KARMAŞIK TİPLİ TENSÖRLERE UYGULANAN TACHIBANA OPERATÖRÜ

Furkan YILDIRIM

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Arif SALİMOV
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KARMAŞIK TİPLİ TENSÖRLERE UYGULANAN TACHIBANA OPERATÖRÜ

Furkan YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

KARMAŞIK TİPLİ TENSÖRLERE UYGULANAN TACHIBANA OPERATÖRÜ

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Furkan YILDIRIM tarafından hazırlanan bu çalışma 23/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Geometri tezi olarak **oybirliği (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Arif SALİMOV *İmza* :

Üye: Doç.Dr. Necmi CENGİZ *İmza* :

Üye : Doç.Dr. Abdullah KAPLAN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KARMAŞIK TİPLİ TENSÖRLERE UYGULANAN TACHIBANA OPERATÖRÜ

Furkan YILDIRIM

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde ilk olarak pür tensör alanları incelenmiştir ve bu pür tensör alanlarına uygulanan Tachibana ve Vishnevskii operatörünün tanımları verilmiş ve bu operatörlerin çeşitli tiplerdeki tensör alanlarına uygulamaları bulunmuştur. Bu çalışmada amacımız karmaşık tipli tensör alanına uygulanan Tachibana operatörünü incelemektir, bunun için ilk önce altmanifoldlarda karmaşık tipli pür tensör alanları ve $\tilde{\phi}_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ -operatörleri incelenmiştir. Daha sonra karmaşık tipli tensör alanlarına uygulanan Tachibana operatörünün genelleştirmeleri bulundu. Son olarak ise, Norden manifoldlarında Tachibana operatörlerine bakılmıştır.

2011, 69 sayfa

Anahtar Kelimeler: Pür tensör, Tachibana operatörü, Vishnevskii operatörü, Nijenhuis tensörü**.**

ABSTRACT

Master Thesis

TACHIBANA OPERATOR APLLIED TO MIXED-TYPE TENSORS

Furkan YILDIRIM

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV

In this thesis, firstly pure tensor field are investigated. Then, the definitions of Tachibana and Vishnevskii operators which can be applied to pure tensor field are given. Secondly, their applications to the tensor field of various types can be found. That the aim of this thesis is the Tachibana operators applied to a tensor fields of mixed kind, so primarily pure tensor fields of mixed kind on submanifolds and $\tilde{\phi}_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ - operators were examined. Then, generalizations of Tachibana operators applied to a tensor fields of mixed kind can be found. Finally, Tachibana operators on Norden manifolds are analyzed.

2011, 69 pages

Keywords: Pure tensor, Tachibana operator, Vishnevskii operator, Nijenhuis tensor.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanışında yakın ilgilerini gösterip, yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Kürşat AKBULUT ile bana yol gösteren ve bilgilerine her zaman ihtiyaç duyacağım değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Doç. Dr. Nejmi CENGİZ, Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER, Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer TARAKÇI'ya ve arkadaşlarım Sayın Selahattin GENÇ ile Sayın Semra KAYA'ya şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında vermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Furkan YILDIRIM

Mayıs 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

g	Pseudo-Riemannian Metriği
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
$\tilde{M}$	İnvariant Altmanifold
N_φ	Nijenhuis Tensör Alanı
$\overset{*}{t}$	Holomorfik Tensör Alanı
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
T_{km}^{i}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
W_n	Weyl Uzayı
∇	Burulmasız Afin Konneksiyon
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ_{ij}^{h}	Cristoffel Sembolü
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
I	Birim Afinor Alanı
$\phi_\varphi t$	Nijenhuis- Shirokov Tensör Alanı
ϕ_φ	Tachibana Operatörü
ψ_φ	Vishnevskii Operatörü

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri geometrik problemleri, diferensiyel ve integral hesaplama tekniklerini kullanalarak çözümlemeye çalışan matematiğin bir alt disiplinidir. XVII. yüzyılda ortaya çıkan ve güncelliğini koruyan Diferensiyel geometrinin esas konusu, düzlem, yüzey eğrileri ve Öklid uzayında yüzeylerin incelenmesidir.

Diferensiyel Geometride önemli bir yere sahip olan tensör kavramı güncel anlamda ilk olarak aslında bir fizikçi olan Woldemar Voigt tarafından 1898'de kullanıldı. Tensör hesaplamaları 1890'lı yıllarda kısaca Ricci olarak alınan Gregorio Ricci-Curbastro tarafından mutlak diferensiyel hesaplamalar başlığı altında incelendi ve bu çalışmalar 1892 yılında kendisi tarafından sunuldu. Daha sonra 1900 yılında Ricci ve Tullio Levi-Civita, mutlak diferensiyel hesaplama metodları ve uygulamaları adı altında çalışmalarını yayımladılar (Ricci and Levi-Civita 1900).

Uzayda her bir noktaya sırasıyla bir skaleri veya vektörü tayin eden skaler alanın veya vektör alanın genelleşmiş hali olan tensör alanı, manifold üzerinde tanımlı olup manifoldun her bir noktasına bir tensör karşılık getiren bir dönüşümdür. Matematiksel yapılarda ise tensör alanı ifadesi yerine kısaca tensör kullanılır.

Bizi ilgilendiren ise tanımı tezde verilen pür tensör alanlarıdır. Çünkü Tachibana operatörleri yalnızca pür tensör alanları için uygulanabilen tensör alanlarıdır.

$\phi_\varphi -$operatörü olarakta bilinen Tachibana operatörü ilk Tachibana tarafından kullanıldı (Tachibana 1960). Tachibana operatörü şartlarından biri $\psi_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_X Y)$ olarak alındığında ise Vishnevskii operatörleri elde edilir. $\psi_\varphi -$operatörü olarakta bilinen Vishnevskii operatörü integrallenebilir $\varphi-$yapıları için, ilk kez V.V.Vishnevskii tarafından kullanıldı (Vishnevskii 1972). Karmaşık tipli tensörlere uygulanan $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}-$operatörü ise Tachibana ve Koto tarafından çalışıldı (Tachibana and Koto 1962).

Sunulan bu tezde ise pür tensör alanlarına uygulanan Tachibana ve Vishnevskii operatörleri gibi bazı operatörler ile bunların genelleştirmeleri incelendi. Bu amaçla, çalışmamızın anlaşılabilmesi için ve konunun sınırlanması bakımından ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde Tachibana Operatörleri, Vishnevskii Operatörleri ve bunların çeşitli tensör tiplerine uygulamaları hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, Karmaşık tipli tensör alanına uygulanan Tachibana Operatörü, altmanifoldlarda karmaşık tipli pür tensör alanları daha sonra $\tilde{\phi}_{\varphi,\tilde{\varphi}}-$operatörleri ve son olarak, Norden manifoldlarında Tachibana operatörleri araştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: X Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \Re^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n-boyutlu koordinat sistemi veya harita, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1, ..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: Eğer X Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \, , \quad \text{(A-indisler kümesi)}$$

ise X 'e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: X Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X ‘i örter, yani X , n-boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j = 1,\ldots, n\right)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki *x* noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.1.5: *X* Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, *X* üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, $C^k\ (1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞-yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: *M,* sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, *M* üzerinde *n*-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse *M* uzayına *n*-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: B_n, $n-$boyutlu reel vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n,\ j = 1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*,\quad i = 1,..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\omega = t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında *p* dereceden kontravaryant, *q* dereceden kovaryant tensör adı verilir ve bu şekildeki tüm tensörlerin uzayı $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \ge 0,\ q \ge 0$ olmak üzere *s* = *p*+*q* sayısına ise tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. (p,0) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (0,q) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $T_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım,

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \ \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartında $\vec{x} = 0$ olursa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir.

(2.1) eşitliği koordinatlarla

$$g_{ij} x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından

$$g_{ij} x^i = 0 \,, \ j = 1, ..., n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\tilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik} x^k, \ (\eta_i = g_{ik} y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümü, (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \tilde{g}^{ki} \xi_i, \ (y^k = \tilde{g}^{ki} \eta_i) \tag{2.4}$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invaryant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j$$

şeklinde yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini dikkate alırsak

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$$

olur. Yani, g esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenlerinin $\omega = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$ invaryant bilineer formunu buluruz. Buna göre de $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\tilde{g}(\eta,\xi) = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j = \eta_i x^i = g_{ik}y^k x^i,$$
$$\tilde{g}(\xi,\eta) = \tilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i = \xi_j y^j = g_{jk}x^k y^j$$
$$= g_{ki}x^i y^k = g_{ki}y^k x^i = \tilde{g}(\eta,\xi)$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n uzayında g tensörü verildiğinde B_n'den B_n^*'a bir izomorfizm bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k = g_{ki}x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{ik}x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $\left(x^i \to x_k\right)$ ve yükseltilmesi $\left(x_k \to x^i\right)$ işlemleri denir. Buna göre, $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörü göz önüne alınırsa

$$S^{p}_{.j} = \tilde{g}^{pi}S_{ij}, \quad S_{i.}^{\ p} = \tilde{g}^{pj}S_{ij}, \quad S^{pq}_{..} = \tilde{g}^{pi}\tilde{g}^{pj}S_{ij}$$

ifadelerinin herbiri S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemi,

$$S_p^{\cdot j} = g_{pi}S^{ij}, \quad S^{i\cdot}_{\ p} = g_{pj}S^{ij}, \quad S^{\cdot\cdot}_{pq} = g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

ifadelerinin herbiri ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x},\vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, her $\vec{x},\vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x},\vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$\vec{x}\vec{y} = g\left(\vec{x},\vec{y}\right) = g_{ij}x^i y^j = x_j y^j \qquad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $Det(g_{ij}) \neq 0$ olursa bu taktirde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

Tanım 2.2.2: M_n, C^{∞} sınıfından bir manifold ve T_p, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren *X* vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

f, M_n manifoldunda bir dönüşüm ise *Xf'* de M_n manifoldunda

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler *U* daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i,...,x^n\right), \quad i = 1,...,n$$

olur.

M_n, C^{∞} sınıfından bir manifold olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.3: M_n, C^{∞} sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren *T* fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1,\ q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde *f* fonksiyonu C^{∞} sınıfından ise her $x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece *f* fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise *T* tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise *T* tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ $(0,1)$ tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,..., X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m), X_1(m),..., X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre *T* tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q}, \partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^{∞} sınıfından fonksiyonlar ise *T* tensör alanına C^{∞} sınıfındandır denir. C^{∞} sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli *T* tensör alanının C^{∞} sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir C^{∞} sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,..., X_q)$ fonksiyonunun C^{∞} sınıfından olmasıdır.

Tanım 2.2.4: $\omega = (\omega_{ij})$, (0,2) tipli bir tensör olsun. $\omega = (\omega_{ij})$ tensöründe *i* ve *j* indislerine göre antisimetriklik varsa $\omega = (\omega_{ij})$ tensörüne 2-form veya dış form denir.

Bir k-forma dış diferensiyel uygulanırsa sonuçta k+1-form elde edilir. Yani ω, k-form ise $d\omega \in T_{k+1}(M_n)$ olup k+1-form oluşur. Böyle k+1 formlara tam form denir.

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

olması exact formların en önemli özelliğidir. Yani tam formlara dış diferensiyel uygulanırsa sonuç sıfır olur.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü *t* parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilen konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına uygulanan vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{k}{a}^i,\ k = 1,.n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$'nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını ifade etmiş olsun. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d\underset{k}{a}^i \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i v^i \tag{2.7}$$

eşitliği yazılır. Burada $\underset{k}{a}^i$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\underset{k}{a}^i \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) eşitliğinde kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.8) denkleminde ω_i^k,

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i \, d \underset{s}{a}^k \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde tanımlanan ω_i^k objelerine konneksiyon formları (bağlantı objeleri) denir.

Teorem 2.3.1: 1. Konneksiyon formları $\left\{\underset{k}{a}^i\right\}$, $k = 1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmezler.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ farklı iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0, \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

şartlarını yazabiliriz. (2.10) ve (2.11) şartlarından ve v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralı

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12) deki ikinci eşitliğin diferensiyelini alırsak,

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.9) denkleminde (2.12) nin birinci eşitliği ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

ve gerekli işlemlerden sonra

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.14}$$

bulunur. (2.14) eşitliği, ω_j^i konneksiyon formlarının, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

Tanım 2.3.1: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa, ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i \omega_i\right) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \tag{2.15}$$

eşitliği yazılabilir. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

yazılır. (2.16) eşitliğini (2.15) ifadesinde kullanılırsa,

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right) v^i = 0$$

eşitliği bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

biçiminde olur. Vektörün ve kovektörün (1-form) γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün de paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

şeklinde verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} d\underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &+ \ldots + t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots d\overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &= \left(dt^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1..i_p}_{sj_2...j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1..i_p}_{sj_2..s} + \omega^{i_1}_s t^{si_2..i_p}_{sj_2...j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1..s}_{j_1...j_q} \right) \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} = dt^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1..i_p}_{sj_2...j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1..i_p}_{sj_2..s} + \omega^{i_1}_s t^{si_2..i_p}_{j_1...j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1..s}_{j_1...j_q} \tag{2.19}$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.20}$$

elde edilir. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli bir tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörüne $t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \qquad \delta\omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli bir tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$- tensör çarpımını gösterir.

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

2.3.2. Tanım: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyonu verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Bu tanımdaki lineerlik şartı şu şekilde ifade edilir:

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın komşuluğunda keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v_k^i du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v_k^i, v^i'ye ve noktaya bağlı fonksiyon, du^k ise her bir vektöre teğet vektörün koordinatlarıdır. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega_k^i v^k = \partial_k v^i du^k + \omega_k^i v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega_k^i v^k = \left(v_s^i - \partial_s v^i\right) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. v^k, $\partial_s v^i$ 'nin ve v_s^i 'ler ise u^i 'lerin fonksiyonlarıdır. ω_k^i formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω_k^i formları du^k nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada Γ_{sk}^i katsayıları afin uzayın bir noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ_{sk}^i afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) du^k \tag{2.25}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğin her iki tarafının ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\partial_k\left(A_j^{j'}A_{j'}^i\right)=\partial_k\left(\delta_j^i\right)=0$$
$$\left(\partial_k A_j^{j'}\right)A_{j'}^i+A_j^{j'}\left(\partial_k A_{j'}^i\right)=0$$
$$A_j^{j'}\left(\partial_k A_{j'}^i\right)=-\left(\partial_k A_j^{j'}\right)A_{j'}^i$$

olur. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'}dA_{j'}^i=-A_{j'}^i\left(\partial_k A_j^{j'}\right)du^k \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) , (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i=A_{i'}^iA_j^{j'}A_k^{k'}\Gamma_{k'j'}^{i'}+A_{i'}^iA_{kj}^{i'} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'}=\partial_k A_j^{i'}$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i=(\ \partial_k v^i+\Gamma_{ks}^i v^s\ )\,du^k \tag{2.28}$$

biçiminde olur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i=\partial_k v^i+\Gamma_{ks}^i v^s \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür.

Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k\omega_j=\partial_k\omega_j-\Gamma_{kj}^s\,\omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür.

(2.24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}=(\partial_k t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}+\sum_{\lambda=1}^{p}\Gamma_{ks}^{i_\lambda}t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots s\ldots i_p}-\sum_{\mu=1}^{q}\Gamma_{kj_\mu}^{s}t_{j_1\ldots s\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p})du^k \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \partial_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \ldots s \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots s \ldots j_q} \tag{2.32}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türevi tanımından, (p,q) tipli tensörün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensör olduğu görülür. Yani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık mertebesini bir artırır.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikleri yazabiliriz:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mp \underset{2}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}) = \nabla_k \underset{1}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mp \nabla_k \underset{2}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mp \lambda \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}, \quad \lambda \in F(M_n)$

3. $\nabla_k (t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}) = \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q} + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin (lineer) konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.3.3: M_n manifoldu üzerinde $T^1_0(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : T^1_0(M_n) \times T^1_0(M_n) \to T^1_0(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T^1_0(M_n) \to T^1_0(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f\left(u^1,...,u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olmasıdır (Yano 1968).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S_{ij}^k V_k \tag{2.36}$$

elde edilir. Burada

$$S_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli tensör olduğundan S_{ij}^k kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensörün bileşenlerini ifade eder. Bu tensöre A_n uzayının burulma (torsion) tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^i vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sm} v^m$ kovaryant türevi $(1,1)$ tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm} (\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte *r, s* indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.39}$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$\begin{aligned}R^i_{rsk} &= \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \\ &= 2(\partial_{[r} \Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|} \Gamma^m_{s]k})\end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi $(1,3)$ tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının Eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılabilir:

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \omega_k = -R^m_{rsk} \omega_m - 2S^m_{rs} \nabla_m \omega_k \ , \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \varphi^j_i = R^j_{rsm} \varphi^m_i - R^m_{rsi} \varphi^j_m - 2S^k_{rs} \nabla_k \varphi^j_i \, , \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}2\nabla_{[r} \nabla_{s]} t^{i_1 .. i_p}_{j_1 ... j_q} &= R^{i_1}_{rsm} t^{m i_2 .. i_p}_{j_1 ... j_q} + ... + R^{i_p}_{rsm} t^{i_1 .. m}_{j_1 ... j_q} \\ &\quad - R^m_{rsj_1} t^{i_1 .. i_p}_{m j_2 ... j_q} - ... - R^m_{rsj_q} t^{i_1 .. i_p}_{j_1 .. m} - 2S^k_{rs} \nabla_k t^{i_1 .. i_p}_{j_1 ... j_q} \, .\end{aligned} \tag{2.43}$$

(2.42) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma, konneksiyonların birinden diğerine geçmeye, konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Aynı manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür. M_n manifoldu üzerinde Γ_{ij}^k ve $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}_{km}^i v^m$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m \tag{2.45}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$T_{km}^i = \overline{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i \tag{2.46}$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T_{km}^i, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon (gerilme) tensörü denir.

Teorem 2.3.2: T_{km}^i, (1,2) tipli tensör ve Γ_{km}^i ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}_{km}^i$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k - T_{ij}^k$$

yazılır. Γ_{ij}^{k} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \left(\overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'} \right) + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'} \tag{2.47}$$

olur. Burada T_{ij}^{k} tensör olduğundan,

$$T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} T_{i'j'}^{k'} \tag{2.48}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'}$$

olduğu bulunur. Bu ise, $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim,

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \frac{\lambda}{1+\lambda} (\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k} - \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılabilir. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan Teorem 2.3.2.'e göre Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon olur. Yani iki farklı konneksiyon kullanılarak yeni bir konneksiyon oluşturulmuş olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{2} \tag{2.51}$$

bulunur. $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ^k_{ij} afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} + 2S^k_{ij}, \qquad \tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} \tag{2.52}$$

yazılır. 2.3.2. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ ve Γ^k_{ji} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.3.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^1, \ldots, \overset{\circ}{u}{}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta^{i'}_k$ Kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. Bu ifade u^i den $u^{i'}$ ne bir dönüşümdür. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ip}^{k} (u^p - \overset{\circ}{u}{}^p), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği O noktasında ve civarında $\det\left(A_i^{i'}\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.55}$$

olur.

Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^{i} = \delta_j^{j'} \delta_k^{k'} \delta_{i'}^{i} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^{i} \delta_l^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{kj}^{l}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle bir koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği), (Bianchi'nin 2. özdeşliği)

eşitlikleri geçerlidir.

Bu eşitliklerin her üçünün de invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere, a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

şeklinde olsun. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^m a_{mj} - \Gamma_{kj}^m a_{mi} = \nabla_k a_{ij},$$
$$\partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^m a_{mk} - \Gamma_{ik}^m a_{jm} = \nabla_i a_{jk},$$
$$\partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{km} = \nabla_j a_{ki}.$$

eşitlikleri yazılır.

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

eşitliği bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^r = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

biçimindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Riemannian konneksiyon katsayıları, Levi-Civita konneksiyonu veya Christoffel sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.3.4: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}, e = e_{12\ldots n}$ n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v},\underset{2}{v},...,\underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_1...i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_1...i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_1...i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2...i_n} - ... - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1...s} = 0 \tag{2.62}$$

biçiminde yazılabilir. n-vektörün antisimetrikliğine göre (2.62) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12...n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2...n} - ... - \Gamma^s_{kn} e_{12...s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12...n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. Eş afin uzay bu şart ile de karakterize edilebilir. (2.64) eşitliğindeki eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki}\Gamma^k_{lj} \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edilebilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0$ ve $R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını göz önüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.3.5: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik, (0,2) tipli g tensörü, tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaya metrik uzay denir. Burada simetrik, (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör denir.

Tanım 2.3.6.: Metrik uzayın g metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ ise uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 2.3.7: Eğer Weyl uzayı eş-afin uzay olursa, bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

şartı ile karekterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ olmak üzere

1. $R_{(ij)kl} = 0$

2. $R_{[ijk]l} = 0$

3. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

4. $R_{ij(kl)} = 0$

5. $R_{ijkl} = R_{klij}$

eşitlikleri geçerlidir.

2.3.5. Riemannian manifoldu

Her bir $x \in M_n$ noktasında her $Y \in T_x(M_n)$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y) = 0$ eşitliğinde $X = 0$ olursa g 'ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $Det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g 'nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n, g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij} \right)$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian veya Levi-Civita konneksiyonu denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

M_n, n-boyutlu C^∞ sınıfından bir manifold olsun. M_n üzerindeki (r,s) tipli tüm C^∞ sınıfından tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\Im_s^r(M_n)$ ile gösterilir. Burada r, kontravaryant derecesi s, kovaryant derecesi ve $F(M_n)$ ise M_n üzerindeki C^∞ sınıfından fonksiyonların cebridir.

Tanım 3.1: $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$, M_n üzerinde bir afinor alanı olsun. Keyfi $X_1, X_2, ..., X_s \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi} \in \Im_1^0(M_n)$ için aşağıdaki şartı sağlayan (r,s) tipli t tensör alanına φ' e göre pür tensör alanı denir;

$$\begin{aligned} t(\varphi X_1, X_2, ..., X_s;\ \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi}) &= t(X_1, \varphi X_2, ..., X_s;\ \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi}) \\ &\ \vdots \\ &= t(X_1, X_2, ..., \varphi X_s;\ \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi}) \\ &= t(X_1, X_2, ..., X_s;\ {}'\varphi \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi}) \\ &= t(X_1, X_2, ..., X_s;\ \overset{1}{\xi}, {}'\varphi \overset{2}{\xi}, ..., \overset{r}{\xi}) \\ &\ \vdots \\ &= t(X_1, X_2, ..., X_s;\ \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., {}'\varphi \overset{r}{\xi}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada ${}'\varphi$, keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\xi \in \Im_1^0(M_n)$ için,

$$({}'\varphi\xi)(X) = \xi(\varphi X) = (\xi \circ \varphi)(X)$$

şeklinde tanımlanan φ'nin eşlenik operatörüdür.

$x^1, x^2, ..., x^n$; M_n'de lokal koordinat sistemi olmak üzere, (3.1)'de $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x^{i_1}}$,..., $X_s = \dfrac{\partial}{\partial x^{i_s}}$ ve $\overset{1}{\xi} = dx^{j_1}, ..., \overset{r}{\xi} = dx^{j_r}$ alındığında, t tensör alanının φ'e göre pürlük şartı koordinatlarla,

$$t^{j_1 \cdots j_r}_{m i_2 \ldots i_s} \varphi^m_{i_1} = t^{j_1 \cdots j_r}_{i_1 m \ldots i_s} \varphi^m_{i_2} = \ldots = t^{j_1 \cdots j_r}_{i_1 i_2 \ldots m} \varphi^m_{i_s} = t^{m j_2 \cdots j_r}_{i_1 \ldots i_s} \varphi^{j_1}_m = t^{j_1 m \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} \varphi^{j_2}_m = \ldots = t^{j_1 j_2 \ldots m}_{i_1 \ldots i_s} \varphi^{j_r}_m \tag{3.2}$$

şekilinde tanımlanır. Vektör, kovektör ve skaler alanları, pür tensör alanları gibi dikkate alınır.

Örnek 3.1: Özellikle, $t \in \Im_1^1(M_n)$, (1.1) tipli pür tensör alanı olsun. (3.1) ifadesi,

$$\varphi(tX) = t(\varphi X)$$

şeklinde yazılır.

Böylece, $t \in \Im_1^1(M_n)$ ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ için,

$$\varphi \circ t = t \circ \varphi \tag{3.3}$$

değişme özelliği varsa t, φ'e göre pürdür ve φ'de t'ye göre pürdür. Burada $(\varphi \circ t)X = \left(\varphi \overset{C}{\otimes} t\right)X = \varphi(tX)$'dir. $\overset{C}{\otimes}$ ise C kontraksiyonuyla birlikte bir tensör çarpımıdır.

(3.3)'den φ'nin ve I birim afinor alanının pür tensör alanına örnek olduğu görülür.

Ayrıca (3.3)'den φ bir regüler afinor alanı ise $\det(\varphi_j^i) \neq 0$'dir. Burada, bileşenleri φ ters matrisinin elemanları olan φ^{-1} afinor alanıda pürdür.

Örnek 3.2: Matris dilinde,

$$^{T}\varphi g = g\varphi \tag{3.4}$$

dir. Burada $g = (g_{ij})$, $\varphi = (\varphi_j^i)$ ve $^{T}\varphi$, ise φ matrisin devriğidir.

(3.4)'den

$$g_{im}\varphi_j^m = g_{mj}\varphi_i^m$$

elde edilir. Bu ifade (3.2)'den dolayı $g \in \Im_2^0(M_n)$ tensör alanının pürlük şartıdır.

Tanım 3.2: g bir pseudo-Riemannian metriği olmak üzere, $g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$ pürlük şartını sağlayan φ lineer operatörüne, öz-eşlenik operatörü adı verilir. Örneğin, bir pseudo-Riemannian manifoldu üzerindeki Jacobi operatörü ile Ricci operatörü ve ayrıca Norden manifoldu üzerindeki hemen hemen kompleks yapının bir afinoru öz-eşlenik operatörleridir (Salimov 2010).

(3.1)'den, eğer K ve L (r,s) tipli pür tensör alanları ise, $K+L$ ve fK $(f \in F(M))$ da pür tensör alanıdır. φ afinor alanına göre M üzerindeki tüm (r,s) tipli tensör alanlarının modülü $\overset{*}{\Im}{}^r_s(M_n)$ ile gösterilir. λ pozitif tam sayı olsun. Eğer K ile L sırasıyla (p_1,q_1) ve (p_2,q_2) tipli pür tensör alanları ise, K ve L' nin tensör çarpımı,

$$K \overset{C}{\otimes} L = (K^{i_1 \dots m_\lambda \dots i_{p1}}_{j_1 \dots j_{q1}} L^{r_1 \dots r_{p2}}_{s_1 \dots m_\lambda \dots s_{q2}})$$

şeklindedir ve bu da bir pür tensör alanıdır. Çünkü $K \in \overset{*}{\Im}{}^1_1(M_n)$, $L \in \overset{*}{\Im}{}^0_2(M_n)$ ve her $X,Y \in \Im^1_0(M_n)$ için,

$$(K \overset{C}{\otimes} L)(\varphi X, Y) = K(L(\varphi X, Y)) = K(L(X, \varphi Y)) = (K \overset{C}{\otimes} L)(X, \varphi Y)$$

şeklindedir.

$\mathbb{R}$ üzerindeki $\overset{*}{\Im}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \overset{*}{\Im}{}^r_s(M_n)$ cebirinde $K \in \overset{*}{\Im}{}^{p_1}_{q_1}(M_n)$ ve $L \in \overset{*}{\Im}{}^{p_2}_{q_2}(M_n)$'nin pür çarpımı,

$$\overset{C}{\otimes} : (K,L) \to (K \overset{C}{\otimes} L) = \begin{cases} K^{i_1 \dots m_\lambda \dots i_{p1}}_{j_1 \dots j_{q1}} L^{r_1 \dots r_{p2}}_{s_1 \dots m_\lambda \dots s_{q2}} & \lambda \le p_1, q_2 \ (\lambda \text{ sabit pozitif tam sayı}), \\ K^{i_1 \dots i_{p1}}_{j_1 \dots m_\mu \dots j_{q1}} L^{r_1 \dots m_\mu \dots r_{p2}}_{s_1 \dots s_{q2}} & \mu \le p_2, q_1 \ (\mu \text{ sabit pozitif tam sayı}), \\ 0 & p_1 = 0, \ \mathrm{p}_2 = 0, \\ 0 & \mathrm{q}_1 = 0, \ q_2 = 0. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Pür çarpım işlemi $\overset{C}{\otimes}$ veya $"\circ"$ ile gösterilir. Özellikle, $K = X \in \Im^1_0(M_n)$ ve $L \in \Lambda_q(M_n)$ bir $q-$form alınırsa, $X \overset{C}{\otimes} L$ pür çarpımı, $\iota_X L$ iç çarpımıyla çakışır.

3.1. Tachibana Operatörleri

Tanım 3.1.1: $\Im(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\Im_s^r(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebri ve $\varphi\in\Im_1^1(M_n)$ olsun.

Aşağıdaki şartları sağlayan M_n üzerindeki $\phi_\varphi:\overset{*}{\Im}(M_n)\to\Im(M_n)$ dönüşümüne tachibana operatörü veya $\phi_\varphi-$operatörü denir (Salimov *et al.* 2008).

a) Sabit katsayılara göre ϕ_φ lineerdir,

b) Her r,s için, $\phi_\varphi:\overset{*}{\Im}{}_s^r(M_n)\to\Im_{s+1}^r(M_n)$,

c) Her $K,L\in\overset{*}{\Im}(M_n)$ için, $\phi_\varphi(K\overset{C}{\otimes}L)=(\phi_\varphi K)\overset{C}{\otimes}L+K\overset{C}{\otimes}\phi_\varphi L$

d) Her $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ için, $\phi_{\varphi X}Y=-(L_Y\varphi)X$, burada L_Y , Y 'e göre Lie türevidir.

e) Her $\omega\in\Im_1^0(M_n)$ ve $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ için,

$$\phi_{\varphi X}(\iota_Y\omega)=(d(\iota_Y\omega))(\varphi X)-(d(\iota_Y(\omega\circ\varphi)))(X)=(\varphi X)(\iota_Y\omega)-X(\iota_{\varphi Y}\omega)$$

dir. Burada, $\iota_Y\omega=\omega(Y)=\omega\overset{C}{\otimes}Y$ ' dir.

Teorem 3.1.1: Tanım 3.1.1'den

$$\phi_{\varphi X}Y=[\varphi X,Y]-\varphi[X,Y]$$

elde edilir.

Her $f,g\in F(M_n)$ için**,**

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X$$

olduğundan $\phi_{\varphi X}Y$ 'in, X 'e göre lineer olduğu fakat, Y 'e göre lineer olmadığı görülür.

Buradan,

$$\phi_{\varphi(fX)}Y=[f\varphi X,Y]-\varphi[fX,Y]$$

$$= f\left[\varphi X, Y\right] - (Yf)\varphi X - \varphi\left(f\left[X, Y\right]\right) + \varphi(Yf)X$$

$$= f\left(\left[\varphi X, Y\right] - \varphi\left[X, Y\right]\right)$$

$$= f\phi_{\varphi X} Y$$

ve

$$\phi_{\varphi X}(gY) = g\left(\phi_{\varphi X} Y\right) + \left((\varphi X)g\right)Y - (Xg)\varphi Y$$

elde edilir. Burada $\phi_{\varphi X} Y$, ifadesi $\left(\phi_\varphi Y\right)X$ şeklinde yazılır.

3.1.1. (1,1) tipli tensör alanına uygulanan ϕ_φ −operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}^1_1(M_n)$, $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ ’deki gibi olsun. (Örnek 3.1’e bakınız). Keyfi $Y \in \Im^1_0(M_n)$ için $tY \in \Im^1_0(M_n)$ ’dir. Tanım 3.1.1’den,

$$\left(\phi_\varphi tY\right)X = \left(\left(\phi_\varphi t\right)X\right)\overset{C}{\otimes} Y + t\overset{C}{\otimes}\left(\phi_\varphi Y\right)X \tag{3.5}$$

$$= \left(\phi_\varphi t\right)(X, Y) + t\left(\left(\phi_\varphi Y\right)X\right)$$

elde edilir.

(3.5) eşitliğini kullanarak Tanım 3.1.1’den,

$$\left(\phi_\varphi t\right)(X, Y) = \left(\phi_\varphi tY\right)X - t\left(\left(\phi_\varphi Y\right)X\right)$$

$$= \left(-L_{tY}\varphi + t\left(L_Y\varphi\right)\right)X$$

$$= \left[\varphi X, tY\right] - \varphi\left[X, tY\right] - t\left[\varphi X, Y\right] + \varphi t\left[X, Y\right]$$

$$= Q_{\varphi,t}(X, Y) \tag{3.6}$$

elde edilir.

$Q_{\varphi,t} \in \Im^1_2(M)$ tensör alanı, Nijenhuis-Shirokov tensör alanı olarak adlandırılır (Kruchkovic 1970, 1972). Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.1.1: $t \in \overset{*}{\Im}{}_1^1(M_n)$ olsun. Buradan, $\phi_\varphi t$ Nijenhuis-Shirokov tensör alanıdır.

$t = \varphi$ için, $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ aşikar olarak sağlandığından (3.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi \varphi)(X,Y) &= \left(-L_{\varphi Y}\varphi + \varphi(L_Y \varphi)\right)X \\ &= [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] + \varphi^2[X,Y] \\ &= N_\varphi(X,Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada N_φ , φ' in Nijenhuis tensör alanıdır (Nijenhuis 1951).

Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.1.2: N_φ , φ'nin Nijenhuis tensör alanı ise,

$$N_\varphi = \phi_\varphi \varphi$$

dir.

Şimdi $t \circ \varphi \neq \varphi \circ t$ ve $t \notin \overset{*}{\Im}{}_1^1(M_n)$ olsun. Bu sebeple $t = \phi_{\varphi,t}$ bir tensör alanı değildir. Aşağıdaki,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi t + \phi_t \varphi)(X,Y) = [\varphi X, tY] + [tX, \varphi Y] + \varphi t[X,Y] + \\ + t\varphi[X,Y] - \varphi[X,tY] - \varphi[tX,Y] - t[X,\varphi Y] - t[\varphi X, Y]\end{aligned}$$

eşitliği φ ve t'nin $S_{\varphi,t}$ burulma tensör alanıdır (Kobayashi and Nomizu 1963; Nijenhuis 1951).

Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.1.3: $\varphi, t \in \Im_1^1(M_n)$ olsun. $\phi_\varphi t + \phi_t \varphi$ ifadesi, $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ pürlük şartı olmadan (1,2) tipli $S_{\varphi,t}$ tensör alanını tanımlar. Burada $S_{\varphi,t}$, φ ve t' nin burulma tensör alanıdır.

Teorem 3.1.1.3 ve (3.6) eşitliğinden, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1.1: t pürlük şartı olmadan (1.1) tipli tensör alanı olsun.
Bu durumda,

$$S_{\varphi,t}(X,Y) = Q_{\varphi,t}(X,Y) - Q_{\varphi,t}(Y,X) + (\varphi t - t\varphi)[X,Y]$$

dir. Buradan, keyfi $t, t_1, t_2 \in \overset{*}{\Im_1^1}(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

a) $\phi_\varphi I = 0$,

b) $\phi_\varphi (tY) = \left(Q_{\varphi,t}\right)_Y + t \circ \left(\phi_\varphi Y\right)$,

c) $\left(\phi_\varphi t\right)(X,Y) = Q_{\varphi,t}(X,Y) = -Q_{t,\varphi}(Y,X) = -\left(\phi_t \varphi\right)(Y,X)$,

d) $Q_{\varphi,t_1 \circ t_2} = Q_{\varphi,t_1} \circ t_2 + t_1 \circ Q_{\varphi,t_2}$,

e) $Q_{\varphi,\varphi \circ t_2} = N_\varphi \circ t_2 + \varphi \circ Q_{\varphi,t_2}$

elde edilir. Burada I birim afinordur. Buradan,

$$\left(Q_{\varphi,t}\right)_Y X = \left(Q_{\varphi,t} \overset{C}{\otimes} Y\right) X = Q_{\varphi,t}(X,Y),$$

$$\left(t_1 \circ Q_{\varphi,t_2}\right)_{(X,Y)} = \left(t_1 \overset{C}{\otimes} Q_{\varphi,t_2}\right)_{(X,Y)} = Q_{\varphi,t_2}(X, t_1 Y)$$

$$\left(Q_{\varphi,t_1} \circ t_2\right)_{(X,Y)} = t_2(Q_{\varphi,t_1}(X,Y))$$

elde edilir.

3.1.2. (1,s), $s \geq 2$ tipli tensör alanına uygulanan ϕ_φ −operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}_s^1(M_n)$ olsun. Buradan,

$$\varphi(t(Y_1, Y_2, ..., Y_s)) = t(\varphi Y_1, Y_2, ..., Y_s)$$
$$\vdots$$
$$= t(Y_1, Y_2, ..., \varphi Y_s)$$

dır. Tanım 3.1.1'den,

$$\left(\phi_\varphi t\right)\left(X, Y_1, Y_2, ..., Y_s\right) = \left(\phi_\varphi\left(t\left(Y_1, Y_2, ..., Y_s\right)\right)\right)X - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, Y_2, ..., \left(\phi_\varphi Y_\lambda\right)X, ..., Y_s\right)$$

$$= -\left(L_{t(Y_1, Y_2, ..., Y_s)}\varphi\right)X + \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, Y_2, ..., \left(L_{Y_\lambda}\varphi\right)X, ..., Y_s\right) \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitliği, M_n'deki doğal lokal koordinat sistemine göre,

$$\left(\phi_\varphi t\right)^h_{kj_1 \dots j_s} = \varphi^m_k \partial_m t^h_{j_1 \dots j_s} - \varphi^h_m \partial_k t^m_{j_1 \dots j_s} - t^m_{j_1 \dots j_s} \partial_m \varphi^h_k + \sum_{\lambda=1}^{s} t^h_{j_1 \dots m \dots j_s} \partial_{j_\lambda} \varphi^m_k \tag{3.8}$$

bileşenlerine sahiptir. Bu bileşenler t'nin pürlük şartıyla, (1, s+1) tipli $\phi_\varphi t$ tensör alanının bileşenleridir.

Teorem 3.1.2.1: $t \in \Im_2^1(M_n)$ olsun. $\left(\phi_\varphi t\right)_{kj_1 j_2}$'de k, j_1 ve j_2'e göre alterneleştirme işlemi yapılırsa $\left(\phi_\varphi t\right)^h_{[kj_1 j_2]}$'in, t'nin pürlük şartı olmaksızın (1,3) tipli tensör alanının bileşenleri olduğu görülür (Yano and Ako 1968).

T.J. Willmore, bileşenleri $\left(\phi_\varphi t\right)^h_{[kj_1 j_2]}$ olan tensör alanının $t = N_\varphi$, $\varphi^2 = -id$ şartı dahilinde Slebodzinski tensör alanına indirgeneceğini ve bu durumda Slebodzinski tensör alanının birim olarak sıfır olduğunu göstermiştir (Slebodzinski 1964; Willmore 1968).

3.1.3. 1-form'a uygulanan ϕ_φ −operatörü

$\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olsun. Tanım 3.1.1'i kullanarak keyfi $X, Y \in \Im_0^1 \in (M_n)$ için,

$$
\begin{aligned}
\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y\right) &= (\phi_{\varphi X}\,\omega)Y \\
&= \phi_{\varphi X}\left(\iota_{Y}\omega\right) - \omega\left(\phi_{\varphi X}Y\right) \\
&= \left(\varphi X\right)\left(\iota_{Y}\omega\right) - X\left(\iota_{\varphi Y}\omega\right) + \omega\left(\left(L_{Y}\varphi\right)X\right) \\
&= \left(L_{\varphi X}\,\omega - L_{X}\left(\omega\circ\varphi\right)\right)Y \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradaki $\omega\circ\varphi$ 1-formu,

$$\left(\omega\circ\varphi\right)Y = (\,{}^{'}\varphi\omega)Y = (\omega\overset{C}{\otimes}\varphi)Y = \omega\left(\varphi Y\right)$$

şeklinde tanımlanır. (3.9) eşitliğinden, $\phi_{\varphi}\omega\in\Im_{2}^{0}(M_{n})$ tensör alanının doğal çatıya göre,

$$\left(\phi_{\varphi}\omega\right)_{ij} = \varphi_{i}^{m}\partial_{m}\omega_{j} - \partial_{i}\left(\omega_{m}\varphi_{j}^{m}\right) + \omega_{m}\partial_{j}\varphi_{i}^{m}$$

bileşenlerine sahip olduğunu görürüz. $\left(\phi_{\varphi}\omega\right)_{ij}$ genelde i ve j 'e göre anti-simetrik değildir. $\left(\phi_{\varphi}\omega\right)_{[ij]}$ tensör alanı, Frolicher ve Nijenhuis ile tanınan tensör alanıyla çakışır (Frolicher and Nijenhuis 1956a, 1956b).

Teorem 3.1.3.1: ω, exact 1-form olsun. Buradan, $\omega\in Ker\phi_{\varphi}\omega$ olması ancak ve ancak $\omega\circ\varphi$ birleştirilmiş 1-formunun kapalı 1-form olması ile mümkündür.

İspat: $\omega\in\Im_{1}^{0}(M_{n})$ olsun. Keyfi $X,Y\in\Im_{0}^{1}\in(M_{n})$ ve $\omega\in\Im_{1}^{0}(M_{n})$ için,

$$\left(d\omega\right)\left(X,Y\right) = \frac{1}{2}\left\{X\left(\omega\left(Y\right)\right) - Y\omega\left(X\right) - \omega\left(\left[X,Y\right]\right)\right\}$$

yazılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Buradan,

$$
\begin{aligned}
\left(d\omega\right)\left(Y,\varphi X\right) &= \frac{1}{2}\left\{Y\left(\omega\left(\varphi X\right)\right) - \left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y\right)\right) - \omega\left(\left[Y,\varphi X\right]\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{Y\left(\omega\left(\varphi X\right)\right) - \left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y\right)\right) + \omega\left(\left[\varphi X,Y\right]\right)\right\} \qquad (3.10) \\
&= \frac{1}{2}\left\{Y\left(\omega\left(\varphi X\right)\right) - \left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y\right)\right) + \omega\left(\left[\varphi X,Y\right] - \varphi\left[X,Y\right]\right) + \omega\left(\varphi\left[X,Y\right]\right)\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinden,

$$\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y\right)=\left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y\right)\right)-X\left(\omega\left(\varphi Y\right)\right)-\omega\left(\left[\varphi X,Y\right]-\varphi\left[X,Y\right]\right) \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11) ifadesi (3.10)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left(d\omega\right)\left(Y,\varphi X\right)&=\frac{1}{2}\left\{-\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y\right)+Y\left(\omega\left(\varphi X\right)\right)-X\left(\omega\left(\varphi Y\right)\right)+\omega\left(\varphi\left[X,Y\right]\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{-\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y\right)+Y\left(\left(\omega\circ\varphi\right)\left(X\right)\right)-X\left(\left(\omega\circ\varphi\right)\left(Y\right)\right)-\left(\omega\circ\varphi\right)\left(\left[Y,X\right]\right)\right\}\\&=-\frac{1}{2}\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y\right)+\left(d\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\left(Y,X\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\phi_{\varphi}\omega=0$ 'nin $\left(d\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\left(Y,X\right)=\left(d\omega\right)\left(Y,\varphi X\right)$ 'e denk olduğu ve $\omega=df$ ifadesininde, $\left(d\left(df\circ\varphi\right)\right)\left(Y,X\right)=\left(d^2f\right)\left(Y,\varphi X\right)=0$ formuna dönüştüğü görülür. Burada, $df\circ\varphi$ kapalı 1-formdur.

Teorem 3.1.3.2: $\omega\in\Im_1^0(M_n)$ ve $\varphi^2=-id$ olsun. Buradan, $\omega\circ\varphi\in Ker\ \phi_{\varphi}$ olması ancak ve ancak $\omega\in Ker\ \phi_{\varphi}$ olması ile mümkündür.

İspat: Eğer ω yerine $\omega\circ\varphi$ ve X yerine φX alırsak,
(3.9) eşitliği $\det\varphi\neq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\left(\phi_{\varphi}\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\left(\varphi X,Y\right)&=\left(L_{\varphi^2X}\left(\omega\circ\varphi\right)-L_{\varphi X}\left(\omega\circ\varphi^2\right)\right)Y\\&=-\left(L_X\left(\omega\circ\varphi\right)+L_{\varphi X}\omega\right)Y\\&=-\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y\right)\end{aligned}$$

veya

$$\left(\left(\phi_{\varphi}\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\circ\varphi\right)\left(X,Y\right)=-\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y\right)$$

olarak yazılır.

Burada $\phi_{\varphi}\left(\omega\circ\varphi\right)=0$ olması ancak ve ancak $\phi_{\varphi}\omega=0$ olması ile mümkündür.

Sonuç 3.1.3.1: $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olsun. Eğer $\varphi^2 = -id$ ise $\omega \circ N_\varphi = 0$ 'dır.

Burada,

$$\left(\omega \circ N_\varphi\right)\left(X,Y\right) = \omega\left(N_\varphi\left(X,Y\right)\right)$$

dır.

İspat: Teorem 3.1.3.2'nin doğrudan sonucu olarak,

$$\phi_\varphi\left(\omega \circ \varphi\right) = \left(\phi_\varphi \omega\right) \circ \varphi + \omega \circ N_\varphi$$

eşitliği elde edilir.

3.1.4. $(0,s)$, $s \geq 2$ tipli tensör alanına uygulanan $\phi_\varphi -$operatörü

Teorem 3.1.4.1: $\omega \in \overset{*}{\Im}{}_s^0(M_n)$ olsun. Buradan,

$$\phi_{\varphi X}\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) = \left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) - X\left(\omega\left(\varphi Y_1,...,Y_s\right)\right)$$

dır.

İspat: $\omega_{Y_2,...,Y_s}$, $\omega_{Y_2,...,Y_s}\left(Y_1\right) = \omega\left(Y_1,Y_2,...,Y_s\right)$ ile verilen 1-form olsun. Tanım 3.1.1'den,

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi X}\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) &= \phi_{\varphi X}\left(\omega_{Y_2,...,Y_s}\left(Y_1\right)\right)\\ &= \left(\varphi X\right)\left(\iota_{Y_1}\omega_{Y_2,...,Y_s}\right) - X\left(\iota_{\varphi Y_1}\omega_{Y_2,...,Y_s}\right)\\ &= \left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) - X\left(\omega\left(\varphi Y_1,Y_2,...,Y_s\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $\omega \in \overset{*}{\Im}{}_2^0(M_n)$,

$$\omega\left(\varphi X,Y\right) = \omega\left(X,\varphi Y\right) \tag{3.12}$$

şeklinde verilmiş olsun.

Teorem 3.1.4.1, (3.12) eşitliği ve $\phi_{\varphi X}Y = -\left(L_Y\varphi\right)X$ olarak alındığında,

$$\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y,Z\right)=\phi_{\varphi X}\left(\omega\left(Y,Z\right)\right)-\omega\left(\phi_{\varphi X}Y,Z\right)-\omega(Y,\phi_{\varphi X}Z)$$
$$=\left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y,Z\right)\right)-X\left(\omega\left(\varphi Y,Z\right)\right)+\omega\left(\left(L_{Y}\varphi\right)X,Z\right)+\omega\left(Y,\left(L_{Z}\varphi\right)X\right)$$
$$=\left(L_{\varphi X}\omega-L_{X}\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\left(Y,Z\right) \tag{3.13}$$

elde edilir. Buradaki $\omega\circ\varphi$ tensör alanı,

$$\left(\omega\circ\varphi\right)\left(X,Y\right)=\omega\left(\varphi X,Y\right)$$

şekilde tanımlanır.

Teorem 3.1.4.2: $\omega\in\overset{*}{\Im}{}_{2}^{0}(M_{n})$ simetrik (anti-simetrik) pür tensör alanı ise, $\omega\circ\varphi\in\overset{*}{\Im}{}_{2}^{0}(M_{n})$ 'de simetrik (anti-simetrik) pür tensör alanıdır.

(3.13) eşitliğinden, $\phi_{\varphi}\omega\in\Im_{3}^{0}(M_{n})$ tensör alanının doğal çatıya göre bileşenleri,

$$\left(\phi_{\varphi}\omega\right)_{kij}=\varphi_{i}^{m}\partial_{m}g_{ij}-\partial_{k}\left(\omega\circ\varphi\right)_{ij}+\omega_{mj}\partial_{i}\varphi_{k}^{m}+\omega_{im}\partial_{j}\varphi_{k}^{m}$$

şeklindedir. Burada,

$$\left(\omega\circ\varphi\right)_{ij}=\omega_{mj}\varphi_{i}^{m}=\omega_{im}\varphi_{j}^{m} \tag{3.14}$$

dir. $\left(\phi_{\varphi}\omega\right)_{[kij]}$ ifadesi pürlük şartı olmaksızın, (0,3) tipli $\phi_{\varphi}\omega$ tensör alanının bileşenleridir ve eğer ω bir 2-form ise, $\left(\phi_{\varphi}\omega\right)_{[kij]}$ ifadesi Frolicher ve Nijenhuis ile tanınan tensör alanlarıyla çakışır (Frolicher and Nijenhuis 1956a, 1956b).

$\omega\in\overset{*}{\Im}{}_{s}^{0}(M_{n}),\ s\geq 2,$ için Teorem 3.1.4.1 göz önüne alındığında,

$$\left(\phi_{\varphi}\omega\right)\left(X,Y_{1},...,Y_{s}\right)=\phi_{\varphi X}\left(\omega\left(Y_{1},...,Y_{s}\right)\right)-\sum_{\lambda=1}^{s}\left(Y_{1},...,\phi_{\varphi X}Y_{\lambda},...,Y_{s}\right)$$
$$=\left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y_{1},...,Y_{s}\right)\right)-X\left(\omega\left(\varphi Y_{1},...,Y_{s}\right)\right)+\sum_{\lambda=1}^{s}\omega\left(Y_{1},...,\left(L_{Y_{\lambda}}\varphi\right)X,...,Y_{s}\right) \tag{3.15}$$
$$=\left(L_{\varphi X}\omega-L_{X}\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\left(Y_{1},...,Y_{s}\right)$$

elde edilir.

Burada $\omega \circ \varphi$,

$$\begin{aligned}(\omega \circ \varphi)(Y_1,...,Y_s) &= \omega(\varphi Y_1, Y_2,...,Y_s)\\ &\vdots\\ &= \omega(Y_1,Y_2,...,\varphi Y_s)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.4.3: $\omega \in \overset{*}{\mathfrak{I}}{}_s^0(M_n)$, $s \geq 2$ ve $\varphi^2 = -id$ olsun. $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olması, ancak ve ancak $\omega \circ \varphi \in Ker\phi_\varphi$ ile mümkündür.

Sonuç 3.1.4.1: $\omega \in \overset{*}{\mathfrak{I}}{}_s^0(M_n)$, $s \geq 2$ ve $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olsun. $\omega \circ N_\varphi = 0$ için, $\varphi^2 = -id$ ise

$$(\omega \circ N_\varphi)(X, Y_1,...,Y_s) = \omega(N_\varphi(X, Y_1)Y_2,...,Y_s)$$

dir.

3.1.5. (r,s) tipli tensör alanına uygulanan ϕ_φ −operatörü

$t \in \overset{*}{\mathfrak{I}}{}_s^r(M_n)$, r>1, $s \geq 1$ olsun.

$t_{\xi^1,\xi^2,...,\xi^r}(Y_1,Y_2,...,Y_s) = t(Y_1,Y_2,...,Y_s,\xi^1,\xi^2,...,\xi^r)$ ile (0,s) tipli $t_{\xi^1,\xi^2,...,\xi^r} \in \overset{*}{\mathfrak{I}}{}_s^0(M_n)$ pür tensör alanını tanımlayalım. Burada, $t_{\xi^1,\xi^2,...,\xi^r}$ 'nin bileşenleri,

$$\left(t_{\xi^1,\xi^2,...,\xi^r}\right)_{j_1 j_2 ... j_s} = t_{j_1...j_s}^{i_1...i_r}\xi_{i_1}^1\xi_{i_2}^2...\xi_{i_r}^r$$

dir. Teorem 3.1.4.1'den,

$$\phi_{\varphi X} t(Y_1,...,Y_s,\xi^1,\xi^2,...,\xi^r) = \phi_{\varphi X} t_{\xi^1,...,\xi^r}(Y_1,...,Y_s)$$

$$=(\varphi X)t_{\xi^1,...,\xi^r}(Y_1,...,Y_s)-Xt_{\xi^1,...,\xi^r}(\varphi Y_1,...,Y_s)$$

$$=(\varphi X)t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)-Xt\left(\varphi Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)$$

elde edilir. Burada, $\phi_{\varphi X}\xi^{\mu}=L_{\varphi X}\xi^{\mu}-L_X\left(\xi^{\mu}\circ\varphi\right)$ olduğu kullanılarak, ((3.9)'a bak)

$t\in\overset{*}{\Im}{}^r_s(M_n)$, r>1, s ≥ 1 için $(r,s+1)$ tipli $\phi_{\varphi}t$ tensör alanı,

$$\left(\phi_{\varphi}t\right)\left(X,Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)=\left(\phi_{\varphi X}t\right)\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)$$

$$=\phi_{\varphi X}t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)-\sum_{\lambda=1}^{s}t\left(Y_1,...,\phi_{\varphi X}Y_{\lambda},...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)-\sum_{\mu=1}^{r}t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\phi_{\varphi X}\xi^{\mu},...,\xi^r\right)$$

$$=(\varphi X)t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)-Xt\left(\varphi Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{s}t\left(Y_1,...,\left(L_{Y_{\lambda}}\varphi\right)X,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)\tag{3.16}$$

$$-\sum_{\mu=1}^{r}t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,L_{\varphi X}\xi^{\mu}-L_X\left(\xi^{\mu}\circ\varphi\right),...,\xi^r\right)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 3.1.5.1: φ, M_n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı ise; t (r,s) tipli tensör alanıdır. Buradaki $t\in Ker\phi_{\varphi}$'in hemen hemen analitik (holomorfik) olduğu kolaylıkla söylenebilir.

(3.16) eşitliğinde $X=\partial_k$, $Y_{\lambda}=\partial_{j_{\lambda}}$, $\xi^{\mu}=dx^{i_{\mu}}$, $\lambda=1,...,s;$ $\mu=1,...,r$ alınırsa, $\phi_{\varphi}t$'nin $x^1,...,x^n$ lokal koordinat sistemine göre $\left(\phi_{\varphi}t\right)^{i_1...i_r}_{j_1...j_s}$ bileşenleri,

$$\left(\phi_{\varphi}t\right)^{i_1...i_r}_{kj_1...j_s}=\varphi^m_k\partial_m t^{i_1...i_r}_{j_1...j_s}-\partial_k\left(t\circ\varphi\right)^{i_1...i_r}_{j_1...j_s}+\sum_{\lambda=1}^{s}\left(\partial_{j_{\lambda}}\varphi^m_k\right)t^{i_1...i_r}_{j_1...m...j_s}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r}\left(\partial_k\varphi^{i_{\mu}}_m-\partial_m\varphi^{i_{\mu}}_k\right)t^{i_1...m...i_r}_{j_1...j_s},\tag{3.17}$$

şeklindedir. Burada,

$$\left(t\circ\varphi\right)^{i_1...i_r}_{j_1...j_s}=t^{i_1...i_r}_{m...j_s}\varphi^m_{j_1}=...=t^{i_1...i_r}_{j_1...m}\varphi^m_{j_s}=t^{m...i_r}_{j_1...j_s}\varphi^{i_1}_m=...=t^{i_1...m}_{j_1...j_s}\varphi^{i_r}_m$$

dir. (3.17) operatörü ilk olarak Tachibana tarafından kullanılmıştır (Tachibana 1960).

3.2. Vishnevskii Operatörleri

∇, M_n üzerinde bir lineer konneksiyon ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olsun. Tanım 3.1.1'den her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$d')\qquad \psi_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X} Y - \varphi\left(\nabla_X Y\right)$$

yazılır.

Tanım 3.2.1: M_n üzerindeki, $\psi_\varphi : \overset{*}{\Im}(M_n) \to \Im(M_n)$ dönüşümüne Vishnevskii operatörü veya $\psi_\varphi -$operatörü denir. Bu operatör Tanım 3.1.1'in (a), (b), (c), (e) ile (d') şartlarını sağlar. ∇ konneksiyonunun tanımına göre, kolayca $\psi_{\varphi X} Y$ 'in X 'e göre lineer, fakat Y 'e göre lineer olmadığını görülür. Burada $\psi_{\varphi X} Y$ için $\left(\psi_\varphi Y\right) X$ yazılır.

3.2.1. (1,s), $s \geq 0$ tipli tensör alanına uygulanan $\psi_\varphi -$ operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}_s^1(M_n)$ olsun. $t\left(Y_1, Y_2, ..., Y_s\right) \in \Im_0^1(M_n)$ olduğundan Tanım 3.2.1'i kullanarak,

$$\begin{aligned}\left(\psi_{\varphi X} t\right)\left(Y_1, Y_2, ..., Y_s\right) &= \left(\psi_\varphi t\right)\left(X, Y_1, Y_2, ..., Y_s\right)\\ &= \psi_{\varphi X} t\left(Y_1, Y_2, ..., Y_s\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, ..., \left(\psi_\varphi Y_\lambda\right) X, ..., Y_s\right)\\ &= \nabla_{\varphi X} t\left(Y_1, Y_2, ..., Y_s\right) - \varphi \nabla_X \left(t\left(Y_1, Y_2, ..., Y_s\right)\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, ..., \left(\psi_\varphi Y_\lambda\right) X, ..., Y_s\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\psi_{\varphi X} t\right)\left(Y_1, Y_2, ..., Y_s\right) = {}& \left(\nabla_{\varphi X} t\right)\left(Y_1, ..., Y_s\right) + \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, ..., \nabla_{\varphi X} Y_\lambda, ..., Y_s\right) - \varphi\left(\nabla_X t\right)\left(Y_1, ..., Y_s\right)\\ & -\varphi\left(\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, ..., \nabla_X Y_\lambda, ..., Y_s\right)\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, ..., \left(\psi_\varphi Y_\lambda\right) X, ..., Y_s\right) \qquad (3.18)\end{aligned}$$

elde edilir. t pür tensör alanı olduğundan,

$$\varphi(\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\nabla_X Y_\lambda,...,Y_s\right)) = \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\varphi\left(\nabla_X Y_\lambda\right),...,Y_s\right) \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.18) ifadesinde (3.19) eşitliği kullanılırsa,

$$\left(\psi_\varphi t\right)\left(X,Y_1,...,Y_s\right) = \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi\left(\nabla_X t\right)\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) + \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\nabla_{\varphi X} Y_\lambda - \varphi\left(\nabla_X Y_\lambda\right),...,Y_s\right)$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(\psi_\varphi Y_\lambda\right)X,...,Y_s\right)$$

$$= \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi\left(\nabla_X t\right)\right)\left(Y_1,...,Y_s\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\psi_\varphi t\right)\left(X,Y_1,...,Y_s\right) = \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi\left(\nabla_X t\right)\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) \tag{3.20}$$

şeklindedir. (3.20) eşitliğinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.1.1: $t \in \overset{*}{\Im}{}_s^1(M_n)$ olsun. $\nabla t = 0$ ise $t \in Ker\psi_\varphi$ 'dir.

3.2.2. (0,s) tipli tensör alanına uygulanan $\psi_\varphi -$ operatörü

$\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olsun. Tanım 3.2.1'i kullanarak, keyfi $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$\begin{aligned}\left(\psi_\varphi \omega\right)\left(X,Y\right) &= (\psi_{\varphi X}\omega)Y \\ &= \psi_{\varphi X}(\iota_Y\omega) - \omega(\psi_{\varphi X}Y) \\ &= (\varphi X)(\iota_Y\omega) - X(\iota_{\varphi Y}\omega) - \omega\left(\nabla_{\varphi X}Y - \varphi\left(\nabla_X Y\right)\right) \\ &= \left(\nabla_{\varphi X}\omega - \nabla_X\left(\omega\circ\varphi\right)\right)Y \end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. Burada $\left(\omega\circ\varphi\right)Y = \omega\left(\varphi Y\right)$'dır. (3.21)'deki eşitlikten, $\psi_{\varphi X}\omega = \nabla_{\varphi X}\omega - \nabla_X\left(\omega\circ\varphi\right)$'in $1-$form olduğu görülür.

$s>1$ ve $\omega \in \Im_s^0(M_n)$ olsun. Teorem 3.1.4.1'i kulanarak, benzer bir yolla,

$$\left(\psi_\varphi \omega\right)\left(X,Y_1,...,Y_s\right) = \left(\psi_{\varphi X}\omega\right)\left(Y_1,...,Y_s\right)$$

$$= \psi_{\varphi X}\,\omega\left(Y_1,...,Y_s\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} \omega\left(Y_1,...,\psi_{\varphi X} Y_\lambda,...,Y_s\right)$$

$$= \left(\varphi X\right)\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) - X\,\omega\left(\varphi Y_1,...,Y_s\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} (\omega\left(Y_1,...,\nabla_{\varphi X} Y_\lambda,...,Y_s\right)$$

$$-\omega\left(Y_1,...,\varphi\left(\nabla_X Y_\lambda\right),...,Y_s\right))$$

$$= \left(\nabla_{\varphi X}\omega\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) - X\,\omega\left(\varphi Y_1, Y_2,...,Y_s\right) + \sum_{\lambda=1}^{s} \omega\left(Y_1,...,\varphi\nabla_X Y_\lambda,...,Y_s\right)$$

$$= \left(\nabla_{\varphi X}\omega\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) - X\,\omega\left(\varphi Y_1, Y_2,..,Y_s\right) + \ \omega\left(\varphi(\nabla_X Y_1), Y_2,...,Y_s\right)$$

$$+\ \omega\left(\varphi Y_1, \nabla_X Y_2,...,Y_s\right) +\ \omega\left(\varphi Y_1, Y_2,...,\nabla_X Y_s\right)$$

$$= (\nabla_{\varphi X}\omega - \nabla_X\,(\omega\circ\varphi)\left(Y_1,...,Y_s\right)$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(\psi_\varphi \omega\right)\left(X, Y_1,...,Y_s\right) = (\nabla_{\varphi X}\omega - \nabla_X\,(\omega\circ\varphi)\left(Y_1,...,Y_s\right) \tag{3.22}$$

eşitliği yazılır. (3.22) eşitliğinden, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.2.1: $\omega \in \overset{*}{\Im}{}^0_s(M_n)$ olsun. $\nabla\omega = 0$ ise $\omega \notin K\,\mathrm{er}\,\psi_\varphi$'dir.

3.2.3. (r,s), $r > 1$, tipli tensör alanına uygulanan $\psi_\varphi -$operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}^r_s(M_n)$ olsun.

$$\left(\psi_\varphi t\right)\left(X, Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right) = \psi_{\varphi X} t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\psi_{\varphi X} Y_\lambda,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{r} t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\psi_{\varphi X}\xi^\mu,...,\xi^r\right)$$

$$= \left(\varphi X\right) t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right) - Xt\left(\varphi Y_1, Y_2,...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\nabla_{\varphi X} Y_\lambda - \varphi\left(\nabla_X Y_\lambda\right),...,Y_s,\xi^1,...,\xi^r\right)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{r} t\left(Y_1,...,Y_s,\xi^1,...,\nabla_{\varphi X}\xi^\mu - \nabla_X\left(\xi^\mu\circ\varphi\right),...,\xi^r\right) \tag{3.23}$$

şeklindedir. (3.23)'de,

$$t\left(Y_1,\ldots,Y_s,\xi^1,\ldots,\nabla_{\varphi X}\xi^\mu-\nabla_X\left(\xi^\mu\circ\varphi\right),\ldots,\xi^r\right)=t\left(Y_1,\ldots,Y_s,\xi^1,\ldots,\nabla_{\varphi X}\xi^\mu-\left(\nabla_X\xi^\mu\right)\circ\varphi-\xi^\mu\circ\nabla_X\varphi,\ldots,\xi^r\right)$$

$$=t\left(Y_1,\ldots,Y_s,\xi^1,\ldots,\nabla_{\varphi X}\xi^\mu-\varphi\nabla_X\xi^\mu,\ldots,\xi^r\right)$$

$$-t\left(Y_1,\ldots,Y_s,\xi^1,\ldots,\xi^\mu\circ\nabla_X\varphi,\ldots,\xi^r\right)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\left(\psi_\varphi t\right)\left(X,Y_1,\ldots,Y_s,\xi^1,\ldots,\xi^r\right)=\left(\nabla_{\varphi X}t-\nabla_X\left(t\circ\varphi\right)\right)\left(Y_1,\ldots,Y_s,\xi^1,\ldots,\xi^r\right)$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r}t\left(Y_1,\ldots,Y_s,\xi^1,\ldots,\xi^\mu\circ\nabla_X\varphi,\ldots,\xi^r\right) \tag{3.24}$$

elde edilir.

Şimdi, $\nabla\varphi=0$ olsun. (3.24) eşitliğinden,

$$\psi_{\varphi X}t=\nabla_{\varphi X}t-\left(\nabla_X t\right)\circ\varphi \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.25)'den $\psi_\varphi t$, $\{\partial_i\}$ doğal çatısına göre,

$$\left(\psi_\varphi t\right)^{i_1\ldots i_r}_{kj_1\ldots j_s}=\varphi^m_k\nabla_m t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}-\varphi^{j_1}_m\nabla_k t^{mi_2\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür. (3.25) operatörü, integrallenebilir $\varphi-$yapıları için, ilk kez V.V.Vishnevskii tarafından çalışıldı (Vishnevskii 1972).

Tanım 3.2.3.1: $\varphi\in\Im^1_1(M_n)$ bir afinor alanı ve $\nabla\varphi=0$ ise, ∇ konneksiyonuna $\varphi-$konneksiyon denir.

Teorem 3.2.3.1: $\varphi-$konneksiyonunun ∇ burulma tensörü pür ise, her $t\in\overset{*}{\Im}{}^r_s(M_n)$ için $\phi_{\varphi X}t=\psi_{\varphi X}t$'dir.

İspat: $\varphi T(X,Y)=T(\varphi X,Y)=T(X,\varphi Y)$ ve $\nabla\varphi=0$ olsun. Burada $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$'dir. ($d'$) ve Tanım 3.1.1'den,

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi X}Y&=-(L_Y\varphi)X\\&=[\varphi X,Y]-\varphi[X,Y]\\&=\nabla_{\varphi X}Y-\nabla_Y\varphi X-T(\varphi X,Y)-\varphi(\nabla_X Y-\nabla_Y X-T(X,Y))\\&=\nabla_{\varphi X}Y-\varphi(\nabla_X Y)-(\nabla\varphi)(Y,X)+\varphi T(X,Y)-T(\varphi X,Y)\\&=\nabla_{\varphi X}Y-\varphi(\nabla_X Y)\\&=\psi_{\varphi X}Y\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3.2: Burulmasız tensör alanı pür olduğundan, her burulmasız $\varphi-$ konneksiyonu için, $\phi_{\varphi X}Y=\psi_{\varphi X}Y$'dir.

3.3. Pür Konneksiyona Uygulanan $\psi_\varphi-$ Operatörü

∇, burulmasız $\varphi-$konneksiyon ($\varphi\in\Im_1^1(M_n)$ ve $\nabla\varphi=0$) olsun. Buradan φ'nin integrallenebilir olduğu söylenir (Shirokov 1966).

∇ bir burulmasız $\varphi-$konneksiyon ise $\nabla\varphi=0$ olduğundan, adapte olmuş lokal koordinatlara göre,

$$\Gamma_{mj}^k\varphi_i^m=\Gamma_{im}^k\varphi_j^m=\Gamma_{ij}^m\varphi_m^k \tag{3.26}$$

şeklindedir. Burada, Γ_{ij}^k, ∇'nın bileşenleridir. Bu konneksiyona, φ'e göre bir pür konneksiyon denir (Kruchkovich 1972; Vishnevskii 1985).

∇ pür konneksiyonunun eğrilik tensörü $R \in \Im_3^1(M_n)$ ile gösterilir ve her $X,Y,Z \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tarif edilir.

φ'e Ricci özdeşliği uygulandığında,

$$\nabla_X\left(\left(\nabla_Y\varphi\right)Z\right) - \nabla_Y\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Z\right) = R(X,Y)\varphi Z - \varphi\left(R(X,Y)Z\right) + \left(\nabla_{[X,Y]}\varphi\right)Z$$

$$+\left(\nabla_Y\varphi\right)\left(\nabla_X Z\right) - \left(\nabla_X\varphi\right)\left(\nabla_Y Z\right)$$

elde edilir. $\nabla\varphi = 0$ olduğundan,

$$\varphi R\left(X,Y\right)Z = R\left(X,Y\right)\varphi Z$$

yazılır. Buradan, aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 3.3.1: $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olsun. ∇, φ'e göre pür konneksiyon ise, her $X,Y,Z \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$\varphi R\left(X,Y\right)Z = R\left(X,Y\right)\varphi Z \qquad (3.27)$$

dir.

Teorem 3.3.2: ∇, φ'e göre bir pür konneksiyon ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olsun. ∇'nın R eğrilik tensör alanının φ'e göre bir pür tensör alanı olması ancak ve ancak her $X,Y,Z \in K\mathrm{er}\,\psi_\varphi$ için,

$$\psi_{\varphi X}\left(\nabla_Y Z\right) = \nabla_{\varphi X}\nabla_Y Z - \varphi\left(\nabla_X \nabla_Y Z\right) = 0$$

olması ile mümkündür.

İspat: $X,Y,Z \in K\mathrm{er}\,\psi_\varphi$ olsun. $\psi_{\varphi Y} X = \phi_{\varphi Y} X = -\left(L_X\varphi\right)Y = 0$, $\left(\nabla\varphi = 0,\ T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \left[X,Y\right] = 0\right)$ olduğundan,

$$R(X,\varphi Y)Z = \nabla_X \nabla_{\varphi Y} Z - \nabla_{\varphi Y}\nabla_X Z - \nabla_{[X,\varphi Y]} Z$$

$$= \nabla_X \varphi(\nabla_Y Z) - \nabla_{\varphi Y} \nabla_X Z - \nabla_{(L_X \varphi)Y + \varphi L_X Y} Z$$

$$= \varphi\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right) + \varphi(\nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_{\varphi Y} \nabla_X Z$$

$$= \varphi R(X,Y)Z - \psi_{\varphi Y}(\nabla_X Z)$$

elde edilir. Buradan,

$$R(X, \varphi Y)Z = \varphi R(X,Y)Z - \psi_{\varphi Y}(\nabla_X Z) \qquad (3.28)$$

şeklinde yazılır.

(3.28)'den, $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ olduğundan,

$$R(\varphi X, Y)Z = -R(Y, \varphi X)Z = -\varphi R(Y,X)Z + \psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) \qquad (3.29)$$

elde edilir. (3.27) - (3.29)'dan, keyfi $X, Y, Z \in K er \psi_\varphi$ için, bir ∇ pür konneksiyonun R eğrilik tensörünün pür olması, ancak ve ancak $\psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) = 0$ olması ile mümkündür. Böylece Teorem 3.3.2 ispatlanmış olur.

(3.29)'dan,

$$\psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) \in \Im_3^1(M_n)$$

dır. Burada, $\psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z)$'den $(\psi_\varphi \nabla)(X,Y,Z)$ ifadesi,

$$(\psi_\varphi \nabla)(X,Y,Z) = \nabla_{\varphi X} \nabla_Y Z - \varphi(\nabla_X \nabla_Y Z)$$

olarak yazılır. Burada, $\psi_\varphi \nabla$, bir ∇ pür konneksiyona uygulanan $\psi_\varphi -$operatörü veya $\phi_\varphi -$operatörüdür.

∇ pür konneksiyonu Kahler-Norden manifoldlarının konneksiyonu olduğundan, $\psi_{\varphi}\nabla = 0$ olduğu aşikardır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Karmaşık Tipli Tensör Alanına Uygulanan Tachibana Operatörü

4.1.1. Altmanifoldlarda karmaşık tipli pür tensör alanları

$\tilde{M}_m$, $n-$boyutlu M_n manifoldunun, $m-$boyutlu altmanifoldu olsun; $i:\tilde{M}_m \to M_n$ immersiyonu ile tarif edilen $\tilde{M}_m$ altmanifoldu lokal olarak,

$$x^i = x^i\left(u^A\right),\ \ i = 1,...,n,\ \ A = 1,...,m,\quad rank\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^A}\right) = m$$

şeklinde ifade edilir. $B_A = B_A^i \partial_i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A}\partial_i$, $A = 1,...,m,$ olsun. İndislerin her biri için bu ifadeler, M_n'deki $i\left(\tilde{M}_m\right)$'e giden m tanjant vektörleridir. Bir $\tilde{X} \in \Im_0^1(\tilde{M}_m)$'in lokal olarak ifadesi $\tilde{X}=\tilde{X}^{A}\partial_{A}$ şeklindedir. M_n 'deki $i\left(\tilde{M}_m\right)$ 'e giden tanjant vektör alanı $B\tilde{X}\in\Im_0^1(M_n)$ ile gösterilir. $B\tilde{X}\in\Im_0^1(M_n)$ lokal olarak,

$$B\tilde{X}=B_A^i\tilde{X}^A\partial_i$$

şeklinde tarif edilir. Buradan, $\tilde{X}\to B\tilde{X}$ ifadesi

$$B:\Im_0^1(\tilde{M}_m)\to\Im_0^1\left(i\left(\tilde{M}_m\right)\right)$$

şeklinde bir dönüşüm olup $i:\tilde{M}_m\to M_n$ immersiyonunun diferensiyelidir. $B=i_*$, $\Im_0^1(\tilde{M}_m)$ 'den $\Im_0^1\left(i\left(\tilde{M}_m\right)\right)$ 'e tarifli bir izomorfizmdir.

Karmaşık tipli tensör alanıyla veya $(r,s;p,q)$ tipli tensör alanıyla,

$t:\Im_0^1(M_n)\times\ldots\times\Im_0^1(M_n)\times\Im_0^1(\tilde{M}_m)\times\ldots\times\Im_0^1(\tilde{M}_m)\times\Im_1^0(M_n)\times\ldots\times\Im_1^0(M_n)\times\Im_1^0(\tilde{M}_m)\times\ldots\times\Im_1^0(\tilde{M}_m)\to\Im_0^0(\tilde{M}_m)$
dönüşümü tarif edilir.

$\tilde{M}_m$ üzerinde ($\Im_0^1(M_n)$: s 'kez, $\Im_1^0(M_n)$: r 'kez, $\Im_0^1(\tilde{M}_m)$: q 'kez, $\Im_1^0(\tilde{M}_m)$: p 'kez) tanımlanmıştır. Bu dönüşüm $X_1,\ldots,X_s\in\Im_0^1(M_n)$ ile $\overset{1}{\xi},\ldots,\overset{r}{\xi}\in\Im_1^0(M_n)$ sabit tutulmak üzere $\tilde{M}_m$ üzerinde (p,q) tipli tensör alanı ve $\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_q\in\Im_0^1(\tilde{M}_m)$ ile $\overset{1}{\tilde{\xi}},\ldots,\overset{p}{\tilde{\xi}}\in\Im_1^0(\tilde{M}_m)$ sabit tutulmak üzere M_n üzerinde (r,s) tipli tensör alanı belirtir.

Tanım 4.1.1.1: $\varphi\in\Im_1^1(M_n)$ ve $\tilde{\varphi}\in\Im_1^1(\tilde{M}_m)$ olsun,

$$t\left(X_1,\ldots,\varphi X_\lambda,\ldots,X_s,\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{X}_q,\overset{1}{\xi},\ldots,\overset{r}{\xi},\overset{1}{\tilde{\xi}},\ldots,\overset{p}{\tilde{\xi}}\right)$$

$$=t\left(X_1,\ldots,X_s,\tilde{X}_1,\ldots,\tilde{\varphi}\tilde{X}_\mu,\ldots,\tilde{X}_q,\overset{1}{\xi},\ldots,\overset{r}{\xi},\overset{1}{\tilde{\xi}},\ldots,\overset{p}{\tilde{\xi}}\right),\ \lambda=1,\ldots,s\quad \mu=1,\ldots,q$$

olmak üzere t, $\left(X_\lambda,\tilde{X}_\mu\right)$ göre pürdür. Eğer t, tüm vektör ve kovektör değişkenlerine göre pür ise, t 'ye $(\varphi,\tilde{\varphi})$ 'e göre $(r,s;p,q)$ tipli pür tensör alanı denir.

Genelde $\tilde{X} \in \Im_0^1(\tilde{M}_m)$ (veya $\tilde{\xi} \in \Im_1^0(\tilde{M}_m)$) ile $X \in \Im_0^1(M_n)$ (veya $\xi \in \Im_1^0(M_n)$) vektör alanları, $\tilde{M}_m$'de pür olarak kabul edilir. Özelliklede φ ve $\tilde{\varphi}$ afinor alanları pür tensör alanları olarak kabul edilir.

Sırasıyla K ile L, $(r_1, s_1; p_1, q_1)$ ve $(r_2, s_2; p_2, q_2)$ tipli pür tensör alanları olsun. Pür çarpımın tanımından, aşağıdaki gibi karmaşık tipli pür tensörler elde edilir:

$$K \overset{C}{\otimes} L = \begin{cases} K_{(\tilde{X},\tilde{\xi})} \overset{C}{\otimes} L_{(\tilde{Y},\tilde{\eta})} \text{ pür çarpım, } M_n \text{ üzerinde } \tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_q, \overset{1}{\tilde{\xi}},\dots,\overset{p_1}{\tilde{\xi}}, \tilde{Y}_1,\dots,\tilde{Y}_{q_2}, \overset{1}{\tilde{\eta}},\dots,\overset{p_2}{\tilde{\eta}} \text{ sabit tutulmak üzere,} \\ K_{(X,\xi)} \overset{C}{\otimes} L_{(Y,\eta)} \text{ pür çarpım, } \tilde{M}_m \text{ üzerinde } X_1,\dots,X_{s_1}, \overset{1}{\xi},\dots,\overset{r_1}{\xi}, Y_1,\dots,Y_{s_2}, \overset{1}{\eta},\dots,\overset{r_2}{\eta} \text{ sabit tutulmak üzere,} \end{cases}$$

Bölüm 3'de, $\overset{C}{\otimes}$ pür çarpıma göre $\mathbb{R}$ üzerindeki $\overset{*}{\Im}(\tilde{M}_m) = \sum_{r,s,p,q=0}^{\infty} \overset{*}{\Im}{}_{s,q}^{r,p}(\tilde{M}_m)$ cebiri tanımlandı. Burada, $\overset{*}{\Im}{}_{s,q}^{r,p}(\tilde{M}_m)$, $\tilde{M}_m$ üzerindeki $(\varphi, \tilde{\varphi})$'e göre $(r, s; p, q)$ tipli tüm pür tensör alanlarını göstermektedir.

4.1.2. $\tilde{\phi}_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ − operatörleri

$\tilde{M}_m$, M_n'in bir altmanifoldu ve $\varphi \in \Im_1^1(M)$ olsun. Her $x \in \tilde{M}_m$ için $\varphi T_X\left(\tilde{M}_m\right) \subset T_X\left(M_n\right)$ ise, $\tilde{M}_m$, M_n üzerinde invaryanttır denir.

$\tilde{M}_m$ invaryant altmanifold olsun. M_n'deki $B_A = B\tilde{\partial}_A = B_A^i \partial_i$, $A = 1,\dots,m$ şeklinde tanımlanan m tanjant vektörleri, $\tilde{M}_m$'in tanjant uzayını gerer. Bunların görüntüleri kendilerinin lineer kombinasyonlarıdır. Buradan, $\tilde{\varphi} \in \Im_1^1(\tilde{M}_m)$ afinor alanı,

$$\varphi_m^i B_A^m = \tilde{\varphi}_A^C B_C^i \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Tersine, eğer (4.1)'i sağlayan $\tilde{\varphi} \in \Im_1^1(\tilde{M}_m)$ afinor alanı var ise, $\tilde{M}_m$ invaryanttır denir.

(4.1)'deki eşitlikten B_A^i 'nın, $(\varphi,\tilde{\varphi})$'e göre $\tilde{M}_m$ üzerinde $(1,0,0,1)$ tipli pür tensör alanı olduğu söylenir. Ayrıca (4.1) eşitliği,

$$B\left(\tilde{\varphi}\tilde{X},\xi\right)=B\left(\tilde{X},\ {}'\varphi\xi\right)$$

veya

$$\xi B\left(\tilde{\varphi}\tilde{X}\right)=B\left(\tilde{X},\ {}'\varphi\xi\right)=B\left(\tilde{X},\xi\circ\varphi\right)=\left(\xi\circ\varphi\right)\left(B\tilde{X}\right)=\xi\left(\varphi\left(B\tilde{X}\right)\right)$$

şeklinde ifade edilir. Örneğin, her $\tilde{X}\in\Im_0^1(\tilde{M}_m)$ için,

$$\varphi\left(B\tilde{X}\right)=B\left(\tilde{\varphi}\tilde{X}\right) \tag{4.2}$$

dir.

φ ve $\tilde{\varphi}$ ile birleştirilmiş ve karmaşık tipli pür tensörlere uygulanan $\tilde{M}_m$ üzerindeki Tachibana operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.2.1: $\tilde{M}_m$, $\tilde{\varphi}\in\Im_1^1(\tilde{M}_m)$ indirgenmiş afinor alanıyla birlikte invariant altmanifold ve $\varphi\in\Im_1^1(M_n)$ olsun. $\tilde{M}_m$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}:\overset{*}{\Im}(\tilde{M}_m)\to\Im(\tilde{M}_m)$ dönüşümüne Tachibana operatörü veya $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}-$operatörü denir:

a) Sabit katsayılara göre $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ lineerdir,

b) Keyfi r,s,p ve q için, $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}:\overset{*}{\Im}{}_{s,q}^{r,p}(\tilde{M}_m)\to\overset{*}{\Im}{}_{s,q+1}^{r,p}(\tilde{M}_m)$ 'dir,

c) Her $K,L\in\overset{*}{\Im}(\tilde{M}_m)$ için, $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\left(K\overset{C}{\otimes}L\right)=\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}K\right)\overset{C}{\otimes}L+K\overset{C}{\otimes}\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}L\right)$'dir,

d_1**)** Her $\tilde{Y}\in\Im_0^1(\tilde{M}_m)$ için, $\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\tilde{Y}\right)\tilde{X}=\left(\phi_{\tilde{\varphi}}\tilde{Y}\right)\tilde{X}=-\left(L_{\tilde{Y}}\tilde{\varphi}\right)\tilde{X}$ 'dir,

d_2**)** Her $Y\in\Im_0^1(M_n)$ için, $\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}Y\right)\tilde{X}=\left(\phi_{\varphi}Y\right)\left(B\tilde{X}\right)=-\left(L_Y\varphi\right)\left(B\tilde{X}\right)$'dir,

e_1**)** Her $\tilde{\omega}\in\Im_1^0(\tilde{M}_m)$ için,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\left(i_{\tilde{Y}}\tilde{\omega}\right)\right)\tilde{X}=\left(\phi_{\tilde{\varphi}}\left(i_{\tilde{Y}}\tilde{\omega}\right)\right)\left(\tilde{X}\right)=d\left(\left(i_{\tilde{Y}}\tilde{\omega}\right)\right)\left(\tilde{\varphi}\tilde{X}\right)-d\left(i_{\tilde{Y}}\left(\tilde{\omega}\circ\tilde{\varphi}\right)\right)\left(\tilde{X}\right),$$

e_2**)** Her $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ için,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\left(i_Y\omega\right)\right)\tilde{X} = \left(\phi_{\varphi}\left(i_Y\omega\right)\right)\left(B\tilde{X}\right) = d\left(\left(i_Y\omega\right)\right)\left(\varphi\left(B\tilde{X}\right)\right) - d\left(i_Y\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\left(B\tilde{X}\right) \text{'dir.}$$

Burada $\Im(\tilde{M}_m) = \sum_{r,s,p,q=0}^{\infty} \Im_{s,q}^{r,p}(\tilde{M}_m)$, karmaşık tipli tensörlere ait cebirdir.

4.1.3. $(1,s,0,q)$ ve $(0,s,1,q)$ tipli tensör alanlarına uygulanan $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}-$operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}_{s,q}^{1,0}(\tilde{M}_m)$ olsun. Keyfi $Y_1,...,Y_s \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q \in \Im_0^1(\tilde{M}_m)$ için $t\left(Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right) \in \Im_0^1(M_n)$'dir.

Tanım 4.1.2.1 kullanılarak,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}t\left(Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right)\right)\tilde{X} = \left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}t\right)\left(\tilde{X},Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right) + \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}Y_\lambda\right)\tilde{X},...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right)$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q} t\left(Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\tilde{Y}_\mu\right)\tilde{X}...,\tilde{Y}_q\right)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}t\right)\left(\tilde{X},Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right) = \left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}t\left(Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right)\right)\tilde{X} - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}Y_\lambda\right)\tilde{X},...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{q} t\left(Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\tilde{Y}_\mu\right)\tilde{X},...,\tilde{Y}_q\right)$$

$$= -\left(L_{t\left(Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right)}\varphi\right)\left(B\tilde{X}\right) + \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(L_{Y_\lambda}\varphi\right)\left(B\tilde{X}\right),...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right)$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q} t\left(Y_1,...,Y_s,\tilde{Y}_1,...,\left(L_{\tilde{Y}_\mu}\tilde{\varphi}\right)\tilde{X},...,\tilde{Y}_q\right) \tag{4.3}$$

yazılır. (4.3)'de $\tilde{X} = \partial_C, Y_\lambda = \partial_{j_\mu}, \tilde{Y}_\mu = \partial_{A_\mu}$ olarak alınırsa,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}t\right)^{i}_{Cj_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}=-B^h_C(t^m_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}\partial_m\varphi^i_h-\varphi^m_h\partial_m t^i_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}+\varphi^i_m\partial_h t^m_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q})$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{s}B^h_C t^i_{j_1\ldots m\ldots j_sA_1\ldots A_q}\partial_{j_\lambda}\varphi^m_h+\sum_{\mu=1}^{q}t^i_{j_1\ldots j_sA_1\ldots m\ldots A_q}\partial_{A_\mu}\tilde{\varphi}^m_C$$

$$=\tilde{\varphi}^m_C\partial_m t^i_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}-\partial_C\overset{*}{t}{}^{i}_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}+\sum_{\mu=1}^{q}t^i_{j_1\ldots j_sA_1\ldots m\ldots A_q}\partial_{A_\mu}\tilde{\varphi}^m_C$$

$$+B^h_C t^m_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}\left(\partial_h\varphi^i_m-\partial_m\varphi^i_h\right)+\sum_{\lambda=1}^{s}B^h_C t^i_{j_1\ldots m\ldots j_sA_1\ldots A_q}\partial_{j_\lambda}\varphi^m_h \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $\overset{*}{t}{}^{i}_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}=\varphi^i_m t^m_{j_1\ldots j_sA_1\ldots A_q}$ ’dir.

(4.4) operatörü ilk Tachibana ve Koto tarafından çalışılmıştır (Tachibana and Koto 1962).

$t\in\overset{*}{\Im}{}^{0,1}_{s,q}(\tilde{M}_m)$ olsun. Benzer yollarla,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}t\right)\left(\tilde{X},Y_1,\ldots,Y_s,\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_q\right)=-\left(L_{t\left(Y_1,\ldots,Y_s,\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_q\right)}\tilde{\varphi}\right)\tilde{X}+\sum_{\lambda=1}^{s}t\left(Y_1,\ldots,\left(L_{Y_\lambda}\varphi\right)\left(B\tilde{X}\right),\ldots,Y_s,\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_q\right) \tag{4.5}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q}t\left(Y_1,\ldots,Y_s,\tilde{Y}_1,\ldots,\left(\left(L_{\tilde{Y}_\mu}\tilde{\varphi}\right)\right)\tilde{X},\ldots,\tilde{Y}_q\right)$$

elde edilir. Özellikle, (4.3) ve (4.5)’de sırasıyla $t=\varphi$ ve $t=\tilde{\varphi}$ alındığında,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\varphi\right)\left(\tilde{X},Y\right)=N_\varphi\left(B\tilde{X},Y\right),\quad\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)=N_{\tilde{\varphi}}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)$$

elde edilir. Burada N_φ ve $N_{\tilde{\varphi}}$ sırasıyla φ ve $\tilde{\varphi}$ ’nin Nijenhuis tensörleridir.

$B\in\overset{*}{\Im}{}^{1,0}_{0,1}(\tilde{M}_m)$ olsun, (4.3) operatörü B ’de kullanılarak,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}B\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)=-\left(L_{B\tilde{Y}}\varphi\right)\left(B\tilde{X}\right)+B\left(\left(L_{\tilde{Y}}\tilde{\varphi}\right)\tilde{X}\right)$$

$$=-L_{B\tilde{Y}}\left(\varphi\left(B\tilde{X}\right)\right)+\varphi\left(L_{B\tilde{Y}}B\tilde{X}\right)+B\left(\left(L_{\tilde{Y}}\tilde{\varphi}\right)\tilde{X}\right)$$

elde edilir. $\left[B\tilde{X},B\tilde{Y}\right]=B\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]$ eşitliği ile (4.2)’den,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}B\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)=-L_{B\tilde{Y}}\left(B\left(\tilde{\varphi}\tilde{X}\right)\right)+\varphi\left(L_{B\tilde{Y}}B\tilde{X}\right)+B\left(L_{\tilde{Y}}\varphi\tilde{X}-\tilde{\varphi}\left(L_{\tilde{Y}}\tilde{X}\right)\right)$$

$$=-B\left[\tilde{X},\tilde{\varphi}\tilde{Y}\right]+\varphi B\left[\tilde{Y},\tilde{X}\right]+B\left(L_{\tilde{Y}}\varphi\tilde{X}\right)-B\tilde{\varphi}\left[\tilde{Y},\tilde{X}\right]$$
$$=0$$

yazılır (Yano and Kon 1984).

Teorem 4.1.3.1: $\tilde{M}_m$, indirgenmiş $\tilde{\varphi}\in\Im_1^1(\tilde{M}_m)$ ile birlikte M_n'nin invariant altmanifoldu ve $\varphi\in\Im_1^1(M_n)$ olsun. $B\in\overset{*}{\Im}{}_{0,1}^{1,0}(\tilde{M}_m)$ için,

$$\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}B=0$$

dir. Burada B, $i:\tilde{M}_m\to M_n$ immersionunun diferensiyelidir.

$\varphi,\tilde{\varphi}$ ve B pür tensör alanları ayrıca, $\varphi\circ B=\varphi\overset{C}{\otimes}B$ ve $B\circ\tilde{\varphi}=B\overset{C}{\otimes}\tilde{\varphi}$ tensör alanları, $(1,0,0,1)$ tipli pür tensör alanları olduğunda, keyfi $\tilde{Y}\in\Im_0^1(\tilde{M}_m)$ için $(\varphi\circ B)\tilde{Y}=\varphi\left(B\tilde{Y}\right)$ ve $(B\circ\tilde{\varphi})\tilde{Y}=B\left(\tilde{\varphi}\tilde{Y}\right)$'dir. (4.2) eşitliğine $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ uygulandığında, Teorem 3.1.1.1, Teorem 4.1.3.1 ve Tanım 4.1.2.1'den,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}(\varphi\circ B)\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)=\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}(B\circ\tilde{\varphi})\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right),$$
$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\varphi\right)\left(\tilde{X},B\tilde{Y}\right)=\left(B\circ\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}\right)\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)=\left(B\circ N_{\tilde{\varphi}}\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)=B\left(N_{\tilde{\varphi}}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right),$$
$$N_{\varphi}\left(B\tilde{X},B\tilde{Y}\right)=B\left(N_{\tilde{\varphi}}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right)\tag{4.6}$$

elde edilir. Burada N_{φ} ve $N_{\tilde{\varphi}}$ sırasıyla φ ve $\tilde{\varphi}$'nin Nijenhuis tensörleridir.

B bire-bir ve (4.6)'dan $N_{\varphi}=0$ ise $N_{\tilde{\varphi}}=0$'dır.

Teorem 4.1.3.2: $\tilde{\varphi}$, $\tilde{M}_m$ invariant altmanifoldu üzerinde indirgenmiş afinor alanı ve $\varphi\in\Im_1^1(M_n)$ olmak üzere, φ'nin N_{φ} Nijenhuis tensörü sıfıra eşit ise, $\tilde{\varphi}$'nin Nijenhuis tensörüde sıfıra eşit olur ($N_{\varphi}=0$ ise $N_{\tilde{\varphi}}=0$).

4.1.4. $(0,s,0,0)$ ve $(0,0,0,q)$ tipli tensör alanlarına uygulanan $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ − operatörü

$\omega \in \overset{*}{\Im}{}^{0,0}_{s,0}(\tilde{M}_m)$ olsun. Tanım 4.1.2.1 kullanılarak, keyfi $Y_1,...,Y_s \in \Im^1_0(M_n)$ için,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right)\right)\tilde{X} = \left(\varphi\left(B\tilde{X}\right)\right)\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) - \left(B\tilde{X}\right)\omega\left(\varphi Y_1, Y_2,...,Y_s\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\omega\right)\left(\tilde{X},Y_1,...,Y_s\right) &= \left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right)\right)\tilde{X} - \sum_{\lambda=1}^{s}\omega\left(Y_1,...,\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}Y_\lambda\right)\tilde{X},...,Y_s\right) \\
&= \left(\varphi\left(B\tilde{X}\right)\right)\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) - \left(B\tilde{X}\right)\omega\left(\varphi Y_1, Y_2,...,Y_s\right) \\
&\quad + \sum_{\lambda=1}^{s}\omega\left(Y_1,..., L_{Y_\lambda}\varphi\left(B\tilde{X}\right) - \varphi\left(L_{Y_\lambda}B\tilde{X}\right),...,Y_s\right) \\
&= \left(\varphi\left(B\tilde{X}\right)\right)\left(\omega\left(Y_1,...,Y_s\right)\right) - \sum_{\lambda=1}^{s}\omega\left(Y_1,...,L_{\varphi\left(B\tilde{X}\right)}Y_\lambda,...,Y_s\right) \\
&\quad - \left(B\tilde{X}\right)\left(\omega\circ\varphi\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) + \sum_{\lambda=1}^{s}\left(\omega\circ\varphi\right)\left(Y_1,...,L_{B\tilde{X}}Y_\lambda,...,Y_s\right) \\
&= \left(L_{\varphi\left(B\tilde{X}\right)}\omega - L_{\tilde{X}}\left(\omega\circ\varphi\right)\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) \\
&= \left(\phi_\varphi\omega\right)\left(B\tilde{X},Y_1,...,Y_s\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

yazılır. Benzer şekilde $\tilde{\omega} \in \overset{*}{\Im}{}^{0,0}_{0,q}(\tilde{M}_m)$ olduğundan, Tanım 4.1.2.1 kullanılarak,

$$\left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\tilde{\omega}\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right) = \left(\phi_{\tilde{\varphi}}\tilde{\omega}\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}_1,...,\tilde{Y}_q\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. $g \in \overset{*}{\Im}{}^{0,0}_{2,0}(\tilde{M}_m)$ olsun. $\tilde{M}_m$ üzerinde keyfi $\tilde{Y}_1,\tilde{Y}_2 \in \Im^1_0(\tilde{M}_m)$ için, $\left(0,0,0,2\right)$ tipli $\tilde{g}$ pür tensör alanı,

$$\tilde{g}\left(\tilde{Y}_1,\tilde{Y}_2\right) = \left(i^* g\right)\left(\tilde{Y}_1,\tilde{Y}_2\right) = g\left(B\tilde{Y}_1, B\tilde{Y}_2\right) \tag{4.9}$$

ile tanımlanır. Burada i^*, $i_* = B$'nin transpozudur. $\overset{C}{\otimes}$, pür çarpımın tanımından $\tilde{g} = \left(g \overset{C}{\otimes} B \right) \overset{C}{\otimes} B$ tensör alanının pür tensör alanı ve $\tilde{g} \in \overset{*}{\Im}{}^{0,0}_{0,2}(\tilde{M}_m)$ olduğu görülür. $\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}$'yi (4.9) eşitliğine uyguladıktan sonra (4.7) ve (4.8) kullanılarak,

$$\left(\phi_{\tilde{\varphi}}\tilde{g}\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}_1,\tilde{Y}_2\right) = \left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}\tilde{g}\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}_1,\tilde{Y}_2\right) = \left(\phi_{\varphi,\tilde{\varphi}}g\right)\left(\tilde{X},B\tilde{Y}_1,B\tilde{Y}_2\right) = \left(\phi_{\varphi}g\right)\left(B\tilde{X},B\tilde{Y}_1,B\tilde{Y}_2\right)$$

elde edilir. Örneğin, $\phi_{\tilde{\varphi}}\tilde{g} = i^*\left(\phi_{\varphi}g\right)$. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.4.1: $\tilde{\varphi}$, $\tilde{M}_m$ invariant altmanifoldu üzerinde indirgenmiş afinor alanı ve $\varphi \in \Im^1_1(M_n)$ olsun. $g \in \overset{*}{\Im}{}^0_2(M_n)$ için, $\phi_{\varphi}g = 0$ ise $\phi_{\tilde{\varphi}}\tilde{g} = 0$'dır.

4.2. Norden Manifoldlarında Tachibana Operatörleri

M_{2n}, işareti (n,n) olan g pseudo-Riemannian metriği ile verilen, bir pseudo-Riemannian manifold olsun. Eğer M_{2n}, $\varphi^2 = -I$ olacak şekilde bir $\varphi \in \Im^1_1(M_{2n})$ afinor alanına sahip ise, (M_{2n},φ) bir hemen hemen kompleks manifolddur. Burada I, bir özdeş endomorfizm alanıdır. Eğer, $N_{\varphi} \in \Im^1_2(M_{2n})$ Nijenhuis tensör alanı sıfır olursa φ, bir kompleks yapıdır ve M_{2n}, $X_n(C)$ üzerinde C-holomorfik manifolddur. Buradaki geçiş fonksiyonları holomorfik dönüşümlerdir. $N_{\varphi} = 0$ şartı $\nabla\varphi = 0$ şartına denktir. Burada ∇, burulmasız afin konneksiyondur. Eğer her $X,Y \in \Im^1_0(M_{2n})$ için,

$$g(\varphi X,\varphi Y) = -g(X,Y) \tag{4.10}$$

veya

$$g(\varphi X,Y) = g(X,\varphi Y)$$

ise, φ'e göre pür olan g metriği Norden metriğidir (Ganchev and Borisov 1986; Norden 1960). g Norden metriğiyle birlikte (M_{2n},φ) hemen hemen kompleks manifolduna (M_{2n},φ,g), hemen hemen Norden manifoldu denir. Eğer φ integrallenebilir ise (M_{2n},φ,g)'ye Norden manifoldu denir.

$\overset{*}{t}\in\Im_s^r(X_n(C))$, $X_n(C)$ üzerinde bir kompleks tensör alanı olsun. Bu tensör alanının reel modeli, φ'e göre pür olan $t\in\Im_s^r(M_{2n})$ tensör alanıdır. φ, M_{2n} üzerinde bir kompleks yapı ve $\phi_\varphi t=0$ ise, $X_n(C)$ üzerindeki $\overset{*}{t}$ kompleks tensör alanına holomorfiktir denir (Kruchkovich 1972). Böylece keyfi $X,Y_1,...,Y_q\in\Im_0^1(M_{2n})$ ve $\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{r}{\xi}\in\Im_1^0(M_{2n})$ için ϕ_φ Tachibana operatörü

$$(\phi_\varphi t)(X,Y_1,Y_2,...,Y_s,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{r}{\xi})=0$$

ise, $X_n(C)$ üzerindeki $\overset{*}{t}$ holomorfik tensör alanı, t pür tensör alanı formunda M_{2n} üzerinde realize edilmiş olur. Sonuç olarak, M_{2n} üzerindeki t pür tensör alanına Holomorfik tensör alanı denir.

Eğer bir Norden manifoldunda (hemen hemen Norden),

$$(\phi_\varphi g)(X,Y,Z)=0$$

ise, g Norden metriğine holomorfiktir (hemen hemen holomorfik) denir. g holomorfik Norden metriğiyle birlikte (M_{2n},φ,g) bir Norden manifold ise, (M_{2n},φ,g) holomorfik Norden manifolddur.

Hemen hemen Norden manifoldu için Norden metriğinden bir formül elde edilir. $\nabla g=0$ ve (4.10)' ün doğrudan sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.1: g, hemen hemen Norden manifoldunun bir Norden metriği olsun. Bu durumda,

$$g(Z,(\nabla_Y\varphi)(X)) = g((\nabla_Y\varphi)(Z),X)$$

dir. Burada g ’e göre Riemannian kovaryant türev operatörü ∇ ile gösterilmiştir.

Bazı görüşlere göre, holomorfik Norden manifoldları Kähler manifoldlarına benzer. Aşağıdaki teorem ile elde edilen sonuçlar birbirine benzerdir.

Teorem 4.2.2: Bir hemen hemen Hermitian manifoldunun Kähler olması için gerek ve yeter şart Levi-Civita konneksiyonuna göre hemen hemen kompleks yapının paralel olmasıdır.

Teorem 4.2.3: Bir hemen hemen Norden manifoldunun holomorfik Norden manifoldu olması için gerek ve yeter şart, ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre hemen hemen kompleks yapının paralel olmasıdır.

İspat: $(g\circ\varphi)(X,Y) = g(\varphi X,Y)$ alınarak, (3.13)’den,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(X,Z_1,Z_2) &= (L_{\varphi X}g - L_X(g\circ\varphi))(Z_1,Z_2) + g(Z_1,\varphi L_X Z_2) - g(\varphi Z_1, L_X Z_2)\\ &= (\varphi X)g(Z_1,Z_2) - Xg(\varphi Z_1,Z_2) - g(\nabla_{\varphi X}Z_1,Z_2) + g(\nabla_{Z_1}\varphi X,Z_2) \qquad (4.11)\\ &- g(Z_1,\nabla_{\varphi X}Z_2) + g(Z_1,\nabla_{Z_2}\varphi X) + g(\varphi(\nabla_X Z_1),Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1}X),Z_2)\\ &+ g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2) - g(Z_1,\varphi(\nabla_{Z_2}X))\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}&= g(\nabla_{Z_1}\varphi X,Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1}X),Z_2) + g(Z_1,\nabla_{Z_2}\varphi X) - g(Z_1,\varphi(\nabla_{Z_2}X))\\ &= g((\nabla\varphi)(X,Z_1),Z_2) + g(Z_1,(\nabla\varphi)(X,Z_2)) \qquad (4.12)\end{aligned}$$

olur. (4.12) ifadesi (4.11)’de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(X,Z_1,Z_2) &= (\varphi X)g(Z_1,Z_2) - Xg(\varphi Z_1,Z_2) + g((\nabla\varphi)(X,Z_1),Z_2)\\ &+ g(Z_1,(\nabla\varphi)(X,Z_2)) - g(\nabla_{\varphi X}Z_1,Z_2) - g(Z_1,\nabla_{\varphi X}Z_2) \qquad (4.13)\\ &+ g(\varphi(\nabla_X Z_1),Z_2) + g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre,

$$(\varphi X)g(Z_1, Z_2) - g(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) = (\nabla_{\varphi X} g)(Z_1, Z_2) = 0 \qquad (4.14)$$

ve

$$-Xg(\varphi Z_1, Z_2) + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + g(\varphi Z_1, \nabla_X Z_2) = -g((\nabla_X \varphi)Z_1), Z_2) \qquad (4.15)$$

dir. (4.14) ve (4.15)'den, (4.13) ifadesi,

$$(\phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) = -g((\nabla_X \varphi)Z_1, Z_2) + g((\nabla_{Z_1} \varphi)X, Z_2) + g(Z_1, (\nabla_{Z_2} \varphi)X) \qquad (4.16)$$

olarak yazılır. Benzer şekilde,

$$(\phi_\varphi g)(Z_2, Z_1, X) = -g((\nabla_{Z_2} \varphi)Z_1, X) + g((\nabla_{Z_1} \varphi)Z_2, X) + g(Z_1, (\nabla_X \varphi)Z_2) \qquad (4.17)$$

elde edilir. (4.16) ve Teorem 4.2.1'den,

$$(\phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) + (\phi_\varphi g)(Z_2, Z_1, X) = 2g(X, (\nabla_{Z_2} \varphi)Z_2) \qquad (4.18)$$

elde edilir.

(4.18)'de $\phi_\varphi g = 0$ alındığında, $\nabla\varphi = 0$ bulunur. Böylece Teorem 4.2.3 ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.1: $\phi_\varphi g = 0$ ise, hemen hemen Norden manifoldu üzerindeki, φ hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir.

Bir Kähler-Norden manifoldu, (M_{2n}, φ, g) üçlüsüyle tanımlanır. Bu bileşenler, φ hemen hemen kompleks yapı ile donatılmış bir M_{2n} manifoldu; ∇, g'nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla\varphi = 0$ olacak şekilde bir g pseudo-Riemannian metriği ve $g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$ Nordenlik şartını sağlayan g metriğinden oluşur. Burada, Kähler-Norden manifoldları ve bir holomorfik metrik ile birlikte kompleks Riemannian manifoldları arasında bire-bir eşleme vardır (Kruchkovich 1972).

(M_{2n}, φ, g) bir hemen hemen Norden manifold olsun. M_{2n} üzerindeki tüm X ve Y vektör alanları için hemen hemen Norden manifoldunun ikiz Norden metriği,

$$G(X,Y) = (g \circ \varphi)(X,Y) \tag{4.19}$$

ile tanımlanır. G'ye g'nin ikiz (veya dual) metriği denir ve G, Hermitian Geometrisi'nde Kahler forma benzer bir rol oynar.

G pür Riemannian metriğine Tachibana operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi G)(X,Y,Z) &= (L_{\varphi X} G - L_X (G \circ \varphi))(Y,Z) + G(Y, \varphi L_X Z) - G(\varphi Y, L_X Z) \\ &= (\phi_\varphi g)(X, \varphi Y, Z) + g(N_\varphi (X,Y), Z)\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20)'den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.4: Bir hemen hemen Norden manifoldu için,

$$\phi_\varphi G = (\phi_\varphi g) \circ \varphi + g \circ (N_\varphi)$$

dir.

Sonuç 4.2.2: Norden manifoldu için,

a) $\phi_\varphi g = 0$

b) $\phi_\varphi G = 0$

dir.

Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4'den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.5: $\phi_\varphi G = 0$ ve $N_\varphi \neq 0$ olmak üzere Hemen Hemen Norden manifoldu, yani kapalı Kähler form ile birlikte hemen hemen Kähler manifoldları mevcut değildir.

∇_g, g Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere,

$$\nabla_g G = (\nabla_g g) \circ \varphi + g \circ (\nabla_g \varphi) = g \circ (\nabla_g \varphi)$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.2.3'den $\nabla_g G = 0$ olup, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.6: (M_{2n}, φ, g) bir Kähler-Norden manifold olmak üzere, g Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile G ikiz Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu çakışır.

R ve S, sırasıyla g ve G'nin eğrilik tensörleri olmak üzere, Teorem 4.2.6'dan, Kähler-Norden manifoldu için $R = S$ olur.

φ'e göre Ricci özdeşliği uygulandığında $\nabla\varphi = 0$ olduğundan,

$$\varphi(R(X,Y)Z) = R(X,Y)\varphi Z \tag{4.21}$$

dir. Burada $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$ ifadesi X_1, X_2, X_3 ve X_4'e göre pürdür.

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, \varphi X_3, X_4) &= g(R(X_1, X_2)\varphi X_3, X_4) \\ &= g(\varphi(R(X_1, X_2)X_3), X_4) \\ &= g(R(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\ &= R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4). \end{aligned}$$

Burada S, G dual metriği ile verilen eğrilik tensörü olmak üzere, eğer

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = G(S(X_1, X_2)X_3, X_4)$$

ise,

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = S(X_3, X_4, X_1, X_2) \tag{4.22}$$

elde edilir. $R = S$ ve (3.13), (4.19) ve (4.21)'den,

$$\begin{aligned} S(X_1, X_2, X_3, X_4) &= G(S(X_1, X_2)X_3, X_4) \\ &= g(\varphi(S(X_1, X_2)X_3), X_4) \\ &= g(S(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\ &= g(R(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \end{aligned}$$

$$= R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4)$$

ve

$$\begin{aligned}
S(X_3, X_4, X_1, X_2) &= G(S(X_3, X_4)X_1, X_2) \\
&= g(\varphi(S(X_3, X_4)X_1), X_2) \\
&= g(S(X_3, X_4)X_1, \varphi X_2) \\
&= g(R(X_3, X_4)X_1, \varphi X_2) \\
&= R(X_3, X_4, X_1, \varphi X_2) \\
&= R(X_1, \varphi X_2, X_3, X_4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.22) eşitliği,

$$R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4) = R(X_1, \varphi X_2, X_3, X_4)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeden, $R(X_1, X_2, X_3, X_4)$'ün X_2 ve X_4'e göre pür olduğu görülür. Sonuç olarak, $R(X_1, X_2, X_3, X_4)$ pürdür.

Teorem 4.2.7: Bir Kähler-Norden manifoldunda, Norden metriğinin Riemannian eğrilik tensörü pürdür.

Eğer, φ-yapıyı koruyan $(\nabla\varphi = 0)$ burulmasız ∇ afin konneksiyonu keyfi X, Y, Z vektör alanları için, $\nabla_{\varphi X}\nabla_Y Z - \varphi(\nabla_X \nabla_Y Z) = 0$ şartını sağlıyorsa, bu durumda ∇'ya holomorfik konneksiyon denir (Kruchkovich 1972; Vishnevskii 1985).

Sonuç 4.2.2: Bir ∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanının pür olması için gerek ve yeter şart ∇'nın holomorf olmasıdır (Kruchkovich 1972; Vishnevskii 1985).

Böylece Teorem 4.2.7**'**den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.8: Bir Kähler-Norden manifoldundaki, Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu holomorfiktir.

R, Riemannian eğrilik tensörü pür olduğu için, ϕ-operatörü R'ye uygulanabilir. $\nabla\varphi = 0$ olmak üzere, Teorem 3.2.3.1 ve (3.24)'den,

$$(\phi_\varphi R)(X,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = (\nabla_{\varphi X} R)(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) - (\nabla_X R)(\varphi Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) \tag{4.23}$$

elde edilir. Bianchi'nin 2. özdeşliğini (4.23)'a uygulayarak ve (4.21) kullanılarak,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi R)(X,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) &= g((\nabla_{\varphi X} R)(Y_1,Y_2,Y_3) - (\nabla_X R)(\varphi Y_1,Y_2,Y_3),Y_4)\\ &= g((\nabla_{\varphi X} R)(Y_1,Y_2,Y_3) - \varphi((\nabla_X R)(Y_1,Y_2,Y_3)),Y_4)\\ &= g(-(\nabla_{Y_1} R)(Y_2,\varphi X,Y_3) - (\nabla_{Y_2} R)(\varphi X,Y_1,Y_3)\\ &\quad -\varphi((\nabla_X R)(Y_1,Y_2,Y_3)),Y_4)\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. $\nabla\varphi = 0$ olduğu için,

$$\begin{aligned}(\nabla_{Y_2} R)(\varphi X,Y_1,Y_3) &= \nabla_{Y_2}(R(\varphi X,Y_1,Y_3)) - R(\nabla_{Y_2}(\varphi X),Y_1,Y_3)\\ &\quad - R(\varphi X,\nabla_{Y_2}Y_1,Y_3) - R(\varphi X,Y_1,\nabla_{Y_2}Y_3)\\ &= (\nabla_{Y_2}\varphi)(R(X,Y_1,Y_3)) + \varphi(\nabla_{Y_2}R(X,Y_1,Y_3))\\ &\quad - R((\nabla_{Y_2}\varphi)X + \varphi(\nabla_{Y_2}X),Y_1,Y_3)\\ &\quad - R(\varphi X,\nabla_{Y_2}Y_1,Y_3) - R(\varphi X,Y_1,\nabla_{Y_2}Y_3)\\ &= \varphi(\nabla_{Y_2}R(X,Y_1,Y_3)) - \varphi(R(\nabla_{Y_2}X,Y_1,Y_3))\\ &\quad - \varphi(R(X,\nabla_{Y_2}Y_1,Y_3)) - \varphi(R(X,Y_1,\nabla_{Y_2}Y_3))\\ &= \varphi((\nabla_{Y_2}R)(X,Y_1,Y_3))\end{aligned} \tag{4.25}$$

dir. Benzer olarak,

$$(\nabla_{Y_1} R)(Y_2,\varphi X,Y_3) = \varphi((\nabla_{Y_1} R)(Y_2,X,Y_3)) \tag{4.26}$$

dir.

(4.25) ve (4.26) ifadeleri, (4.24)'de yerine yazılıp, Bianchi'nin 2. özdeşliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\phi_\varphi R)(X,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) = g(-\varphi((\nabla_{Y_1}R)(Y_2,X,Y_3)) - \varphi((\nabla_{Y_2}R)(X,Y_1,Y_3)) \\
- \varphi((\nabla_X R)(Y_1,Y_2,Y_3)),Y_4) \\
= -g(\varphi(\sigma\{(\nabla_X R)(Y_1,Y_2\},Y_3)),Y_4) \\
= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada σ, X, Y_1 ve Y_2'ye göre dairesel (döngüsel) toplamı gösterir. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.9: Bir Kähler-Norden manifoldunda, Riemannian eğrilik tensör alanı holomorfik tensör alanıdır.

Şimdi, Kähler-Norden manifoldu ve Kähler-Norden manifoldunun invariant altmanifoldunu inceleyelim. (M_{2n},φ,g), bir Kähler-Norden manifold olsun. (4.2)'den, keyfi $\tilde{X} \in \Im_0^1(\tilde{M}_{2m})$ için,

$$
\varphi^2\left(B\tilde{X}\right) = \varphi B\left(\tilde{\varphi}\tilde{X}\right) = B(\tilde{\varphi}^2\tilde{X})
$$

veya

$$
B(\tilde{\varphi}^2\tilde{X} + \tilde{X}) = 0
$$

elde edilir. B bire-bir olduğundan, $\tilde{\varphi}^2 = -I$'dır. Buradan, bir $\tilde{M}_{2m}$ invariant altmanifoldu, $\tilde{\varphi}$ indirgenmiş afinoru vasıtasıyla, bir hemen hemen kompleks manifold olur. Teorem 4.1.4.1'den, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.10: Kähler-Norden manifoldunda, bir invariant altmanifold, indirgenmiş yapıya göre kendisinin Kähler-Norden manifoldudur.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde amaç pür tensör alanlarına uygulanan Tachibana ve Vishnevskii operatörleri ile bunların genelleştirmelerini incelemektir.

Bu amaçla ilk olarak pür tensör alanı ile pür tensör alanına uygulanan Tachibana ve Vishnevskii operatörünün tanımları verilerek çeşitli tiplerdeki tensör alanlarına uygulamalarına bakılmıştır.

İkinci olarak önce altmanifoldlarda karmaşık tipli pür tensör alanlarının ve $\tilde{\phi}_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ - operatörlerinin tanımı verilmiş ve sırasıyla $(1,s,0,q)$, $(0,s,1,q)$, $(0,s,0,0)$, $(0,0,0,q)$ tipli tensör alanlarına uygulanan $\tilde{\phi}_{\varphi,\tilde{\varphi}}$ - operatörünün genelleştirmeleri gösterilmiştir. Daha sonra Norden manifoldlarında Tachibana operatörleri incelenmiştir.

Son olarak bir hemen hemen Norden manifoldunun holomorfik Norden manifoldu olması için gerek ve yeter şartın, ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre hemen hemen kompleks yapının paralel olması gerektiği ispatlanmış ve $\phi_{\varphi} g = 0$ ise, hemen hemen Norden manifoldu üzerindeki, φ hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Daha sonra Bir Hemen hemen Norden manifoldu için,

$$\phi_{\varphi} G = (\phi_{\varphi} g) \circ \varphi + g \circ (N_{\varphi})$$

olduğu ve buradan Norden manifoldu için, $\phi_{\varphi} g = 0$ ve $\phi_{\varphi} G = 0$ olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca bir Kähler-Norden manifoldunda g Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile G dual Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun çakıştığı, Norden metriğinin Riemannian eğrilik tensörünün pür olduğu ve Levi-Civita konneksiyonunun holomorfik, Riemannian eğrilik tensör alanının holomorfik tensör alanı ve son olarakta bir invariant altmanifoldun, indirgenmiş yapıya göre kendisinin Kähler-Norden manifoldu olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

Bishop, R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Mcmillan Company, New York, p.19-135.

Frolicher, A., Nijenhuis, A. Some new cohomology invariants for complex manifolds. I, II. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 59, Indag. Math. 18 (1956), 540-552, 553-564.

Frolicher, A., Nijenhuis, A. Theory of vector-valued differential forms. I. Derivations of the graded ring of differential forms. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 59, Indag. Math. 18 (1956), 338-359.

Ganchev, G.T., Borisov A.V. Note on the almost complex manifolds with Norden metric. Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., 39 (1986), 31-34.

Kobayashi, S., and Nomızu K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers.

Kobayashi, S., Nomizu, K. Foundations of differential geometry. Vol. I. Interscience Publishers, New York-London, 1963.

Kruchkovich, G. I. Conditions for the integrability of a regular hypercomplex structure on a manifold. (Russian) Ukrain. Geometr. Sb. Vyp. 9 (1970), 67-75.

Kruchkovich, G. I. Hypercomplex structures on manifolds. I. (Russian) Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. 16 (1972), 174-201.

Nijenhuis, A. X -forming sets of eigenvectors. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 54, Indag. Math. 13 (1951), 200-212.

Norden, A. P. On a class of four-dimensional A-spaces. (Russian) Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika. 17 (1960), no. 4, 145-157.

Salimov, A.A., (2010). On Operators Associated with Tensor Fields. J. Geom, (DOI 10.1007/s 00022-010-0059-6)

Salimov, A.A.. Iscan, M., Akbulut, K. Some remarks concerning hyperholomorphic B-manifolds. Chin. Ann. Math. Ser. B 29 (2008), no. 6, 631-640.

Salimov, A.A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Shirokov, A. P. On the question of pure tensors and invariant subspaces in manifolds with almost algebraic structure. (Russian) Kazan. Gos. Univ. Učen. Zap. 126 (1966), kn. 1, 81-89.

Slebodzinski, W. Contribution à la géométrie différentielle d'un tenseur mixte de valence deux. Colloq. Math. 13 (1964), 49-54.

Tachibana, S. Analytic tensor and its generalization. Tohoku Math. J. 12 (1960), 208-221.

Tachibana, S., Koto, S. On almost-analytic functions, tensors and invariant subspaces. Tôhoku Math. J. 14 (1962), 177-186.

Vishnevskii, V. V. Affinor structures of manifolds as structures definable by algebras. (Survey article). (Russian) Commemoration volumes for Prof. Dr. Akitsugu Kawaguchi's seventieth birthday, Vol. III. Tensor (N.S.) 26 (1972), 363-372.

Vishnevskii, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V. (Russian) Spaces over algebras. Kazanskii Gosudarstvenniĭ Universitet, Kazan, 1985.

Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436.

Yano, K., Kon, M. Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.

Willmore, T. J. Note on the Slebodzinski tensor of an almost-complex structure. J. London Math. Soc. 43 (1968), 321-322.

ÖZGEÇMİŞ

Furkan YILDIRIM 1985 yılında Erzurum'da dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lise öğreniminide Erzurum Nevzat Karabağ Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 2003 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümü'nden 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başlayıp bunun yanında Erzurum Horasan İlçesi Molla Ahmet Köyü İlköğretim Okulu'nda matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2007-2008 ve 2009-2010 yılları arasında Horasan Anadolu Lisesi'nde çalıştıktan sonra 2010 yılında Erzurum Gazi İlköğretim Okulu'nda göreve başladı. Halen burada görevine devam etmektedir.