarak ve bunlarla alakalı literatürde “Pommerenke Teoremi” olarak bilinen teorem verilmiştir. Üçüncü olarak, ünivalentlik kriteri ve integral operatörleri üzerine yapılan önemli çalışmalardan bazıları tarihsel seyir içerisinde özetlenmiştir.

Araştırma bulguları ve tartışma kısmı olan dördüncü bölümde, ilk olarak, analitik ve meromorf fonksiyonlar için Loewner zincirler metodu kullanılarak bazı ünivalentlik kriterleri, ikinci olarak da ünivalent, meromorf, yıldızıl ve konveks fonsiyonların genel integral operatörleri tanımlanarak bunların ünivalentliği incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bilimsel araştırmalarda kavram hiyerarşisi önem arzettiği için, çalışmada temel tanım ve teoremlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu temel kavramlardan özellikle araştırmamızda ihtiyaç duyduklarımız bu başlık altında sunulmuştur.

Tanım 2.1.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının r komşuluğu denir. $\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk, $\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı çember ve $\overset{\circ}{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = D(z_0, r) - \{z_0\}$ kümesine de z_0 noktasının delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç nokta): $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının bir r komşuluğu tamamen A kümesine ait ise yani $D(z_0, r) \subset A$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir. $r > 0$ olmak üzere $D(z_0, r)$ diski bir açık küme ve $\overline{D(z_0, r)}$ kümesi de kapalı kümedir.

Tanım 2.1.4 (Yakınsaklık): (f_n), $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f_n : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her bir $z \in A$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$ sayısı bulunabiliyorsa, (f_n) dizisi A kümesinde f fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir ve $f_n \to f$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ ile gösterilir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $z \in A$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε a bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, (f_n) dizisi A kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Düzgün yakınsak her dizi aynı zamanda noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersinin her zaman doğru olması gerekmez. Örneğin, genel terimi $f_n(z) = 1/nz$ olan dizi $0 < |z| < 1$ kümesinde noktasal yakınsak fakat düzgün yakınsak değildir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılılık): $A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. A kümesi boştan farklı, ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, A kümesine bağlantılıdır denir. Yani $A \subseteq Y \cup Z, A \cap Z \neq \varnothing$ ve $A \cap Y \neq \varnothing$, $A \cap Y \cap Z = \varnothing$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyor ise, A kümesine bağlantılı küme denir. Örneğin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ birer bağlantılı kümelerdir.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Kompleks düzlemde boştan farklı, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Basit bağlantılı küme): Tümleyeni bağlantılı olan kümeye basit bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyona $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları adı verilir.

Bir γ eğrisi için, $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir. Kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

Tanım 2.1.9 (Örtü): $A\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. $A\subset\{G_i\}_{i\in I}$ olacak şekilde açık kümelerin $\{G_i\}_{i\in I}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer $I_0\subset I$ sonlu ve $A\subset\bigcup_{i\in I_0} G_i$ ise $\{G_i\}_{i\in I_0}$ ailesine A kümesinin sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.10 (Kompaktlık): $A\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, A kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.1.11 (Dizisel kompaktlık): $A\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesindeki her dizi bu kümede bir noktaya yakınsayan bir alt diziye sahipse, A kümesine dizisel kompakt (kompakt) küme denir.

Tanım 2.1.12 (Süreklilik): $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0\in A$ olsun.

(i) Her $\varepsilon>0$ sayısı ve $|z-z_0|<\delta$ şartını sağlayan her $z\in A$ için $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon,z_0)>0$ sayısı varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

(ii) Her $\varepsilon>0$ sayısı ve $|z_1-z_2|<\delta$ şartını sağlayan her $z_1,z_2\in A$ için $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ olacak şekilde sadece ε a bağlı bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, f fonksiyonu A kümesinde düzgün süreklidir denir.

(iii) Her $r > 0$ sayısı için, f fonksiyonu her $D(z,r) \subset A$ diskinde düzgün sürekli ise f ye A kümesinde yerel düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.1.13 (Lipschitz süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z \in A$ olsun.

(i) Eğer $\forall\, w, z \in A$ için

$$\left| f(w) - f(z) \right| \leq K \left| w - z \right|$$

şartını sağlayacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı varsa, f ye A kümesi üzerinde Lipschitz süreklidir denir.

(ii) Her $r > 0$ sayısı için, f fonksiyonu her $D(z,r) \subset A$ diskinde Lipschitz sürekli ise f ye A kümesinde yerel Lipschitz süreklidir denir.

Tanım 2.1.14 (Sınırlılık): $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Her $z \in A$ için $\left| f(z) \right| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, f ye sınırlı fonksiyon denir.

Önerme 2.1.15: $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.

(i) f fonksiyonu A kümesinde diferensiyellenebilir ve her $z \in A$ için $\left| f'(z) \right| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu A da Lipschitz süreklidir.

(ii) Kompakt bir kümede sürekli her f fonksiyonu düzgün süreklidir.

(iii) Kompakt kümede sürekli her f fonksiyonu sınırlıdır.

Tanım 2.1.12 ve Tanım 2.1.13 den çıkarılacak sonuç şudur; her Lipschitz veya yerel Lipschitz sürekli fonksiyon aynı zamanda süreklidir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Ayrıca her Lipschitz sürekli fonksiyon aynı zamanda yerel Lipschitz süreklidir. Fakat tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 2.1.16: $\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonu yerel Lipschitz sürekli fakat Lipschitz sürekli değildir.

Gerçekten, f sürekli diferensiyellenebilir olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ ve $y \in (x-1, x+1)$ için üçgen eşitsizliği kullanılırsa $|y| \le |x| + 1$ yazılır ve bu eşitsizlikten

$$\sup_{y\in(x-1,x+1)} |f'(y)| = \sup_{y\in(x-1,x+1)} |2y| \le 2(|x|+1)$$

elde edilir. Şimdi $y, z \in (x-1, x+1)$ noktalarını göz önüne alalım. ξ sayısını y ile z arasında seçmek kaydıyla ortalama değer teoreminden

$$|f(z) - f(y)| = |f'(\xi)||z-y| \le \sup_{\theta\in(x-1,x+1)} |f'(\theta)||z-y|$$

yazılır. Yukarıdaki denklemlerden her $y, z \in (x-1, x+1)$ için

$$|f(z) - f(y)| \le 2(|x|+1)|z-y|$$

bulunur. Son eşitsizlikten $(x-1, x+1)$ aralığında f nin Lipschitz sabiti $K = 2(|x|+1)$ olur ve böylece fonksiyonun $\mathbb{R}$ de yerel Lipschitz sürekli olduğu görülür. Özel olarak $x \to \infty$ için $K \to \infty$ olduğu açıktır. Yani $z = 0$, $y \ne 0$ ve $y \to \infty$ için

$$K = \frac{|f(y) - f(0)|}{|y-0|} = |y| \to \infty$$

olur. Bu da f nin $\mathbb{R}$ de Lipschitz sürekli olmadığını gösterir.

Tanım 2.1.17 (Mutlak süreklilik): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $\{(x_k, y_k)\}_k$ ailesi de $[a,b]$ aralığının ayrık ve açık sonlu bir ailesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve (x_k, y_k) aralıklarının sonlu her kümesi için

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \delta$$

koşulu sağlandığında

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir. Eğer her $r > 0$ sayısı ve her $x \in [a,b]$ için, f fonksiyonu $D(x,r)$ komşuluğunda mutlak sürekli ise f ye $[a,b]$ aralığında yerel mutlak süreklidir denir (Heil 2007).

Önerme 2.1.18: Mutlak sürekli her f fonksiyonu süreklidir. Fakat bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 2.1.19:

(i) $f(x) = \sin x$ ve $f(x) = x + |x|$ fonksiyonları sonlu aralıklarda mutlak süreklidir.

(ii)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ise,} \\ x\sin(\pi/x), & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli (düzgün sürekli) fakat mutlak sürekli değildir. (İpucu: $x_k = \dfrac{2}{4k+1}$, $y_k = \dfrac{2}{4k}$ ve $\sum_{k=1}^{n} x_k > 1$ alınarak sonuç görülür.)

Önerme 2.1.20: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z,t) : \mathbb{U} \times A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.

(i) Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için her $[a,b] \subset A$ kümesinde $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ sınırlı ise f fonksiyonu A kümesinde yerel mutlak süreklidir.

(ii) Eğer f fonksiyonu her $[a,b] \subset A$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ise f, A kümesinde yerel mutlak süreklidir.

Önerme 2.1.21: Bir f fonksiyonu için aşağıdaki gerektirmeler doğrudur;

$f -$ lipschitz sürekli $\Rightarrow$ $f -$ mutlak sürekli $\Rightarrow$ $f -$ düzgün sürekli $\Rightarrow$ $f -$ süreklidir.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Analitik fonksiyon): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir (veya türevlenebilirdir) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna f fonksiyonun z_0 noktasındaki türevi adı verilir. f fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.2 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0, 1, 2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0) / n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

Bunun yanı sıra bir f fonksiyonu, analitik olmadığı bazı noktaların civarındaki halka bölgelerde de seri ile temsil edilebilir.

Tanım 2.2.3:

(i) f fonksiyonunun analitik olduğu $A(R_1;R_2)=\{z : R_1<|z-z_0|<R_2\}$ halka bölgesindeki

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

serisine, f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Tanım 2.2.4:

(i) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler noktası denir.

(ii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\overset{\circ}{D}(z_0,r)$ delinmiş bir komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.

(iii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\overset{\circ}{D}(z_0,r)$ her delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık olmayan singüler noktası denir.

Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir. Bu seri göz önüne alınarak ayrık singüler noktalar, kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta diye sınıflandırılır. Biz burada sadece kutup noktasından bahsedeceğiz.

Tanım 2.2.5 (Kutup noktası): z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.6 (Meromorf fonksiyon): Bir f fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.2.7 (Maksimum Prensibi): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde maksimum değer alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 2.2.8: A sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonuda bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.9 (Schwarz lemması): f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır. (Ponnusamy and Silverman 2006).

Lemma 2.2.10 (Genelleştirilmiş Schwarz lemması): f, $\mathbb{U}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ diskinde analitik ve M bir sabit olmak üzere $|f(z)| < M$ olsun. Eğer f, $z = 0$ için m den daha büyük mertebeden (katlıkları dahil) bir tek sıfıra sahipse bu durumda

$$\left| f(z) \right| \leq \frac{M}{R^m} \left| z \right|^m, \quad \left(z \in \mathbb{U}_R \right)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} \left(M / R^m \right) z^m$ fonksiyonu ile sağlanır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 2.2.11 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren 1983).

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.12: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0.$ Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.13:

(i) $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{ z : 1 < \left| z \right| < 2, 0 < \arg z < 3\pi/2 \}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}} \right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}} \right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

(ii) $f(z)=e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde $|k|>\pi$ için yerel ünivalent fakat ünivalent değildir. Gerçekten $f(z)=e^{kz}$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ da analitik ve $|k|>\pi$ olmak üzere her $z_0 \in \mathbb{U}$ için $f'(z)=ke^{kz} \neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat $k=2\pi$ için

$$f\left(\frac{1}{2}i\right)=f\left(-\frac{1}{2}i\right)=-1$$

olduğundan $f(z)=e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ diskinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.12 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.14 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur.

Teorem 2.2.15: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

Tanım 2.2.16 (Normal aile): $\mathcal{F}$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{F}$ ailesindeki her (f_n) dizisi A nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak bir alt diziye sahipse $\mathcal{F}$ ye normal aile denir (Duren 1983).

$\mathcal{F}$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan analitik fonksiyonların bir ailesi olmak üzere, her $f \in \mathcal{F}$ ve her $z \in A$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde ortak bir $M > 0$ sayısı varsa, $\mathcal{F}$ ailesine düzgün sınırlıdır denir. Eğer $r > 0$ olmak üzere, $\mathcal{F}$ ailesi her $D(z,r) \subset A$ diskinde düzgün sınırlı ise $\mathcal{F}$ ye A da yerel düzgün sınırlıdır denir. $\mathcal{F}$ yerel düzgün sınırlı ise aynı zamanda yerel sınırlıdır. Ayrıca yerel düzgün sınırlı ailelerin düzgün sınırlı olması gerekmez. Örneğin; $f_n(z) = 1/(1-z^n)$ fonksiyonlar dizisi $|z| < 1$ de yerel düzgün sınırlı fakat düzgün sınırlı değildir. $\mathcal{F}$ ailesi yerel düzgün sınırlı ise Cauchy-Türev formülü gereğince $\widetilde{\mathcal{F}} = \{f^{(n)} : f \in \mathcal{F}\}$ türev fonksiyonlarının ailesi de aynı zamanda yerel düzgün sınırlıdır. Bu durum bize önemli bir teorem olan Montel teoreminin çıkışına sebep olur.

Lemma 2.2.17: $\mathcal{F}$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. $\mathcal{F}$ ailesinin A da yerel düzgün sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{F}$ nin A nın her kompakt alt kümesinde düzgün sınırlı olmasıdır (Goodman 1983).

Lemma 2.2.18: Sınırlı fonksiyonların her düzgün yakınsak dizisi aynı zamanda düzgün sınırlıdır (Rudin 1976).

Teorem 2.2.19 (Montel Teoremi): Analitik fonksiyonların her yerel düzgün sınırlı ailesi normaldir (Duren 1983).

Örneğin; $\mathcal{F}_1=\{z^n : z\in\mathbb{U},\ n=1,2...\}$ ve $\mathcal{F}_2=\{z/n : z\in\mathbb{C},\ n=1,2...\}$ aileleri normaldir fakat kompakt değildir.

Montel teoreminin terside doğrudur, yani her normal aile yerel düzgün sınırlıdır. Normal ailedeki fonksiyonlar için, her kompakt alt küme üzerinde noktasal yakınsama aynı zamanda düzgün yakınsamadır. Bunu ifade eden en önemli teorem Vitali teoremidir.

Teorem 2.2.20 (Vitali Teoremi): f_n fonksiyonları $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve yerel sınırlı olsunlar. Eğer (f_n) dizisi A da bir kapanış noktasına sahip bir kümenin her noktasında yakınsak ise (f_n) dizisi A nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır (Duren 1983).

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}\ (\mathcal{D}\neq\mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.21 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}\ (\mathcal{D}\neq\mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0\in\mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine $\mathbb{U}$ açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0,\quad f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,\quad (z\in\mathbb{U}) \tag{2.2}$$

şeklini alır. Burada (2.2) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli olan bazı temel fonksiyon sınıfları

$$\mathcal{A}=\left\{ f:\forall z\in\mathbb{U}\text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon}\right\}$$

$$\mathcal{S}=\left\{ f\in\mathcal{A}:\forall z\in\mathbb{U}\text{ için } f-\text{ünivalent}\right\}$$

$$\Pi=\left\{ g:\forall\zeta\in\mathring{\mathbb{U}}\text{ için } g(\zeta)=\frac{1}{\zeta}+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\zeta^n \text{ şeklindeki meromorf fonksiyon}\right\}$$

$$\Pi_0=\left\{ g:\forall\zeta\in\mathring{\mathbb{U}}\text{ için } g(\zeta)\in\Pi \text{ ve } b_0=0\right\}$$

$$\widetilde{\Sigma}=\left\{ g\in\Pi:\forall\zeta\in\mathring{\mathbb{U}}\text{ için } g-\text{ünivalent}\right\}$$

$$\widetilde{\Sigma}_0=\left\{ g\in\Pi_0:\forall\zeta\in\mathring{\mathbb{U}}\text{ için } g-\text{ünivalent}\right\}$$

$$\mathcal{M}=\left\{ h:\forall\xi\in\Delta\text{ için } h(\xi)=\xi+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\xi^n} \text{ şeklindeki meromorf fonksiyon}\right\}$$

$$\mathcal{M}_0=\left\{ h:\forall\xi\in\Delta\text{ için } h(\xi)\in\mathcal{M} \text{ ve } c_0=0\right\}$$

$$\Sigma=\left\{ h\in\mathcal{M}:\forall\xi\in\Delta\text{ için } h-\text{ünivalent}\right\}$$

$$\Sigma_0=\left\{ h\in\mathcal{M}_0:\forall\xi\in\Delta\text{ için } h-\text{ünivalent}\right\}$$

şeklinde sıralanabilir. Çalışmamız boyunca Σ ve $\widetilde{\Sigma}$ sınıflarına sırasıyla Δ ve $\mathring{\mathbb{U}}$ bölgelerinde ünivalent meromorf fonksiyonların sınıfları diyeceğiz. $h\in\Sigma$ fonksiyonu Δ bölgesini, bağlantılı kompakt bir kümenin tümleyenine resmeder. Bunların yanı sıra $\mathcal{S}$ sınıfı ile Σ ve $\widetilde{\Sigma}$ sınıfları arasında yakın bir ilişki vardır. Örneğin;

- Eğer $f \in \mathcal{S}$ ve $\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$ her $\xi \in \Delta$ için $h(\xi) = \dfrac{1}{f(1/\xi)} + \beta \in \Sigma$ dır. (2.3)

- Eğer $h \in \Sigma$ ve $\beta \in \mathbb{C} - h(\Delta) \Rightarrow$ her $z \in \mathbb{U}$ için $f(z) = \dfrac{1}{h(1/z) - \beta} \in \mathcal{S}$ dır. (2.4)

- Eğer $f \in \mathcal{S}$ ve $\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$ her $\zeta \in \mathring{\mathbb{U}}$ için $g(\zeta) = \dfrac{1}{f(\zeta)} + \beta \in \widetilde{\Sigma}$ dır. (2.5)

- Eğer $g \in \widetilde{\Sigma}$ ve $\beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$ her $z \in \mathbb{U}$ için $f(z) = \dfrac{1}{g(z) - \beta} \in \mathcal{S}$ dır. (2.6)

Ayrıca $\mathcal{S}$ ve Σ sınıflarına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir:

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\Re w > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

(iv) $h(\xi) = \xi - 2 + \dfrac{1}{\xi}$ fonksiyonu Δ bölgesini $\mathbb{C} - [-4, 0]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \quad \text{ve} \quad f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{ve} \quad f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2 - 2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z=\dfrac{1+i}{2}\in\mathbb{U}$ noktasında $f_1'(z)+f_2'(z)=0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.1: $f\in\mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren 1983):

(i) Eşlenik alma: $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a}_2z^2+...$ ise, $g\in\mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z)=e^{-i\theta}f(e^{-i\theta}z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_ne^{i(n-1)\theta}z^n,\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0<r<1$ olmak üzere

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nr^{n-1}z^n,\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0\in\mathbb{U}$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)},\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$ $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi\circ f\in\mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w\notin f(\mathbb{U})$ olsun. Bu durumda

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w},\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n. kök dönüşümü: Eğer $n=2,3,...$ ise

$$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+...,\quad (z\in\mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Ayrıca $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir. Bu eşitsizlikler ana teoremlerin ispatında oldukça önemli bir yere sahiptir.

Lemma 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilsin. Her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{z}{f(z)} - 1 + |z|^2 \right| \le 2(1+|z|)$$

eşitsizliği sağlanır (Wesolowski 1990).

Lemma 2.3.3: $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilsin. Her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{z}{f(z)} - 1 \right| \le 2|z| + |z|^2$$

eşitsizliği sağlanır (Miazga and Wesolowski 1989).

Tanım 2.3.4: $\mathbb{U}$ birim diskinde $p(0)=1,$ $\Re p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z),\ z \in \mathbb{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}_0,\ n \ge 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.5: $\mathbb{U}$ birim diskinde $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Graham and Gohr 2003).

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)},\quad \phi(z)\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.6: $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.7: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z)\in\mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)}\in\mathcal{P}$$

dır. Ayrıca $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{S}^*\Rightarrow |a_n|\le n\ (n=2,3...)$ yazılır (Pommerenke 1975).

Lemma 2.3.8: $\varphi\in\mathcal{S}^*$ olsun. Bu durumda z_0, $\mathbb{U}$ diskinde sabit bir nokta olmak üzere

$$\psi(z)=\frac{zz_0\varphi\left(\dfrac{z+z_0}{1+z\overline{z}_0}\right)}{\varphi(z_0)(z+z_0)(1+z\overline{z}_0)}$$

biçiminde tanımlanan ψ fonksiyonu da $\mathcal{S}^*$ sınıfındadır. (Libera and Ziegler 1972).

Örneğin; $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}\in\mathcal{S}^*$ dir.

Tanım 2.3.9: $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu konveks bir kümeyi, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.10: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in\mathcal{P}$$

dır. Ayrıca $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{C}\Rightarrow|a_n|\le 1\ (n=2,3...)$ yazılır (Pommerenke 1975).

Ayrıca Lemma 2.3.8 ve Alexander gerektirmesi olarak bilinen $f\in\mathcal{C}\Leftrightarrow zf'\in\mathcal{S}^*$ kullanılarak aşağıdaki lemmayı yazabiliriz.

Lemma 2.3.11: $\varphi_*\in\mathcal{C}$ olsun. Bu durumda z_0, $\mathbb{U}$ diskinde sabit bir nokta olmak üzere

$$\psi_*'(z)=\frac{\varphi_*'\left(\dfrac{z+z_0}{1+z\overline{z}_0}\right)}{\varphi_*'(z_0)(1+z\overline{z}_0)^2}$$

biçiminde tanımlanan ψ_* fonksiyonu da $\mathcal{C}$ sınıfındadır (Libera and Ziegler 1972).

Örneğin; $f(z)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)\in\mathcal{C}$ dir.

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorinde önemli bir yer işgal eden subordinasyon, Hadamard çarpım ve türev operatörü kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.12: f ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. Eğer g ünivalent ise $f \prec g \;\Leftrightarrow\; f(0)=g(0)$ ve $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$ olmasıdır (Duren 1983).

Subordinasyon prensibi: Eğer f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(\mathbb{U}) \subset f(\mathbb{U})$ ise, bu durumda $\mathbb{U}_r$ diskinde her $r<1$ için $|g'(0)| \le |f'(0)|$ ve $g(\mathbb{U}_r) \subset f(\mathbb{U}_r)$ dir (Duren 1983).

Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z|\le r} |f(z)| \le \max_{|z|\le r} |g(z)|, \quad (r \in (0,1))$$

yazılır. Ayrıca

$$p(z) \in \mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

ve

$$\phi(z) \in \Omega \;\Leftrightarrow\; \phi(z) \prec z$$

olmasıdır.

Tanım 2.3.13: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımları

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n=(g*f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada "$*$" Hadamard çarpımını gösterir (Duren 1983).

Tanım 2.3.14 (Ruscheweyh türev operatörü): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için Ruscheweyh türev operatörü, $\mathcal{R}^{\lambda} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$\mathcal{R}^{\lambda} f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f(z), \quad \left(\lambda > -1,\, z \in \mathbb{U}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\lambda = n \; (n \in \mathbb{N}_0)$ seçildiğinde yukarıdaki tanım

$$\mathcal{R}^{n} f(z) = \frac{z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \{z^{n-1} f(z)\}$$

eşitliğine indirgenir. Son ifadenin birkaç terimi açıkça yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{0} f(z) &= f(z) \\ \mathcal{R}^{1} f(z) &= zf'(z) \\ \mathcal{R}^{2} f(z) &= \frac{z}{2}\{2f'(z) + zf''(z)\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde devam eder. Ayrıca $\mathcal{R}^{n}$ için rekürans formülü

$$z[\mathcal{R}^{n} f(z)]' = (n+1)\mathcal{R}^{n+1} f(z) - n\mathcal{R}^{n} f(z) \tag{2.7}$$

biçiminde de yazılabilir (Ruscheweyh 1975).

Tanım 2.3.15 (Sălăgean türev operatörü): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için Sălăgean türev operatörü $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $S^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} S^{0} f(z) &= f(z) \\ S^{1} f(z) &= Sf(z) = zf'(z) \\ S^{2} f(z) &= S\left(Sf(z)\right) = zf'(z) + z^2 f''(z) \\ &\vdots \\ S^{n} f(z) &= S\left(S^{n-1} f(z)\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca S^n için rekürans formülü

$$z\left(S^{n} f(z)\right)' = S^{n+1} f(z) \tag{2.8}$$

biçiminde de yazılabilir (Sălăgean 1983).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremlerin yanı sıra konunun daha iyi anlaşılmasına yardımcı olmak açısından tarihsel gelişim incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

1923 yılında Loewner, $\mathbb{U}_r$ diskini düzlemde bir yayın tümleyeni üzerine dönüştüren fonksiyonlar üzerine çalışmasından yola çıkarak, geometrik fonksiyonlar teorisinde single-slit dönüşümlerin önemini ortaya çıkardı. Bu konuyla ilgili en önemli teoremlerden birisi single-slit dönüşümlerin tümünün $\mathcal{S}$ sınıfında yoğun olması ile ilgili çalışmadır. Bu teoremin ispatında önemli bir yere sahip olan Caratheodory yakınsaklık teoremi single-slit dönüşümlerde, özellikle parametrik temsilin oluşturulmasında önemli bir rolü vardır. Ayrıca Loewner'in diğer bir önemli çalışması da bütün single-slit dönüşümleri içeren $\mathcal{S}$ nin yoğun bir alt sınıfında bir parametrik temsil ile verilen fonksiyonlar için bir diferensiyel denklem kurmasıydı. Bu denklem diğer yöntemlerle kolaylıkla elde edilemeyen kesin eşitsizlikleri daha kolay göstermek için önemli bir araçtır. Özellikle 1985 yılında ünlü Bieberbach tahmininin ispatında merkezi bir rol oynar. Bununla birlikte kullanılan bu metoda literatürde Loewner metodu da denir. Kufarev (1947) Loewner diferensiyel denkleminin daha genel halini ve Pommerenke (1965) Loewner zincirler metodunu tanımlayarak verilen bir fonksiyonun ünivalentliğinin araştırılmasında, temelinde de Loewner diferensiyel denklemini içeren önemli bir teorem vermiştir.

3.1. Caratheodory Yakınsaklık Teoremi

$D_1, D_2, \ldots$ bölgeleri $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde orijini içeren $\mathbb{C}$ den farklı basit bağlantılı bölgelerin bir dizisi olsun. Ayrıca $w = f_n(z)$ fonksiyonu $f_n(0) = 0$ ve $f_n'(0) > 0$ olacak biçimde $\mathbb{U}$ birim diskini D_n üzerine konform olarak dönüştürsün. Carathedory yakınsaklık teoremi, f_n fonksiyon dizilerinin analitik davranışı ile bunların D_n değer kümelerinin geometrik davranışı arasında bir bağlantı kurar. Teorem, D_n bölgelerinin oluşturduğu dizinin yakınsaklığı ile alakalıdır. Burada iki durum vardır. İlk olarak, orijinin D_n bölgelerinin arakesitinin bir iç noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği orijini ihtiva eden en büyük D bölgesidir. Ayrıca D nin her kompakt alt kümesi D_n bölgelerinin sonlu sayıdaki bölgesinde olacaktır. Son olarak, eğer orijin D_n bölgelerinin bir iç noktası değilse $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği $D=\{0\}$ dır. $\{D_n\}$ dizisinin her alt dizisi aynı çekirdeğe sahipse, bu durumda $\{D_n\}$ dizisi bu dizinin çekirdeği olan D ye yakınsaktır denir.

Teorem 3.1.1 (Caratheodory yakınsaklık teoremi): $\{D_n\}$, $n=1,2,...$ için $0\in D\subset\mathbb{C}\ (D\neq\mathbb{C})$ olacak şekilde basit bağlantılı bölgelerin bir dizisi olsun. f_n fonksiyonları da $f_n(0)=0,\ f_n'(0)>0$ koşulları altında $\mathbb{U}$ birim diskini D_n üzerine konform olarak dönüştürsün. Ayrıca D de $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği olsun. Bu durumda $\mathbb{U}$ diskinin her kompakt alt kümesinde $f_n\to f$ yakınsamasının düzgün olması için gerek ve yeterli şart $D_n\to D\neq\mathbb{C}$ olmasıdır. Burada yakınsamanın iki farklı durumu vardır. Eğer $D=\{0\}$ ise bu durumda $f=0$ dır. Eğer $D\neq\{0\}$ ise bu durumda da D basit bağlantılı bir bölgedir. Ayrıca $f:\mathbb{U}\to D$ konform bir dönüşüm ve D nin her kompakt alt kümesinde $f_n^{-1}\to f^{-1}$ yakınsaması düzgündür. (Graham and Kohr 2003)

3.2. Slit Dönüşümlerin Parametrik Temsili

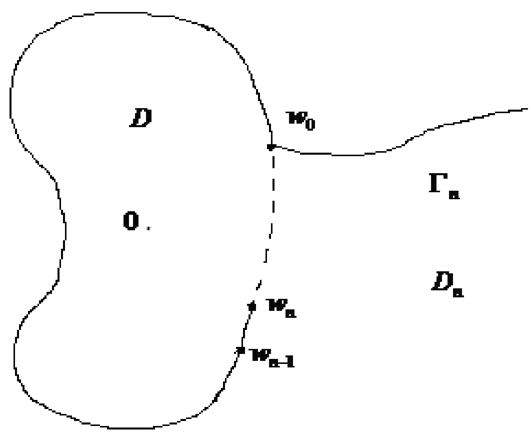
Slit dönüşüm, bir bölgeyi Jordan yaylarının bir kümesi çıkarılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak resmeden bir dönüşümdür. Single-slit dönüşüm ise görüntü kümesi bir Jordan yayının tümleyeni olan bir slit dönüşümdür. Burada temel olarak $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde tanımlanmış single-slit dönüşümlerle ilgileneceğiz. Loewner yöntemi single-slit dönüşümlerin $\mathcal{S}$ sınıfında yoğun olma düşüncesine dayanmaktadır. Başka bir ifadeyle $\mathcal{S}$ sınıfındaki her fonksiyon, single-slit dönüşümlerle $\mathbb{U}$ diskinin kompakt alt kümeleri üzerinde $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna düzgün olarak yaklaştırılabilir. Aşağıdaki teorem bu düşünceyi tam olarak ifade eder.

Teorem 3.2.1: Her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $\mathbb{U}$ nun her kompakt alt kümesinde $f_n \to f$ düzgün yakınsayan $f_n \in \mathcal{S}$ single-slit dönüşümlerin bir dizisi vardır (Duren 1983).

İspat: Teoremin ispatını yapabilmek için

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon, \quad |z| \le \rho < 1$$

olacak biçimde bir $g \in \mathcal{S}$ single-slit dönüşüm oluşturmak yeterlidir. Burada $f \in \mathcal{S}$, ε ve $\rho < 1$ pozitif sayılardır. İlk olarak her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ diskini bir analitik Jordan eğrisinin içine dönüştüren $\mathcal{S}$ deki bir fonksiyon vasıtasıyla kompakt kümeler üzerinde düzgün olarak yaklaştırılabilir. Örneğin $0 < r < 1$ olmak üzere $f(rz)/r$ genişlemeleri böyle bir yaklaşımı sağlayabilir. Şimdi $\mathbb{U}$ birim diskini bir analitik C Jordan eğrisiyle sınırlı bir D bölgesi üzerine dönüştüren bir $f \in S$ fonksiyonu göz önüne alalım. Γ_n, Şekil 3.1 de gösterildiği gibi sonsuzdan C üzerindeki bir w_0 noktasına kadar ve daha sonra C etrafındaki yolun w_n ye kadar ki parçası olan bir Jordan yayı olsun. D_n, Γ_n nin tümleyeni ve g_n de $g_n(0) = 0, g_n{}'(0) > 0$ koşulları altında $\mathbb{U}$ birim diskini D_n üzerine konform olarak dönüştüren bir fonksiyon olsun.



Şekil 3.1. Γ_n Jordan yayı

w_n bitim noktaları, $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ ve $w_n \to w_0$ olacak biçimde seçilsin. Buradan $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği D ve $D_n \to D$ olduğu açıktır. Böylece, Caratheodory yakınsaklık teoreminden dolayı $\mathbb{U}$ diskinin kompakt alt kümeleri üzerinde $g_n \to f$ yakınsaması düzgündür. Dolayısıyla, Cauchy türev formülünden $g_n'(0) \to f'(0) = 1$ olacağından,

$$h_n = \frac{g_n}{g_n'(0)} \in \mathcal{S}$$

fonksiyonları $\mathbb{U}$ diskinin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsayan single-slit dönüşümler olduğu görülür. Buda teoremin ispatını tamamlar.

Bu bölümde ayrıca Loewner teoride önemli bir yere sahip olan single-slit dönüşümlerin Loewner temsili (parametrik temsili) oluşturuldu. Bu temsil aşağıdaki gibidir.

$f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini sonlu bir w_0 noktasından sonsuzluğa uzanan Γ Jordan yayının tümleyeni olan D bölgesi üzerine dönüştürsün. $0 \le t < T$ olmak üzere $w = \psi(t)$ fonksiyonu, $s \ne t$ için $\psi(0) = w_0$ ve $\psi(s) \ne \psi(t)$ koşulları ile Γ eğrisinin sürekli bir parametrik temsili olsun. Γ_t, Γ nın $\psi(t)$ den ∞ a kadar olan kısmı ve D_t de Γ_t nin tümleyeni olsun. Bu takdirde eğer $s < t$ ise $D_s \subset D_t$ ve $D_0 = D$ olur. Diğer bir taraftan

$$g(z,t) = \beta(t)\left\{z + b_2(t)z^2 + b_3(t)z^3 + \ldots\right\}$$

fonksiyonu $g(0,t) = 0$ ve $g'(0,t) = \beta(t) > 0$ şartlarını sağlayan ve $\mathbb{U}$ birim diskini D_t üzerine konform olarak dönüştürsün. g fonksiyonunun Taylor katsayılarının tümü, Cauchy formülü ve Caratheodory yakınsama teoreminde gösterildiği gibi t nin sürekli fonksiyonlarıdır. Özellikle $\beta(t)$ sürekli bir fonksiyondur Ayrıca $g(z,0) = f(z)$ olduğundan $\beta(0) = 1$ olacağı açıktır. Schwarz teoreminin değişik bir yorumu olan subordinasyon prensibinden $\beta(t)$ nin kesin olarak artan olduğu görülür. Çünkü $s < t$ ise $D_s \subset D_t$ $\left(D_s \ne D_t\right)$ olduğundan subordinasyonun tanımından her $z \in \mathbb{U}$ için $g(z,s) = g(\phi(z),t)$ olacak şekilde bir $\phi(0) = 0$ ve $\left|\phi(z)\right| < 1$ şartlarını sağlayan $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ fonksiyonu vardır. Burada ϕ bir Schwarz fonksiyonu olduğundan subordinasyon prensibinden $|\phi'(0)| < 1$ ve $|\phi(z)| < |z|$ (burada kesin eşitsizliğinin olmasının sebebi $D_s \neq D_t$ olmasından dolayıdır) eşitsizlikleri sağlanır. Böylece

$$\beta(s) = g'(0,s) = \phi'(0)g'(\phi(0),t) = \phi'(0)g'(0,t) < g'(0,t) = \beta(t)$$

elde edilir. Burada $\phi'(0) < 1$ olduğu kullanıldı. Çünkü $g'(0,s) = \beta(s) > 0$ olduğundan $\phi'(0) > 0$ dır. Sonuç olarak $\beta(t)$ nin kesin olarak artan olduğu görülür. Böylece Γ eğrisinin parametrik temsili $0 \le t < T$ olmak üzere $\beta(t) = e^t$ olarak yeniden seçilebilir. Bunu görmek için $w = \tilde{\psi}(s) = \psi(\sigma(s))$ ifadesi Γ nın yeni bir parametrizasyonu, $\tilde{\beta}(s) = \beta(\sigma(s))$ verilen bir baş katsayısı olsun. Bu takdirde eğer $\sigma(s) = \beta^{-1}(e^s)$ olarak seçilirse $\tilde{\beta}(s) = e^s$ olur. Parametrik temsilin bu seçimi ile son nokta olan T sonsuz olmalıdır. Bu durum, aşağıdaki ifadeden daha kolay bir biçimde anlaşılabilir. M pozitif bir sayı olsun. Bu takdirde Γ_t, yeteri kadar T ye yakın tüm t değerleri için $|w| = M$ çemberinin tamamıyla dışında kalır. Maksimum modül teoreminden

$$\left|\frac{z}{g(z,t)}\right| \le \frac{1}{M}, \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Özellikle T ye yeteri kadar yakın tüm t değerleri için

$$M \le |g'(0,t)| = e^t$$

yazılır. M keyfi olduğundan $t \to T$ iken $e^t \to \infty$ olduğunu gösterir. Böylece $T = \infty$ olur.

Özet olarak, çıkarılmış Γ yayı için $w = \psi(t)$ parametrik temsili

$$g(z,t) = e^t \left\{ z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t) z^n \right\}, \quad (0 \le t < \infty) \tag{3.1}$$

biçiminde seçilir. Buna Γ nın standart parametrizasyonu denir. Burada her $b_n(t)$ katsayısı t nin sürekli bir fonksiyonudur. Şimdi $\mathbb{U}$ birim diskini, $\mathbb{U} - \{\mathbb{U} \text{ nun sınırından uzanan bir yay}\}$ kümesine konform olarak dönüştüren

$$f(z,t) = g^{-1}(f(z),t) = e^{-t} \left\{ z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n \right\}, \quad (0 \le t < \infty) \tag{3.2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca $f(z,0)=z$ bir özdeşlik fonksiyonudur. Her bir $a_n(t)$ katsayısı, $b_2(t),...,b_n(t)$ nin bir polinom fonksiyonudur. Böylece $a_n(t)$ de sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla $t\to\infty$ iken

$$e^t f(z,t)\to f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$$

yakınsamasının $\mathbb{U}$ birim diskinin kompakt her alt kümesi üzerinde düzgün olduğu ve bunun da $a_n(t)\to a_n$ olmasını gerektireceği görülebilir.

Şimdi $\mathcal{S}$ sınıfındaki single-slit dönüşümler için yapısal bir formül sağlayan Loewner yöntemi için temel oluşturan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.2: $f\in\mathcal{S}$, Γ Jordan yayı çıkarılmış bir single-slit dönüşüm olsun. $0\le t<\infty$ olmak üzere $w=\psi(t)$, Γ nın standart parametrizasyonu ve $f(z,t)$ de (3.2) deki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde $f(z,t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-f(z,t)\frac{1+\kappa f(z,t)}{1-\kappa f(z,t)} \tag{3.3}$$

diferensiyel denklemini sağlar. Burada $\kappa=\kappa(t)$, $0\le t<\infty$ olmak üzere $|\kappa(t)|=1$ eşitliğini sağlayan kompleks değerli sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinin kompakt her alt kümesi üzerinde

$$\lim_{t\to\infty} e^t f(z,t)=f(z) \tag{3.4}$$

yakınsaması düzgündür (Duren 1983).

Yukarıda verilen (3.3) diferensiyel denklemi Loewner adi diferensiyel denklemi olarak bilinmektedir. Daha sonra Kufarev (1943), (3.3) denklemini daha genel olarak $p\in\mathcal{P}$ olmak üzere

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-f(z,t)p\big(f(z,t),t\big)$$

biçiminde verdi.

3.3. Subordinasyon ve Loewner Zincirleri

Bu bölümde ilk olarak tezin ana unsuru olan Loewner zincirlerini diğer bir değişle ünivalent subordinasyon zincirlerini tanımlayarak, bunların bazı özelliklerini vereceğiz. Bu konuda ilk çalışma 1965 yılında Pommerenke tarafından verilmiştir.

Loewner zincirler teorisinde, eğer h fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve aynı zamanda başka bir değişkene de (reel) bağlı bir fonksiyon ise, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $\dfrac{\partial h}{\partial z}(z,t)$ kısmi türevi bazen $h'(z,t)$ olarak gösterilir. Aşağıdaki teoremlerin ispatında kolaylık açısından $h'(z,t)$ kullanımı tercih edildi.

Tanım 3.3.1: $f : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $f(z,t)$ fonksiyonu için

(i) $f(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik,

(ii) Her $t \geq 0$ için $f'(0,t)$ $\left(f'(0,t) \neq 0\right)$ sürekli bir fonksiyon, $\left|f'(0,t)\right|$ kesin artan ve $t \to \infty$ iken $f'(0,t) \to \infty$,

(iii) Her $z \in \mathbb{U}$ ve $0 \leq s \leq t < \infty$ için $f(z,s) \prec f(z,t)$

şartları sağlanıyorsa $f(z,t)$ fonksiyonuna subordinasyon zinciri denir (Graham and Kohr 2003).

Burada, $f(z,s) \prec f(z,t)$, $0 \leq s \leq t < \infty$ subordinasyonunun anlamı şudur:

$$f(z,s) = f(\upsilon(z,s,t),t), \quad (z \in \mathbb{U},\ 0 \leq s \leq t < \infty) \tag{3.5}$$

olacak şekilde $\upsilon = \upsilon(z,s,t)$ Schwarz fonksiyonlarının bir ailesinin var olmasıdır. Buradaki $\upsilon = \upsilon(z,s,t)$ fonksiyonuna subordinasyon zinciri için geçiş fonksiyonu denir. Eğer her $t \geq 0$ için $f(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalent ise, bu durumda $f(z,t)$ subordinasyon zincirine **Loewner zinciri** (ünivalent subordinasyon zinciri) denir. Burada $f(0,t) = 0$, $f'(0,t) = e^t$, $t \geq 0$ şartlarına $f(z,t)$ subordinasyon zincirinin normalleştirme şartları denir. Tanım 3.3.1 den açıktır ki $f(z,t)$ fonksiyonu, subordinasyon zinciri olması durumunda $t \geq 0$ için $\mathbb{U}$ da,

$$f(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)z^n=a_0(t)+a_1(t)z+a_2(t)z^2+... \qquad (3.6)$$

şeklinde bir açılımına sahiptir. Bu seri genel subordinasyon zinciri olarak adlandırılır. Ayrıca normalleştirme şartları altında genel subordinasyon zinciri

$$f(z,t)=e^t z+a_2(t)z^2+...$$

şeklinde olur. Buna standart subordinasyon zinciri denir.

Örneğin; $f(z,t)=\dfrac{e^t z}{(1-z)^2}$ ve $g(z,t)=e^t g(z)$ (g -starlike) fonksiyonları birer Loewner zinciridir.

$f(z,t)$ Loewner zinciri için, f_t fonksiyonu $f_t=f(z,t)$ şeklinde tanımlanan bir ünivalent fonksiyon olsun. Bu Loewner zincirini, $\mathbb{U}$ da ünivalent fonksiyonların $\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}$ parametrelenmiş bir ailesi olarak düşünebiliriz. Burada f_0 ilk eleman ve $t\to\infty$ iken fonksiyonların görüntüleri de kompleks düzleme doğru genişler. Ayrıca $f(z,t)$ bir Loewner zinciri ise $\forall z\in\mathbb{U}$ ve $0\le s\le t<\infty$ için $f(z,s)=f(\upsilon(z,s,t),t)$ olacak şekilde tek bir $\upsilon=\upsilon(z,s,t)$ Schwarz fonksiyonlarının ailesi vardır. Normalleştirme şartları altında $0\le s\le t<\infty$ için $\upsilon'(0,s,t)=e^{s-t}$ yazılır. Bunun yanı sıra f_t ve f_s fonksiyonları $\mathbb{U}$ da ünivalent olduklarında, $\upsilon(z,s,t)$ geçiş fonksiyonu da $\mathbb{U}$ da ünivalenttir. Yukarıda verilenlerden $f(z,t)$ subordinasyon zincirinin $\upsilon=\upsilon(z,s,t)$ geçiş fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $\upsilon(z,s,t)$ ünivalent ve $\upsilon(0,s,t)=0$,

(ii) Her $z\in\mathbb{U}$ için $|\upsilon(z,s,t)|\le|z|$ ve $\upsilon'(0,s,t)=e^{s-t}$,

(iii) Her $z\in\mathbb{U}$ için $\upsilon(z,s,s)=z$,

(iv) Eğer $s\le t\le u$ ise $\forall z\in\mathbb{U}$ için $\upsilon(z,s,u)=\upsilon\big(\upsilon(z,s,t),t,u\big)$.

Şimdi ana sonuçların ispatında kullanılacak bazı teorem ve lemmaları verelim. Aşağıdaki eşitsizlikler, Loewner (normalleştirilmiş) zincirinin, t de yerel Lipschitz, z de ise yerel düzgün sürekli olduğunu göstermek açısından oldukça faydalıdır.

Lemma 3.3.2: Eğer $f(z,t)$ bir Loewner zinciri ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır (Graham and Kohr 2003):

$$e^t \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z,t)| \le e^t \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad (z \in \mathbb{U}, t \ge 0) \quad \text{(Growth)} \tag{3.7}$$

$$e^t \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z,t)| \le e^t \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \quad (z \in \mathbb{U}, t \ge 0) \quad \text{(Distortion)} \tag{3.8}$$

$$|f(z,t) - f(z,s)| \le \frac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t - e^s), \quad (z \in \mathbb{U}, 0 \le s \le t < \infty). \tag{3.9}$$

Teorem 3.3.3: $\mathcal{S}$ sınıfındaki her f fonksiyonu için $\mathbb{U}$ diskinde $f(z,0) = f(z)$ olacak şekilde bir Loewner zinciri vardır (Graham and Kohr 2003).

Teorem 3.3.4: Loewner zincirlerinin her $\{f_n(z,t)\}$ dizisinin bir alt dizisi, $t \ge 0$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde bir Loewner zincirine yerel düzgün yakınsar (Graham and Kohr 2003).

3.4. Loewner Diferensiyel Denklemi

Bu kesimde Loewner teorisinin ana unsurlarından biri olan Loewner diferensiyel denklemini tanıtacağız. Bu denklemin iki farklı biçimi vardır, bunlardan biri Loewner zincirine diğeri de geçiş fonksiyonuna bağlıdır. Bu denklemlerin her ikiside t parametresine bağlı $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonu içerir. Aslında Loewner zinciri bir türlü genişlemeyi temsil eder. Loewner diferensiyel denklemini ilk kez Loewner (1923) daha sonra Kufarev (1943) çalışmıştır. Daha sonraki yıllarda Pommerenke (1965) ve Becker (1972) bu teoriye önemli katkılar sağlamıştır. Bu katkılardan en önemlisi verilen bir fonksiyonun Loewner zinciri olması diğer bir değişle ünivalent olması için yeter olan şartları içermesidir.

Teorem 3.4.1: $\omega(z,t)$ fonksiyonu $t \in [0,1]$ için $\omega(0,t) = 0$ şartıyla $\mathbb{U}$ da analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca $|z| < 1, 0 \le t \le 1$ için $|\omega(z,t)| < 1$ ve $|z| < 1$ için $\omega(z,0) = z$ olduğunu kabul edelim. Eğer, ρ pozitif bir sayı olmak üzere

$$\omega(z) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{\omega(z,t) - z}{zt^{\rho}} \right]$$

limiti var, $\mathbb{U}$ da analitik ve $\Re\omega(0) \neq 0$ ise bu durumda $|z| < 1$ için $\Re\omega(z) < 0$ dır (Graham and Kohr 2003).

Bir sonraki teoreme geçmeden bu teoremde geçen ölçülebilir fonksiyon kavramı hakkında kısaca bilgi verelim. $\mho$ boştan farklı bir küme ve $\mathcal{B}$ de bu kümenin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{B}$ ailesi için

(i) $\mho \in \mathcal{B}$

(ii) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^t \in \mathcal{B}$ (B^t, B nin tümleyeni)

(iii) Her $i \in \mathbb{N}$ için $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{B}$ ye $\mho$ üzerinde bir $\sigma-$cebiri denir. $\sigma-$cebirindeki kümelere ölçülebilir küme denir ve $(\mho, \mathcal{B})$ ile gösterilir. $\mho$ ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ de bu kümede tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer K reel sayısı için

$$\{x \in \mho : f(x) > K\}$$

kümesi ölçülebilirse f ye bu kümede ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 3.4.2: $p(z,t)$ fonksiyonu her $t \ge 0$ ve her $z \in \mathbb{U}$ için $\mathcal{P}$ sınıfına ait ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O halde her $z \in \mathbb{U}$ ve $s \ge 0$ için,

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\upsilon p(\upsilon, t), \quad t \ge s, \ \upsilon(z,s,s) = z, \tag{3.10}$$

sınır değer problemi, bir tek $\upsilon(t) = \upsilon(z,s,t) = e^{s-t}z + ...$ yerel mutlak sürekli çözüme sahiptir. Bunun yanı sıra $z \in \mathbb{U}$ ve $s \ge 0$ için, $\upsilon(z,s,t)$ fonksiyonu z ye göre yerel düzgün sürekli, $t \ge s$ için Lipschitz süreklidir. $\upsilon(z,s,t)$ fonksiyonları $0 \le s \le t < \infty$ için ünivalent Schwarz fonksiyonlarıdır ve her $s \ge 0$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde

$$f(z,s)=\lim_{t\to\infty} e^{t}\upsilon(z,s,t)$$

yerel düzgün limiti vardır. Ayrıca, $f(z,s)$ ünivalent ve her $z\in\mathbb{U}$, $0\le s\le t<\infty$ için $f(\upsilon(z,s,t),t)=f(z,s)$ dir. Böylece (3.10) tarafından verilen $f:\mathbb{U}\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonu bir Loewner zinciridir ve her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)=p(z,t)zf'(z,t), \quad (t\ge 0) \tag{3.11}$$

diferensiyel denklemini sağlar (Graham and Kohr 2003).

Burada (3.11) ile tanımlanan diferensiyel denkleme Loewner kısmi diferensiyel denklemi veya kısaca Loewner diferensiyel denklemi denir.

Teorem 3.4.3: $f:\mathbb{U}\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $t\ge 0$ için $f(0,t)=0$ ve $f'(0,t)=e^{t}$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $f(z,t)$ fonksiyonunun bir Loewner zinciri olması için gerek ve yeter şart

(i) $f(z,t)$ fonksiyonu her $t\ge 0$ için $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik, $t\ge 0$ için yerel mutlak $z\in\mathbb{U}_r$ ye göre yerel düzgün sürekli ve

$$|f(z,t)|\le Me^{t}, \quad (|z|<r, t\ge 0) \tag{3.12}$$

olacak şekilde $r\in(0,1)$ ve $M>0$ sabitinin olması,

(ii) $\forall z\in\mathbb{U}$ için $[0,\infty)$ aralığı üzerinde ölçülebilir ve her $z\in\mathbb{U}_r$ için

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)=zf'(z,t)p(z,t), \quad (t\ge 0) \tag{3.13}$$

Loewner diferensiyel denklemini sağlayan, her $t\ge 0$ için $p(z,t)\in\mathcal{P}$ olacak şekilde $p(z,t)$ fonksiyonunun var olması

şartlarının sağlanmasıdır (Pommerenke 1965, 1975; Graham and Kohr 2003).

İspat: Öncelikle $f(z,t)$ fonksiyonunun Loewner zinciri olduğunu kabul edelim. Her $r\in(0,1)$ için teoremin (i) ve (ii) şartlarının doğru olduğunu göstereceğiz. Her $t\ge 0$ için $e^{-t}f(z,t)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfından bir fonksiyon olduğundan dolayı, Lemma 3.3.2 deki

(3.7) growth eşitsizliğinden dolayı her $r \in (0,1)$ için $|f(z,t)| \le Me^t$ $\left(|z| < r, t \ge 0\right)$ olacak şekilde $M = M(r)$ pozitif sayısı vardır. Böylece teoremin (i) şıkkı ispatlanmış olur. Öte yandan, $\upsilon(z,s,t)$ fonksiyonu $f(z,t)$ zinciri tarafından tanımlanan bir geçiş fonksiyonu, yani $z \in \mathbb{U}$ ve $0 \le s \le t < \infty$ için

$$f(z,s) = f(\upsilon(z,s,t),t)$$

olsun. Eğer, f fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarına ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{1}{h}\left[f(z,t+h) - f(z,t)\right] = \frac{1}{h}\left[f(z,t+h) - f(\upsilon(z,s,t+h),t+h)\right] \tag{3.14}$$

$$= A(z,t,h)\left(\frac{1}{h}\left[z - \upsilon(z,s,t+h)\right]\right), \quad \left(z \in \mathbb{U}, t \ge 0, h > 0\right)$$

elde edilir. Burada $A(z,t,h)$, $h \to 0^+$ iken $f'(z,t)$ kompleks-lineer operatörüne dönüşen bir reel-lineer operatördür. Şimdi (3.9) dan $f(z,t)$ fonksiyonunun t de yerel Lipschitz, z de ise yerel düzgün sürekli olduğu açıktır. Böylece Vitali teoreminden, t de ölçümü sıfır olan bir küme hariç, tüm z ler için (3.14) denkleminin sol tarafı $h \to 0$ durumunda bir limite sahiptir. Dolayısıyla t ye göre $h \to 0^+$ iken sağ tarafın tek taraflı limiti vardır ve Teorem 3.4.1 kullanarak (3.13) diferensiyel denklemindeki $p(z,t)$ yi elde ederiz. Bu fonksiyon aynı zamanda geçiş fonksiyonunun normalleştirilmiş halidir. Ölçümü sıfır olan kümelerin dışındaki t ler için, $p(z,t) = 1$ olarak tanımlanacak.

Cauchy-türev formülünden ve $f(z,t)$ fonksiyonunun Lipschitz sürekliliğinden $f'(z,t)$ fonksiyonu da $[0,\infty)$ aralığında Lipschitz süreklidir. Yukarıdaki ifadeden $[0,\infty)$ aralığında $f'(z,t)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial t}(z,t)$ ölçülebilir, dolayısıyla $p(z,t)$ fonksiyonunun bu aralıkta ölçülebilir olduğu anlaşılır. Böylece (ii) de ispatlamış olur.

Şimdi teoremin tersini ispatlayalım. Bu amaçla $r \in (0,1)$, $M > 0$ olmak üzere $f(z,t)$ ve $p(z,t)$ fonksiyonları teoremin (i) ve (ii) şartlarını sağlasın. $f(z,t)$ fonksiyonunun t de yerel Lipschitz sürekli, $z \in \mathbb{U}_r$ ye göre yerel düzgün sürekli olduğunu göstereceğiz.

Bunu ispatlamak için öncelikle $\rho \in (0,r)$ ve $T > 0$ olsun. Cauchy integral formülü ve (3.12) kullanılarak,

$$|f'(z,t)| \leq L(\rho,T), \quad \left(|z| \leq \rho, t \in [0,T]\right) \tag{3.15}$$

olacak şekilde $L = L(\rho,T) > 0$ vardır. Ayrıca, (3.13), (3.15) ifadelerinden ve

$$|p(z,t)| \leq \frac{1+\rho}{1-\rho}, \quad \left(|z| \leq \rho, t \geq 0\right)$$

eşitsizliğinden

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)\right| \leq N(\rho,T), \quad \left(|z| \leq \rho, t \in [0,T]\right)$$

olacak şekilde $N = N(\rho,T) > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla

$$f(z,t_2) - f(z,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial t}(z,t)dt, \quad \left(0 \leq t_1 < t_2 \leq T\right)$$

eşitliğinden dolayı $|z| \leq \rho$ ve $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ için

$$|f(z,t_2) - f(z,t_1)| \leq N(\rho,T)(t_2 - t_1) \tag{3.16}$$

eşitsizliği doğrudur. Buradan $\rho \in (0,r)$ ve $T > 0$ keyfi sayılar olduğundan, $f(z,t)$ fonksiyonu t de Lipschitz süreklidir. Teorem 3.4.2 göz önünde bulundurulduğunda

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\upsilon p(v,t), \quad t \geq s, \upsilon(z,s,s) = z, \tag{3.17}$$

sınır değer probleminin bir tek yerel mutlak sürekli $\upsilon(t) = \upsilon(z,s,t)$ çözümünün var olduğu sonucu ortaya çıkar. Bunun yanı sıra her s ve t sabitleri için $\upsilon(z,s,t)$ ünivalent Schwarz fonksiyonudur. Her $z \in \mathbb{U}_r$, $s \geq 0$ ve $t \geq s$ için $f(z,s,t) = f(\upsilon(z,s,t),t)$ olsun. Teorem 3.4.2 den $\upsilon = \upsilon(z,s,t)$ fonksiyonunun $t \in [s,\infty)$ da Lipschitz sürekli, $z \in \mathbb{U}$ ya göre yerel düzgün sürekli olduğu göz önüne alındığında ve $f(z,t)$ fonksiyonu t de yerel Lipschitz sürekli olduğundan, aynı zamanda $f(z,s,t)$ fonksiyonu da $t \in [s,\infty)$ için t de yerel Lipschitz sürekli, $z \in \mathbb{U}_r$ ya göre de yerel düzgün süreklidir. Gerçekten de (3.15) den her $t \in [0,T], T > 0, |z| \leq \rho, |w| \leq \rho$ ve $\rho \in (0,r)$ için

$$|f(z,t) - f(w,t)| \leq \int_0^1 \left|f'\left((1-\tau)z + \tau w,t\right)\right| d\tau \leq L(\rho,T)|z-w|$$

elde edilir. Böylece, eğer $s \geq 0$ ve $T > 0$ ise (3.16) ve yukarıdaki eşitsizlikten her $|z| \leq \rho$ ve $s \leq t_1 < t_2 \leq T$ için

$$\begin{aligned}
&\left| f(z,s,t_1) - f(z,s,t_2) \right| \\
&\leq \left| f(\upsilon(z,s,t_1),t_1) - f(\upsilon(z,s,t_1),t_2) \right| + \left| f(\upsilon(z,s,t_1),t_2) - f(\upsilon(z,s,t_2),t_2) \right| \\
&\leq N(\rho,T)(t_2 - t_1) + L(\rho,T) \left| \upsilon(z,s,t_1) - \upsilon(z,s,t_2) \right| \\
&\leq N(\rho,T)(t_2 - t_1) + R(\rho,T)(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $z \in \mathbb{U}_r$ ve $t \geq s$ için $\dfrac{\partial f}{\partial t} f(z,s,t)$ kısmi türevi var ve bunun yanı sıra (3.13) ve (3.17) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} f(z,s,t) = \frac{\partial f}{\partial t} f(\upsilon(z,s,t),t) &= f'(\upsilon(z,s,t),t) \frac{\partial \upsilon}{\partial t}(z,s,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\upsilon(z,s,t),t) \\
&= f'(\upsilon(z,s,t),t) \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(z,s,t) + \upsilon(z,s,t)\, p(\upsilon(z,s,t),t) \right) = 0
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. $\upsilon(z,s,s) = z$ ve $f(z,s,t)$ fonksiyonu t de yerel mutlak sürekli bir fonksiyon olduğundan $f(z,s,t) = f(z,s,s)$ olur. Böylece her $|z| \leq r$ ve $0 \leq s \leq t < \infty$ için

$$f(\upsilon(z,s,t),t) = f(z,s) \tag{3.18}$$

yazılır. Son olarak $f(z,t)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent genişlemeye sahip olduğunu gösterelim. Bunun için (3.12) ifadesi kullanılırsa

$$\left| e^{-t} f(z,t) - z \right| \leq 1 + M, \quad \left(|z| < r,\ t \geq 0 \right)$$

elde edilir. $e^{-t} f(z,t) - z = a_2(t) z^2 + \ldots$ olduğundan $\tilde{f}(z,t) = e^{-t} f(z,t) - z$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Schwarz lemması uygulanırsa

$$\left| e^{-t} f(z,t) - z \right| \leq 1 + M \frac{|z|^2}{r^2}, \quad \left(|z| < r,\ t \geq 0 \right)$$

bulunur. Aynı zamanda $e^{t-s} \upsilon(z,s,t) \in \mathcal{S}$ olduğundan, growth teoreminden

$$\left| \upsilon(z,s,t) \right| \leq e^{s-t} \frac{|z|}{\left(1 - |z|\right)^2}, \quad \left(z \in \mathbb{U}, 0 \leq s \leq t < \infty \right)$$

yazılır. Böylece, (3.18) den

$$\left| f(z,s) - e^t \upsilon(z,s,t) \right| = e^t \left| e^{-t} f(\upsilon(z,s,t),t) - \upsilon(z,s,t) \right|$$

$$\leq \frac{e^t(1+M)}{r^2} \left| \upsilon(z,s,t) \right|^2 \leq e^{2s-t} \frac{1+M}{(1-r)^4}, \quad \left(|z| < r \right)$$

elde edilir. Son ifadede $t \to \infty$ alınırsa, $|z| < r$ de

$$e^t \upsilon(z,s,t) \to f(z,s) \tag{3.19}$$

düzgün yakınsaması görülür. Diğer bir ifadeyle, eğer $g = g(z,s)$ fonksiyonu

$$g(z,s) = \lim_{t \to \infty} e^t \upsilon(z,s,t)$$

şeklinde verilen bir fonksiyon ise, bu limit her $s \geq 0$ için $\mathbb{U}$ da yerel düzgün olarak var ve Teorem 3.4.2 den $g : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ bir Loewner zinciridir. Ayrıca (3.19) dan $|z| < r$ ve $s \geq 0$ için $g(z,s) = f(z,s)$ dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Standart subordinasyon zinciri için verilen bu teorem genel subordinasyon zinciri için aşağıdaki biçimdedir.

Teorem 3.4.4 (Pommerenke Teoremi): $f(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \dots$ fonksiyonu her $t \geq 0$ için $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer,

(i) $f(z,t)$ fonksiyonu, $t \in [0,\infty)$ da yerel mutlak, $z \in \mathbb{U}_r$ ye göre yerel düzgün sürekli,

(ii) $a_1(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde

$$a_1(t) \neq 0, \quad \lim_{t \to \infty} |a_1(t)| = \infty$$

şartlarını sağlayan kompleks-değerli sürekli bir fonksiyon ve $\left\{ f(z,t)/a_1(t) \right\}_{t \geq 0}$ ailesi $\mathbb{U}_r$ de fonksiyonların bir normal ailesi,

(iii) Her $z \in \mathbb{U}_r$ ve $t \geq 0$ için $\Re p(z,t) > 0$ olacak şekilde

$$z \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = p(z,t) \frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$$

diferensiyel denklemini sağlayan bir $p : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu var ise, bu durumda $t \geq 0$ için, $f(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde bir analitik ve ünivalent genişlemeye sahiptir (Pommerenke 1965; Graham and Kohr 2003).

3.5. Ünivalentlik Kriteri Üzerine Yapılan İlk Çalışmalar

Verilen bir fonksiyonun ünivalentliğinin belirlenmesi problemi günümüze kadar pek çok bilim adamı tarafından çalışılmış ve bu çalışmalar sonucunda çeşitli kriterler elde edilmiştir. Bu kriterlerden bazıları bu alanda temel teşkil etmektedir. Bu temel kriterler esas alınarak analitik fonksiyonların değişik alt sınıfları üzerindeki ünivalentlik kriterlerini belirleme çalışmaları günümüze kadar artan bir ilgiyle devam etmiş ve halen çok sayıda matematikçinin ilgisini çekmeye de devam etmektedir. Ünivalentlik için yeter şartlar üzerine ilk araştırma, 1931 ve 1932 yıllarında ünlü matematikçi Calugareanu tarafından verilmiştir. Calugareanu, yaptığı ilk çalışmada aşağıdaki dikkate değer sonucu elde etmiştir.

Teorem 3.5.1: $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...,$ fonksiyonu $\mathbb{U}(0,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$ diskinde analitik olsun. Bu durumda $a_1\neq 0,$ $|z|<R$ ve $|\zeta|<R$ olmak üzere f nin $\mathbb{U}(0,R)$ diskinde ünivalent olması için gerek ve yeter şart

$$\Psi(z,\zeta)=\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} \tag{3.20}$$

biçiminde verilen iki değişkenli fonksiyonun analitik olmasıdır. (Calugareanu 1931, 1932).

Bu teorem bize ünivalentlik için gerekli ve yeterli şartları, f fonksiyonunun katsayılarına bağlı olarak bulma fırsatı verir. Böylece $|z|<R$ ve $|\zeta|<R$ olmak üzere

$$\Psi(z,\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}z^m\zeta^n \tag{3.21}$$

biçiminde verilen çift serinin yakınsaklığından böyle şartlar elde edebiliriz. Çünkü (3.21) serisinin ünivalentlik yarıçapı olan R ile yakınsaklık yarıçapı olan R aynıdır. Bu R yarıçapı, f fonksiyonunun katsayılarına bağlı olarak yazılabilir.

Benzer şekilde, $h(\xi) \in \mathcal{M}$ meromorf fonksiyonların ünivalentliği için gerek ve yeter şartlar elde edilebilir. Burada, (3.20) ve (3.21) ifadelerine benzer olarak kompleks iki değişkenli

$$\Phi(\xi, z) = \log \frac{h(\xi) - h(z)}{\xi - z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \xi^{-m} z^{-n} \tag{3.22}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 3.5.1 e göre $h(\xi) \in \Sigma$ olması için gerek ve yeter şart $\Phi(\xi, z)$ fonksiyonunun $\Delta \times \Delta$ kümesinde analitik yani $|\xi| > 1$ ve $|z| > 1$ olmak üzere (3.22) ile gösterilen serinin yakınsak olmasıdır. (3.21) tipli çift serinin yakınsaklığı için bir yeter şart da $m, n = 1, 2, 3, ...$ için $|c_{mn}| \leq 1$ olmasıdır. Fakat tekrar vurgulanmalıdır ki, c_{mn} nin terimlerindeki c_n katsayılarını yazmak zordur. Örneğin,

$$c_{22} = c_3 + \frac{c_1^2}{2}, \quad c_{23} = c_4 + c_1 c_2$$

$$c_{24} = c_5 + c_1 c_3 + \frac{c_2^2}{2}, \quad c_{33} = c_5 + c_1 c_3 + c_2^2 + \frac{c_1^2}{3}.$$

Grunsky (1939) h fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli ve yeterli şartları veren c_{mn} nin terimleriyle ilgili önemli bağıntılar elde etmiştir.

Teorem 3.5.2 (Grunsky Eşitsizlikleri): $h(\xi) \in \mathcal{M}$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıda verilen şartlar denktir (Grunsky 1939):

(i) $h(\xi) \in \Sigma$,

(ii) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} t_m \right|^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} |t_m|^2,$

(Burada $t_m \in \mathbb{C}$ sayısı, sağ taraftaki seri yakınsak olacak biçimde seçilmelidir)

(iii) $\displaystyle \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} t_m t_n \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} |t_m|^2.$

Ayrıca, c_{mn} katsayıları (3.22) de verilen çift serinin katsayıları olup bu katsayılar Grunsky katsayıları olarak adlandırılır.

Daha sonra Ozaki (1934), $\prod_0$ sınıfına ait bir fonksiyonun katsayılarını ihtiva eden bir ünivalentlik kriteri elde etmiştir.

Teorem 3.5.3: $g(\zeta)\in\prod_0$ olsun. Eğer, $r\in(0,1]$ olmak üzere $\mathring{\mathbb{U}}_r=\{z:0<|z|<r\}$ kümesinde g fonksiyonunun katsayıları arasında

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n+1}\leq 1$$

bağıntısı varsa, g fonksiyonu $\mathring{\mathbb{U}}_r$ kümesinde ünivalenttir (Ozaki 1934).

İspat: $z_1,z_2\in\mathring{\mathbb{U}}_r$ olsun. Bu durumda

$$\frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}=-\frac{1}{z_1z_2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+...+z_2^{n-1}\right)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}\right| &= \left|-\frac{1}{z_1z_2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+...+z_2^{n-1}\right)\right| \\ &\geq \left|\left|\frac{1}{z_1z_2}\right|-\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+...+z_2^{n-1}\right)\right|\right| \\ &> \left|\frac{1}{r^2}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|r^{n+1}\right]\right|\geq 0\end{aligned}$$

olur.

Eğer yukarıdaki teoremde $r=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.4: $g(\zeta)\in\prod_0$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa, g fonksiyonu $\mathring{\mathbb{U}}_r$ kümesinde ünivalenttir (Ozaki 1934).

Çok iyi bilinen ünivalentlik kriterlerinden biri de Alexander-Noshiro-Warschawski tarafından verilmiştir.

Teorem 3.5.5: f fonksiyonu konveks bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer her $z \in D$ ve bazı $\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\Re\left(e^{i\gamma} f'(z)\right) > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu D bölgesinde ünivalenttir (Alexander 1915; Noshiro 1934-1935; Warschawski 1935).

Teorem 3.5.5 in en önemli sonuçlarından biri, $\mathcal{S}$ sınıfının

$$\mathcal{R}_* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re f'(z) > 0,\, z \in \mathbb{U} \right\}$$

biçiminde tanımlanan yeni bir alt sınıfının doğmasına temel oluşturmasıdır. $\mathcal{R}_*$ sınıfı üzerine sistematik ilk çalışmayı MacGregor (1962) yapmıştır.

Alexander-Noshiro-Warschawski'nin ünivalentlik kriterinin bir genelleştirilmesi, Ozaki ve Kaplan tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.5.6: f fonksiyonu basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Her $z \in D$ için

$$\Re \frac{f'(z)}{\phi'(z)} > 0$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde D bölgesini konveks bir bölgeye resmeden bir ϕ ünivalent fonksiyonunun varlığını kabul edelim. Bu takdirde f fonksiyonu D bölgesinde ünivalenttir (Ozaki 1935; Kaplan 1952).

Teorem 3.5.6 da $\phi(z) = z$ alınırsa, Teorem 3.5.5 in $\gamma = 0$ için olan özel durumu elde edilir.

Alexander-Noshiro-Warschawski'nin ünivalentlik kriterinin analitik olmayan biçimi ilk defa Mocanu (1981) tarafından aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.5.7: $D \subset \mathbb{C}$ konveks bir bölge ve $f \in C^1(D)$ olsun. Eğer f fonksiyonu

(i) $f'_\theta(z) = \dfrac{\partial f(z)}{\partial z} + e^{-2i\theta}\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}$ olmak üzere $\forall z \in D$ ve $\theta \in [0, 2\pi)$ için $\Re f'_\theta(z) > 0$

(ii) $\forall z \in D$ için $\Re \dfrac{\partial f(z)}{\partial z} > \left|\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\right|$

şartlarından birini sağlıyorsa D bölgesinde ünivalenttir ve her $z \in D$ için $Jf(z) > 0$ dır. Burada $Jf(z) = \left|\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2$, f nin Jacobiyen determinantını ve $C^1(D)$ de D kümesinde birinci mertebeden sürekli diferensiyellenenebilir fonksiyonların kümesini göstermektedir (Mocanu 1981).

3.6. Pommerenke Teoreminin Farklı Biçimleri

Literatürde, Pommerenke Teoreminin (Teorem 3.4.4) farklı biçimlerini bulmak mümkündür. Teoremin ilk farklı biçimi 1996 yılında Pascu tarafından aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.6.1: $r \in (0,1)$ olmak üzere $F = F(u,v) : \mathbb{U}_r \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki kabülleri sağlasın. Eğer

(i) Her $t \geq 0$ için $F(e^{-t}z, e^t z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik ve $[0,\infty)$ aralığında yerel mutlak, $\mathbb{U}_r$ ye göre de yerel düzgün sürekli,

(ii) $\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial t} / z\dfrac{\partial F(z,t)}{\partial z}$ fonksiyonu $t > 0$ için $\overline{\mathbb{U}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ kapalı diskinde ve $t = 0$ için $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ açık diskinde analitik,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)\neq 0, \left|\frac{\partial F}{\partial u}(0,0)\Big/\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)\right|\notin(-\infty,-1)$ olmak üzere $t\to\infty$ iken $a_1(t)\to\infty$ olacak biçimde kesin artan $a_1:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonu vardır ve burada $a_1(t)=e^{-t}\frac{\partial F}{\partial u}(0,0)+e^{t}\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$ dir,

(iv) $G(u,v)=\frac{u}{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\Big/\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$ olmak üzere $t=0$ için $G(e^{-t}z,e^{t}z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}_r$ üzerine analitik ve $t>0$ için $\overline{\mathbb{U}}$ kapalı diskinde bir analitik genişlemeye sahip,

(v) $\forall z\in\mathbb{U}$ için $|H(z,z)|<1$ ve $\forall z\in\mathbb{U}-\{0\}$ için $\left|H\left(z,1/\overline{z}\right)\right|\leq 1$ ise

bu durumda her $t\geq 0$ için $F(e^{-t}z,e^{t}z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalent genişlemeye sahiptir (Pascu 1996). Burada H fonksiyonu G nin $\overline{\mathbb{U}}$ kapalı diski üzerinde bir genişlemesidir.

Teorem 3.6.1 nin bir genelleştirilmesi Pascu *et al*. (2003) tarafından aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.6.2: $F:\mathbb{U}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $F(e^{-t}z,a(t)z)$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca $F(e^{-t}z,a(t)z)$ fonksiyonu Teorem 3.6.1 deki (i)-(iii) şartlarını sağlasın. Eğer $a:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ olmak üzere $a=a(t)$, $a\in C^1[0,\infty)$, $a(0)=1$, $a(t)\neq 0$, $a(t)+a'(t)\neq 0$ ve $\lim_{t\to\infty}|a(t)|=\infty$ şartları altında $|a(t)|$ artan bir fonksiyon ve ayrıca $G(u,v)=\frac{u}{v}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\Big/\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$ fonksiyonu için

(iv)' $\left|G(z,z)+\frac{a(t)-a'(t)}{2a(t)}\right|<\frac{|a(t)+a'(t)|}{2|a(t)|},\quad (z\in\mathbb{U},\ t\geq 0),$

(v)' $\max_{|z|=e^{-t}}\left|G(z,a(t)\frac{z}{\overline{z}})+\frac{a(t)-a'(t)}{2a(t)}\right|<\frac{|a(t)+a'(t)|}{2|a(t)|},\quad (z\in\mathbb{U}-\{0\},\ t\geq 0),$

şartları sağlanıyorsa, $F(z,z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ diskinde ünivalenttir (Pascu *et al*. 2003).

Bu teoremde özel olarak $a(t)=e^{t}$ alınırsa Teorem 3.6.1 in sonuçları elde edilir.

3.7. Birim Diskte Temel Ünivalentlik Kriterleri

$\mathbb{U}$ birim diskinde bilinen ünivalentlik kriterlerinin en önemlilerinden birisi 1972 yılında Becker tarafından verilmiştir. Bu kriter aynı zamanda Loewner metodu (subordinasyon zincirleri metodu) kullanılarak ispatlanan ilk kriterdir. Bu kriterin önemli genelleştirmeleri daha sonra Ahlfors (1974), Ruscheweyh (1976), Lewandovski (1981), Kanas and Srivastava (1997), Kanas and Lecko (1998), Pascu (1985, 1986, 1987, 1995), Pescar (1996), Ovesea (Tudor) (1997, 2001, 2007) tarafından verilmiştir. Geçmişten günümüze kadar bu konu üzerine yapılan önemli çalışmalar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Teorem 3.7.1: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$(1-|z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Becker 1972).

Literatürde, Becker'ın bu kriterinin birçok genelleştirmesini bulmak mümkündür. Bunların en önemlilerinden bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.7.2: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $|c| \le 1, c \ne -1$ şartlarını sağlayan bir $c \in \mathbb{C}$ sayısını göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|c|z|^2 + (1-|z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Ahlfors 1974).

Teorem 3.7.3: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca, $c \in \mathbb{C}$ ve $s = a + ib$, $a > 0$ olacak şekilde s kompleks sayısı verilsin. Eğer

$$M = \begin{cases} a|s| + (a-1)|s+c|, & a \in (0,1) \\ |s|, & a \ge 1 \end{cases}$$

olacak şekilde her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| c|z|^2 + s - a\left(1-|z|^2\right)\left[s\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1-s)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| \le M$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Ruscheweyh 1976).

Teorem 3.7.4: $f \in \mathcal{A}$ ve $p \in \mathcal{P}$ fonksiyonları verilsin. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{p(z)-1}{p(z)+1}|z|^2 - (1-|z|^2)\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{zp'(z)}{p(z)+1}\right)\right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Lewandovski 1981).

Teorem 3.7.5: $f \in \mathcal{A}$ ve c, $c \ne -1, |c| \le 1$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{[\mathcal{R}^n f(z)]'} - \frac{1}{1+c}\right| < \frac{1}{|1+c|}$$

ve

$$\left| |z|^2 \left[\frac{(1+c)f'(z)}{[\mathcal{R}^n f(z)]'} - 1\right] + (1-|z|^2)\left[\frac{z[\mathcal{R}^n f(z)]''}{[\mathcal{R}^n f(z)]'}\right]\right| \le 1$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Kanas and Srivastava 1997).

Teorem 3.7.6: $f \in \mathcal{A}$ ve c, $c \ne -1, |c| \le 1$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| f'(z)\frac{\mathcal{R}^n f(z)}{\mathcal{R}^{n+1} f(z)} - \frac{1}{1+c}\right| < \frac{1}{|1+c|}$$

ve

$$\left| |z|^2 \left[(1+c)f'(z)\frac{\mathcal{R}^n f(z)}{\mathcal{R}^{n+1} f(z)} - 1\right] + (1-|z|^2)\left[(n+2)\frac{\mathcal{R}^{n+2} f(z)}{\mathcal{R}^{n+1} f(z)} - (n+1)\frac{\mathcal{R}^{n+1} f(z)}{\mathcal{R}^n f(z)} - 1\right]\right| \le 1$$

şartları sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Kanas and Srivastava 1997).

Bunların yanı sıra 2001-2007 tarihleri arasında Ovesea (Tudor), Becker'ın ünivalentlik kriterini genelleştirme üzerine önemli bazı çalışmalar yapmıştır.

Pascu (1987) bir integral operatör için Becker'ın kriterinin genelleştirmesini aşağıdaki gibi verdi. Bu kriter aynı zamanda integral operatör için, Loewner metodu (subordinasyon zincirleri) kullanılarak ispatlanan ilk kriterdir.

Teorem 3.7.7: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ şartı alında $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Eğer $\forall z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)}\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} f'(t)dt\right)^{1/\alpha}$$

şeklinde tanımlanan F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Pascu 1987).

Kompleks analizin temel araçlarından biri de bir analitik fonksiyonun Schwarz türevidir. Schwarz türevi ilk defa 1876 yılında H. A. Schwarz'ın dairesel yaylar ile sınırlandırılmış çokgenler yardımıyla, konform dönüşümler için Schwarz-Christoffel dönüşümünü genelleştirmek amacıyla yaptığı bir araştırmanın sonucunda ortaya çıkmıştır. Bir analitik ve yerel ünivalent f fonksiyonu için Schwarz türevi

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

biçiminde tanımlanır. Schwarz türevinin en önemli özelliği, Möbius dönüşümü altında korunmasıdır. Diğer bir ifade ile eğer,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

herhangi bir Möbius dönüşümü ise, bu durumda $S_{T\circ f}(z) = S_f(z)$ olur. Burada "$\circ$" bilinen bileşke işlemidir. Özel bir durumda her bir Möbius dönüşümü için $S_T(z) = 0$ eşitliği sağlanır. Eğer g herhangi bir yerel ünivalent analitik fonksiyon ve bu fonksiyonun f ile bileşkesi $f \circ g$ biçiminde tanımlanırsa,

$$S_{f\circ g} = \left(S_f \circ g\right)(g')^2 + S_g$$

eşitliği yazılır.

Becker'ın ünivalentlik kriteri kadar ünlü bir diğer ünivalentlik kriteri de, Schwarz türevini içeren ve ilk defa 1949 yılında Nehari tarafından verilen kriterdir. Onun anısına bu kritere Nehari kriteri denmektedir.

Teorem 3.7.8: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{(1-|z|^2)^2}{2}\left|S_f(z)\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Nehari 1949).

Nehari'nin ünivalentlik kriterinin genelleştirilmeleri arasında en önemli olanı, 1987 yılında Epstein tarafından verilmiştir. Epstein'ın ünivalentlik kriterinin farklı bir ispatını Pommerenke (1986) Loewner zincirler metodunu kullanarak vermiştir.

Teorem 3.7.9: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca $S_f(z)$ ve $S_g(z)$ de sırasıyla f ve g fonksiyonlarının Schwarz türevleri olmak üzere, eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2\left(S_f(z)-S_g(z)\right)+(1-|z|^2)\frac{\overline{z}g''(z)}{g'(z)}\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f, $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Epstein 1987; Pommerenke 1986).

Epstein tarafından verilen bu teoremin farklı genelleştirilmeleri Wesolowski ve Tudor tarafından verilmiştir.

Teorem 3.7.10: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde yerel ünivalent fonksiyonlar olsun. Ayrıca $\mathbb{U}$ da $\Re h(z) \geq 1/2$ koşulunu sağlayan h analitik fonksiyonu verilsin. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için,

$$\left|\frac{h(z)-1}{h(z)}|z|^2-(1-|z|^2)\left[\frac{zh'(z)}{h(z)}+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\right]-\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2\frac{z}{\overline{z}}h(z)\left[S_f(z)-S_g(z)\right]\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Wesolowski 1988).

Teorem 3.7.11: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) \geq 1/2$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Ayrıca g ve h fonksiyonları da $\mathbb{U}$ birim diskinde sırasıyla $g(z) = 1 + b_1 z + \ldots$ ve $h(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$ biçiminde tanımlanan analitik fonksiyonlar olsunlar. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \left(\frac{1}{\alpha} \frac{f'(z)}{g(z)} - 1 \right) - 1 \right| < 1$$

ve

$$\left| \left(\frac{1}{\alpha} \frac{f'(z)}{g(z)} - 1 \right) |z|^4 + z^2 \left(1 - |z|^2 \right)^2 \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{f'(z)h(z)}{f(z)} + \frac{1}{\alpha} \frac{f'(z)h^2(z)}{g(z)} + \frac{g'(z)h(z)}{g(z)} - h'(z) \right] \right.$$

$$\left. + z|z|^2 \left(1 - |z|^2 \right) \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{2}{\alpha} \frac{f'(z)h(z)}{g(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right] \right| \leq |z|^2$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Tudor 2007).

1972 yılında Ozaki ve Nunokawa yaptıkları çalışmada, temelde Nehari'nin ünivalentlik kriterine ve dolayısıyla Schwarz türevine dayanan ve bu alanda temel teşkil eden teoremlerden biri olan aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 3.7.12: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir (Ozaki and Nunokawa 1972).

Ozaki ve Nunokawa tarafından verilen bu teoremin farklı genelleştirilmeleri Rădulescu *et al*. (2004), Tudor and Owa (2005) ve Tudor (2008) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.7.13: $f \in \mathcal{A}$ ve m de pozitif bir reel sayı olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right) - \frac{m-1}{2} \right| < \frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left|\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}-1\right)-\frac{m-1}{2}|z|^{m+1}\right| \leq \frac{m+1}{2}|z|^{m+1}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Răducanu *et al*. 2004).

Teorem 3.7.14: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}-\{0\}$ için

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}-1\right| < 1$$

ve

$$\left|\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}-1\right)|z|^{2\alpha}+2\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}-1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-|z|^{2\alpha}\right)^2}{\alpha^2|z|^{2\alpha}}\left[\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}-1\right)+(1-\alpha)\left(\frac{f(z)}{z}-1\right)\right]\right| \leq 1$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z t^{\alpha-1} f'(t)dt\right)^{1/\alpha}$$

şeklinde tanımlı F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Tudor 2008).

1969 yılında Goluzin diğerlerinden farklı bir metod izleyerek aşağıdaki kriteri vermiştir.

Teorem 3.7.15: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|z\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}\right)\right| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Goluzin 1969).

Goluzin'in bir genelleştirmesini Loewner zincirler metodunu kullanarak Răducanu (2004) aşağıdaki teoremde vermiştir.

Teorem 3.7.16: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) > 1/2$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ verilsin. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[1 - (1-|z|^2) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right] + (1-|z|^2) z \frac{d}{dz} \log \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} \right) \right| \le |z|^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Rădaucanu 2004).

1992 yılında Tan aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

Teorem 3.7.17: f ve ϕ fonksiyonları $\mathbb{U}$ kümesinde analitik ve yerel ünivalent fonksiyonlar olsun. Ayrıca $c \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere, eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| z \left(1 - |z|^2 \right) \phi(z) + \left(cf'(z) e^{-\int \phi(z) dz} - 1 \right) |z|^2 \right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Tan 1992).

3.8. Meromorf Fonksiyonlar İçin Temel Ünivalentlik Kriterleri

$\mathbb{U}$ diskinde ünivalentlik kriterleri ne kadar önemli ise, Δ ve $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ kümelerinde ünivalentlik kriterleride o derece önemlidir. Çünkü bu kümelerdeki fonksiyonlar, $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlanan fonksiyonlardan farklıdır. Ayrıca Δ ve $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalentlik kriterleri elde etme problemi birim diske göre daha zordur. Bununla ilgili ilk çalışmalar Nehari (1949), Aksent'ev (1958), Becker (1973) ve daha sonra bu çalışmaların bazı genelleştirmeleri de Ruscheweyh (1976) ve Wesolowski (1991) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.8.1: $F \in \mathcal{M}$ olsun. Eğer her $\xi \in \Delta$ için

$$\frac{(|\xi|^2 - 1)^2}{2} |S_F(\xi)| \le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa F fonksiyonu Δ da ünivalenttir (Nehari 1949).

Teorem 3.8.2: Eğer $F \in \mathcal{M}$ fonksiyonu her $\xi \in \Delta$ için

$$\left|F'(\xi)-1\right| \leq 1$$

eşitsizliğini sağlıyorsa Δ da ünivalenttir (Aksent'ev 1958).

Teorem 3.8.3: $F \in \mathcal{M}$ olsun. Eğer her $\xi \in \Delta$ için

$$(\left|\xi\right|^2-1)\left|\frac{\xi F''(\xi)}{F'(\xi)}\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa F fonksiyonu Δ da ünivalenttir (Becker 1973).

Teorem 3.8.4: $F \in \mathcal{M}_0$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca $s=\alpha+i\beta,\ \ \alpha>0$ bir kompleks sayı olsun. Eğer her $\xi \in \Delta$ için

$$\left|i\beta+\left(\left|\xi\right|^2-1\right)\alpha\left[s\frac{\xi F''(\xi)}{F'(\xi)}-(1-s)\left(1-\frac{\xi F'(\xi)}{F(\xi)}\right)\right]\right| \leq \alpha\left|s\right|-\left|\beta\right|(\alpha-1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, F fonksiyonu Δ da ünivalenttir (Ruscheweyh 1976).

Teorem 3.8.5: $F, G \in \mathcal{M}$ fonksiyonları Δ da yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca $S_F(\xi)$ ve $S_G(\xi)$ de sırasıyla F ve G fonksiyonlarının Schwarz türevleri olmak üzere, eğer her $\xi \in \Delta$ için

$$\left|\frac{1}{2}(\left|\xi\right|^2-1)^2\frac{\xi}{\bar{\xi}}\left(S_F(\xi)-S_G(\xi)\right)+(\left|\xi\right|^2-1)\frac{\xi G''(\xi)}{G'(\xi)}\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa F fonksiyonu Δ da ünivalenttir (Wesolowski 1991).

Teorem 3.8.6: $F, G \in \prod$ fonksiyonları $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ da yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Eğer her $\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için

$$\left|\frac{1}{2}(1-\left|\zeta\right|^2)^2\left(S_F(\zeta)-S_G(\zeta)\right)+\frac{(1-\left|\zeta\right|^2)}{\left|\zeta\right|^2}\left(2+\frac{\zeta G''(\zeta)}{G'(\zeta)}\right)\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa F fonksiyonu $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ da ünivalenttir (Wesolowski 1991).

3.9. İntegral Operatörler İçin Ünivalentlik Kriterleri

Analitik fonksiyonların geometrik teorisinin en önemli problemlerinden birisi de analitik fonksiyonların farklı sınıflarına ait fonksiyonların integral operatörlerin ünivelentliği, yıldızıllığı ve konveksliği gibi önemli özelliklerini araştırmaktır. İntegral operatörler üzerine ilk çalışma 1915 yılında Alexander tarafından verilmiştir. Daha sonra Libera (1965), Royster (1965), Causey (1967), Nunukawa (1968), Bernardi (1969), Kim and Merkes (1972) ve Miller *et al*. (1978) farklı integral operatörleri tanımlayarak bunların ünivalentliği, yıldızıllığı ve konveksliği gibi önemli özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonraki yıllarda birçok matematikçi integral operatörleri genelleştirerek onların ünivalentliğini ve analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları üzerindeki özelliklerini incelemişlerdir. Biz de bu tez çalışmasında Tanım 3.9.1 ve Tanım 3.9.2 deki genelleştirilmiş integral operatörleri tanımlayarak onların ünivalentliğini inceleyeceğiz.

Tanım 3.9.1: $\alpha, \beta, \mu, \lambda$ ve γ herhangi kompleks sayılar olsun. f, g ve h fonksiyonları da $\mathcal{A}$ sınıfı veya onun alt sınıflarından olan fonksiyonlar olmak üzere, $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$ ve $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonları sırasıyla

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \left(\gamma \int_0^z (g(t))^{\gamma-1} (f'(t))^{\alpha} (t^{-1}h(t))^{\beta} dt \right)^{1/\gamma}, \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{3.23}$$

$$\mathcal{I}_{\lambda,\mu}(z) = \left(\mu \int_0^z (g(t))^{\mu-1} \left(e^{f(t)}\right)^{\lambda} dt \right)^{1/\mu}, \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonlara bazen (genelleştirilmiş) integral operatorü de denir. Ayrıca $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$ ve $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}(z)$ integral operatörleri $\mathcal{A}$ sınıfındandır.

Eğer (3.23) ve (3.24) integral operatörlerinde $g(z) = z$ alınırsa sırasıyla

$$\mathcal{F}^{*}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \left(\gamma \int_0^z t^{\gamma-1} (f'(t))^{\alpha} (t^{-1}h(t))^{\beta} dt \right)^{1/\gamma}, \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{3.25}$$

ve

$$\mathcal{I}^*_{\lambda,\mu}(z)=\left(\mu\int_0^z t^{\mu-1}\left(e^{f(t)}\right)^{\lambda}dt\right)^{1/\mu}, \quad (z\in\mathbb{U}) \tag{3.26}$$

integral operatörleri elde edilir.

Tanım 3.9.1 de verilen (3.23) ve (3.24) integral operatörlerinde ki f, g ve h fonksiyonlarının $\mathcal{S}$ sınıfından olması ve $\alpha,\beta,\gamma,\mu,\lambda$ parametrelerinin özel değerlerinin alınması durumunda, $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ ve $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$ integral operatörlerinin özel durumları için ünivalentlik problemi birçok araştırmacı tarafından ele alındı. Örneğin; Royster (1965) $\gamma=1,\beta=0$ ve $|\alpha|>\frac{1}{3},\alpha\neq 1$; Duren *et al.* (1966) $\gamma=1,\beta=0$ ve $|\alpha|\leq\frac{\sqrt{5}-2}{3}=0.078...$; Becker (1972) $\gamma=1,\beta=0$ ve $|\alpha|\leq\frac{1}{6}=0.166...$ ve son olarak Pfaltzgraff (1971) $\gamma=1,\beta=0$ ve $|\alpha|\leq\frac{1}{4}=0.25$ için $\mathcal{F}_{\alpha,0,1}$ integral operatörünün $\mathcal{S}$ sınıfından olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Pfaltzgraff $|\alpha|$ için bulunan $\frac{1}{4}$ sınırının kesin olduğunu göstermiştir. Diğer yandan Causey (1967) $\gamma=1$, $\alpha=0$ ve $0\leq\beta\leq\frac{\sqrt{5}-2}{4}=0.05...$ için $\mathcal{F}_{0,\beta,1}$ integral operatörünün $\mathcal{S}$ sınıfından olduğunu $\gamma=1,\alpha=0$ ve $\underset{\beta\neq 1}{\beta}\geq\frac{1}{2}$ için ise bu operatörün $\mathcal{S}$ sınıfından olmadığını göstermiştir. Causey'in bu sonucunun bazı genelleştirmelerini, Nunokawa (1968) $\gamma=1$, $\alpha=0$ ve $0\leq\beta\leq 0.07...$; Causey (1971) tekrar $\gamma=1$, $\alpha=0$ ve $|\beta|\leq\frac{\sqrt{2}-1}{4}=0.102...$ ve Kim-Merkes (1972) $\gamma=1,\alpha=0$ ve $|\beta|\leq\frac{1}{4}=0.25...$ değerleri için vermiştir. Godula (1979) ve Miazga and Wesolowski (1989) yaptıkları çalışmalarında sırasıyla $4|\alpha|+4|\beta|\leq 1$ ve $4|\alpha|+3|\beta|\leq 1$ şartları altında $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,1}\in\mathcal{S}$ olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Moldoevanu and Pascu (1990) $4|\gamma-1|\leq 1$ şartı altında $\mathcal{F}_{0,0,\gamma}\in\mathcal{S}$ olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra Pescar $\mathcal{S}$ sınıfının growth ve distortion gibi özelliklerini kullanarak, 1997-2006 yılları arasında $\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonların $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörünün özel durumları için çeşitli ünivalentlik kriterleri elde etmiştir. Bunlardan aşağıda kısaca bahsedilmiştir.

- $\left|\dfrac{zh'(z)-h(z)}{zh(z)}\right|<1$ ve $|\beta|\leq\left\{\max\limits_{|z|\leq 1}\left[(1-|z|^2)|z|\dfrac{|z|+|a_2|}{1+|z||a_2|}\right]\right\}^{-1}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_{0,\beta,1}\in\mathcal{S}$ (Pescar 1997a).
- $\left|\dfrac{g''(z)}{g'(z)}\right|<1$ ve $|\alpha|\leq\left\{\max\limits_{|z|\leq 1}\left[(1-|z|^2)|z|\dfrac{|z|+|a_2|}{1+|z||a_2|}\right]\right\}^{-1}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_{\alpha,0,1}\in\mathcal{S}$ (Pescar 1997b).
- $\left|\dfrac{zh'(z)}{h(z)}-1\right|\leq 1$ ve $|\beta|\leq 3\sqrt{3}/2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_{0,\beta,1}\in\mathcal{S}$ (Pescar 1998a).
- $\delta\in\mathbb{C}$, $\Re(\gamma)\geq\Re(\delta)=a>0$; $\left|\dfrac{zh'(z)}{h(z)}-1\right|\leq 1$ ve $|\beta|\leq\dfrac{(2a+1)^{(2a+1)/2a}}{2}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^*_{0,\beta,\gamma}\in\mathcal{S}$ (Pescar 1998b).
- $\gamma=a+ib\in\mathbb{C}$, $a\in\left[3/4,5/4\right]$, $|b|\leq\sqrt{1-16(a-1)^2}/4$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_{0,0,\gamma}\in\mathcal{S}$ (Pescar 2000).
- $\gamma=a+ib\in\mathbb{C}$, $a\in(0,4]$; $a\in\left(0,1/2\right)$ için $a^4+a^2b^2-4\geq 0$ ve $a\in\left[1/2,4\right]$ için $a^2+b^2-4\geq 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^*_{0,1/\gamma,\gamma}\in\mathcal{S}$ (Pescar 2001).
- $\Re(\gamma)>0$; $\Re(\gamma)\in(0,1)$ için $|\gamma-1|\leq\Re(\gamma)/4$ ve $\Re(\gamma)\in[0,\infty)$ için $|\gamma-1|\leq 1/4$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_{0,0,\gamma}\in\mathcal{S}$ (Pescar 2006).
- $\Re(\gamma)>0$; $\Re(\gamma)\in(0,1)$ için $|\beta|\leq\Re(\gamma)/4$ ve $\Re(\gamma)\in[0,\infty)$ için $|\beta|\leq 1/4$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^*_{0,\beta,\gamma}\in\mathcal{S}$ (Pescar 2006).

Bunlardan başka Tanım 3.9.1 deki (3.23) ve (3.24) integral operatörlerindeki f, g ve h fonksiyonlarının $\mathcal{A}$ sınıfından olması ve α,β,γ,μ ve λ parametrelerinin özel değerleri için, $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ ve $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$ operatörlerinin özel durumlarında ünivalentlik problemini, Schwarz lemması veya Genelleştirilmiş Schwarz lemmasını kullanarak, Pescar (2003, 2004), Frasin (2009) ve Pescar and Breaz (2010) çalışmıştır.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{S}$ sınıflarının veya bunların alt sınıflarındaki fonksiyonların integral operatörlerinin ünivalentliğinin yanı sıra $\prod$ sınıfı veya bunun alt sınıflarındaki fonksiyonların integral operatörlerinin ünivalentliği problemi de bir o kadar önemlidir. Bu tipten problemler ilk defa 1990 yılında Wesolowski tarafından verilmiştir. Biz bu tez çalışmasında $\prod$ sınıfı veya bunun alt sınıflarındaki fonksiyonları içeren daha genel integral operatörleri tanımladık. Bu integral operatörler aşağıdaki tanımda yer almaktadır.

Tanım 3.9.2: $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ ve μ herhangi kompleks sayılar olsun. F ve G fonksiyonları da $\prod$ sınıfı veya onun alt sınıflarından olan fonksiyonlar olmak üzere, $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$ ve $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}(z)$ fonksiyonları sırasıyla,

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \left(\gamma \int_0^z t^{\gamma-1}(-t^2F'(t))^{\alpha}(tG(t))^{\beta}\,dt \right)^{1/\gamma}, \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{3.27}$$

$$\mathcal{G}_{\lambda,\mu}(z) = \left(\mu \int_0^z t^{\mu-1}\left(e^{t^2G(t)}\right)^{\lambda} dt \right)^{1/\mu}, \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{3.28}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonlara bazen meromorf fonksiyonların (genelleştirilmiş) integral operatorü de denir. Ayrıca $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$ ve $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}(z)$ integral operatörleri $\mathcal{A}$ sınıfındandır.

Wesolowski (1990), $F, G \in \widetilde{\Sigma}$ ve $12|\alpha| + 4|\beta| \leq 1$ olması durumunda $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,1}$ integral operatörünün ünivalent olduğunu göstermiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Çalışmamızın temel amacı, analitik fonksiyonların ünivalentliği için yeter şart bulma problemidir. İlk olarak, 3. bölümde ifade edilen ve Pommerenke teoremi olarak bilinen Teorem 3.4.4 yardımıyla $\mathbb{U}$, $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ ve Δ kümelerinde tanımlı analitik fonksiyonlar için ünivalentlik kriterleri elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen kriterlerin daha önce başka araştırmacılar (3.7 ve 3.8 bölümlerine bakınız) tarafından elde edilen kriterlerden daha genel ve daha iyi olduğu örneklerle gözlenmiştir.

İkinci ve son olarak da $\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, \mathcal{C}$ ve $\widetilde{\Sigma}$ sınıflarına ait fonksiyonların genelleştirilmiş integral operatörleri için ünivalentlik şartları araştırılmıştır.

4.1. Birim Diskte Ünivalentlik Kriterleri

İlk olarak birim diskte $\mathcal{R}^n$ Ruscheweyh ve S^n Sălăgean türev operatörlerini içeren $\mathcal{F}_\beta(z) = \left[\beta \int_0^z g^{\beta-1}(u) f'(u) du \right]^{1/\beta}$ integral operatörü için ünivalentlik kriterleri verilecektir. Çalışmamız boyunca $[f(e^{-t}z)]' = f'(e^{-t}z)$ ve bir kompleks fonksiyonun kompleks kuvveti olan $(\psi(z))^\eta$ için özel bir dal göz önüne alınmıştır.

Teorem 4.1.1: $f, g, h \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha, \beta, c \in \mathbb{C}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ için $c \neq -1$, $\alpha \neq 1$, $\left| \frac{1+c}{1-\alpha} - \frac{m+1}{2} \right| \leq \frac{m+1}{2}$, $\left| \beta - \frac{m+1}{2} \right| < \frac{m+1}{2}$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \left(\frac{(1+c) f'(z)}{[\mathcal{R}^n h(z)]' - \alpha} - 1 \right) - \frac{m-1}{2} \right| < \frac{m+1}{2} \tag{4.1}$$

ve

$$\left| |z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)\,f'(z)}{[\mathcal{R}^n h(z)]'-\alpha}-1\right)+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z[\mathcal{R}^n h(z)]''}{[\mathcal{R}^n h(z)]'-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right| \le \frac{m+1}{2} \tag{4.2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa,

$$\mathcal{F}_\beta(z)=\left[\beta\int_0^z g^{\beta-1}(u)\,f'(u)du\right]^{1/\beta} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Deniz and Orhan 2011a).

İspat: a ve b pozitif iki reel sayı ve $m=\dfrac{b}{a}$ olsun. $r\in(0,1]$ olmak üzere her $t\in[0,\infty)$ için

$$f(z,t)=\left\{\beta\int_0^{e^{-at}z} g^{\beta-1}(s)\,f'(s)ds+\frac{\beta}{1+c}(e^{bt}-e^{-at})zg^{\beta-1}(e^{-at}z)\left([\mathcal{R}^n h(e^{-at}z)]'-\alpha\right)\right\}^{1/\beta} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanan $f:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir. Çünkü $g\in\mathcal{A}$ olduğundan

$$\psi(z)=\frac{g(z)}{z}$$

fonksiyonu birim diskte analitik ve $\psi(0)=1$ dir. Böylece $r_1\in(0,r]$ olmak üzere her $z\in\mathbb{U}_{r_1}$ için $\psi(z)\neq 0$ olacak şekilde $\mathbb{U}_{r_1}$ diski mevcuttur. Dolayısıyla orijinde "1" değerini alan, $\mathbb{U}_{r_1}$ de analitik $(\psi(z))^{\beta-1}$ ın özel bir dalını seçebiliriz. Bunu ψ_1 ile gösterelim. Öte yandan

$$\psi_2(z,t)=\beta\int_0^{e^{-at}z} s^{\beta-1}\psi_1(s)\,f'(s)ds$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik olan ψ_3 fonksiyonu için

$$\psi_2(z,t)=z^\beta\psi_3(z,t)$$

eşitliği yazılır. Böylece

$$\psi_4(z,t)=\psi_3(z,t)+\frac{\beta}{1+c}\left(e^{bt}-e^{-at}\right)e^{-a(\beta-1)t}\psi_1(e^{-at}z)\left([R^n h(e^{-at}z)]'-\alpha\right)$$

$\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik ve $z=0$ değeri için

$$\psi_4(0,t)=e^{-a\beta t}\left[\frac{1+c-(1-\alpha)\beta}{1+c}+\frac{(1-\alpha)\beta}{1+c}e^{(a+b)t}\right]$$

olur. Şimdi her $t\in[0,\infty)$ için $\psi_4(0,t)\neq 0$ olduğunu ispatlayalım. $\psi_4(0,0)=1$ olduğunu görmek kolaydır. Diğer taraftan $\psi_4(0,t_0)=0$ olacak şekilde bir $t_0\in(0,\infty)$ olduğunu farz edelim. Buradan $e^{(a+b)t_0}=\dfrac{1+c+(\alpha-1)\beta}{(\alpha-1)\beta}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $t_0>0$ için $c>-1\,(c<-1)$ sonucu elde edilir. Bu da $|c|\leq 1$ şartı ile çelişir ve dolayısıyla her $t\in[0,\infty)$ için $\psi_4(0,t)\neq 0$ olduğu görülür. Bu yüzden her $t\in[0,\infty)$ için $\psi_4(0,t)\neq 0$ olduğundan dolayı $r_2\in(0,r_1]$ için $\mathbb{U}_{r_2}$ diski vardır ve bu diskte analitik olan ve $\psi_5(z,t)$ ile göstereceğimiz $[\psi_4(z)]^{1/\beta}$ nın özel bir dalını seçebiliriz. Böylece (4.4) ifadesinden

$$f(z,t)=z\psi_5(z,t)=a_1(t)z+a_2(t)z^2+\ldots$$

yazılır ve $f(z,t)$ fonksiyonunun her $t\in[0,\infty)$ için $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik olduğu görülür. Dolayısıyla $f(z,t)$ fonksiyonu, her $z\in\mathbb{U}_{r_2}$ için $[0,\infty)$ kümesi üzerinde sürekli diferensiyellenebilirdir. Böylece Önerme 2.1.20 in (ii) şıkkından $f(z,t)$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ kümesinde yerel mutlak, $\mathbb{U}_{r_2}$ diskine göre de yerel düzgün süreklidir.

Öte yandan yukarıdaki adımlar göz önünde bulundurulursa,

$$a_1(t)=e^{(\frac{-a\beta+a+b}{\beta})t}\left[\frac{1+c-(1-\alpha)\beta}{1+c}e^{-(a+b)t}+\frac{(1-\alpha)\beta}{1+c}\right]^{1/\beta}$$

yazılır. Teoremin hipotezinden $\left|\beta-\dfrac{m+1}{2}\right|<\dfrac{m+1}{2}$ veya $\Re(1/\beta)>1/(m+1)$ olduğundan

$$\lim_{t\to\infty}|a_1(t)|=\infty$$

elde edilir. Ayrıca her $t\in[0,\infty)$ için $a_1(t)\neq 0$ dır. Böylece $f(z,t)/a_1(t)$ hesaplanıp, her iki tarafın limit alınırsa

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(z,t)}{a_1(t)}=\lim_{t\to\infty} z\left\{\left[\left(1-\frac{(1-\alpha)\beta}{1+c}\right)e^{-(a+b)t}+\frac{(1-\alpha)\beta}{1+c}\right]^{-1}\left(e^{-(a+b)t}\left[1+O(e^{-at}z)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\beta}{1+c}(1-e^{-(a+b)t})\left[1+O(e^{-at}z)\right]\left[(1-\alpha)+O(e^{-at}z)\right]\right)\right\}^{1/\beta}=z$$

elde edilir. Bu yakınsama aynı zamanda düzgün olduğundan, Lemma 2.2.18 den $t\in[0,\infty)$ için $0<r_3<r_2$ olacak şekilde $\mathbb{U}_{r_3}$ kapalı diski vardır ki, bu diskte $\{f(z,t)/a_1(t)\}$ düzgün sınırlı yani

$$\left|\frac{f(z,t)}{a_1(t)}\right|<K$$

olacak biçimde bir $K=K(r_3)>0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla Lemma 2.2.17 den $\{f(z,t)/a_1(t)\}$ ailesi $\mathbb{U}_r$ diskinde yerel düzgün sınırlıdır. Böylece Montel teoreminden

$\left\{\dfrac{f(z,t)}{a_1(t)}\right\}_{t\in[0,\infty)}$ ailesi $\mathbb{U}_r$ kümesinde bir normal ailedir.

Son olarak $0<r<r_3$ için $p:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$

$$p(z,t)=z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\Bigg/\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$$

biçiminde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Birim diskte $p(z,t)$ fonksiyonunun reel kısmı pozitif olacak şekilde analitik bir genişlemeye sahip olduğunu göstermek için, her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$w(z,t)=\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}=\frac{\dfrac{z\partial f(z,t)}{\partial z}-\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}}{\dfrac{z\partial f(z,t)}{\partial z}+\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}} \tag{4.5}$$

fonksiyonunun $\mathbb{U}\times[0,\infty)$ kümesinde analitik ve $|w(z,t)|<1$ eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Burada (4.5) eşitliğinden her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$\mathcal{G}(z,t)=e^{-(a+b)t}\left\{\left(\frac{(1+c)f'(e^{-at}z)}{[\mathcal{R}^n h(e^{-at}z)]'-\alpha}-1\right)\right.$$
$$\left.+(e^{(a+b)t}-1)\left[(\beta-1)\frac{e^{-at}zg'(e^{-at}z)}{g(e^{-at}z)}+\frac{e^{-at}z[\mathcal{R}^n h(e^{-at}z)]''}{[\mathcal{R}^n h(e^{-at}z)]'-\alpha}\right]\right\} \tag{4.6}$$

olmak üzere

$$w(z,t)=\frac{(1+a)\mathcal{G}(z,t)+1-b}{(1-a)\mathcal{G}(z,t)+1+b} \tag{4.7}$$

yazılır. Her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için (4.7) ile tanımlanan $w(z,t)$ fonksiyonu için $|w(z,t)|<1$ ifadesi,

$$\left|\mathcal{G}(z,t)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2} \tag{4.8}$$

biçimindeki eşitsizliğe denktir. İşlemlerin kolaylığı açısından

$$\mathcal{H}(z,t)=\mathcal{G}(z,t)-\frac{m-1}{2},\quad \forall z\in\mathbb{U},\ t\in[0,\infty)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada (4.1), (4.2) ve (4.6) ifadelerinden $t=0$ için

$$|\mathcal{H}(z,0)|=\left|\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[\mathcal{R}^n h(z)]'-\alpha}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2} \tag{4.9}$$

ve teoremin hipotezinden $z=0$ için

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}(0,t)|&=\left|\left(\frac{1+c}{1-\alpha}-1\right)e^{-(a+b)t}+(1-e^{-(a+b)t})(\beta-1)-\frac{m-1}{2}\right|\\
&=\left|\left(\frac{1+c}{1-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right)e^{-(a+b)t}+(1-e^{-(a+b)t})\left(\beta-\frac{m+1}{2}\right)\right|\\
&\le\left|\frac{1+c}{1-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|e^{-(a+b)t}+(1-e^{-(a+b)t})\left|\beta-\frac{m+1}{2}\right|\\
&<\frac{m+1}{2}e^{-(a+b)t}+(1-e^{-(a+b)t})\frac{m+1}{2}=\frac{m+1}{2}\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Öte yandan her $z\in\overline{\mathbb{U}}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$ ve $t>0$ için $|e^{-at}z|\le|e^{-at}|=e^{-at}<1$ olduğundan $\mathcal{H}(z,t)$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{U}}$ kapalı birim diskinde analitiktir. Maksimum modül prensibinden her $z\in\mathbb{U}$ ve keyfi olarak seçilen her $t>0$ sayısı için

$$\left|\mathcal{H}(z,t)\right| < \max_{|z|=1}\left|\mathcal{H}(z,t)\right| = \left|\mathcal{H}(e^{i\theta},t)\right| \tag{4.10}$$

olacak şekilde $\theta = \theta(t) \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Ayrıca $u = e^{-at}e^{i\theta}$ olsun. Buradan $|u| = e^{-at}$, $e^{-(a+b)t} = (e^{-at})^{m+1} = |u|^{m+1}$ ve (4.6) eşitliklerinden

$$\left|\mathcal{H}(e^{i\theta},t)\right| = \Bigg| |u|^{m+1}\left(\frac{(1+c)\beta f'(u)}{[\mathcal{R}^n h(u)]' - \alpha} - 1\right)$$

$$+ (1-|u|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{ug'(u)}{g(u)} + \frac{u[\mathcal{R}^n h(u)]''}{[\mathcal{R}^n h(u)]' - \alpha}\right] - \frac{m-1}{2}\Bigg|$$

elde edilir. Dolayısıyla $u \in \mathbb{U}$ olduğu için (4.2) ifadesinden

$$\left|\mathcal{H}(e^{i\theta},t)\right| \le \frac{m+1}{2} \tag{4.11}$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak (4.9) ve (4.11) ifadelerinden, her $z \in \mathbb{U}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için (4.8) eşitsizliği sağlanır. Böylece her $z \in \mathbb{U}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için $|w(z,t)| < 1$ olur.

Tüm bu durumlar göz önüne alındığında, Teorem 3.4.4 ün bütün şartları sağlandığından $f(z,t)$ fonksiyonunun her $t \in [0,\infty)$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent bir genişlemeye sahip olduğu görülür. Eğer $f(z,t)$ fonksiyonunda $t = 0$ alınırsa her $z \in \mathbb{U}$ için $f(z,0) = \mathcal{F}_\beta(z)$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ diskinde analitik ve ünivalenttir.

Eğer Teorem 4.1.1 de $n = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2: $f, g, h \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha, \beta, c \in \mathbb{C}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ sayıları için Teorem 4.1.1 deki şartların sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{(1+c)f'(z)}{h'(z) - \alpha} - 1\right) - \frac{m-1}{2}\right| < \frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left| |z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)f'(z)}{h'(z)-\alpha}-1\right)+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{zh''(z)}{h'(z)-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Teorem 4.1.1 de $h(z)=f(z)$ ve $n=1$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.3: $f,g\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha,\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ sayıları için Teorem 4.1.1 deki şartların sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{2(1+c)}{m+1}-1\right)-\frac{zf''(z)-\alpha}{f'(z)}\right|<\left|1-\frac{zf''(z)-\alpha}{f'(z)}\right|$$

ve

$$\left| |z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)f'(z)}{zf''(z)+f'(z)-\alpha}-1\right)+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z^2f'''(z)+2zf''(z)}{zf''(z)+f'(z)-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right|$$

$$\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Aşağıdaki sonuç $h(z)=f(z),\ \alpha=n=0$ ve $m=1$ için Teorem 4.1.1 in özel bir durumu olup özellikle genel integral operatörlerin ünivalentliğini incelemede etkin bir role sahip olacaktır.

Sonuç 4.1.4: $f,g\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\beta,c\in\mathbb{C}$ sayıları için $|c|<1$, $|\beta-1|<1$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|c|z|^2+(1-|z|^2)\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\right|\leq 1$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Teorem 4.1.1 deki (4.2) eşitsizliğinin farklı bir durumunu içeren teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.1.5: $f, g, h \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha, \beta, c \in \mathbb{C}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ sayıları için Teorem 4.1.1 deki şartların sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[\mathcal{R}^n h(z)]' - \alpha} - 1\right) - \frac{m-1}{2}\right| < \frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left|(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{z[\mathcal{R}^n h(z)]''}{[\mathcal{R}^n h(z)]' - \alpha} - \frac{m-1}{2}\right| \leq \frac{m+1}{2} \tag{4.12}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Deniz and Orhan 2011a).

İspat: Teorem 4.1.1 de (4.1) ile Teorem 4.1.5 de (4.12) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left| |z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[R^n h(z)]' - \alpha} - 1\right) + (1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{z[R^n h(z)]''}{[R^n h(z)]' - \alpha}\right] - \frac{m-1}{2}\right|$$

$$= \left| |z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[R^n h(z)]' - \alpha} - 1 - \frac{m-1}{2}\right) + (1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{z[\mathcal{R}^n h(z)]''}{[\mathcal{R}^n h(z)]' - \alpha} - \frac{m-1}{2}\right]\right|$$

$$< |z|^{m+1}\frac{m+1}{2} + (1-|z|^{m+1})\frac{m+1}{2} = \frac{m+1}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.1.1 in şartları sağlandığından (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Teorem 4.1.1 deki (4.1) eşitsizliğine farklı bir açıdan bakalım. $h(z) = f(z),\ \alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha < 0$ olsun. Burada $n = 0$ için basit işlemlerle (4.1) eşitsizliğinin

$$\Re f'(z) > \frac{m-c}{\alpha(m+1)}|f'(z)|^2, \quad (z \in \mathbb{U}, m \geq c) \tag{4.13}$$

ifadesine denk olduğunu görmek zor değildir.

Sonuç 4.1.6: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $\alpha < 0$, $-1 < c \leq m - \alpha(m+1)$, $\left|\beta - \frac{m+1}{2}\right| < \frac{m+1}{2}$ şartları sağlanmış olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\Re f'(z) > \frac{m-c}{\alpha(m+1)} |f'(z)|^2, \quad (c \leq m)$$

ve

$$\left|(\beta - 1)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{zf''(z)}{f'(z) - \alpha} - \frac{m-1}{2}\right| \leq \frac{m+1}{2} \tag{4.14}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

İspat: Teoremi ispatlamak için Teorem 4.1.5 de, (4.1) eşitsizliği yerine (4.13) eşitsizliği, $f(z) = g(z) = h(z)$, ve $n = 0$ almak yeterlidir.

Sonuç 4.1.6 da $\beta = 1$ alalım. Eğer (4.13) eşitsizliğinde $\alpha \to -\infty$ alınırsa her $z \in \mathbb{U}$ için $\Re f'(z) > 0$ elde edilir. Bunu yanı sıra (4.14) eşitsizliği de $\beta = 1$ ve $\alpha \to -\infty$ için doğru olduğundan Sonuç 4.1.6 dan f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir. O halde bu sonuç literatürde bilinen meşhur Alexander-Noshiro-Warshawski'nin ünivalentlik kriterinin bir genelleştirilmesidir.

Teorem 4.1.7: $f, g, h \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha, \beta, c \in \mathbb{C}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ sayıları için $c \neq -1$, $\left|c - \frac{m-1}{2}\right| \leq \frac{m+1}{2}$, $\left|\beta - \frac{m+1}{2}\right| < \frac{m+1}{2}$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left((1+c) f'(z) \frac{\mathcal{R}^v h(z) - \alpha}{\mathcal{R}^n f(z) - \alpha} - 1\right) - \frac{m-1}{2}\right| < \frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left| |z|^{m+1} \left((1+c) f'(z) \frac{\mathcal{R}^v h(z) - \alpha}{\mathcal{R}^n f(z) - \alpha} - 1\right) \right.$$

$$\left. + (1 - |z|^{m+1}) \left[(\beta - 1)\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{z[\mathcal{R}^n f(z)]'}{\mathcal{R}^n f(z) - \alpha} - \frac{z[\mathcal{R}^v h(z)]'}{\mathcal{R}^v h(z) - \alpha}\right] - \frac{m-1}{2} \right| \leq \frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Deniz and Orhan 2011a).

İspat: a ve b pozitif iki reel sayı olmak üzere $m=\frac{b}{a}$ olsun. $r\in(0,1]$ olmak üzere her $t\in[0,\infty)$ için

$$f(z,t)=\left\{\beta\int_0^{e^{-at}z} g^{\beta-1}(s)f'(s)ds+\frac{\beta}{1+c}(e^{bt}-e^{-at})zg^{\beta-1}(e^{-at}z)\left(\frac{\mathcal{R}^n f(e^{-at}z)-\alpha}{\mathcal{R}^v h(e^{-at}z)-\alpha}\right)\right\}^{1/\beta}$$

şeklinde tanımlanan $f:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir. İspatın bundan sonraki kısmı olan $f(z,t)$ nin Loewner zinciri olduğunu göstermek için sırasıyla Teorem 4.1.1 in ispatındaki adımları izlemek yeterlidir.

Eğer Teorem 4.1.7 de $\alpha=0$ alınıp ve (2.7) reküirans bağıntısı kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ sayılarının Teorem 4.1.7 deki şartları sağladığını kabul edelim. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left((1+c)f'(z)\frac{\mathcal{R}^v h(z)}{\mathcal{R}^n f(z)}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left||z|^{m+1}\left((1+c)f'(z)\frac{\mathcal{R}^v h(z)}{\mathcal{R}^n f(z)}-1\right)\right.$$

$$\left.+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+(n+1)\frac{\mathcal{R}^{n+1}f(z)}{\mathcal{R}^n f(z)}-(v+1)\frac{\mathcal{R}^{v+1}f(z)}{\mathcal{R}^v f(z)}-n+v\right]-\frac{m-1}{2}\right|\le\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 4.1.8 de $v=2, n=1$ ve $v=0, n=2$ alındığında sırasıyla aşağıdaki Sonuç 4.1.9 un (i) ve (ii) sonuçları elde edilir.

Sonuç 4.1.9: $f, g, h \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\beta, c \in \mathbb{C}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ sayılarının Teorem 4.1.7 deki şartları sağladığını kabul edelim.

(i) Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|(1+c)\left(2h'(z)+zh''(z)\right)-m-1\right|<m+1$$

ve

$$\left| |z|^{m+1}\left((1+c)\left(h'(z)+\frac{z}{2}h''(z)\right)-1\right)\right.$$
$$\left.+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{3z^2h''(z)+z^3h'''(z)}{2zh'(z)+z^2h''(z)}\right]-\frac{m-1}{2}\right| \le \frac{m+1}{2},$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

(ii) Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left(2(1+c)\frac{f'(z)h(z)}{2zf'(z)+z^2f''(z)}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left| |z|^{m+1}\left(2(1+c)\frac{f'(z)h(z)}{2zf'(z)+z^2f''(z)}-1\right)\right.$$
$$\left.+(1-|z|^{m+1})\left[1+(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{3z^2f''(z)+z^3f'''(z)+}{2zf'(z)+z^2f''(z)}-\frac{zh'(z)}{h(z)}\right]-\frac{m-1}{2}\right| \le \frac{m+1}{2},$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 4.1.10: $f, g, h \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\beta, c \in \mathbb{C}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ sayıları Teorem 4.1.7 deki şartları sağlasın.

(i) Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|(1+c)\,f'(z)-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left||z|^{m+1}\left((1+c)\,f'(z)-1\right)+(1-|z|^{m+1})(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Teorem 4.1.7 de $\alpha\to\infty$ alınırsa istenen sonuç elde edilir).

(ii) Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|(1+c)\,f'(z)-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}\qquad\text{ve}\qquad\left|(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Teorem 4.1.5 in ispatındaki yol izlenilerek ve Sonuç 4.1.10 daki (i) şıkkı kullanılarak ispatlanır).

Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.7 deki $f(z,t)$ zincirinde $\mathcal{R}^n$ Ruscheweyh operatörü yerine S^n Sălăgean operatörü alınırsa aşağıdaki teoremlere ve sonuçlara varılır.

Teorem 4.1.11: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha,\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ sayıları Teorem 4.1.1 deki şartları sağlasın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{(1+c)\,f'(z)}{[S^nh(z)]'-\alpha}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left||z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)\,f'(z)}{[S^nh(z)]'-\alpha}-1\right)+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z[S^nh(z)]''}{[S^nh(z)]'-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right|$$
$$\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Deniz and Orhan 2011a).

Teorem 4.1.12: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha,\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ sayıları Teorem 4.1.7 deki şartları sağlasın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left((1+c)f'(z)\frac{S^{v}h(z)-\alpha}{S^{n}f(z)-\alpha}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left|\,|z|^{m+1}\left((1+c)f'(z)\frac{S^{v}h(z)-\alpha}{S^{n}f(z)-\alpha}-1\right)\right.$$

$$\left.+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z[S^{n}f(z)]'}{S^{n}f(z)-\alpha}-\frac{z[S^{v}h(z)]'}{S^{v}h(z)-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Deniz and Orhan 2011a).

Eğer Teorem 4.1.12 de $\alpha=0$ alınıp ve (2.8) rekürans bağıntısı kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.13: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ sayılarının Teorem 4.1.12 deki şartları sağladığını kabul edelim. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left((1+c)f'(z)\frac{S^{v}h(z)}{S^{n}f(z)}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left|\,|z|^{m+1}\left((1+c)f'(z)\frac{S^{v}h(z)}{S^{n}f(z)}-1\right)\right.$$

$$\left.+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{S^{n+1}f(z)}{S^{n}f(z)}-\frac{S^{v+1}h(z)}{S^{v}h(z)}\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 4.1.13 de $v=2$ ve $n=1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.14: $f, g, h \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\beta, c \in \mathbb{C}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ sayılarının Teorem 4.1.12 deki şartları sağladığını kabul edelim. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|(1+c)\big(h'(z)+zh''(z)\big)-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\Bigg||z|^{m+1}\Big((1+c)\big(h'(z)+zh''(z)\big)-1\Big)$$
$$+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2z^2h''(z)+z^3h'''(z)}{zh'(z)+z^2h''(z)}\right]-\frac{m-1}{2}\Bigg|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Örnek 4.1.16: $\mathcal{F}_{\frac{m+1}{2}}(z)=\left[\frac{m+1}{2}\int\limits_0^z (ue^u)^{\frac{m-1}{2}}(1-u^{n-1})du\right]^{\frac{2}{m+1}}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir (İspat için Sonuç 4.1.10 un (ii) şıkkında $n=\{2,3...\}$, $c=\frac{m-1}{2}$, $\beta=\frac{m+1}{2}$, $g(z)=ze^z$ ve $f(z)=z-z^n/n$ almak yeterlidir).

Mevcut ünivalentlik kriterlerinin genelleştirilmelerinin ne derece önemli olduğu daha önce vurgulanmıştı. Bu genelleştirmelerin bir ihtiyaçtan kaynaklandığını aşağıdaki örnek en güzel şekilde ifade etmektedir.

Örnek 4.1.15: $\gamma\in\mathbb{C}, \gamma\neq 0$ olmak üzere $f(z)=z-\frac{\gamma}{n|\gamma|}z^n$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Gerçektende, $f(z)$ fonksiyonunun tanımından

$$f'(z)=1-\frac{\gamma}{|\gamma|}z \text{ ve } f''(z)=-\frac{\gamma}{|\gamma|}$$

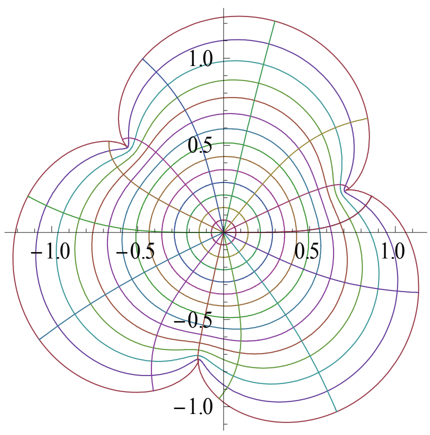
eşitlikleri elde edilir. Burada $f(z)$ fonksiyonu için, Becker'ın ünivalentlik kriteri uygulanırsa,

$$(1-|z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| = (1-|z|^2)\left|\frac{-\gamma z}{|\gamma|-\gamma z}\right| \leq (1-|z|^2)\frac{|z|}{1-|z|} = |z|(1+|z|) < 2 \not\leq 1$$

elde edilir. Buradan görülür ki Becker'ın ünivalentlik kriteri fonksiyonun ünivalentliğini test etmede yetersiz kaldı. Ayrıca hem Ahlfors'un hem de Kanas ve Srivastava'nın ünivalentlik kriteri fonksiyonun ünivalentliğini test etmede yeterli değillerdir. Fakat Teorem 4.1.5 de $m=\beta=1,\ \alpha=c=0\ \ h(z)=z$ alırsak,

$$|f'(z)-1| = \left|\frac{\gamma}{|\gamma|}z\right| < |z| < 1$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 4.1.5 bütün şartları sağlanır. Yani f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir. Ayrıca Mathematica 7.0 programı kullanılarak çizilen f fonksiyonunun grafiği bu iddiayı doğrulamaktadır.



Şekil 4.1. $f(z) = z - \dfrac{2-3i}{4\sqrt{13}}z^4$ fonksiyonunun grafiği

İkinci olarak, Goluzin'in 1969 yılında bulduğu bir f analitik fonksiyonunun ünivalent olması için yeter şartları içeren teoreminin, $F_\alpha(z) = \left(\alpha\displaystyle\int_0^z u^{\alpha-1}f'(u)du\right)^{1/\alpha}$ integral operatörü için olan şekli verilecektir.

Teorem 4.1.17: $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\Re(\alpha)>0$ ve $f\in\mathcal{A}$ olsun. Her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}\left[z\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^{1+\frac{1}{\alpha}}f'(z)}{f^{1+\frac{1}{\alpha}}(z)}\right)+\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha|z|^{2\alpha}}z\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^2f'(z)}{f^2(z)}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-\alpha}{|z|^{2\alpha}}z\frac{d}{dz}\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right]\right|\leq 1 \tag{4.15}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$F_\alpha(z)=\left(\alpha\int_0^z u^{\alpha-1}f'(u)du\right)^{1/\alpha} \tag{4.16}$$

biçiminde tanımlı F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir (Deniz *et al.* 2010a).

İspat: Teoremin ispatı için Teorem 3.4.4 ün şartlarının sağlandığını gösterelim. Bunun için ilk olarak g_1 fonksiyonunu

$$g_1(z,t)=1-\frac{e^{2\alpha t}-1}{\alpha}\left(\frac{e^{-t}zf'(e^{-t}t)}{f(e^{-t}t)}-1\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Her $t\geq 0$ için $f\in\mathcal{A}$ ve $e^{-t}z\in\mathbb{U}$ olduğu için $g_1(z,t)$ fonksiyonu her $t\geq 0$ için birim diskte analitiktir. $g_1(z,t)$ fonksiyonunun tanımından $g_1(0,t)=1$ olduğu açıktır. Böylece her $t\geq 0$ için $g_1(z,t)\neq 0$ olacak şekilde $0<r_1<1$ için $\mathbb{U}_{r_1}$ diski mevcuttur. İkinci olarak

$$g_2(z,t)=\alpha\int_0^{e^{-t}z}u^{\alpha-1}f'(u)du$$

olmak üzere $g_2(z,t)=z^\alpha g_3(z,t)$ olacak şekilde $g_3(z,t)$ fonksiyonunu düşünelim. $g_3(z,t)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik ve $g_3(0,t)=e^{-\alpha t}$ olduğunu görmek kolaydır. Yukarıdaki fonksiyonlar göz önüne alındığında, üçüncü olarak $0<r_2<r_1$ olmak üzere $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde

$$g_4(z,t)=g_3(z,t)+\frac{\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)f'(e^{-t}z)}{g_1(z,t)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik ve $g_4(z,t) = e^{\alpha t}$ dir. Böylece her $t \geq 0$ için $g_4(z,t) \neq 0$ olacak şekilde $0 < r_3 < r_2$ için bir diğer $\mathbb{U}_{r_3}$ diski mevcuttur. Dolayısıyla $\left[g_4(z,t)\right]^{1/\alpha}$ fonksiyonunun analitik olduğu bir dalı seçebiliriz ve bunu da $g_5(z,t)$ olarak tanımlayalım. Seçilen bu dal $(0,0)$ noktasında e^t ye eşittir. Bütün bu işlemler göz önüne alınırsa

$$f(z,t) = zg_5(z,t) = e^t z + a_2(t)z^2 + ... \tag{4.17}$$

ya da

$$f(z,t) = \left[\alpha \int_0^{e^{-t}z} u^{\alpha-1} f'(u)du + \frac{(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})z^\alpha f'(e^{-t}z)}{1 - \frac{e^{2\alpha t} - 1}{\alpha}\left(\frac{e^{-t}zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)} - 1\right)}\right]^{1/\alpha} \tag{4.18}$$

fonksiyonunun her $t \geq 0$ için $\mathbb{U}_{r_3}$ diskinde analitik olduğu elde edilir. Ayrıca (4.18) ifadesinden $t \to \infty$ için $e^t \to \infty$ olduğu görülür. İşlemlerin kolaylığı açısından (4.18) ifadesinden $f(z,t)$ fonksiyonu için

$$\frac{f(z,t)}{e^t} = \left[e^{-\alpha t} g_2(z,t) + \frac{(1 - e^{-2\alpha t})z^\alpha f'(e^{-t}z)}{g_1(z,t)}\right]^{1/\alpha} \tag{.4.19}$$

eşitliğini yazalım. Burada her $z \in \mathbb{U},\ \Re(\alpha) > 0$ için $\left|e^{-\alpha t} z\right| < 1$ sağlandığından ve $f(z)$ analitik olduğundan her $0 < r_4 < r_3,\ z \in \mathbb{U}_{r_4}$ ve $t \geq 0$ için

$$\left|e^{-\alpha t} g_2(z,t)\right| \leq m_1, \quad \left|(1 - e^{-2\alpha t})z^\alpha f'(e^{-t}z)\right| \leq m_2 \tag{4.20}$$

ve

$$\left|g_1(z,t)\right| \geq m_3 \tag{4.21}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde m_1, m_2 ve m_3 pozitif reel sayıları vardır. Dolayısıyla (4.19), (4.20) ve (4.21) ifadelerinden her $z \in \mathbb{U}_{r_4}$ ve $t \geq 0$ için

$$\left|\frac{f(z,t)}{e^t}\right| \leq \left[m_1 + \frac{m_2}{m_3}\right]^{1/\alpha} = K$$

olacak şekilde $K = K(r_4) > 0$ sayısı vardır. Böylece Lemma 2.2.17 ve Montel teoreminden $\left\{ \frac{f(z,t)}{e^t} \right\}_{t \geq 0}$ ailesi $\mathbb{U}_r$ diskinde bir normal ailedir. Diğer bir taraftan (4.17) eşitliğinden

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z \frac{\partial g_5(z,t)}{\partial t} \tag{4.22}$$

olduğu kolayca görülür. Burada $g_5(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}_{r_4}$ diskinde analitik olduğundan $\frac{\partial g_5(z,t)}{\partial t}$ kısmi türevi de $\mathbb{U}_{r_4}$ diskinde analitik ve dolayısıyla $\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ ifadesi de analitik olur. Dolayısıyla, $0 < r_5 < r_4$ olmak üzere her $z \in \mathbb{U}_{r_5}$ ve her $T > 0$, $t \in [0,T]$ sayısı için

$$\left| \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \right| < K_1$$

olacak şekilde $K_1 = K_1(r_5) > 0$ sayısı mevcuttur. Böylece Önerme 2.1.20 in (i) şıkkından, $f(z,t)$ fonksiyonu $t \in [0,\infty)$ için yerel mutlak ve $z \in \mathbb{U}_{r_5}$ e göre yerel düzgün süreklidir.

Öte yandan $\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ türevi $\mathbb{U}_{r_5}$ diskinde analitik olduğundan dolayı, (4.22) eşitliğinden $0 < r < r_5$ olacak şekilde bir r sayısı vardır ki, her $z \in \mathbb{U}_r$ için $\frac{1}{z}\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \neq 0$ dır. Böylece,

$$p(z,t) = z \frac{\partial L(z,t)}{\partial z} \Big/ \frac{\partial L(z,t)}{\partial t}$$

şeklinde tanımlanan $p(z,t)$ fonksiyonu her $t \geq 0$ için $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir. Son olarak $p(z,t)$ fonksiyonunun birim diskte analitik bir genişlemesinin ve her $t \geq 0$ için $\Re p(z,t) > 0$ olduğunu göstermek için

$$w(z,t) = \frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}, \quad (z \in \mathbb{U}_r,\ t \geq 0)$$

şeklinde tanımlanan $w(z,t)$ fonksiyonunun birim diskte analitik bir genişlemeye ve her $z \in \mathbb{U},\ t \geq 0$ için $|w(z,t)| < 1$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $f(z,t)$ fonksiyonunun $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ ve $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial z}$ kısmi türevleri yardımıyla

$$w(z,t) = \frac{1-e^{-2\alpha t}}{e^{-2\alpha t}}\left[\frac{e^{-2\alpha t}}{\alpha}\left(\frac{e^{-t}zf''(e^{-t}z)}{f'(e^{-t}z)} - \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-t}zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)} + \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\left(1-e^{-2\alpha t}\right)^2}{\alpha^2}\left(\frac{e^{-t}zf''(e^{-t}z)}{f'(e^{-t}z)} - 2\frac{e^{-t}zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)} + 2\right) + \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{e^{-t}zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)} - 1\right)\right]$$

olduğunu görmek zor değildir. Dolayısıyla (4.15) şartından her $z \in \mathbb{U}$ için $f'(z) \neq 0$ olduğundan $w(z,t)$ fonksiyonu birim diskte analitiktir. Buradan sırasıyla $z = 0$ ve $t = 0$ için

$$w(0,t) = 0 \tag{4.23}$$

ve

$$w(z,0) = 0 \tag{4.24}$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $t > 0,\ z \in \mathbb{U}$ ve $z \neq 0$ olsun. Her $z \in \overline{\mathbb{U}}$ için $\left|e^{-t}z\right| \leq e^{-t} < 1$ olduğu için $w(z,t)$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{U}}$ kümesinde analitiktir. Maksimum modül prensibinden her sabit $t > 0$ için

$$|w(z,t)| < \max_{|z|=1}|w(z,t)| = \left|w(e^{i\theta},t)\right|$$

olacak şekilde $\theta \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $\theta \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ olmak üzere $u = e^{-t}e^{i\theta}$ alalım. Buradan $|u| = e^{-t} < 1$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\left|w(e^{i\theta},t)\right| = \left|\frac{1-|u|^{2\alpha}}{\alpha}\left[u\frac{d}{du}\log\left(\frac{u^{1+\frac{1}{\alpha}}f'(u)}{f^{1+\frac{1}{\alpha}}(u)}\right) + \frac{1-|u|^{2\alpha}}{\alpha|u|^{2\alpha}}u\frac{d}{du}\log\left(\frac{u^2 f'(u)}{f^2(u)}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1-\alpha}{|u|^{2\alpha}}u\frac{d}{du}\log\left(\frac{f(u)}{u}\right)\right|$$

bulunur. Teoremin hipotezindeki (4.15) eşitsizliğinden

$$\left|w(e^{i\theta},t)\right| \leq 1 \tag{4.25}$$

yazılır. Böylece (4.23), (4.24) ve (4.25) ifadeleri göz önünde bulundurulduğunda her $z \in \mathbb{U}$ ve $t \geq 0$ için $|w(z,t)| < 1$ olur.

Yukarıdaki tüm sonuçlar dikkate alındığında Teorem 3.4.4 ün bütün şartları sağlanır ve dolayısıyla $f(z,t)$ fonksiyonu her $t \geq 0$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent bir genişlemeye sahip olduğu görülür. Eğer $t = 0$ alınırsa $f(z,0) = F_\alpha(z)$ elde edilir ve buradan (4.16) ile verilen F_α integral operatörü birim diskte analitik ve ünivalent olur.

Teorem 4.1.18: $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Re(\alpha) > 0$ ve $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}/\{0\}$ için

$$\left| \frac{1-|z|^{2\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)} \left[|z|^{2\alpha} \frac{d}{dz} \log\left(\frac{z^{1+\frac{1}{\alpha}} f'(z)}{f^{1+\frac{1}{\alpha}}(z)} \right) + \frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha} \frac{d}{dz} \log\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} \right) \right] \right.$$
$$\left. + (1-\alpha) \frac{d}{dz} \log\left(\frac{f(z)}{z} \right) \right| \leq |z|^{2\Re(\alpha)-1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (4.16) ile verilen F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Deniz *et al.* 2010a).

İspat: Her $z \in \mathbb{U}/\{0\}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ için

$$\left| \frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha} \right| = \left| \frac{1-e^{2\alpha \ln|z|}}{\alpha} \right| = \left| 2\ln|z| \int_0^1 e^{2\alpha t \ln|z|} dt \right|$$
$$\leq -2\ln|z| \int_0^1 \left| e^{2\alpha t \ln|z|} \right| dt = -2\ln|z| \int_0^1 e^{2t\Re(\alpha)\ln|z|} dt = \frac{1-|z|^{2\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)}$$

yazılır, yani her $z \in \mathbb{U}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ için

$$\left| \frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha} \right| \leq \frac{1-|z|^{2\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\left|\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}\frac{z}{|z|^{2\alpha}}\left[|z|^{2\alpha}\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^{1+\frac{1}{\alpha}}f'(z)}{f^{1+\frac{1}{\alpha}}(z)}\right)+\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}\right)\right]\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\frac{d}{dz}\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right|$$

$$\leq\frac{1-|z|^{2\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)}\frac{z}{|z|^{2\Re(\alpha)-1}}\left||z|^{2\alpha}\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^{1+\frac{1}{\alpha}}f'(z)}{f^{1+\frac{1}{\alpha}}(z)}\right)+\frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha}\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}\right)\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\frac{d}{dz}\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right|\leq 1$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla (4.15) eşitsizliği sağlandığı için F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalent olur.

4.2. Meromorf Fonksiyonlar İçin Ünivalentlik Kriterleri

Bu bölümde Δ kapalı birim diskinin dışında ve $\mathring{\mathbb{U}}$ delinmiş birim diskinde tanımlı fonksiyonlar için yeni ünivalentlik kriterleri verilecektir.

Teorem 4.2.1: f bir meromorf fonksiyon ve $g\in\mathcal{M}$ olsun. Bu fonksiyonlar Δ kümesinde yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca Δ kümesinde $\Re h(\xi)>1/2$ koşulunu sağlayan $h(\xi)=1+c_2/\xi^2+...$ analitik fonksiyonu verilsin. Eğer her $\alpha\in\mathbb{C}$ ve $\xi\in\Delta$ için,

$$\left|\frac{1-h(\xi)}{h(\xi)}|\xi|^2-(|\xi|^2-1)\left[\frac{\xi h'(\xi)}{h(\xi)}+(1-2\alpha)\frac{\xi f''(\xi)}{f'(\xi)}+2\alpha\frac{\xi g''(\xi)}{g'(\xi)}\right]\right.$$
$$\left.+\alpha(|\xi|^2-1)^2\frac{\xi}{\bar{\xi}}h(\xi)\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}-\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)}\right)^2+\left(S_f(\xi)-S_g(\xi)\right)\right]\right|\leq 1 \tag{4.26}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu Δ kümesinde ünivalent veya $f\in\Sigma$ dır (Deniz and Orhan 2011b).

İspat: Teoremin ispatı için Teorem 3.4.4 ün şartlarının sağlandığını gösterelim. Schwarz türevi Möbius dönüşümleri altında korunduğundan $f(\xi)$ ve $g(\xi)$ fonksiyonlarını

$$f(\xi)=\xi+a_1/\xi+\ldots \text{ ve } g(\xi)=\xi+b_1/\xi+\ldots$$

biçimiyle göz önüne alabiliriz. Bu fonksiyonlar ve bunların türevleri yardımıyla, $\left(g'/f'\right)^{\alpha}$ kuvvetinin esas dalında $\xi\to\infty$ iken 1 değerine sahip

$$v(\xi)=\left[\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}\right]^{\alpha}=1+\frac{d_2}{\xi^2}+\ldots,\quad (\alpha\in\mathbb{C}) \tag{4.27}$$

ve $\xi\to\infty$ iken ∞ değere sahip

$$u(\xi)=f(\xi)v(\xi)=\xi+\frac{e_2}{\xi}+\ldots. \tag{4.28}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. f ve g fonksiyonları Δ kümesinde meromorf ayrıca f' ve g' fonksiyonları yerel ünivalent (yani sıfırdan farklı) olduklarından u ve v fonksiyonları Δ kümesinde meromorf fonksiyonlardır. Her $t\in[0,\infty)$ ve $1/\xi=z\in\mathbb{U}$ için $f(z,t)=f:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$

$$f(z,t)=\left[\frac{u\left(e^t/z\right)+\dfrac{(e^{-t}-e^{t})}{z}h\left(e^t/z\right)u'\left(e^t/z\right)}{v\left(e^t/z\right)+\dfrac{(e^{-t}-e^{t})}{z}h\left(e^t/z\right)v'\left(e^t/z\right)}\right]^{-1} \tag{4.29}$$

$$=e^t z+\Psi(e^{-pt},z^2),\qquad p=1,2,\ldots$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun analitik olduğu kolayca görülebilir. Burada $p=1,2,\ldots$ için $\Psi(e^{-pt},z^2)$ fonksiyonunun analitik olduğu açıktır. Yukarıda $f(z,t)$ fonksiyonunun tanımından $a_1(t)=e^t$ olup

$$\lim_{t\to\infty}\left|a_1(t)\right|=\lim_{t\to\infty}e^t=\infty$$

elde edilir. Ayrıca her $t\in[0,\infty)$ için $a_1(t)=e^t\neq 0.$ Böylece,

$$\frac{f(z,t)}{e^t}=z+\Psi(e^{-(p+1)t},z^2)$$

bulunur. Buradan her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(z,t)}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\left\{z+\Psi(e^{-(p+1)t},z^2)\right\}=z$$

elde edilir. Bu yakınsama aynı zamanda düzgün olduğundan, Lemma 2.2.18 den $t\in[0,\infty)$ için $|z|\le r_0<1$ olacak şekilde $\mathbb{U}_{r_0}$ kapalı diski vardır ki, bu diskte $\left\{f(z,t)/a_1(t)\right\}$ düzgün sınırlı yani

$$\left|\frac{f(z,t)}{a_1(t)}\right|<K_0$$

eşitsizliğini sağlayan bir K_0 sayısı mevcuttur. Dolayısıyla Lemma 2.2.17 ve Montel teoremine göre $\left\{\frac{f(z,t)}{e^t}\right\}_{t\in[0,\infty)}$ ailesi $\mathbb{U}_r$ da bir normal ailedir. Ayrıca $\Psi(e^{-pt},z^2)$ fonksiyonu analitik olduğundan, $\Psi^{(k)}(e^{-pt},z^2),\ k\in\mathbb{N}_0$ fonksiyonu kompakt kümede sürekli olur. Dolayısıyla $\Psi^{(k)}(e^{-pt},z^2),\ k\in\mathbb{N}_0$ sınırlı fonksiyondur. Böylece her $T>0$ için $\left|e^t\right|<e^T$ olduğundan her $[0,T]\subset[0,\infty)$ kapalı aralığında

$$\left|\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}\right|<K_1,\quad \left(z\in\mathbb{U}_{r_0},\ t\in[0,T]\right)$$

olacak şekilde bir K_1 sabiti vardır. Böylece Önerme 2.1.20 in (i) şıkkından $f(z,t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında yerel mutlak sürekli ve $\mathbb{U}_{r_0}$ kümesinde yerel düzgün süreklidir.

Son olarak $\Re p(z,t)>0$ olacak şekilde

$$z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}=p(z,t)\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \tag{4.30}$$

diferensiyel denklemini sağlayan $p:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu bulalım. Diğer bir ifadeyle (4.30) denklemini sağlayan $\Re p(z,t)>0$ koşulu altında $p(z,t)$ fonksiyonu bulmak yerine her $z\in\mathbb{U}$ ve $t\in[0,\infty)$ için

$$w(z,t)=\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}=\frac{\dfrac{z\partial f(z,t)}{\partial z}-\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}}{\dfrac{z\partial f(z,t)}{\partial z}+\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}} \tag{4.31}$$

denklemini sağlayan ve $|w(z,t)|<1$ olacak şekilde $w(z,t)$ fonksiyonunu bulmak yeterlidir. Bunu için (4.29) ifadesinden $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial z}$ ve $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}=\frac{1}{z}\frac{e^t}{z}\left\{\left(1+(e^{-2t}-1)\left[h(e^t/z)+\frac{e^t}{z}h'(e^t/z)\right]\right)(u'v-v'u)\right.$$
$$\left.+(e^{-2t}-1)\frac{e^t}{z}h(e^t/z)(u''v-v''u)+(e^{-2t}-1)^2\frac{e^{2t}}{z^2}h^2(e^t/z)(u''v'-v''u')\right\}$$
$$\times f^2(z,t)\Big/\left[v(e^t/z)+(e^{-t}-e^t)\frac{1}{z}h(e^t/z)v'(e^t/z)\right]^2$$

ve

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-\frac{e^t}{z}\left\{\left(1-(e^{-2t}+1)h(e^t/z)+(e^{-2t}+1)\frac{e^t}{z}h'(e^t/z)\right)(u'v-v'u)\right.$$
$$\left.+(e^{-2t}-1)\frac{e^t}{z}h(e^t/z)(u''v-v''u)+(e^{-2t}-1)^2\frac{e^{2t}}{z^2}h^2(e^t/z)(u''v'-v''u')\right\}$$
$$\times f^2(z,t)\Big/\left[v(e^t/z)+(e^{-t}-e^t)\frac{1}{z}h(e^t/z)v'(e^t/z)\right]^2$$

elde edilir. $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial z}$ ve $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ kısmi türevleri (4.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}w(z,t)&=e^{2t}\left(\frac{1-h(e^t/z)}{h(e^t/z)}\right)+(1-e^{2t})\frac{e^t}{z}\left(\frac{h'(e^t/z)}{h(e^t/z)}+\frac{u''v-v''u}{u'v-v'u}\right)\\&\quad+e^{2t}(e^{-2t}-1)^2\frac{e^{2t}}{z^2}h(e^t/z)\frac{u''v'-v''u'}{u'v-v'u}\end{aligned}\tag{4.32}$$

elde edilir. Ayrıca (4.27) ve (4.28) ifadelerinden

$$u'v-v'u=f'\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha},\tag{4.33}$$

$$u''v-v''u=(1-2\alpha)f''\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha}+2\alpha g''\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha-1}\tag{4.34}$$

ve

$$u''v'-v''u'=\alpha f'\left(\frac{g'}{f'}\right)^{2\alpha}\left\{\left(S_f-S_g\right)+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''}{f'}-\frac{g''}{g'}\right)\right\}\tag{4.35}$$

eşitlikleri bulunur. Yukarıda elde edilen (4.33), (4.34) ve (4.35) eşitlikleri $\frac{e^t}{z}$ ye göre hesaplanıp (4.32) ifadesinde yerine yazılırsa her $z \in \mathbb{U}$ ve $t \in [0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} w(z,t) &= e^{2t}\left(\frac{1-h(e^t/z)}{h(e^t/z)}\right)+(1-e^{2t})\frac{e^t}{z}\left(\frac{h'(e^t/z)}{h(e^t/z)}+(1-2\alpha)\frac{f''(e^t/z)}{f'(e^t/z)}+2\alpha\frac{g''(e^t/z)}{g'(e^t/z)}\right) \\ &+e^{2t}(e^{-2t}-1)^2\frac{e^{2t}}{z^2}h(e^t/z)\alpha\left(\left(S_f(e^t/z)-S_g(e^t/z)\right)+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''(e^t/z)}{f'(e^t/z)}-\frac{g''(e^t/z)}{g'(e^t/z)}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.36}$$

bulunur. Buradan $t=0$ alınırsa

$$w(z,0)=\frac{1-h(1/z)}{h(1/z)}$$

elde edilir ve bu fonksiyon $t>0$ için aynı zamanda $\overline{\mathbb{U}}$ kapalı birim diskinde analitiktir. Dolayısıyla teoremin hipotezinden ve $\frac{1}{z}=\xi\in\Delta$ alınırsa Δ kümesinde

$$\left|\frac{1-h(\xi)}{h(\xi)}\right|<1$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Ayrıca her $z\in\overline{\mathbb{U}}$ ve $t>0$ için $\left|\frac{e^t}{z}\right|\geq\left|e^t\right|>1$ eşitsizliği sağlanır ve dolayısıyla $w(z,t)$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{U}}$ kümesinde analitiktir. (4.36) eşitliğinde her $t>0$ için $\frac{e^t}{z}=\tilde{\xi}\in\Delta$, $\tilde{\xi}=\xi e^t$ ve $|z|=1$ için $\left|\tilde{\xi}\right|=e^t$ yazılır ve son olarak $\tilde{\xi}$ yerine ξ yazılırsa teoremin hipotezinden

$$\begin{aligned} |w(z,t)| &= \Bigg| |\xi|^2\left(\frac{1-h(\xi)}{h(\xi)}\right)-(|\xi|^2-1)\left(\frac{\xi h'(\xi)}{h(\xi)}+(1-2\alpha)\frac{\xi f''(\xi)}{f'(\xi)}+2\alpha\frac{\xi g''(\xi)}{g'(\xi)}\right) \\ &+\alpha(|\xi|^2-1)^2\frac{e^{2t}}{z^2}h(\xi)\left(\left(S_f(\xi)-S_g(\xi)\right)+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}-\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)}\right)\right)\Bigg| \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $z\in\mathbb{U}$ ve $t\geq 0$ için $|w(z,t)|\leq 1$ elde edilir ve buna denk olan $\Re p(z,t)>0$ eşitsizliği sağlanır.

Yukarıdaki tüm ifadeler göz önüne alındığında Teorem 3.4.4 ün bütün şatları sağlanır ve dolayısıyla her $z \in \mathbb{U}$ ve $t \geq 0$ için $f(z,t)$ fonksiyonu bir Loewner zinciridir (veya ünivalettir). Özel olarak (4.28) ve (4.29) ifadelerinden $z \in \mathbb{U}$ için

$$f(z,0) = \frac{v(1/z)}{u(1/z)} = \frac{1}{f(1/z)} \in \mathcal{S}$$

yazılır. Buradan her $\xi \in \Delta$ için (2.3) gerektirmesinden $f(\xi) \in \Sigma$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1 de $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: f bir meromorf fonksiyon ve $g \in \mathcal{M}$ olsun. Bu fonksiyonlar Δ kümesinde yerel ünivalent olsunlar. Ayrıca Δ kümesinde $\Re h(\xi) > 1/2$ koşulunu sağlayan $h(\xi) = 1 + c_2/\xi^2 + ...$ analitik fonksiyonu verilsin. Eğer her $\xi \in \Delta$ için,

$$\left| \frac{1-h(\xi)}{h(\xi)} |\xi|^2 - (|\xi|^2 - 1)\left[\frac{\xi h'(\xi)}{h(\xi)} + \frac{\xi f''(\xi)}{f'(\xi)} \right] \right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu Δ kümesinde ünivalenttir.

Teorem 4.2.1, Δ kümesinde tanımlı meromorf fonksiyonlar için bilinen ünivalentlik kriterlerinin önemli bir genelleştirilmesidir. Aşağıdaki örnek bu durumun daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

Örnek 4.2.3: $f : \Delta \to \mathbb{C}$ tanımlı

$$f(\xi) = \frac{\xi^2}{(\xi - 1)^2}$$

meromorfik fonksiyonu Δ kümesinde ünivalenttir.

Gerçektende, $f(\xi) = \dfrac{\xi^2}{(\xi-1)^2}$ fonksiyonu için $f'(\xi) = \dfrac{-2\xi}{(\xi-1)^3}$ olur. f' için logaritmik türev alınırsa

$$\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} = -\frac{2\xi+1}{\xi(\xi-1)}$$

ve

$$S_f = \left(\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right)^2 = -\frac{3}{2}\frac{1}{\xi^2(\xi-1)^2} \qquad (4.37)$$

elde edilir. Diğer bir taraftan Teorem 4.2.1 için

$$g(\xi) = \frac{2\xi^2}{2\xi-1)} \text{ ve } h(\xi) = \frac{(2\xi-1)^2}{4\xi(\xi-1)}$$

meromorf fonksiyonlarını göz önüne alalım. Ayrıca her $z \in \Delta$ için $\Re h(\xi) \geq 1/2$ olduğu açıktır. Bu durumda gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{1}{\xi(\xi-1)(2\xi-1)}, \quad S_g = \left(\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)}\right)^2 = -\frac{3}{2}\frac{1}{\xi^2(\xi-1)^2} \qquad (4.38)$$

ve

$$\frac{h(\xi)-1}{h(\xi)} = \frac{1}{(2\xi-1)^2}, \quad h'(\xi) = -\frac{2\xi-1}{4\xi^2(\xi-1)^2}, \quad \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = -\frac{1}{\xi(\xi-1)(2\xi-1)} \qquad (4.39)$$

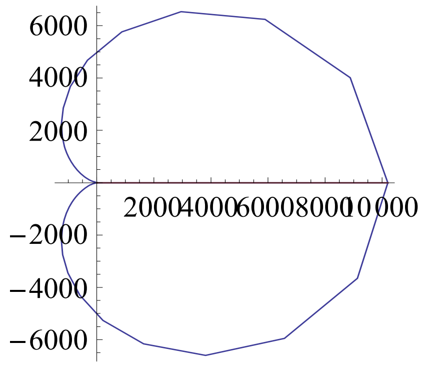
elde edilir. Böylece Teorem 4.2.1 in (4.26) eşitsizliğinde $\alpha = \dfrac{1}{2}$ için, (4.37), (4.38) ve (4.39) ifadeleri yerine yazılırsa her $z \in \Delta$ için

$$\left|\frac{\xi^2}{4\xi(\xi-1)+1}\right| = \left|\frac{\xi}{2\xi-1}\right|^2 \leq 1$$

bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu Δ kümesinde ünivalenttir. Fakat f ve g fonksiyonları için Teorem 3.8.1-3.8.3 ve Teorem 3.8.5 deki şartlar yeterli değildir. Örneğin; Teorem 3.8.5 de (4.37) ve (4.38) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\frac{|\xi|^2-1}{|(\xi-1)(2\xi-1)|} \leq \frac{|\xi|+1}{2|\xi|-1} \not\leq 1$$

elde edilir. Bu da f fonksiyonunun ünivalentliğini göstermede, Teorem 3.8.1-3.8.3 ve Teorem 3.8.5 in yetersiz olduğunu gösterir. Burada özellikle α sabitinin ve h fonksiyonunun uygun seçimi f fonksiyonunun ünivalentliğini göstermede önemli rol oynamıştır. Ayrıca Mathematica 7.0 programı kullanılarak çizilen f fonksiyonunun grafiği bu iddiayı doğrulamaktadır.



Şekil 4.2. $f(\xi)=\dfrac{\xi^2}{(\xi-1)^2}$ fonksiyonunun grafiği

Teorem 4.2.4: $f\in\prod$, $f'(\zeta)\neq 0$ ve $g(\zeta)=1+c_2\zeta^2+...$ analitik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $s=\alpha+i\beta$ ve $k\in\mathbb{R}_+$ sayılarının $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $1/2<k\leq\alpha$ şartlarını sağladığını kabul edelim. Eğer her $\zeta\in\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)}+\frac{ks}{\alpha}\right|<\frac{k|s|}{\alpha} \tag{4.40}$$

ve

$$\left|\frac{1}{|\zeta|^{2k/\alpha}}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)}-\left(\frac{1-|\zeta|^{2k/\alpha}}{|\zeta|^{2k/\alpha}}\right)\left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}+s\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)}\right]+\frac{ks}{\alpha}\right|\leq\frac{k|s|}{\alpha} \tag{4.41}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa, f fonksiyonu $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalent veya $f\in\widetilde{\Sigma}$ dır.

İspat: İspat için Teorem 3.4.4 ün şartlarının sağlandığını gösterelim. İlk olarak $r\in(0,1]$ sayısı için $f:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$,

$$f(z,t)=\frac{1}{f(e^{-st}z)}\left\{1-(1-e^{-2kt})g(e^{-st}z)\right\}^{-s}=a_1(t)z+a_2(t)z^2+... \tag{4.42}$$

şeklinde tanımlı $f(z,t)$ fonksiyonun her $t\in[0,\infty)$ için $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik olduğunu gösterelim. Burada her $\zeta\in\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için

$$f(e^{-st}\zeta)=\frac{e^{st}}{\zeta}+b_0+b_1e^{-st}\zeta+\dots$$
$$g(e^{-st}\zeta)=1+c_2e^{-2st}\zeta^2+\dots \tag{4.43}$$

dir. Şimdi $\phi_1:\mathbb{U}\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$

$$\phi_1(z,t)=1-(1-e^{-2kt})g(e^{-st}z)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $t\in[0,\infty)$ ve $z\in\mathbb{U}$ için $g(z)$ fonksiyonu analitik olduğundan $\phi_1(z,t)$ fonksiyonu da analitik ve $\phi_1(0,t)=e^{-2kt}\neq 0$ dır. Dolayısıyla $\phi_1(z,t)\neq 0$ olacak şekilde bir $\mathbb{U}_{r_1}$ $(0<r_1<1)$ diski vardır. Bu diskte $\phi_2(z,t)$ ile tanımlayacağımız $\left(\phi_1(z,t)\right)^{-s}$ nin uygun bir dalını seçebiliriz. Buradan her $t\in[0,\infty)$ ve $z\in\mathbb{U}_{r_1}$ için $\phi_2(z,t)$ analitik, $\phi_2(0,t)=e^{2kst}$ ve $\phi_2(z,t)\neq 0$ olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki ifadeler ile birlikte

$$f(z,t)=\frac{1}{f(e^{-st}z)}\phi_2(z,t) \tag{4.44}$$

fonksiyonunun her $t\in[0,\infty)$ için $\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik olduğu açıktır. (4.44) eşitliğinden

$$f(z,t)=e^{s(2k-1)t}z+\dots \tag{4.45}$$

açılımına sahiptir. (4.45) serisi (4.42) serisi ile karşılaştırıldığında

$$a_1(t)=e^{s(2k-1)t} \tag{4.46}$$

bulunur ve her $t\in[0,\infty)$ için $a_1(t)\neq 0$ dır. Teoremin hipotezinden $\alpha>0$ ve $1/2<k\leq\alpha$ olduğundan

$$\lim_{t\to\infty}|a_1(t)|=\lim_{t\to\infty}\left|e^{s(2k-1)t}\right|=\lim_{t\to\infty}e^{\alpha(2k-1)t}=\infty$$

olur. Ayrıca (4.42), (4.43) ve (4.46) den

$$\frac{f(z,t)}{a_1(t)}=\frac{z}{e^{s(2k-1)t}\left(e^{st}+b_0z+b_1e^{-st}z^2+\dots\right)}\phi_2(z,t)$$

$$=\frac{z}{\left(1+b_0e^{-st}z+b_1e^{-2st}z^2+\dots\right)\left[1-c_2(e^{2kt}-1)e^{-2st}z^2+\dots\right]^s}$$

elde edilir. Son eşitlikte $e^{2(k-\alpha)t}\leq 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|\frac{f(z,t)}{a_1(t)}\right| \le \frac{|z|}{\left[1-|b_1|e^{-2t}|z|^2+\ldots\right]\left[1-|c_2|\left|e^{2(k-\alpha)t}-e^{-2\alpha t}\right||z|^2+\ldots\right]^s}$$

$$\le \frac{r_2}{\left[1-|b_1|r_2^2+\ldots\right]\left[1-|c_2|r_2^2+\ldots\right]^s} \le K_0$$

olacak şekilde $\mathbb{U}_{r_2}$ $(0<r_2<r_1)$ diski ve bir $K_0>0$ sayısı vardır. Böylece Lemma 2.2.17 ve Montel teoreminden $\left\{\frac{f(z,t)}{a_1(t)}\right\}_{t\in[0,\infty)}$, $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik fonksiyonların bir normal ailesini oluşturur. Diğer taraftan $f(z,t)$ nin kısmi türevleri

$$z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = -e^{-st}z\frac{f'(e^{-st}z)}{f^2(e^{-st}z)}\left[\phi_2(z,t)\right] + se^{-st}z(1-e^{-2kt})\frac{g'(e^{-st}z)}{f^2(e^{-st}z)}\left[\phi_2(z,t)\right]^{(1+s)/s} \tag{4.47}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} &= se^{-st}z\frac{f'(e^{-st}z)}{f^2(e^{-st}z)}\left[\phi_2(z,t)\right] - s^2e^{-st}z(1-e^{-2kt})\frac{g'(e^{-st}z)}{f^2(e^{-st}z)}\left[\phi_2(z,t)\right]^{(1+s)/s}\\ &\quad + 2kse^{-2kt}\frac{g(e^{-st}z)}{f(e^{-st}z)}\left[\phi_2(z,t)\right]^{(1+s)/s}\end{aligned} \tag{4.48}$$

olarak hesaplanır. (4.43) deki f ve g fonksiyonlarının tanımından

$$\Psi_1(z,t) = e^{-st}z\frac{f'(e^{-st}z)}{f(e^{-st}z)} = -1 + 2b_2e^{-2st}z^2 + \ldots$$

$$\Psi_2(z,t) = \frac{e^{-st}zg'(e^{-st}z)}{f(e^{-st}z)} = 2c_2e^{-3st}z^3 + \ldots$$

eşitlikleri yazılır. Böylece (4.48) eşitliğinde Ψ_1, Ψ_2 ve (4.42) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} &= s\Psi_1(z,t)f(z,t) - s^2(1-e^{-2kt})\Psi_2(z,t)f(z,t)\left[\phi_2(z,t)\right]^{1/s}\\ &\quad + 2kse^{-2kt}g(e^{-st}z)f(z,t)\left[\phi_2(z,t)\right]^{1/s}\\ &= s(2k-1)e^{s(2k-1)t}z + \ldots\end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir. Ayrıca $\Psi_1, \Psi_2, \phi_2, g$ ve $f(z,t)$ fonksiyonları analitik olduklarından dolayı (4.49) dan $\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ fonksiyonu da $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik olur. Böylece $T>0$ ve $0<r_3<r_2$ olacak şekilde her $t\in[0,T]$ ve her $z\in\mathbb{U}_{r_3}$ için

$$\left|\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}\right| < K$$

eşitsizliğini sağlayan $K = K(T, r_3) > 0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla Önerme 2.1.20 in (i) şıkkından, $f(z,t)$ fonksiyonu $t \in [0,\infty)$ için yerel mutlak ve $z \in \mathbb{U}_{r_3}$ e göre yerel düzgün süreklidir.

Öte yandan $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ türevi $\mathbb{U}_{r_3}$ diskinde analitik olduğundan dolayı, (4.49) eşitliğinden $0 < r < r_3$ olacak şekilde bir r sayısı vardır ki, her $z \in \mathbb{U}_r$ için ve ayrıca $k > 1/2$ olduğundan $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t} = s(2k-1)e^{s(2k-1)t} \neq 0$ dır. Böylece,

$$p(z,t) = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} \Big/ \frac{\partial f(z,t)}{\partial t}$$

şeklinde tanımlanan $p(z,t)$ fonksiyonu her $t \geq 0$ için $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir. Son olarak $p(z,t)$ fonksiyonunun birim diskte analitik bir genişlemesinin ve her $t \geq 0$ için $\Re p(z,t) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için

$$w(z,t) = \frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}, \quad (z \in \mathbb{U}_r,\ t \geq 0) \tag{4.50}$$

şeklinde tanımlanan $w(z,t)$ fonksiyonunun birim diskte analitik bir genişlemesinin ve her $z \in \mathbb{U}$, $t \geq 0$ için $|w(z,t)| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada (4.50) eşitliğinde (4.47), (4.48) ifadeleri ve z yerine de $\zeta \in \mathring{\mathbb{U}}$ yazılırsa her $\zeta \in \mathring{\mathbb{U}}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için

$$w(\zeta,t) = \frac{(1+s)\mathcal{K}(\zeta,t)-2}{(1-s)\mathcal{K}(\zeta,t)+2} \tag{4.51}$$

elde edilir. Burada her $\zeta \in \mathring{\mathbb{U}}$ için

$$\mathcal{K}(\zeta,t) = -\frac{e^{2kt}}{ks}\frac{e^{-st}\zeta f'(e^{-st}\zeta)}{f(e^{-st}\zeta)g(e^{-st}\zeta)} + \frac{e^{2kt}-1}{k}\left\{\frac{1}{s}\frac{e^{-st}\zeta f'(e^{-st}\zeta)}{f(e^{-st}\zeta)} + \frac{e^{-st}\zeta g'(e^{-st}\zeta)}{g(e^{-st}\zeta)}\right\} \tag{4.52}$$

dır. Her $\zeta \in \mathring{\mathbb{U}}$ ve $t \in [0,\infty)$ için (4.51) ile tanımlanan $w(\zeta,t)$ fonksiyonu için $|w(\zeta,t)| < 1$ eşitsizliği

$$\left|\mathcal{K}(\zeta,t)-\frac{1}{\alpha}\right|<\frac{1}{\alpha},\quad (\zeta\in\mathring{\mathbb{U}},\ t\in[0,\infty),\alpha=\Re(s)) \tag{4.53}$$

biçimindeki eşitsizliğe denktir. İşlemlerin kolaylığı açısından

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\zeta,t)=\mathcal{K}(\zeta,t)-\frac{1}{\alpha},\quad (\zeta\in\mathring{\mathbb{U}},t\in[0,\infty))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (4.40), (4.52) ve (4.53) ifadelerinden $t=0$ için

$$\left|\widetilde{\mathcal{K}}(\zeta,0)\right|=\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)}+\frac{ks}{\alpha}\right|<\frac{k|s|}{\alpha} \tag{4.54}$$

bulunur. Diğer bir taraftan her $\zeta\in\overline{\mathbb{U}}$ ve $t>0$ için $\left|e^{-st}\zeta\right|\le\left|e^{-st}\right|=e^{-\alpha t}<1$ olduğundan $\mathcal{K}(\zeta,t)$ fonksiyonu $\overline{\mathring{\mathbb{U}}}=\overline{\mathbb{U}}$ kapalı birim diskinde analitik bir fonksiyondur. Maksimum modül prensibini kullanarak her $\zeta\in\mathring{\mathbb{U}}$ ve keyfi sabit her $t>0$ için

$$\left|\widetilde{\mathcal{K}}(\zeta,t)\right|<\max_{|\zeta|=1}\left|\widetilde{\mathcal{K}}(\zeta,t)\right|=\left|\widetilde{\mathcal{K}}(e^{i\theta},t)\right|, \tag{4.55}$$

olacak şekilde $\theta=\theta(t)\in\mathbb{R}$ mevcuttur. Ayrıca $\tilde{\zeta}=e^{-st}e^{i\theta}$ olsun. Buradan $\left|\tilde{\zeta}\right|=e^{-\alpha t}<1$, $e^{-2kt}=\left|\tilde{\zeta}\right|^{-2k/\alpha}$ ve (4.52) eşitliklerinden

$$\left|\widetilde{\mathcal{K}}(e^{i\theta},t)\right|=\left|\frac{1}{\left|\tilde{\zeta}\right|^{2k/\alpha}}\frac{\tilde{\zeta}f'(\tilde{\zeta})}{f(\tilde{\zeta})g(\tilde{\zeta})}-\left(\frac{1-\left|\tilde{\zeta}\right|^{2k/\alpha}}{\left|\tilde{\zeta}\right|^{2k/\alpha}}\right)\left[\frac{\tilde{\zeta}f'(\tilde{\zeta})}{f(\tilde{\zeta})}+s\frac{\tilde{\zeta}g'(\tilde{\zeta})}{g(\tilde{\zeta})}\right]+\frac{ks}{\alpha}\right|$$

elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{\zeta}\in\mathring{\mathbb{U}}$ olduğu için (4.41) eşitsizliğinden

$$\left|\widetilde{\mathcal{K}}(e^{i\theta},t)\right|\le\frac{k|s|}{\alpha} \tag{4.56}$$

eşitsizliği bulunur ve sonuç olarak (4.54) ve (4.56) eşitsizliklerinden, her $\zeta\in\mathring{\mathbb{U}}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için (4.53) eşitsizliğinin gösterdiği

$$\left|\widetilde{\mathcal{K}}(\zeta,t)\right|=\left|\mathcal{K}(\zeta,t)-\frac{1}{\alpha}\right|<\frac{1}{\alpha}$$

sağlanır. Böylece her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için $\left|w(z,t)\right|<1$ olur.

Tüm bu durumlar göz önüne alındığında Teorem 3.4.4 ün bütün şartları sağlanır ve $f(z,t)$ fonksiyonu her $t \in [0,\infty)$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde bir Loewner zinciridir. Özel olarak (4.42) ifadesinden $z \in \mathbb{U}$ için

$$f(z,0) = 1/f(z) \in \mathcal{S}$$

yazılır. Buradan her $\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için (2.5) ifadesinden $f \in \widetilde{\Sigma}$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.4 de, $\alpha \geq 1$ için $|\zeta|^{2k/\alpha}$ yerine $|\zeta|^{2k}$ durumunu içeren teorem aşağıdaki gibidir. Teoreme geçmeden önce, teoremin ispatında kullanacağımız bir hatırlatmayı verelim.

Hatırlatma 4.2.5: $D \subset \mathbb{C}$ sınırı doğrusal olmayan bir konveks bölge olsun. $a \in \overline{D}$ ve $a \neq b$ olacak şekilde a ve b sabit noktaları için $w(\lambda_0) = \lambda_0 a + (1-\lambda_0)b \in \overline{D}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

(i) Eğer $\lambda_0 \in (0,1]$ ve her $\lambda \in (\lambda_0, 1) \Rightarrow w(\lambda) \in D$

(ii) Eğer $\lambda_0 > 1$ ve her $\lambda \in (1, \lambda_0) \Rightarrow w(\lambda) \in D$

dır (Lewandowski 1987).

Teorem 4.2.6: $f \in \prod$, $f'(\zeta) \neq 0$ ve $g(\zeta) = 1 + c_2\zeta^2 + \ldots$ analitik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta$ ve $k \in \mathbb{R}_+$ sayılarının $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$, $1/2 < k \leq \alpha$ şartlarını sağladığını kabul edelim. Eğer her $\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için

$$\left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} + \frac{ks}{\alpha} \right| < \frac{k|s|}{\alpha} \tag{4.57}$$

ve

$$\left| \frac{1}{|\zeta|^{2k}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} - \left(\frac{1-|\zeta|^{2k}}{|\zeta|^{2k}} \right) \left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} + s\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)} \right] + \frac{ks}{\alpha} \right| \leq \frac{k|s|}{\alpha} \tag{4.58}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa, f fonksiyonu $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalent veya $f \in \widetilde{\Sigma}$ dır.

İspat: $\lambda_0 > 1$ olmak üzere

$$\varphi(\zeta,\lambda_0) = \lambda_0 u(\zeta) + \left(1-\lambda_0\right) v(\zeta), \quad (\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}, t \in \left[0,\infty\right))$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Burada

$$u(\zeta) = \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) g(\zeta)} + \frac{ks}{\alpha}$$

ve

$$v(\zeta) = \left\{ \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} + s\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)} + \frac{ks}{\alpha} \right\}$$

dir. Sabit bir $\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}$ ve $t \in \left[0,\infty\right)$ için $\varphi(\zeta,\lambda_0)$ başlangıç ve bitim noktaları $u(\zeta,\lambda_0)$ ve $v(\zeta,\lambda_0)$ olan doğru parçasının bir noktasıdır. (4.58) den $\varphi(\zeta,\lambda_0)$ fonksiyonu her $\lambda_0 > 1$ için $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ kümesinde analitiktir ve her $\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için (4.57) ve (4.58) den sırasıyla

$$\left|\varphi(\zeta,1)\right| = \left|u(z)\right| < \frac{k\left|s\right|}{\alpha} \tag{4.59}$$

ve

$$\left|\varphi(\zeta,\frac{1}{\left|\zeta\right|^{2k}})\right| \le \frac{k\left|s\right|}{\alpha} \tag{4.60}$$

elde edilir. Buradan $\alpha > k$ olduğundan her $\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için $1 < \frac{1}{\left|\zeta\right|^{2k/\alpha}} = \lambda < \frac{1}{\left|\zeta\right|^{2k}} = \lambda_0 < \infty$

yani $\lambda \in (1,\lambda_0)$ yazılır, dolayısıyla (4.59), (4.60) ve Hatırlatma 4.2.5 in (ii) gereğince her $\zeta \in \overset{\circ}{\mathbb{U}}$ için

$$\left|\varphi(\zeta,\lambda)\right| = \left|\varphi(\zeta,\frac{1}{\left|\zeta\right|^{2k/\alpha}})\right| \le \frac{k\left|s\right|}{\alpha} \tag{4.61}$$

olur. Böylece (4.61) eşitsizliği Teorem 4.2.4 deki (4.41) eşitsizliği olup, Teorem 4.2.4 den f fonksiyonu $\overset{\circ}{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalettir.

Eğer Teorem 4.2.6 da, $g(\zeta) = -\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.7: $f \in \prod$, $f'(\zeta) \neq 0$ olsun. Ayrıca $s = \alpha + i\beta$ ve $k \in \mathbb{R}_+$ sayıları için $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$, $1/2 < k \leq \alpha$ şartları sağlansın. Eğer her $\zeta \in \mathring{\mathbb{U}}$ için

$$\left| \frac{1}{|\zeta|^{2k}} + \left(\frac{1-|\zeta|^{2k}}{|\zeta|^{2k}} \right) \left[(1-s)\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} + s\left(1 + \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right) \right] - \frac{ks}{\alpha} \right| \leq \frac{k|s|}{\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa, f fonksiyonu $\mathring{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalenttir veya $f \in \widetilde{\Sigma}$ dır.

Örnek 4.2.8: $n \geq 1$ için

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{n(n+1)}\zeta^n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathring{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalenttir veya $f \in \widetilde{\Sigma}$ dır.

Gerçektende, f fonksiyonunun tanımından

$$2 + \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{\zeta^{n+1}}{-1 + \frac{1}{n+1}\zeta^{n+1}}$$

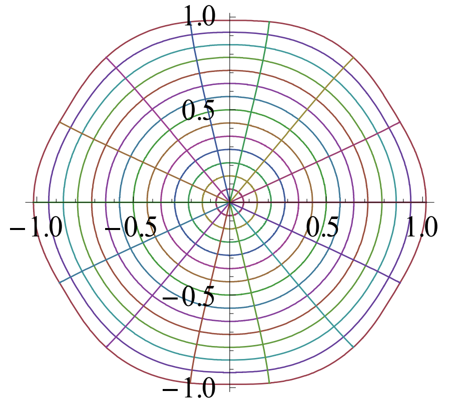
yazılır. Sonuç 4.2.7 de $s = k = 1$ ve $n \geq 1$ için $|\zeta|^{n+1} \leq |\zeta|^2$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2} \left(2 + \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right) \right|$$

$$\leq \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2} \left| \frac{\zeta^{n+1}}{-1 + \frac{1}{n+1}\zeta^{n+1}} \right| \leq \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2} \frac{|\zeta|^{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}|\zeta|^{n+1}}$$

$$\leq \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2} \frac{|\zeta|^2}{1 - \frac{1}{n+1}|\zeta|^2} = \frac{1-|\zeta|^2}{1 - \frac{1}{n+1}|\zeta|^2} \leq 1$$

olduğu gösterilir. Dolayısıyla $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{n(n+1)}\zeta^n$ fonksiyonu $\mathring{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalenttir. Ayrıca Mathematica 7.0 programı kullanılarak çizilen f fonksiyonunun grafiği bu iddiayı doğrulamaktadır.



Şekil 4.3. $f(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta}+\dfrac{1}{56}\zeta^7$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.2.9: $a\geq 3$ ve $a\leq -3$ için

$$f(\zeta)=\frac{a}{a\zeta-\zeta^3}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathring{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalenttir veya $f\in\widetilde{\Sigma}$ dır.

Gerçektende, f fonksiyonunun tanımından

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{-a+3\zeta^2}{a-\zeta^2}$$

yazılır. İlk olarak $a\geq 3$ olsun. Teorem 4.2.6 de $3\leq k\leq\dfrac{a+3}{2}$, $s=\alpha$ ve $g(\zeta)=1$ alırsak

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}+k\right|=\left|\frac{a(k-1)+(3-k)\zeta^2}{a-\zeta^2}\right|\leq\frac{a(k-1)+(k-3)|\zeta|^2}{a-|\zeta|^2}$$

$$<\frac{k(a+1)-(a+3)}{a-1}\leq\frac{k(a+1)-2k}{a-1}=k$$

olduğu gösterilir. Dolayısıyla $a\geq 3$ için $f(\zeta)=\dfrac{a}{a\zeta-\zeta^3}$ fonksiyonu $\mathring{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalenttir. İkinci olarak $a\leq -3$ olsun. Teorem 4.2.6 de $3\leq k\leq\dfrac{3-a}{2}$, $s=\alpha$ ve $g(\zeta)=1$ alırsak

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}+k\right|=\left|\frac{a(k-1)+(3-k)\zeta^2}{a-\zeta^2}\right|\le\frac{-a(k-1)+(k-3)|\zeta|^2}{-a-|\zeta|^2}$$

$$<\frac{k(1-a)+(a-3)}{-a-1}\le\frac{k(1-a)-2k}{-a-1}=k$$

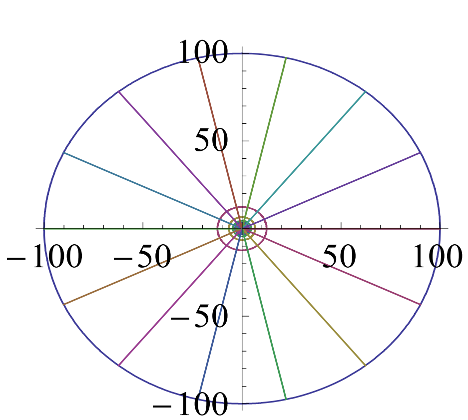
olduğu görülür. Dolayısıyla $a\le -3$ için $f(\zeta)=\dfrac{a}{a\zeta-\zeta^3}$ fonksiyonu $\mathring{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalenttir. Burada son eşitsizliklerde $3\le k\le\dfrac{a+3}{2}$ ve $3\le k\le\dfrac{3-a}{2}$ için $x\in(0,1)$ olmak üzere sırasıyla

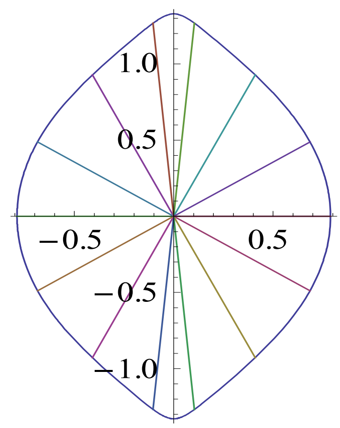
$$h_1(x)=\frac{a(k-1)+(k-3)x^2}{a-x^2}$$

ve

$$h_2(x)=\frac{-a(k-1)+(k-3)x^2}{-a-x^2}$$

fonksiyonlarının $(0,1)$ aralığında artan ve dolayısıyla $h_1(x)<\dfrac{a(k-1)+(k-3)}{a-1}$ ve $h_2(x)<\dfrac{-a(k-1)+(k-3)}{-a-1}$ eşitsizlikleri kullanılmıştır. Mathematica 7.0 programını kullanarak $a=10$ ve $a=-4$ değerleri için çizilen f fonksiyonunun grafiği bu iddiayı doğrulamaktadır.





Şekil 4.4. $f_1(\zeta)=\dfrac{10}{10\zeta-\zeta^3}$, $f_2(\zeta)=\dfrac{4}{4\zeta+\zeta^3}$

4.3. Genelleştirilmiş İntegral Operatörler İçin Ünivalentlik Şartları

Bu başlık altında Tanım 3.9.1 ve Tanım 3.9.2 de verilen genel integral operatörlerinin ünivalentliği için yeter şartlar elde edilmiştir.

Teorem 4.3.1: $f, g, h \in \mathcal{S}$ olmak üzere, α, β ve γ kompleks sayıları için

$$4|\gamma-1|+4|\alpha|+3|\beta|\leq 1 \tag{4.62}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (3.23) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

İspat: (3.23) integral operatörü için

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(z)=\int_0^z (f'(t))^{\alpha}(t^{-1}h(t))^{\beta}\,dt \tag{4.63}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. (4.63) ifadesinin türevinden

$$\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(z)=(f'(z))^{\alpha}(z^{-1}h(z))^{\beta} \tag{4.64}$$

eşitliği ve (4.64) ifadesinin logaritmik türevinden de,

$$\frac{z\mathcal{F}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(z)}=\alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+\beta\left(\frac{zh'(z)}{h(z)}-1\right) \tag{4.65}$$

elde edilir. Teorem 2.3.1 nin (iv) şıkkında verilen $\mathcal{S}$ sınıfı için

$$f(z)=\frac{k\left(\dfrac{z+z_0}{1+z\overline{z}_0}\right)-k(z_0)}{k'(z_0)\left(1-|z_0|^2\right)},\quad (z\in\mathbb{U},\ k\in\mathcal{S})$$

disk otomorfizmini (Koebe veya Bieberbach dönüşümü) gözönüne alınarak, $z=-z_0$ noktasında

$$\frac{-z_0 f''(-z_0)}{f'(-z_0)}=\frac{2|z_0|^2-2a_2z_0}{1-|z_0|^2} \tag{4.66}$$

ve

$$\frac{-z_0 f'(-z_0)}{f(-z_0)}=\frac{z_0}{k(z_0)\left(1-|z_0|^2\right)} \tag{4.67}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada a_2, k fonksiyonunun Maclaurin açılımındaki ikinci katsayıyı göstermektedir. Yukarıdaki (4.66) ve (4.67) eşitliklerinde $z_0=-z$ alınır ve bunlar (4.65) denkleminde yerine yazılırsa $q\in\mathcal{S}$ için

$$\frac{z\mathcal{F}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(z)}=\frac{1}{1-|z|^2}\left\{2\alpha a_2 z+(2\alpha+\beta)|z|^2+\beta\left[\frac{z}{-q(-z)}-1\right]\right\} \tag{4.68}$$

elde edilir. Sonuç 4.1.4 de (4.67) ve (4.68) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left|c|z|^2+\left(1-|z|^2\right)\left((\gamma-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z\mathcal{F}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(z)}\right)\right|$$

$$=\left|(c+2\alpha+\beta)|z|^2+(\gamma-1)\left[\frac{z}{-l(-z)}\right]+2\alpha a_2 z+\beta\left[\frac{z}{-q(-z)}-1\right]\right|$$

olduğu görülür. Son eşitlikte $c=-2\alpha-\beta$ alınır ve Lemma 2.3.3 kullanılırsa, $q\in\mathcal{S}$ için

$$\left|c|z|^2+\left(1-|z|^2\right)\left((\gamma-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z\mathcal{F}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(z)}\right)\right|$$

$$\le|\gamma-1|\left|\frac{z}{-l(-z)}\right|+2|\alpha a_2 z|+|\beta|\left|\frac{z}{-q(-z)}-1\right|\le 4|\gamma-1|+4|\alpha|+3|\beta|$$

eşitsizliği yazılır. Teoremin hipotezindeki (4.62) koşulundan ve Sonuç 4.1.4 den (3.23) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfından olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.3.1 deki ispat metodu kullanılarak aşağıdaki teoremler yazılabilir.

Teorem 4.3.2: $f,h\in\mathcal{S}$ ve α,β,γ kompleks sayıları için

$$|\gamma-1|+4|\alpha|+3|\beta|\le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (3.25) ile tanımlanan $\mathcal{F}^*_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Teorem 4.3.3: $f,g\in\mathcal{S}$ ve f tek fonksiyon olsun. Ayrıca $\mu,\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$4|\mu-1|+|\lambda|\le 1$$

eşitsizliği sağlansın. O halde (3.24) ile tanımlanan $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Teorem 4.3.4: $f \in \mathcal{S}$ tek fonksiyon olsun. Ayrıca $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$|\mu - 1| + |\lambda| \leq 1$$

eşitsizliği sağlansın. O halde (3.26) ile tanımlanan $\mathcal{I}^{*}_{\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Teorem 4.3.3 veya Teorem 4.3.4 ün özel bir durumu olarak aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.3.5: $f \in \mathcal{S}$ tek fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ için, $\mathcal{I}^{*}_{\lambda}(z) = \int_0^z \left(e^{f(t)}\right)^{\lambda} dt \in \mathcal{S}$ dir.

Örneğin, Sonuç 4.3.5 de $f(z) = \sin z \in \mathcal{S}$ ve $\lambda = 1$ alırsak, $\mathcal{I}^{*}_{1}(z) = \int_0^z e^{\sin t} dt \in \mathcal{S}$ olur.

Teorem 4.3.6: $g, h \in \mathcal{S}^{*}$ ve $f \in \mathcal{C}$ olsun. Ayrıca α, β ve γ kompleks sayıları için

$$3|\gamma - 1| + 2|\alpha| + 2|\beta| \leq 1 \tag{4.69}$$

eşitsizliği sağlansın. O halde (3.23) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

İspat: Teorem 4.3.1 in ispatında

$$\frac{z\mathcal{F}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{F}'_{\alpha,\beta}(z)} = \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + \beta\left(\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1\right) \tag{4.70}$$

eşitliği elde edilmişti. Bu eşitlikte $h \in \mathcal{S}^{*}$ ve $f \in \mathcal{C}$ dir. Ayrıca, Lemma 2.3.8 de $z_0 = -z$ ve $\psi(z) = z + \psi_2 z^2 + \ldots \in \mathcal{S}^{*}$ için

$$\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1 + \psi_2 z + |z|^2}{1 - |z|^2} \tag{4.71}$$

ve Lemma 2.3.11 den $\psi_{*}(z) = z + \psi_2^{*} z^2 + \ldots \in \mathcal{C}$ için

$$\frac{z\varphi_*''(z)}{\varphi_*'(z)} = \frac{2\psi_2^* z + 2|z|^2}{1-|z|^2} \tag{4.72}$$

eşitliklerini yazabiliriz. (4.70) eşitliğinde (4.71) ve (4.72) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\frac{z\mathcal{F}_{\alpha,\beta}''(z)}{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}'(z)} = \frac{1}{1-|z|^2}\left\{(2\alpha b_2 + \beta a_2)z + (2\alpha + 2\beta)|z|^2\right\} \tag{4.73}$$

bulunur. Sonuç 4.1.4 de (4.71) ve (4.73) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left| c|z|^2 + \left(1-|z|^2\right)\left((\gamma-1)\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{z\mathcal{F}_{\alpha,\beta}''(z)}{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}'(z)}\right)\right|$$

$$= \left|(c+\gamma-1+2\alpha+2\beta)|z|^2 + (\gamma-1) + ((\gamma-1)c_2 + 2\alpha b_2 + \beta a_2)z\right|$$

elde edilir. Burada a_2, b_2 ve c_2 sırasıyla $h \in \mathcal{S}^*$, $f \in \mathcal{C}$ ve $g \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonlarının Maclaurin açılımındaki ikinci katsayılarıdır. Son eşitlikte $c = 1-\gamma-2\alpha-2\beta$ alınır ve Lemma 2.3.3 kullanılırsa

$$\left| c|z|^2 + \left(1-|z|^2\right)\left((\gamma-1)\frac{zg'(z)}{g(z)} + \frac{z\mathcal{F}_{\alpha,\beta}''(z)}{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}'(z)}\right)\right|$$

$$\leq 3|\gamma-1| + 2|\alpha| + 2|\beta|$$

elde edilir. Böylece teoremin hipotezinde verilen (4.69) şartı ve Sonuç 4.1.4 den (3.23) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörünün $\mathcal{S}$ sınıfından olduğu sonucuna varılır.

Sonuç 4.3.7: $h \in \mathcal{S}^*$ ve $f \in \mathcal{C}$ olsun. Ayrıca α, β ve γ kompleks sayıları için

$$|\gamma-1| + 2|\alpha| + 2|\beta| \leq 1$$

eşitsizliği sağlansın. O halde (3.25) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}^*$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında meromorf fonksiyonları içeren (3.27) ve (3.28) de tanımlı $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$ ve $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}$ integral operatörlerinin ünivalentliği için yeter şartlar elde edilecektir.

Teorem 4.3.8: $F, G \in \widetilde{\Sigma}$ olsun. Ayrıca α, β ve γ kompleks sayıları için

$$\begin{aligned} &10|\alpha| + 4|\beta| \le 1, \qquad \Re(\gamma) \ge 1 \text{ için}, \\ &\frac{10|\alpha| + 4|\beta|}{\Re(\gamma)} \le 1, \quad 0 < \Re(\gamma) \le 1 \text{ için}, \end{aligned} \tag{4.74}$$

eşitsizlikleri sağlansın. O halde (3.27) ile tanımlanan $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır (Deniz and Orhan 2010b).

İspat: (3.27) integral operatörü için

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta}(z) = \int_0^z (-t^2 F'(t))^\alpha (tG(t))^\beta \, dt \tag{4.75}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. (4.75) fonksiyonu için

$$\mathcal{H}'_{\alpha,\beta}(z) = (-z^2 F'(z))^\alpha (zG(z))^\beta \tag{4.76}$$

yazılır ve (4.76) eşitliğinin her iki tarafının logaritmik türevinden,

$$\frac{z\mathcal{H}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{H}'_{\alpha,\beta}(z)} = \alpha\left(2 + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right) + \beta\left(1 + \frac{zG'(z)}{G(z)}\right) \tag{4.77}$$

elde edilir. Burada (2.6) gerektirmesi göz önüne alınırsa, $f, g \in \mathcal{S}$ olmak üzere (4.77) ifadesi

$$\frac{z\mathcal{H}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{H}'_{\alpha,\beta}(z)} = \alpha\left(2 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - 2\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) + \beta\left(1 - \frac{zg'(z)}{g(z)}\right) \tag{4.78}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca (4.78) eşitliğinde (4.66) ve (4.77) ifadeleri yerine yazılırsa $k, l \in \mathcal{S}$ için

$$\frac{z\mathcal{H}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{H}'_{\alpha,\beta}(z)} = \frac{1}{1-|z|^2}\left\{-\beta|z|^2 + 2\alpha a_2 z + 2\alpha\left[1 - \frac{-z}{k(-z)}\right] + \beta\left[1 - \frac{-z}{l(-z)}\right]\right\} \tag{4.79}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\frac{1-|z|^{2\Re(\gamma)}}{\Re(\gamma)}\left|\frac{z\mathcal{H}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{H}'_{\alpha,\beta}(z)}\right| \\ &= \frac{1-|z|^{2\Re(\gamma)}}{1-|z|^2}\frac{1}{\Re(\gamma)}\left|-\beta|z|^2 + 2\alpha a_2 z + 2\alpha\left[1 - \frac{-z}{k(-z)}\right] + \beta\left[1 - \frac{-z}{l(-z)}\right]\right| \end{aligned} \tag{4.80}$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki durumları inceleyelim:

(i) $\phi:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ \phi(x)=\dfrac{1-a^{2x}}{x}\ (0<a<1)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $0<a<1$ için azalan bir fonksiyondur. Eğer $x=\Re(\gamma)\geq 1$ ve her $z\in\mathbb{U}$ için $a=|z|$ olarak seçilirse,

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\gamma)}}{\Re(\gamma)\left(1-|z|^2\right)}\leq 1 \tag{4.81}$$

dır. (4.80) eşitliğinde Lemma 2.3.3 ve (4.81) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\gamma)}}{\Re(\gamma)}\left|\frac{z\mathcal{H}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{H}'_{\alpha,\beta}(z)}\right|\leq\left|-\beta|z|^2+2\alpha a_2 z+2\alpha\left[1-\frac{z}{-k(-z)}\right]+\beta\left[1-\frac{z}{-l(-z)}\right]\right|$$

$$\leq|\beta||z|^2+2|\alpha||a_2||z|+2|\alpha|\left|1-\frac{z}{-k(-z)}\right|+|\beta|\left|1-\frac{z}{-l(-z)}\right|\leq 10|\alpha|+4|\beta|$$

elde edilir. Buradan, (4.74) hipotezindeki ilk eşitsizlikten, Teorem 3.3.7 ye göre $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

(ii) Şimdi, $\vartheta:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ \vartheta(x)=1-a^{2x}\ \left(0<a<1\right)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $0<a<1$ için artan fonksiyon olduğundan, $0<x=\Re(\gamma)\leq 1$ için

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\gamma)}}{1-|z|^2}\leq 1 \tag{4.82}$$

yazılır. Buradan, (4.80) eşitliğinde (4.82) eşitsizliği ve Lemma 2.3.3 kullanılırsa

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\gamma)}}{\Re(\gamma)}\left|\frac{z\mathcal{H}''_{\alpha,\beta}(z)}{\mathcal{H}'_{\alpha,\beta}(z)}\right|\leq\frac{1}{\Re(\gamma)}\left|-\beta|z|^2+2\alpha a_2 z+2\alpha\left[1-\frac{z}{-k(-z)}\right]+\beta\left[1-\frac{z}{-l(-z)}\right]\right|$$

$$\leq\frac{1}{\Re(\gamma)}\left\{|\beta||z|^2+2|\alpha||a_2||z|+2|\alpha|\left|1-\frac{z}{-k(-z)}\right|+|\beta|\left|1-\frac{z}{-l(-z)}\right|\right\}\leq\frac{10|\alpha|+4|\beta|}{\Re(\gamma)}$$

elde edilir ve dolayısıyla (4.74) hipotezindeki ikinci eşitsizlikten, Teorem 3.7.7 ye göre $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır. Tüm bu ifadelerden, (3.27) ile tanımlanan $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörünün $\mathcal{S}$ sınıfından olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.3.8 de $\gamma = 1$ alınırsa, Teorem 4.3.8 in aşağıdaki sonucu yazılabilir.

Sonuç 4.3.9: $F, G \in \widetilde{\Sigma}$ olsun. Ayrıca α ve β kompleks sayıları için

$$10|\alpha| + 4|\beta| \leq 1$$

eşitsizliği sağlansın. O halde

$$\mathcal{H}_{\alpha,\beta,1}(z) = \int_0^z (-t^2 F'(t))^{\alpha} (tG(t))^{\beta} \, dt$$

şeklinde tanımlanan integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Teorem 4.3.8 de $\alpha = 0$ seçilirse, Teorem 4.3.8 in aşağıdaki ilginç sonucu elde edilir.

Sonuç 4.3.10: $G \in \widetilde{\Sigma}$ olsun. Ayrıca γ ve β keyfi kompleks sayılar olmak üzere, bu sayılar için

$$\begin{array}{ll} |\beta| \leq 1/4, & \Re(\gamma) \geq 1 \text{ için}, \\ |\beta| \leq \Re(\gamma)/4, & 0 < \Re(\gamma) \leq 1 \text{ için} \end{array}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda,

$$\mathcal{H}_{0,\beta,\gamma}(z) = \left(\gamma \int_0^z t^{\gamma-1} (tG(t))^{\beta} \, dt \right)^{1/\gamma}$$

ile tanımlanan $\mathcal{H}_{0,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Teorem 4.3.11: $G \in \widetilde{\Sigma}$ olsun. Ayrıca λ ve μ birer keyfi kompleks sayılar olmak üzere, bu sayılar için

$$\begin{array}{ll} 16|\lambda| \leq 1, & \Re(\mu) \geq 1 \text{ için}, \\ \dfrac{16|\lambda|}{\Re(\mu)} \leq 1, & 0 < \Re(\mu) \leq 1 \text{ için} \end{array} \tag{4.83}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (3.28) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır (Deniz and Orhan 2010b).

İspat: $\mathcal{G}: \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\mathcal{G}(z) = \int_0^z \left(e^{t^2 G(t)}\right)^{\lambda} dt$$

integral operatörünü göz önüne alalım. $G \in \widetilde{\Sigma}$ olduğundan $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}'(0) - 1 = 0$ eşitliği sağlanır veya diğer bir değişle $\mathcal{G} \in \mathcal{A}$ dır. Diğer taraftan

$$\mathcal{G}'(z) = \left(e^{z^2 G(z)}\right)^{\lambda}$$

yazılır ve bu eşitliğin her iki tarafının logaritmik türevi alınırsa

$$\frac{z\mathcal{G}''(z)}{\mathcal{G}'(z)} = \lambda z^2 G(z)\left(2 + \frac{zG'(z)}{G(z)}\right) \tag{4.84}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak (2.6) gerektirmesinden $g \in \mathcal{S}$ olmak üzere (4.84) eşitliğinden

$$\frac{z\mathcal{G}''(z)}{\mathcal{G}'(z)} = \frac{\lambda z^2}{g(z)}\left(2 - \frac{zg'(z)}{g(z)}\right)$$

bulunur. Şimdi Lemma 2.3.2, Lemma 2.3.3 ve (4.67) eşitliği kullanılırsa

$$\left|\frac{z\mathcal{G}''(z)}{\mathcal{G}'(z)}\right| = \left|\frac{\lambda z^2}{g(z)}\left(2 - \frac{-z}{k(-z)\left(1-|z|^2\right)}\right)\right| = \left|\frac{\lambda z}{1-|z|^2}\frac{z}{g(z)}\left(2\left(1-|z|^2\right) - \frac{z}{-k(-z)}\right)\right|$$

$$\leq \frac{|\lambda||z|}{1-|z|^2}\left|\frac{z}{g(z)}\right|\left\{1-|z|^2 + \left|1-|z|^2 - \frac{z}{-k(-z)}\right|\right\} \leq \frac{4|\lambda||z|}{1-|z|^2}\left\{-|z|^2 + 2|z| + 3\right\} \leq \frac{16|\lambda|}{1-|z|^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\left(1-|z|^{2\Re(\mu)}\right)\Big/\Re(\mu)$ ile çarpılır ve Teorem 4.3.8 in ispatındaki (i) ve (ii) adımları izlenilirse, teoremin (4.83) koşulu altında

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\mu)}}{\Re(\mu)}\left|\frac{z\mathcal{G}''(z)}{\mathcal{G}'(z)}\right| \leq \frac{1-|z|^{2\Re(\mu)}}{1-|z|^2}\frac{16|\lambda|}{\Re(\mu)} \leq 1$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak Teorem 3.7.7 den $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}(z) \in \mathcal{S}$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.12: $G \in \widetilde{\Sigma}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer $|\lambda| \leq 1/16$ ise $\mathcal{G}_{\lambda,1}(z) = \int_0^z \left(e^{t^2 G(t)}\right)^{\lambda} dt \in \mathcal{S}$ dir.

Örnek 4.3.13: $G(z) = -\dfrac{\ln(1-z)}{z^2}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun $\widetilde{\Sigma}$ sınıfından olduğu açıktır. $|\lambda| > 1$ şartını sağlayan bazı λ değerleri için

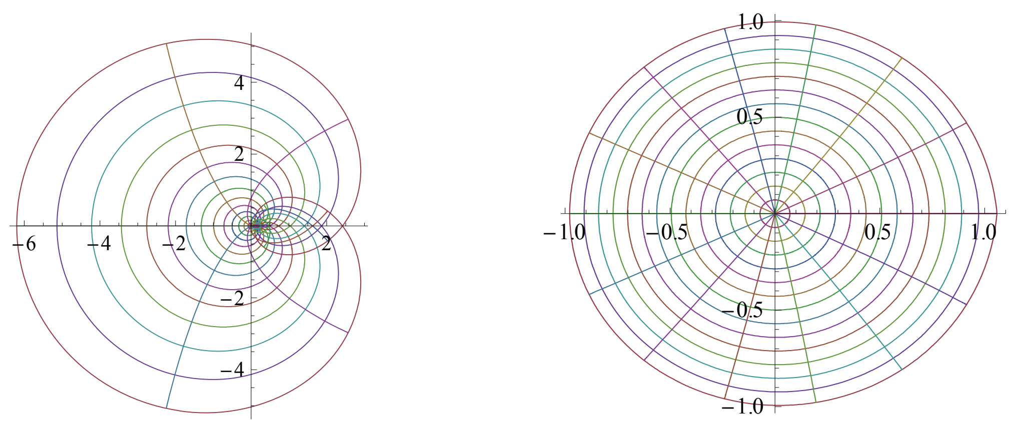
$$\mathcal{G}_{\lambda,1}(z) = \int_0^z \left(e^{-\ln(1-t)}\right)^{\lambda} dt = \frac{1}{\lambda-1}\left((1-z)^{1-\lambda} - 1\right)$$

fonksiyonu birim diskte ünivalent değildir.

Örnek 4.3.13 ün ispatı için aşağıdaki lemmayı verelim

Lemma 4.3.14: $\beta \neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere $f_\beta(z) = (1-z)^{\beta} = e^{\beta \ln(1-z)}$ fonksiyonunun ünivalent olması için gerek ve yeter şart β nın $|\beta - 1| \leq 1$ veya $|\beta + 1| \leq 1$ şartlarını sağlamasıdır (Goodman 1983).

Lemma 4.3.14 de $\beta = 1 - \lambda$ alınırsa Örnek 4.3.13 ün ispatı kolayca görülür. Mathematica 7.0 programını kullanarak da $\mathcal{G}_{\lambda,1}$ nın grafiği λ nın bazı özel değerleri için bu iddiayı doğrulamaktadır



Şekil 4.5. $\mathcal{G}_{-4}(z) = \frac{1}{5}\left(1-(1-z)^{5}\right)$ ünivalent değil, $\mathcal{G}_{1/18}(z) = \frac{18}{17}\left(1-(1-z)^{17/18}\right)$ ünivalent

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölüm, tezde elde edilen sonuçları içermektedir. İlk olarak, Loewner zincirler metodu kullanılarak $\mathbb{U}$, $\mathring{\mathbb{U}}$ ve Δ kümelerinde tanımlı fonksiyonlar için genel ünivalentlik kriterleri elde edilmiştir.

Sonuç 5.1: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha,\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ için $c\neq -1$, $\alpha\neq 1$, $\left|\frac{1+c}{1-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$, $\left|\beta-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[\mathcal{R}^n h(z)]'-\alpha}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left||z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[\mathcal{R}^n h(z)]'-\alpha}-1\right)+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z[\mathcal{R}^n h(z)]''}{[\mathcal{R}^n h(z)]'-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 5.2: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha,\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ için $c\neq -1$, $\left|c+\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$, $\left|\beta-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left((1+c)f'(z)\frac{\mathcal{R}^v h(z)-\alpha}{\mathcal{R}^n f(z)-\alpha}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left||z|^{m+1}\left((1+c)f'(z)\frac{\mathcal{R}^v h(z)-\alpha}{\mathcal{R}^n f(z)-\alpha}-1\right)\right.$$

$$+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z[\mathcal{R}^n f(z)]'}{\mathcal{R}^n f(z)-\alpha}-\frac{z[\mathcal{R}^v h(z)]'}{\mathcal{R}^v h(z)-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\Bigg|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.3) şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 5.3: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha,\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ sayıları Teorem 4.1.1 deki şartları sağlasın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[S^n h(z)]'-\alpha}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left||z|^{m+1}\left(\frac{(1+c)f'(z)}{[S^n h(z)]'-\alpha}-1\right)+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z[S^n h(z)]''}{[S^n h(z)]'-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 5.4: $f,g,h\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha,\beta,c\in\mathbb{C}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ sayıları Teorem 4.1.7 deki şartları sağlasın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left((1+c)f'(z)\frac{S^v h(z)-\alpha}{S^n f(z)-\alpha}-1\right)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\Bigg||z|^{m+1}\left((1+c)f'(z)\frac{S^v h(z)-\alpha}{S^n f(z)-\alpha}-1\right)$$

$$+(1-|z|^{m+1})\left[(\beta-1)\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{z[S^n f(z)]'}{S^n f(z)-\alpha}-\frac{z[S^v h(z)]'}{S^v h(z)-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\Bigg|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.3) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 5.5: $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Re(\alpha) > 0$ ve $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha} \left[z\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^{1+\frac{1}{\alpha}} f'(z)}{f^{1+\frac{1}{\alpha}}(z)} \right) + \frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha |z|^{2\alpha}} z\frac{d}{dz}\log\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} \right) + \frac{1-\alpha}{|z|^{2\alpha}} z\frac{d}{dz}\log\left(\frac{f(z)}{z} \right) \right] \right| \le 1$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda (4.16) şeklinde tanımlı F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 5.6: f bir meromorf fonksiyon ve $g \in \mathcal{M}$ olsun. Bu fonksiyonlar Δ kümesinde yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca Δ kümesinde $\Re(h) \ge 1/2$ koşulunu sağlayan $h(\xi) = 1 + c_2/\xi^2 + \dots$ analitik fonksiyonu verilsin. Eğer her $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\xi \in \Delta$ için,

$$\left| \frac{h(\xi)-1}{h(\xi)}|\xi|^2 - (|\xi|^2 - 1)\left[\frac{\xi h'(\xi)}{h(\xi)} + (1-2\alpha)\frac{\xi f''(\xi)}{f'(\xi)} + 2\alpha\frac{\xi g''(\xi)}{g'(\xi)} \right] \right.$$

$$\left. -\alpha(|\xi|^2-1)^2 \frac{\xi}{\bar{\xi}} h(\xi) \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} \right)^2 + \alpha\left(S_f(\xi) - S_g(\xi) \right) \right] \right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu Δ kümesinde ünivalent veya $f \in \Sigma$ dır.

Sonuç 5.7: $f \in \Pi$, $f'(\zeta) \ne 0$ ve $g(\zeta) = 1 + c_2\zeta^2 + \dots$ analitik fonksiyonu verilsin. $s = \alpha + i\beta$ ve $k \in \mathbb{R}_+$ sayıları için $\beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, 1/2 < k \le \alpha$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer her $\zeta \in \mathring{\mathbb{U}}$ için

$$\left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} + \frac{ks}{\alpha} \right| < \frac{k|s|}{\alpha}$$

ve

$$\left| \frac{1}{|\zeta|^{2k/\alpha}} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} - \left(\frac{1-|\zeta|^{2k/\alpha}}{|\zeta|^{2k/\alpha}} \right)\left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} + s\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)} \right] + \frac{ks}{\alpha} \right| \le \frac{k|s|}{\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa, f fonksiyonu $\mathring{\mathbb{U}}$ kümesinde ünivalent veya $f \in \tilde{\Sigma}$ dır.

Sonuç 5.1-5.4 elde edilen sonuçlar Becker (1972), Ahlfors (1974), Pascu (1986), Kanas and Srivastava (1997) ve Kanas and Lecko (1998) sonuçlarının genelleştirilmesidir. Sonuç 5.5 Goluzin (1969) ve Sonuç 5.6 de Becker (1973), Nehari (1949), Wesolowski (1991) ve Miazga and Wesolowski (1991) nin sonuçlarının genel halidir.

İkinci olarak da $\mathcal{S}, \mathcal{S}^*, \mathcal{C}$ ve $\widetilde{\Sigma}$ sınıflarına ait fonksiyonların genelleştirilmiş integral operatörleri için ünivalentlik şartları elde edilmiştir.

Sonuç 5.8: $f, g, h \in \mathcal{S}$ olmak üzere, α, β ve γ kompleks sayıları için $4|\gamma-1|+4|\alpha|+3|\beta| \leq 1$ eşitsizliği sağlanıyorsa, (3.23) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Sonuç 5.9: $f, g \in \mathcal{S}$ ve f tek fonksiyon olsun. Ayrıca μ ve λ kompleks sayıları için $4|\mu-1|+|\lambda| \leq 1$ eşitsizliği sağlansın. O halde (3.24) ile tanımlanan $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Sonuç 5.10: $g, h \in \mathcal{S}^*$ ve $f \in \mathcal{C}$ olsun. Ayrıca α, β ve γ birer kompleks sayı olmak üzere $3|\gamma-1|+2|\alpha|+2|\beta| \leq 1$ eşitsizliği sağlansın. O halde (3.23) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Sonuç 5.11: $F, G \in \widetilde{\Sigma}$ olsun. Ayrıca α, β ve γ birer kompleks sayı olmak üzere

$$10|\alpha|+4|\beta| \leq 1, \qquad \Re(\gamma) \geq 1 \text{ için,}$$
$$\frac{10|\alpha|+4|\beta|}{\Re(\gamma)} \leq 1, \quad 0 < \Re(\gamma) \leq 1 \text{ için,}$$

eşitsizlikleri sağlansın. O halde (3.27) ile tanımlanan $\mathcal{H}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır

Sonuç 5.12: $G \in \widetilde{\Sigma}$ olsun. Ayrıca λ ve μ birer keyfi kompleks sayılar olmak üzere, bu sayılar için

$$16|\lambda| \leq 1, \qquad \Re(\mu) \geq 1 \text{ için,}$$

$$\frac{16|\lambda|}{\Re(\mu)} \leq 1, \quad 0 < \Re(\mu) \leq 1 \text{ için}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (3.28) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{\lambda,\mu}$ integral operatörü $\mathcal{S}$ sınıfındandır.

Sonuç 5.8, Miazga and Wesolowski (1989), Pescar (2006) ve Sonuç 5.11 de Wesolowski (1990) nin sonuçlarından hem genel hem de daha iyidirler.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V., 1974. Sufficient conditions for quasiconformal extension, Ann. Math. Studies, 79, 23-29.

Aksent´ev, L. A., 1958. Sufficient conditions for univalence of regular functions (Russian), Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika, 4, 3–7.

Alexander, J. W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Annals of Mathematics, 17(1), 12-22.

Becker, J., 1972. Löwnersche differentialgleichung und quasikonformfortsetzbare schlichte funktionen, J. Reine. Angew. Math., 255, 23-43.

Becker, J., 1973. Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien, Math. Ann., 202, 321–335.

Bernardi S. D., 1969. Convex and starlike univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 13, 429-446.

Calugareanu, G., 1931. Sur la condition necessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle, C. R. Acad. Sci. Paris, 193, 1150–1153.

Calugareanu, G., 1932. Sur les conditions necessaires et suffisantes pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle, Mathematica, 6, 75-79.

Causey, W. M., 1967. The close-to-convexity and univalence of an integral, Math. Z., 99, 207-212.

Causey, W. M., 1971. The univalence of an integral, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 500-502.

Deniz, E. and Orhan, H., 2011a. Univalence criteria related with Ruscheweyh derivative and Loewner chains, (submitted).

Deniz, E. and Orhan, H., 2011b. Univalence criterion for meromorphic functions and Loewner chains, (inpress in Appl. Math. Comput.).

Deniz, E. and Orhan, H., 2010b. On the univalence of integral operators involving meromorphic functions, (submitted).

Deniz, E., Răducanu, D. and Orhan H. 2010a. On an improvement of an univalence criterion, Math. Balkanica (N.S.), 24(1-2), 33-39.

Duren, L. P., 1983. Univalent Functions, Springer–Verlag, New York.

Duren, L. P., Shapiro, H. S. and Shields, A. L., 1966. Singular measures and domains not of the Smirnov type, Duke Math. J., 33, 247-254.

Epstein, C. L., 1987. Univalence criteria and surfaces in hyperbolic space, J. Reine. Angew. Math., 380, 196-214.

Frasin, B. A., 2009. Univalence of two general integral operators, Filomat, 23(3), 223-229.

Godula, J., 1979. On univalence of a certain integral, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Vol XXXIII, 7 Sec. A., 69-76.

Goluzin, M., 1969. Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., Trans.of Math. Monographs 29, Providence, RI.

Goodman, A.W., 1983. Univalent functions I-II, Mariner Publishing Co, Tampa, FL.

Graham, I. and Kohr, G., 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions, Marcel Dekker, Inc.

Grunsky, H., 1939. Koezientenbedingungen fur schlicht abbildende meromorphe functionen, Math. Z., 45, 29-61.

Heil, C., 2007. Real Analysıs Lecture Notes, http://people.math.gatech.edu/~heil/6337/ spring11/.

Kanas, S. and Srivastava, H. M., 1997. Some criteria for univalence related to Ruscheweyh and Sălăgean derivatives, Complex Variables, 38, 263-275.

Kanas, S. and Lecko, A., 1998. Univalence criteria connected with arithmetic and geometric means. I, Proc. of the Second Workshop on Transform Methods and Special Functions (Varna, 1996), Science Culture Technology Publishing Company, Singapore, 201-209.

Kaplan, W., 1952. Close-to-convex schlicht funtions, Michigan Math. J., 1, 169-185.

Kim, Y. J. and Merkes, E. P., 1972. On an integral of power of a spirallike functions, Kyungpook Math. J., 12(2), 249-253.

Kufarev, P. P., 1943. On one-parameter families of analytic functions, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 13(55), 87–118.

Lewandowski, Z., 1981. On a univalence criterion, Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 29, 123–126.

Lewandowski, Z., 1987. New remarks on a univalence criteria, Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia, 41(6), 41-49.

Libera, R. J., 1965. Some classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 16, 755-758.

Libera, R. J. and Ziegler, M. R., 1972. Reguler functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is $\alpha-$spiral, Trans. Amer. Math. Soc., 166, 361-368.

Löwner, K., 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann., 89, 103–121.

MacGregor, T. H., 1962. Functions whose derivative has a positive real part, Trans. Amer. Math. Soc., 104, 532-537.

Miazga, J. and Wesolowski, A., 1989. On the univalence of certain integral, Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Folia Scientiarum Univ. Tech. Resov., 60, 25-31.

Miazga, J. and Wesolowski, A., 1991. A univalence criterion for meromorphic functions, Annales Polonici Mathematici, 56(1), 63-66.

Miller, S. S., Mocanu, P. T. and Reade, M. O., 1978. Starlike integral operators, Pacific Journal of Mathematics, 79(1), 157-168.

Mocanu, P. T., 1981. Sufficient conditions of univalence for complex functions in the class C^1, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., 10(1), 75-79.

Moldoveanu, S. and Pascu, N. N., 1990. Integral operators which preserve the univalence, Mathematica (Cluj), 32(55) 2, 159-166.

Nehari, Z., 1949. The schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 545-551.

Noshiro, K., 1934-1935. On the theory of schlicht functions, J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Jap., 1(2), 129-155.

Nunokawa, M., 1968. On the univalencey and multivalency of certain analytic functions, Math. Z., 104(5), 394-404.

Ovesea, H., 1997. An extension of the univalence criteria of Becker, of Nehari and of Lewandowski , Stud. Cerc. Mat. 49, 217-223.

Ovesea, H., 2001. A generalization of Ruscheweyh's univalence criterion, J. Math. Anal. Appl., 258, 102-109.

Ovesea, H., 2003. Some sufficient conditions for univalence, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, 48(4), 65-69.

Ozaki, S., 1934. Some remarks on the univalency and multivalency of funtions, Sci.Rep. Tokyo, Bunrika Daigaku, 2, 41-55.

Ozaki, S., 1935. On the theory of multivalent funtions, Sci.Rep. Tokyo, Bunrika Daigaku, 40, 167-188.

Ozaki, S. and Nunokawa, M., 1972. The schwarzian derivative and univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 33(2), 392-394.

Pascu, N. N., 1985. On a univalence criterion. II, in Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity (Cluj-Napoca,), Preprint, 85-6, pp. 153-154, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania.

Pascu, N. N., 1986. Sufficient conditions for univalence, Seminar on Geometric Functions Theory, (Preprint), 5 (1986), 119-122.

Pascu, N. N., 1987. An improvement of Becker's univalence criterion, Proc. of the Comm. Sess. S. Stoilov, Preprint, 15–20.

Pascu, N. N., 1995. Loewner chains and univalence criteria, Mathematica (Cluj), 37(60), 215–217.

Pascu, N. N., 1996. Method of Loewner chains for constracting univalency criteria, J. Anal., 4, 35-40.

Pascu, N. N., Răducanu, D. and Owa, S., 2003. Subordination chains and univalence cirteria, Bull. Korean Math. Soc., 40(4), 671–675.

Pescar, V., 1996. A new generalization of Ahlfors's and Becker's criterion of univalence, Bulletin of the Malaysian Mathematical Society, 19(2), 53–54.

Pescar, V., 1997a. On some integral operators which preserve the univalence, Journal of Mathematics, 30, 1-10.

Pescar, V., 1997b. An integral operator which preserves the univalency, The Annual Conference of the Romanian Society of Mathematical Sciences. Buchrest-Romania, 179-181.

Pescar, V., 1998a. On the univalence of an integral operators, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 43(4), 95-97.

Pescar, V., 1998b. On an integral operator, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 43(4), 99-101.

Pescar, V., 2000. About an integral operator preserving the univalence, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 45(3), 51-53.

Pescar, V., 2001. New univalence criterion for certain integral operator, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 56(2), 107-109.

Pescar, V., 2003. Certain sufficient conditions for univalence, Hokkaido Math. J., 32(2), 451-455.

Pescar, V., 2004. Simple sufficient conditions for univalence, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, Mathematica, 49(2), 95-98.

Pescar, V., 2006. Univalence conditions for certain integral operators, JIPAM, 7(4), Article 147.

Pescar, V. and Breaz, D., 2010. On an integral operator, Appl. Math. Lett., 23(5), 625-629.

Pfaltzgraff, J. A., 1975. Univalence of the integral of $(f'(z))^{\lambda}$, Bull. London Math. Soc., 7(3), 254-256.

Pommerenke, Ch., 1965. Über die Subordination analytischer Funktionen, J. Reine Angew. Math., 218, 159-173.

Pommerenke, Ch., 1975. Univalent functions, Vandenhoech and Ruprecht, Göttingen.

Pommerenke, Ch., 1986. On the Epstein univalence criterion, Results in Math., 10, 143-146.

Ponnusamy, S. and Silverman, H., 2006. Complex variables with Applications, Birkhäuser. Boston.

Răducanu, D., 2004. A univalence criterion for analytic functions in the unit disc, Mathematica, 46(69) 2, 213-216.

Răducanu, D., Radomir, I., Gageonea, M. E. and Pascu, N. N., 2004. A generalization of Ozaki and Nunokawa's univalence criterion, JIPAM, 5(4), 2-9.

Royster, W. C., 1965. On the univalence of a certain integral, Michigan Math. J., 12, 385-387.

Rudin, W., 1976. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill.

Ruscheweyh, St., 1975. New criteria for univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 49, 109-115.

Ruscheweyh, St., 1976. An extension of Becker's univalence condition, Math. Ann., 220, 285-290.

Sălăgean, G. S., 1983. Subclasses of univalent functions, Lecture notes in Math., (Springer-Verlag), 1013, 362-372.

Singh, V. and Chichra, P. N., 1977. An extension of Becker's criterion for univalence, J. Indian Math. Soc., 41, 353-361.

Tan, D., 1992. Quasiconformal Extension and Univalency Criteria, Michigan Math. J., 39,163-172.

Tudor, H. and Owa, S., 2005. A extension of the univalence criteria of Nehari and Ozaki and Nunokawa, Hokkaido Math. J., 34, 533-539.

Tudor, H., 2007. New univalence criteria, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, 52(2), 127-132.

Tudor, H., 2008. A extension of Ozaki and Nunokawa's univalence criterion, JIPAM, 9(4), 2-11.

Warschawski, S. E., 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc., 38, 310-340.

Wesolowski, A., 1988. On a certain extension of Epstein's univalence criterion, Annales Üniversitatis Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia, 42(19), 171–176.

Wesolowski, A., 1990. On the univalence of certain integrals of meromorphic functions, Glasnik Matematicki, 25(45), 43-47.

Wesolowski, A., 1991. On certain univalence criteria, Colloquium Mathematicum, 62, 39-42.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Kars'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kars'ta tamamladı. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edediyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2004 yılında mezun oldu. 2005 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edediyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2004–2007 yılları arasında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim dalında doktora programını kazandı.

Halen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmakta olup, evlidir.