WALKER MANİFOLDLARI

Sibel TURANLI

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Arif SALİMOV
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

WALKER MANİFOLDLARI

Sibel TURANLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

WALKER MANİFOLDLARI

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Sibel TURANLI tarafından hazırlanan bu çalışma 18/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Arif SALİMOV	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Ömer AKBULUT
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

WALKER MANİFOLDLARI

Sibel TURANLI

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde, ilk olarak Walker metriği koordinatlarla tanımlanmıştır. Daha sonra hemen hemen kompleks yapı ile donatılmış Walker metriği araştırılmıştır. Hemen hemen kompleks yapının integrallenebilmesi ve holomorf olması şartları araştırılmıştır. Kahler-Norden-Walker manifold olma şartları incelenmiştir. Norden-Walker manifoldlarının eğrilik özellikleri araştırılmıştır. Son olarak da Norden-Walker ve Kahler-Norden-Walker manifoldları ile Goldberg Varsayımı arasındaki ilişki incelenmiştir.

2011, 76 sayfa

Anahtar Kelimeler: Norden metrik, Hemen hemen kompleks yapı, Nijenhuis tensörü, Tachibana operatörü.

ABSTRACT

Master Thesis

WALKER MANİFOLDS

Sibel TURANLI

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV

In this thesis firstly, Walker metric is introduced with coordinates. Later, Walker metric which equipped with almost complex structure is searched. The conditions of integrability and holomorphy of almost complex structure are studied. Curvature properties of Norden-Walker manifolds are searched. Finally, relation between Norden-Walker manifolds, Kahler-Norden-Walker manifolds and Goldberg Conjecture is studied.

2011, 76 pages

Keywords: Norden metrics, Almost complex structure, Nijenhuis tensor, Tachibana operator.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a en içten dileklerimle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat İŞCAN'a ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere bölümümüzün öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Sibel TURANLI

Haziran - 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

D	Null Dağılım
F	Einstein Tensörü
(M,g,D)	Walker Manifoldu
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
N_φ	φ'nin Nijenhuis Tensörü
R_{ijk}^h	Eğrilik Tensörü
S_{ij}^h	Burulma Tensörü
$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T^*(M_n)$	M_n Manifoldunun Kotanjant Demeti
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu Üzerinde (p,q) Tipli Tensör Demeti
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ_{ij}^h	Cristoffel Sembolü
π	Tabii İzdüşüm

1. GİRİŞ

Manifoldlar üzerindeki yapılar teorisi modern diferensiyel geometrinin en ilgi çekici konularındandır. Bu konulardan biriside kompleks yapılardır. Böyle yapılara sahip manifoldların diferensiyel geometrik yönleri, Riemannian geometri için çok geniş ve çok verimli alanlardır.

Walker manifoldu (M,g,D) şeklindeki üçlüdür. Burada M, n-boyutlu bir manifoldu, g belirsiz (indefinite) bir metriği, D ise r-boyutlu paralel sıfır (null) dağılımı ifade eder. Böyle metriklerin kanonik formları Walker (1950) tarafından elde edilmiştir. Burada (x_1,x_2,x_3,x_4) şeklindeki uygun koordinatların var olduğu gösterilmiş ve metriğin (x_1,x_2,x_3,x_4) koordinatları üzerinde bazı a, b ve c fonksiyonlarına bağlı olan

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu ifade edilmiştir.

Walker manifoldu üzerindeki en yoğun çalışmalar 2004 yılından sonra başlamıştır. Matsushita (2004) Walker 4-manifoldlar için uygun hemen hemen kompleks yapılar inşa etmiştir. Chaichi (2005) 4-boyutlu Walker metriklerinin eğrilik özelliklerini araştırmıştır. Davidov (2006) Almost Kahler-Walker 4-manifoldları ve (2007) Hermitian-Walker 4-manifoldları incelemiş, Salimov (2010) Norden-Walker metriklerinin bazı özelliklerini araştırmıştır.

Sunulan bu tezde ise Norden-Walker metriği araştırılmıştır. Bu amaçla, çalışmamızın anlaşılabilmesi için ve konunun sınırlanması bakımından ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Tanjant Demet, Nijenhuis Tensörü, Skaler Eğrilik, Hermitian ve Kahlerian Manifoldlar ve Paralel Null-Dağılımı hakkında bilgiverilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk önce Norden metrikler, Holomorfik Norden Metrikler, Norden Walker Metrikler, Holomorfik Norden Walker Metrikler incelenmiştir. Daha sonra Norden Walker manifoldlarının eğrilik özellikleri incelenmiştir. Son olarak, hemen hemen Norden Walker ve Kahler Norden Walker manifoldlarının Goldberg varsayımı arasındaki ilişki incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: X Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \Re^n$ bölgesine

$$\varphi : U \rightarrow V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U, φ) şeklinde de gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \Re^n$$

olur. $x^1, ..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: Eğer X Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \quad \text{(A-indisler kümesi)}$$

ise X ’e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: *X* topolojik Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k \leq \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine *X* üzerinde C^k sınıfından *n* boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi *X* i örter, yani *X*, *n* boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j = 1,...,n\right)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatlar, u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki *x* noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve

$\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.1.5: X Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasa maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \leq k \leq \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: M, Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n- boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından difernsiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov and Mağden 1999).

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: B_n, n boyutlu vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n, j = 1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*, i = 1,..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\omega = t\,(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\,(\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, ..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \Re$$

operatörüne B_n uzayında *p* dereceden kontravaryant, *q* dereceden kovaryant tensör adı verilir ve $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0, q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına ise tensörün valentliği, (*p,q*) sembolüne ise tensörün tipi denir. (*p,0*) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (*0,q*) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $T_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım;

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartından $\vec{x} = 0$ alınırsa, bu taktirde *g* tensörüne regüler tensör denir. Koordinatlarla (2.1) eşitliği

$$g_{ij} x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik $\forall y^j$ için sağlandığından

$$g_{ij}x^i = 0,\ j = 1,...,n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n de esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\tilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik}x^k, (\eta_i = g_{ik}y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümüne bakalım. Buradan (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \tilde{g}^{ki}\xi_i, (y^k = \tilde{g}^{ki}\eta_i) \tag{2.4}$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invariant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij}x^i y^j$$

yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini dikkate alırsak

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x^i\eta_i = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$$

olur. Yani, g_{ij} esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenerinin $\omega = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$ invaryant bilineer formunu alırız. Buna göre de $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g_{ij} tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\eta,\xi) &= \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j = \eta_i x^i = g_{ik}y^k x^i,\\ \tilde{g}(\xi,\eta) &= \tilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i = \xi_j y^j = g_{jk}x^k y^j\\ &= g_{ki}x^i y^k = g_{ki}y^k x^i = \tilde{g}(\eta,\xi)\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n de g_{ij} tensörü verildiğinde $B_n \to B_n^*$ izomorfizmi bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k = g_{ki}x^i, x^i = \tilde{g}^{ik}x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $(x^i \to x_k)$ ve yükseltilmesi $(x_k \to x^i)$ işlemleri denir. Buna göre $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörünü göz önüne alalım:

$$S^{p}_{.j} = \tilde{g}^{pi}S_{ij}, S^{p}_{i.} = \tilde{g}^{pj}S_{ij}, S^{pq}_{..} = \tilde{g}^{pi}\tilde{g}^{pj}S_{ij}$$

verilmiş S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemleridir.

$$S^{.j}_{p} = g_{pi}S^{ij}, S^{i.}_{p} = g_{pj}S^{ij}, S^{..}_{pq} = g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x},\vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, $\forall \vec{x},\vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x},\vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$\vec{x}\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x_j y^j \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $Det(g_{ij}) \neq 0$ olursa bu taktirde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

Tanım 2.2.2: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p, \forall p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov and Mağden 1999).

f, M_n manifoldunda bir fonksiyon ise Xf de M_n manifoldunda bir fonksiyon tanımlar. Bu ise

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanır. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i,...,x^n\right), \quad i = 1,...,n$$

olur.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.3: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m), \forall m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren *T* fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, (1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelır. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü ifadesi (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise *T* tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir bir *m* noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise *T* tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (*p,q*) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ (0,1) tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m), X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre *T* tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1...i_{p_1}}_{j_1...j_q} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q}, \partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise *T* tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan (0,1) tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(*p,q*) tipli *T* tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve herbir C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzereinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durunda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca parelel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasında $\underset{k}{a}^{i}, k = 1,...n$ lokal bazını alalım ve farzedelim ki $\underset{k}{a}^{i}(t)$ 'nin bağımlılığı baz vektörlerin verilmiş eğri boyunca paralel kaydırılması kuralını ifade etsin. Keyfi $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^{i}$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i = \lambda^k d\underset{k}{a}^{i} \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i = \lambda^k \underset{k}{a}^{i}$ eşitliğinden

$$\lambda^k = \overset{k}{a}_i v^i \tag{2.7}$$

yazılır. Burada $\underset{k}{a}^{i}$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir.

Dolayısıyla $\underset{k}{a}^{i} \overset{s}{a}_i = \delta_k^s$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) de kullanılırsa,

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.8}$$

yazılır. (2.8) denkleminde

$$\omega_i^k = -\overset{s}{a}_i \, d\underset{s}{a}^k \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde dahil edilen ω_i^k objelerine konneksiyon (bağlantı) formları denir.

Teorem 2.3.1: **1.** Konneksiyon formları $\underset{k}{a}^i, k = 1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdır.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatkarın dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

(2.10) ve (2.11) şartlarından, v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralını yazalım.

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12) in ikinci şartından

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

yazarız. (2.9) denkleminde (2.12) in birinci şartını ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

veya

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \tag{2.14}$$

olur. (2.14) eşitliği gösterir ki ω_j^i konneksiyon formları tensörün koordinatları olamaz.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

Tanım 2.3.2: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i \omega_i\right) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \tag{2.15}$$

olur. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

yazılır. (2.16) eşitliğini (2.15) ifadesinde kullanırsak,

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right) v^i = 0$$

bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

biçimindedir. Vektörün ve kovektörün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$dZ = dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} d\underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

$$+ \dots + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots d\overset{p}{\omega}_{i_p}$$

$$= \left(dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q} \right) \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.18}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = dt^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \ldots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots s} + \omega^{i_1}_s t^{s i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \ldots s}_{j_1 \ldots j_q} \tag{2.19}$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \ldots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \ldots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.20}$$

yazılır. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir.

Tensörün mutlak diferensiyeli ile tüm eğri boyunca keyfi noktalarda uygulanmış tensörler arasındaki eşleme (2.20) eşitliği ile verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün parelel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \qquad \delta \omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$ - tensör çarpımıdır.

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir.

2.4. Afin konneksiyonlu uzaylar

Tanım 2.4.1: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun herbir eğrisi boyunca afin konneksiyon verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Lineerlik şartı:

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v^i_k, v^i'ye ve noktaya bağlı fonksiyondur. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + \omega^i_k v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega^i_k v^k = \left(v^i_s - \partial_s v^i\right) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. $v^k, \partial_s v^i$ ve v^i_s u^i lerin fonksiyonarıdır. ω^i_k forumları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω^i_k forumları du^k'nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega^i_k = \Gamma^i_{sk} du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada Γ^i_{sk} katsayıları afin uzayın noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ^{i}_{sk} afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega^{i'}_{j'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} du^{k'} = \Gamma^{i'}_{k'j'} A^{k'}_{k} du^{k}$$

yazılır. Ayrıca

$$A^{j'}_{j} dA^{i}_{j'} = A^{j'}_{j} \left(\partial_k A^{i}_{j'}\right) du^{k} \tag{2.25}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A^{j'}_{j} A^{i}_{j'} = \delta^{i}_{j}$ eşitliğinin ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\begin{aligned} &\left(\partial_k A^{j'}_{j}\right) A^{i}_{j'} + A^{j'}_{j}\left(\partial_k A^{i}_{j'}\right) = 0 \\ &\Rightarrow A^{j'}_{j}\left(\partial_k A^{i}_{j'}\right) = -\left(\partial_k A^{j'}_{j}\right) A^{i}_{j'} \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırda

$$A^{j'}_{j} dA^{i}_{j'} = -A^{i}_{j'} \left(\partial_k A^{j'}_{j}\right) du^{k} \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) , (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma^{i}_{kj} = A^{i}_{i'} A^{j'}_{j} A^{k'}_{k} \Gamma^{i'}_{k'j'} + A^{i}_{i'} A^{i'}_{kj} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A^{i'}_{kj} = \partial_k A^{i'}_{j}$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyeli

$$\delta v^i = (\ \partial_k v^i + \Gamma^i_{ks} v^s\ )\, du^k \tag{2.28}$$

biçiminde olur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{ks} v^s \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür. Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^s_{kj}\, \omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür. (2,24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = (\partial_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks}\, t^{i_1 \ldots s \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu}\, t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots s \ldots j_q})\, du^k \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \partial_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks}\, t^{i_1 \ldots s \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu}\, t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots s \ldots j_q} \tag{2.32}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türev tanımından görülür ki (p,q) tipli tensörünün kovaryant türevi ($p,q+1$) tipli bir tensördür.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikler yazılır:

1. $\nabla_k \big(\underset{1}{t}{}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \underset{2}{t}{}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\big) = \nabla_k \underset{1}{t}{}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \nabla_k \underset{2}{t}{}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \lambda \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, $\lambda \in F$ (F fonksiyonlar kümesi)

3. $\nabla_k (t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}) = \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q} + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir.

Tanım 2.4.2: M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{T}_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y) : \mathcal{T}_0^1(M_n) \times \mathcal{T}_0^1(M_n) \to \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ’ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \mathcal{T}_0^1(M_n) \to \mathcal{T}_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovariant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.5. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f\left(u^1,...,u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonunun du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olmasıdır (Yano 1965).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.36}$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S_{ij}^{k} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör ifade eder. (2.37) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifolundan alınmış keyfi *X, Y* vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, *X* ve *Y* vektör alanlarının Lie parentezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^k vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^{i} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\nabla_r \nabla_s v^i = \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^{i} \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i$$

$$= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^{i} v^k) + \Gamma_{rm}^{i} (\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^{m} v^k) - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i$$

$$= \partial_{rs}^{2} v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^{i} v^k + \Gamma_{sk}^{i} \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^{i} \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^{i} \Gamma_{sk}^{m} v^k - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte *r*, *s* indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i = R^i_{rsk}v^k - 2S^k_{rs}\nabla_k v^i \tag{2.39}$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$R^i_{rsk} = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^m_{rk} \tag{2.40}$$

$$= 2(\partial_{[r}\Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|}\Gamma^m_{s]k})$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffer tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k = -R^m_{rsk}\omega_m - 2S^m_{rs}\nabla_m\omega_k \ , \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^j_i = R^j_{rsm}\varphi^m_i - R^m_{rsi}\varphi^j_m - 2S^k_{rs}\nabla_k\varphi^j_i \ , \tag{2.42}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = R^{i_1}_{rsm}t^{mi_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \ldots + R^{i_p}_{rsm}t^{i_1\ldots m}_{j_1\ldots j_q} \tag{2.43}$$

$$-R^m_{rsj_1}t^{i_1\ldots i_p}_{mj_2\ldots j_q} - \ldots - R^m_{rsj_q}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots m} - 2S^k_{rs}\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \ .$$

(2.42) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.6. Konneksiyonların Dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların diffeomorfizmine bakalım. Bu durımda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma konneksiyonların birinden diğerine geçmeye konneksiyonların dönüştürülmesi veya parelel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Bu konneksiyonların katsayılarını Γ_{ij}^k ve $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ ile gösterelim. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^i v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}_{km}^i v^m$$

biçiminde olur. Sonuncu eşitlikten

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^i v^m \tag{2.45}$$

yazılır. Burada

$$T_{km}^i = \overline{\Gamma}_{km}^i - \Gamma_{km}^i \tag{2.46}$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T_{km}^i, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü denir.

Teorem 2.6.1: (1,2) tipli T_{km}^{i} tensörü ve Γ_{km}^{i} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}_{km}^{i}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k}$$

yazılır. Γ_{ij}^{k} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \left(\overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'} \right) + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'} \tag{2.47}$$

olur. Burada T_{ij}^{k} tensör olduğundan,

$$T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} T_{i'j'}^{k'} \tag{2.48}$$

yazılır. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'}$$

olduğu bulunur. Yani $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ ler konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi kuralına göre değişir. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim;

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaler için

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k} - \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılır. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 2.3.1.Teoremine göre Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{2} \tag{2.51}$$

buluruz. $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} + 2S_{ij}^{k}, \qquad \tilde{\Gamma}_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \tag{2.52}$$

yazılır. 2.3.1. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}$ ve Γ_{ji}^{k} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.7. Burulması Sıfır Olan Uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} = \tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^{1},...,\overset{\circ}{u}{}^{n}$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^{i})$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta_{k}^{i'}$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_{k}^{i'}\{(u^{k} - \overset{\circ}{u}{}^{k}) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{pq}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p})(u^{q} - \overset{\circ}{u}{}^{q})\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^{i} koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_{i}^{i'} = \delta_{i}^{i'} + \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ip}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p}), \qquad A_{ij}^{i'} = \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği *0* noktasında ve civarında $\det\left(A_i^{i'}\right)\neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları *0* noktasında yazılırsa,

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.55}$$

olur. Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre *O* noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^{i} = \delta_j^{j'}\delta_k^{k'}\delta_{i'}^{i}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^{i}\delta_l^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{kj}^{l}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın herbir noktasında öyle koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t}R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianci-Padov eşitliği).

Bu eşitliklerin her üçünün invaryant (tensör) karekter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

olarak gösterilsin. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\begin{aligned}
\partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} &= \nabla_k a_{ij}, \\
\partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} &= \nabla_i a_{jk}, \\
\partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} &= \nabla_j a_{ki}.
\end{aligned}$$

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma^r_{ij} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

biçimindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.7.1: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}, \quad e = e_{1,2,\ldots,n}$

n- vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ vektörlerin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_i \ldots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_i \ldots i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_i \ldots i_n} - \Gamma^s_{k i_1} e_{s i_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{k i_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{2.62}$$

Biçiminde yazılır. $n-$ vektörün antisimetrikliğine göre (2.61) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12 \ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2 \ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12 \ldots s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12..n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma_{ks}^{s} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. (2.64) eşitliği eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ_{ks}^{s} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma_{ij}^{k} - \partial_i \Gamma_{kj}^{k} + \Gamma_{kl}^{k}\Gamma_{ij}^{l} - \Gamma_{ki}^{l}\Gamma_{lj}^{k} \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonunu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edebiliriz.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,\ R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını gözönüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

yazarız. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile karekterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.7.2: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör de denir.

Tanım 2.7.3: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ oluyorsa böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 2.7.4: Eğer Weyl uzayı eş afin uzay olursa bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

şartı ile karekterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

biçimide verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g_{ij} tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(ij)kl} = 0$

2. $R_{[ijk]l} = 0$

3. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

4. $R_{ij(kl)} = 0$

5. $R_{ijkl} = R_{klij}$.

2.8. Riemannian Manifoldu

Herbir $x \in M_n$ noktasında $\forall Y \in T_x(M_n)$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y)=0$ eşitliğinden $X=0$ oluyorsa g'ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $Det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g'nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n, g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij})$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian konneksiyonu denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

M_n, C^{∞} sınıfından *n*- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n)=\bigcup_{p\in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$'nin herhangi bir $\tilde{p}$ noktası, yani $\tilde{p}\in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n)\to M_n$ demet projeksiyonu $\tilde{p}\mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{p})=p$ olur. $\pi^{-1}(p)=T(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının *p* noktasındaki fibre denir.

M_n baz uzayının $\{U;x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada (x^h), U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$ açık kümesi $U\times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizmdir. R^n, R reel sayılar alanı üzerindeki *n*- boyutlu vektör uzayı olur. $\tilde{p}\in T_p(M_n)$ $(p\in U)$ noktası (p,X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X\in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $\left(\partial_h=\frac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\tilde{p}$'nın $(y^h)=(x^{\bar{h}})$ $\bar{h}=n+1,...,2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. *U* komşuluğunda $p=\pi(\tilde{p})$'nin koordinatları (x^h) $h=1,..,n$ ile gösterilirse $\tilde{p}$ noktası uygun $(x^h,x^{\bar{h}})\mapsto \tilde{p}\in\pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Biz

$\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Burada $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ ya $\left(x^h\right)$ dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p = \pi(\tilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U^{'}, x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U^{'})$ koordinat komşuluğu $\tilde{p}$ ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U^{'})$ ya göre $\tilde{p}$ 'nın indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'}, y^{h'}\right)$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x) \\ y^{h'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \tag{3.2}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x).\ p^{'} = 1, ... 2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^i} y^i & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

matrisi ile verilir. (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h(x'), \\ y^h = \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^p = x^p(x'), \quad p = 1,...,2n \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} y^{i'} & \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir, çünkü , $Det\left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}\right) \rangle 0$ $(Det\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\right) \rangle 0)$.

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfında (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $T_s^r(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise $T(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(M_n)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $T_s^r(T(M_n))$ ve $T(T(M_n))$ olarak göstereceğiz.

3.2. Diferensiyel Geometrik Cebirsel Yapılar

M_n $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun $(n = 2m)$. $\varphi \in T_1^1(M_n)$, $\varphi^2 = -I$, $z = aI + b\varphi,\ a,b \in R$ ifadesine kompleks cebirsel yapı denir. Ayrıca kompleks cebir değişmeli cebirdir. Kompleks cebirsel yapının bazı $\{1,i\}$, $i^2 = 1,\ 1.i = i.1$ şeklindedir.

3.2.1. m-boyutlu cebir (birleşimli, değişimli sonlu boyutlu cebir)

$m-$boyutlu A_m cebirini alalım. Bu cebirin birleşimli ve birimli olduğunu kabul edelim. $(ab)c = a(bc),\ \forall a,b,c \in \mathsf{A}_m$ ise A_m cebirine birleşimli cebir. $\exists e,\ ea = ae,\ \forall a \in \mathsf{A}_m$ ise böyle e elemanına A_m cebirinin birim elemanı, cebire ise birimli cebir denir. A_m cebir olduğundan aynı zamanda vektör uzayıdır. Dolayısıyla $\vec{e}_\alpha \in A_m,\ \alpha = 1,...,n,\ \{\vec{e}_\alpha\}$ şeklindeki baza sahiptir ve

$$\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} \vec{e}_\gamma \tag{3.8}$$

şeklinde yazılır.

$C^\gamma_{\alpha\beta}$ ya cebirin yapı sabitleri denir. Yapı sabitlerinin en önemli özelliği (1,2) tipli tensörün koordinatları olmasıdır.

Şimdi $C^\gamma_{\alpha\beta}$ yapı sabitinin tensör olduğunu gösterelim:

$C^\gamma_{\alpha\beta}$ yapı sabitinin bazı $\{\vec{e}_\alpha\}$, $C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}$ yapı sabitinin bazı da $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ olsun. $\vec{e}_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} \vec{e}_\alpha$ kuralı verildiğinde $C^\gamma_{\alpha\beta}$ ve $C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}$ yapı sabitleri arasında $C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = A^{\gamma'}_{\gamma} A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} C^\gamma_{\alpha\beta}$ şeklindeki bağıntının olduğunu ispat etmemiz gerekir. A_m cebirinin $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ bazının yardımıyla

$$\vec{e}_{\alpha'} \vec{e}_{\beta'} = C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} \vec{e}_{\gamma'} \tag{3.9}$$

eşitliğini yazabiliriz. Kuraldan $\vec{e}_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} \vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_{\beta'} = A^\beta_{\beta'} \vec{e}_\beta$, $\vec{e}_{\gamma'} = A^\gamma_{\gamma'} \vec{e}_\gamma$ eşitliklerini yazabileceğimizden bu eşitlikleri (3.9) eşitliğinde yerine yazarsak ve (3.8) eşitliğini de kullanırsak

$$C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = A^{\gamma'}_{\gamma} A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\beta}_{\beta'} C^{\gamma}_{\alpha\beta}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ yapı sabitleri (1,2) tipli tensörün koordinatları olur.

$\forall a,b,c \in A_m$ için $(ab)c = a(bc)$ olduğundan $\{\vec{e}_\alpha\}$ bazı için

$$\begin{aligned}
(\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta)\vec{e}_\gamma &= \vec{e}_\alpha(\vec{e}_\beta \vec{e}_\gamma) \\
(C^{\sigma}_{\alpha\beta}\vec{e}_\sigma)\vec{e}_\gamma &= \vec{e}_\alpha(C^{\sigma}_{\beta\gamma}\vec{e}_\sigma) \\
C^{\sigma}_{\alpha\beta}C^{\varepsilon}_{\sigma\gamma}\vec{e}_\varepsilon &= C^{\sigma}_{\beta\gamma}C^{\varepsilon}_{\alpha\sigma}\vec{e}_\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Baz üzerinde lineer terkibe ayrılma tek olduğundan dolayı son eşitlikteki katsayılar eşittir.

$$C^{\sigma}_{\alpha\beta}C^{\varepsilon}_{\sigma\gamma} = C^{\sigma}_{\beta\gamma}C^{\varepsilon}_{\alpha\sigma}$$

birleşimli olma şartınını tensör eşitliğiyle ifade ettik. Bu kurala A_m cebirinin birleşimli olma şartı denir.

$\exists e = 1,\ \ e.a = a.e = a\ (1.a = a.1 = a),\ \ \forall a \in A_m$ olduğundan benzer işlemlerle cebirinin A_m tensör ile yazılmış birimli olma şartı

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha} = \delta^{\gamma}_{\beta} \text{ ve } C^{\gamma}_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $1 = \varepsilon^{\alpha}\vec{e}_\alpha$ şeklindedir.

A_m cebirinin tensör ile yazılmış değişimli olma şartı ise

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = C_{\beta\alpha}^{\gamma}$$

şeklindedir. Yapı sabitleri aşağı indislere göre simetriktir.

Şimdi de kompleks cebir için yapı sabitlerinin hangi formda olduğuna bakalım. Kompleks cebir (2-boyutlu cebir) boyutu 2 $(\dim R(i) = 2)$ ve bazıda $\{1, i\}$ olan cebirdir. Bu kompleks cebir birleşimli değişimli ve birimli cebirdir ve $i^2 = -1$ şartını sağlar. Kompleks cebir için $1.i = i.1 = i$ olmasından

$$C_{12}^{1} = C_{21}^{1} = 0, \;\; C_{12}^{2} = C_{21}^{2} = 1,$$

$i^2 = -1$ olmasından

$$C_{22}^{1} = -1, \;\; C_{22}^{2} = 0,$$

$1.1 = 1$ olmasından ise

$$C_{11}^{1} = 1, \;\; C_{11}^{2} = 0$$

şeklinde sekiz tane yapı sabitine sahiptir. Değişmeli olduğundan aşağı indislere göre simetriktir. Kompleks cebirin birimi ise $\{\varepsilon^{\alpha}\} = \{1, 0\}$ şeklindedir.

Yapı sabitlerinin yardımıyla matrisleri oluşturalım. Değişme özelliğinin olmadığını ve birimli olduğunu kabul edelim. Yapı sabitlerinin matris dilinde yazılımı

$$C_{\alpha} = \left(C_{\alpha\beta}^{\gamma}\right) = \begin{pmatrix} C_{\alpha 1}^{1} & C_{\alpha 2}^{1} \\ C_{\alpha 1}^{2} & C_{\alpha 2}^{2} \end{pmatrix}$$

ve

$$\tilde{C}_\beta = \left(C^\gamma_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} C^1_{\beta 1} & C^1_{\beta 2} \\ C^2_{\beta 1} & C^2_{\beta 2} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Cebirin değişmeli olması durumunda $C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ olur. Boy$A_m = m,\ \gamma = 1,\ldots,m$ olmak üzere C_α $m\times m$ tipinde bir kare matris olur. $m\times m$ tipindeki tüm kare matrislerin kümesine baksak genelde vektör uzayıdırlar. Kare matrislerde değişme özelliği dışındaki diğer özellikler vardır ve boyutu da m^2 dir.

$\vec{a} \in A_m$ olsun.

$$\vec{a} = a^a \vec{e}_\alpha \rightarrow a^a C_\alpha = C(A)$$

$$\vec{a} = a^\alpha \vec{e}_\alpha \rightarrow a^\alpha \tilde{C}^{'}_\alpha = \tilde{C}^{'}(A), \quad a^\alpha \in \mathbb{R}$$

şeklindeki iki tane birebir örten dönüşümlere bakalım. Bu gösterimlerden $C_\alpha(A)$ ya 1. regüler tasvir veya regüler matris, $\tilde{C}'_\alpha(A)$ ya 2. regüler tasvir veya transpoz regüler matris denir. Bu aşamadan sonra cebiri değişmeli olarak alacağız. Yani $\vec{e}_\alpha.\vec{e}_\beta = \vec{e}_\beta.\vec{e}_\alpha$ olarak alacağız. Bu eşitlik yapı sabitleri için,

$$\begin{aligned} C^\gamma_{\alpha\beta}\vec{e}_\gamma &= C^\gamma_{\beta\alpha}\vec{e}_\gamma \\ \Rightarrow C^\gamma_{\alpha\beta} &= C^\gamma_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

olur. Son eşitlik matris dilinde, $C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ şeklinde yazılır. Burada amaç matrislere (1,1) tipli tensör karşı getirmek. $C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ eşitliğine değişmeli olma durumu diyeceğiz.

Şimdi kompleks cebir için regüler ve transpoz regüler matrislere bakacağız. C_α,

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} C_{\alpha 1}^1 & C_{\alpha 2}^1 \\ C_{\alpha 1}^2 & C_{\alpha 2}^2 \end{pmatrix}$$

şeklindeydi. Burada C_1,

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 \\ C_{11}^2 & C_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

şeklinde birim matris olacak, C_2 ise

$$C_2 = \begin{pmatrix} C_{21}^1 & C_{22}^1 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki bir matris olacak. Kompleks cebir için regüler matris $\{C_1, C_2\}$ şeklinde gösterilir. 1. regüler matris bütün cebirlerde birim matristir. 2. regüler tasvirin elemanları

$$C_1^T = C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C_2^T = C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve 2. regüler tasvir (transpoz regüler matris) $\{C_1^T, C_2^T\}$ şeklinde gösterilir.

3.2.2. Cebirsel yapıların holomorfluğu

Bundan sonra birimli, birleşimli ve değişmeli cebiri ele alacağız. 2-boyutlu uzayda holomorfluk analitikliğe denktir. 2 den fazla boyutta analitiklik yerine holomorfluk kullanılır.

A_m, $m-$boyutlu cebir (hiper kompleks cebir) olsun. Bu cebirirn bazını $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_m\}$ olarak alalım. $\vec{e}_1 = 1$ olsun. Yani $\vec{e}_1$ adi birim ile özdeşlesin. $x = x^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\alpha \in R$ ifadesine cebirsel değişken veya hiper kompleks değişken denir.

$f^\alpha(x^1, x^2, ..., x^m)$, $x^\alpha \in R$, $\alpha = 1, 2, ..., m$ için cebirsel fonksiyonumuzu

$$F = f^\alpha \vec{e}_\alpha$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonun $dF = df^\alpha \vec{e}_\alpha$ diferensiyeli $\exists\, g(x) = F'(x)$ olacak şekilde $dF = F'(x)dx$ şeklinde yazılabiliyorsa, F fonksiyonuna x'e göre diferensiyellenebilir (holomorf) fonksiyon denir.

Teorem 3.2.2.1: F fonksiyonunun x'e göre holomorf olması için gerek ve yeter şart

$$C_\alpha D = DC_\alpha \tag{3.10}$$

olmasıdır.

İspat: $F'(x) = \tilde{F}^\alpha \vec{e}_\alpha$, $df = df^\alpha \vec{e}_\alpha$, $dx = dx^\alpha \vec{e}_\alpha$ eşitliklerini

$$dF = F'(x)dx$$

eşitliğinde yerine yazarsak;

$$dF = \tilde{F}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}dx^{\beta}\vec{e}_{\beta} = df^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} \tag{3.11}$$

eşitliğini elde ederiz. $df^{\alpha} = (\partial_{\beta} f^{\alpha})dx^{\beta}$ olduğundan bu eşitliği (3.11) eşitliğinde yerine yazarsak ve $\vec{e}_{\alpha}\vec{e}_{\beta} = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\vec{e}_{\gamma}$ eşitliğini de göz önünde bulundurursak,

$$(\partial_{\beta} f^{\alpha})dx^{\beta}\vec{e}_{\alpha} = \tilde{F}^{\alpha}C^{\gamma}_{\alpha\beta}\vec{e}_{\gamma}dx^{\beta} \tag{3.12}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada toplam indisini keyfi harfle işaretlememiz mümkün olduğundan (3.12) eşitliğinin sol tarafındaki α toplama indisi yerine γ yazabileceğimizden

$$\partial_{\beta} f^{\gamma} = \tilde{F}^{\alpha}C^{\gamma}_{\alpha\beta} = \tilde{F}^{\alpha}C_{\alpha} \tag{3.13}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\partial_{\beta} f^{\gamma}$ matrisi C_{α}'nın lineer terkibi olarak yazılmıştır. (3.13) yazılımı holomorfluk şartının matematiksel yazılımıdır.

$$(\partial_{\beta} f^{\gamma})C_{\alpha} = C_{\alpha}(\partial_{\beta} f^{\gamma}) \Rightarrow C_{\alpha}D = DC_{\alpha}$$

şeklinde yazmış olduk. Şimdide tersini ispat edelim. (3.10) şartını açık şekilde yazalım.

$$C^{\beta}_{\alpha\gamma}\partial_{\beta} f^{\sigma} = \partial_{\gamma} f^{\beta}C^{\gamma}_{\alpha\beta} \tag{3.14}$$

(3.14) eşitliğinin her iki tarafını ε^{γ} ile işleme tabi tutarsak, $\partial_{\beta} f^{\sigma}$'yı C_{α}'nın lineer terkibi olarak

$$\partial_\beta f^\sigma = \varepsilon^\gamma \partial_\gamma f^\beta C_\alpha = \tilde{F}^\alpha C_\sigma$$

$$\partial_\beta f^\sigma = \tilde{F}^\alpha C_\sigma \tag{3.15}$$

(3.15) eşitliğide bizim için holomorfluk şartıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$C_\alpha = C_{\alpha\beta}^\gamma$ şeklinde idi. D ise $D = \left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right)$ şeklindeki jacobian matrisidir. Kompleks cebir için C_α regüler matrisleri $(\alpha = 1,2)$ ve D jacobian matrisi sırasıyla

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Bu değerleri (3.10) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

eşitliğini elde ederiz. Komplekste $\omega = u(x,y) + i.v(x,y)$ olduğundan, son ifadenin kompleks dildeki eşitliğini kullanırsak

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow U_x = V_y, \quad U_y = -V_x$ şartlarını elde ederiz. Bu ifadelere Couchy-Riemannian şartları denir. Yani $C_\alpha D = DC_\alpha$ Couchy-Riemannian şartı, yani holomorfluk şartıdır. (3.10) ile verilen şarta Scheffers şartı da denir. Scheffers şartının cebir için genelleştirilmesi yapılır ve sonuçta Couchy-Riemannian şartı oluşur.

$F'(x) = \varepsilon^\gamma \partial_\gamma f^\alpha \vec{e}_\alpha$ eşitliğini yazabildiğimizden, yani $F'(x)$'i, $\vec{e}_\alpha$'nın lineer terkibi olarak yazabildiğimizden, $F'(x)$ de bir fonksiyondur. Bu $F'(x)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu var mı? (Yani $F(x)$ fonksiyonunun 2. türevi var mı?) şartları nelerdir? onları araştıralım.

Eğer $F(x)$ fonksiyonu için $F'(x)$ fonksiyonu var ise $F(x)$ fonksiyonuna holomorf fonksiyon dedik. Şimdi eğer $F'(x)$ fonksiyonu için $F''(x)$ fonksiyonu varsa $F'(x)$ fonksiyonu holomorf olacak. $\varepsilon^\beta \partial_\beta f^\alpha$ 'nın jacobian matrisini alalım. (3.14) eşitliğini yani

$$C^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma f^\sigma = \partial_\beta f^\gamma C^\sigma_{\alpha\gamma}$$

eşitliğinin her iki tarafını $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial x^\theta}$ ile işleme tabi tutarsak,

$$C^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f^\sigma}{\partial x^\theta \partial x^\gamma} = \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^\theta \partial x^\beta} C^\sigma_{\alpha\gamma}$$

eşitliğini elde ederiz. f 'ler reel fonksiyonlar, x 'ler de reel değişkenler olduğundan ∂x türevlerinin yerlerini değiştirebiliriz. Ayrıca son eşitliğin her iki tarafını ε^{θ} ile işleme tabi tutarsak,

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\varepsilon^{\theta}\frac{\partial f^{\sigma}}{\partial x^{\theta}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\varepsilon^{\theta}\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial x^{\theta}}\right)C_{\alpha\gamma}^{\sigma},$$

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}\partial_{\gamma}\left(\varepsilon^{\theta}\partial_{\theta}f^{\sigma}\right)=\partial_{\beta}\left(\varepsilon^{\theta}\partial_{\theta}f^{\gamma}\right)C_{\alpha\gamma}^{\sigma}$$

yani $F'(x)$ 'in $\varepsilon^{\theta}\partial_{\theta}f^{\sigma}$ nun jacobian matrisinin C_{α} ile değişmeli olduğunu bulmuş olduk. Dolayısıyla $F'(x)$ fonksiyonu holomorftur. O halde bir fonksiyonun istenilen merteberden diferensiyelleri (türevleri) vardır. Yani holomorf fonksiyonların keyfi mertebeden türevide holomorftur.

İki holomorf fonksiyonun toplamı da, çarpımı da, çarpımının türevide holomorftur. Holomorf fonksiyonun skaler ile çarpımıda holomorftur. Holomorf fonksiyonun bileşkesinin neticeside holomorftur.

3.3. Nijenhuis Tensörü

Nijenhuis tensörü yapıların integrallenebilme şartlarının incelenmesinde gerekli tensördür. A ve B afinorlarının verildiğini kabul edelim. $X,Y\in T_0^1(M_n)$ için $N_{AB}(X,Y)$ tensörünü şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned}N_{AB}(X,Y)&=[AX,BY]+[BX,AY]+AB[X,Y]+BA[X,Y]\\&-A[X,BY]-A[BX,Y]-B[X,AY]-B[AX,Y]\end{aligned} \tag{3.16}$$

$\varphi^i_j X^j = \varphi^i$ ifadesi bir vektör alanı olduğundan, (3.16) eşitliğinin sağ tarafı vektör alanı olup $N_{AB}(X,Y) \in T^1_2(M_n)$ bir tensör alanıdır. X ve Y ye göre lineerdir.

Çeşitli kaynaklarda Nijenhuis tensörüne A, B afinorlarının Torsion'u denir. $A = B$ alınırsa bir tek afinor için Nihjenhuis tensörü ifadesi kullanılır (Torsion denilmez). Bir afinor yapı için Nijenhuis tensörü, $A = B = \varphi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} N_\varphi(X,Y) = N(X,Y) &= [\varphi X, \varphi Y] + [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] + \varphi^2[X,Y] \\ &\quad - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] \\ &= 2([\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y]) \end{aligned}$$

şeklindedir. Paratezin içi $N(X,Y)$ olarak alınır.

$$N_\varphi(X,Y) = N(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] \qquad (3.17)$$

(3.17) eşitliğinde $\varphi^2 = -I$ ise yapıya almost kompleks yapı, $\varphi^2 = I$ ise almost product yapı, $\varphi^2 = 0$ ise dual yapı denilir. Bu yapılar için $N(X,Y) = 0$ olması integrallenebilme şartıdır.

Şimdi de Nijenhuis tensörünü lokal koordinatlarda yazmaya çalışalım:

Bunun için Lie parantezinin

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \qquad (3.18)$$

özelliğinden faydalanacağız. $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ eşitliklerini (3.17) ve (3.18) eşitiklerinde yerine yazacağız. İlk önce (3.17) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$[f\partial_i, g\partial_j] = fg[\partial_i, \partial_j] + f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i$$

eşitliği elde edilir. $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan

$$[f\partial_i, g\partial_j] = f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i \qquad (3.19)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de (3.18) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$N_\varphi(\partial_i, \partial_j) = N^k_{(\varphi)ij}\partial_k = N^k_{ij}\partial_k$$

$$N^k_{ij}\partial_k = [\varphi\partial_i, \varphi\partial_j] + \varphi^2 \underbrace{[\partial_i, \partial_j]}_{=0} - \varphi[\partial_i, \varphi\partial_j] - \varphi[\varphi\partial_i, \partial_j]$$

$$= [\varphi^s_i\partial_s, \varphi^l_j\partial_l] - \varphi[\partial_i, \varphi^l_j\partial_l] - \varphi[\varphi^s_i\partial_s, \partial_j]$$

Lie parantezinin özelliğinden, yani (3.19) eşitliğinden

$$N^k_{ij}\partial_k = \varphi^s_i\varphi^l_j \underbrace{[\partial_s, \partial_l]}_{=0} + \varphi^s_i(\partial_s\varphi^l_j)\partial_l - \varphi^l_j(\partial_l\varphi^s_i)\partial_s$$

$$-\varphi\{\varphi^l_j \underbrace{[\partial_i, \partial_l]}_{=0} + (\partial_i\varphi^l_j)\partial_l - \varphi^l_j \underbrace{(\partial_l.1)}_{=0}\partial_i\}$$

$$-\varphi\{\varphi^s_i \underbrace{[\partial_s, \partial_j]}_{=0} + \varphi^s_i \underbrace{(\partial_s.1)}_{=0}\partial_j - (\partial_j\varphi^s_i)\partial_s\}$$

$$N^k_{ij}\partial_k = \varphi^s_i\partial_s\varphi^l_j\partial_l - \varphi^l_j\partial_l\varphi^s_i\partial_s - \partial_i\varphi^l_j\varphi^k_l\partial_k + \partial_j\varphi^s_i\varphi^k_s\partial_k$$

$$=(\varphi_i^s\partial_s\varphi_j^k-\varphi_j^l\partial_l\varphi_i^k-\partial_i\varphi_j^l\varphi_l^k+\partial_j\varphi_i^s\varphi_s^k)\partial_k$$

$$N_{ij}^k\partial_k=(\varphi_i^s\partial_s\varphi_j^k-\varphi_j^l\partial_l\varphi_i^k-\partial_i\varphi_j^l\varphi_l^k+\partial_j\varphi_i^s\varphi_s^k)\partial_k \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. (3.20) eşitliği Nijenhuis tensörünün lokal koordinatlarla yazılımıdır.

3.4. Skaler Eğrilik

M_n, n-boyutlu C^∞ sınıfından olan Riemannian manifoldu olsun. g_{ij} metriğimiz ise Simetrik, regüler ve konneksiyonumuz da Levi-Cvita konneksiyonu olsun.

Riemannian manifoldunda $R_{ijk}^s=R(X,Y)Z$ eğrilik tensöründeki s indisini 4. yere indirelim.

$$R_{ijkt}=g_{st}R_{ijk}^s \;\Rightarrow\; R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

şeklinde (0,4) tipli tensör elde edilir.

Ricci tensörü $R_{ij}=R_{sişj}^s$ şeklinde idi. Ricci tensörüne öyle bir skaler dahil edelim ki, tam kontraksiyon yapalım ve

$$R=g^{ij}R_{ij}$$

olsun. Bu R eğriliğine skaler eğrilik denir. Genelde R eğriliği manifoldun noktasına bağlı fonksiyon olmuş olur.

Şimdi skaler eğriliğinin yüzeyde neye karşılık geldiğini bulalım:

Yüzeyin birinci esas formu (Riemannian metriği) $I = g_{ij} du^i du^j$ ve ikinci esas formu $II = h_{ij} du^i du^j$ şeklinde olmak üzere, κ Gauss (veya tam) eğriliği

$$\kappa = \kappa_1 . \kappa_2 = \frac{Det(h_{ij})}{De(g_{ij})}$$

$$\kappa = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12}{}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}{}^2}$$

şeklindedir (Salimov and Mağden,1999). Yüzeyler için eğrilik tensörü,

$$\kappa = \frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}{}^2}$$

şeklinde bu son eşitlik Gauss eğriliği için önemli bir teoremdir. Skaler eğrilik yüzeyler için (n=2) Gauss eğriliğinin 2 katı olduğunu göstermeye çalışalım. Skaler eğriliği yüzeyde,

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} R_{sij}{}^{s} = g^{ij} g^{ts} R_{sijt}$$

$$\Rightarrow R = g^{21} g^{21} R_{1212} + g^{11} g^{22} R_{2112} + g^{22} g^{11} R_{1221} + g^{12} g^{12} R_{2121}$$

şeklindeki eşitliğe sahiptir. Burada, Riemannian uzayında R_{ijkl} eğrilik tensörünün özelliğinden, ilk iki indis ve son iki indis aynı olanlar sıfır olur.

$$R = g^{12} g^{12} R_{1212} - g^{11} g^{22} R_{1212} - g^{11} g^{22} R_{1221} + g^{12} g^{12} R_{1212}$$

$$= ((g^{12})^2 - g^{11} g^{22} - g^{11} g^{22} + (g^{12})^2) R_{1212}$$

$$= (-2(-(g^{12})^2 + g^{11}g^{22}))R_{1212}$$

$$R = -2(Det(g^{-1}))R_{1212}$$

$$R = -2\frac{R_{1212}}{g_{11}\ g_{22} - g_{12}{}^2}$$

$$R = 2\kappa$$

bulunmuş olur. Bu son eşitlik, yüzeyler için skaler eğriliğin, Gauss eğriliğinin 2 ile çarpılmış hali olduğunu gösterir. Yüzeyler bilinen 2-boyutlu Riemannian manifoldudur.

3.5.Hermitian ve Kahlerian Manifoldlar

M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -I$ olan tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) ise hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır. M_{2n} üzerindeki Hermitian metrik, M_{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{3.21}$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğidir. Bazen (3.21)şartını sağlayan g metriğine hybrid metrik de denir.

Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifolda hemen hemen Hermiitian manifold, Hermitian metriğe sahip kompleks manifolda ise Hermitian manifold denir.

Teorem 3.5.1: M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına sahip hemen hemen kompleks manifold olsun. M_{2n} 'nin kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi = 0$ ve $S = 0$ olacak şekilde ∇ afin konneksiyonunun olmasıdır. Burada S, ∇ 'nın burulma tensörüdür.

M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip hemen hemen Hermitian manifold olsun. M_{2n} üzerindeki Ω esas 2-formu

$$\Omega(X,Y) = g(X,\varphi Y) = (g \circ \varphi)(X,Y) \tag{3.22}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.5.2: M_{2n}, φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip hemen hemen kompleks manifold olsun. ∇, g ile tanımlanan Riemannian konneksiyonunun kovaryant türevlemesi olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

a) $\nabla\varphi = 0$

b) φ hemen hemen kompleks yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olması ve Ω esas 2-formunun kapalı olması, yani $N_\varphi = 0$ ve $d\Omega = 0$.

M_{2n} hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki g Hermitian metriği için Ω esas 2-formu kapalı ise g 'ye Kahlerian metrik denir. Kahlerian metriğine sahip M_{2n} hemen hemen kompleks manifolduna hemen hemen Kahlerian manifold denir. Kahlerian metriğe sahip M_{2n} kompleks manifolduna da Kahlerian manifold denir. Teorem 3.5.2 den, M_{2n} Hermitian manifoldunun Kahlerian manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi = 0$ olması gerektiği açıktır.

3.6. Goldberg Varsayımı

Goldberg (Matsushita 2004) tarafından 1969 yılında ortaya atılan ünlü bir varsayım vardır. Bu varsayım bir kompakt Kahler-Einstein Riemannian manifoldunun hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olduğunu ifade eder.

(M, J, g), J hemen hemen kompleks yapısı ve g, J - invaryant Riemannian metriğine sahip bir hemen hemen Hermitian manifold olsun. Yani $g(JX, JY) = g(X, Y)$ olsun. Burada hemen hemen kompleks yapı ile

$$J^2 = 1 \tag{3.23}$$

şartını sağlayan M 'nin TM tanjant demetinin bir lineer endomorfizmi kastedilir.

Hemen hemen Hermitian yapının (J, g) çifti

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y) \tag{3.24}$$

ile Ω esas 2-formu tanımlar.

Bu durumda Goldberg varsayımı (M, J, g) hemen hemen Hermitian manifoldunu aşağıdaki üç şartı sağlarsa manifoldun Kahler manifold olması gerektiğini ifade eder:

(GC1) M kompakt manifolddur,

(GC2) g Riemannian metriği Einstein'dir,

(GC3) Ω esas 2-form simplektiktir.

Eğer Ω simplektik ise yani (GC3) şartı var ise, (M, J, g) hemen hemen Hermitian manifoldu hemen hemen Kahler manifoldu olarak adlandırılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Norden Manifoldları

M_{2n} nötral metriğe sahip bir Riemannian manifoldu olsun. Yani (n,n) formunda bir pseudo-Riemannian g metriği olsun. M_{2n}'deki bütün (p,q) tipli tensör alanlarının kümesini $\Im_q^p(M_{2n})$ ile gösteririz. Manifoldların, tensör alanlarının ve konneksiyonların her zaman diferensiyellenebilir ve C^∞ sınıfından olduğu kabul edeceğiz.

(M_{2n},φ), φ hemen hemen kompleks yapısına sahip kompleks bir manifold olsun. Eğer her $x \in M_{2n}$ noktasının bir U_x komşuluğundaki belirli holonomik (doğal) çatıda $\varphi = (\varphi_j^i)$ matrisi sabit forma dönüşüyor ise bu yapıya integrallenebilirdir denir. Hemen hemen kompleks φ yapının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart kovaryant sabitin φ tensör yapısına göre bir ∇ burulmasız afin konneksiyonun bulunmasıdır. Yani $\nabla\varphi = 0$ olmasıdır. Ayrıca Nijenhuis tensörü ($N_\varphi \in \Im_2^1(M_{2n})$ 'nin) sıfıra eşit olmasının φ'nin integrallenebilmesine denk olduğunu biliyoruz (Kobayashi and Nomizu 1969). Eğer φ integrallenebilirse bu durumda bir kompleks yapı vardır ve ayrıca M_{2n}, $X_n(\mathbb{C})$'nin geçiş fonksiyonlarının holomorfik dönüşümler olduğu bir holomorfik manifolddur.

4.1.1. Norden Metrikler

Eğer her $X,Y \in \Im_0^1(M_{2n})$ için

$$g(\varphi X,\varphi Y) = -g(X,Y)$$

veya buna eşdeğer olarak,

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

ise g metriğine Norden metrik denir (Norden 1960).

Bu tür metriklere pür, anti-Hermitian ve B metrikleri adı altında çalışılmıştır (Etayo and Santamaria 2000; Ganchev and Borisov 1986; Kruchkovich 1972; Salimov 1983; Tachibana 1960; Vishnevskii 2002). Eğer (M_{2n}, φ), g Norden metriğine sahip bir hemen hemen kompleks manifold ise (M_{2n}, φ, g)'ye bir hemen hemen Norden manifold denir. Eğer φ integrallenebilir ise (M_{2n}, φ, g) Norden manifoldu denir.

4.1.2. Holomorfik (hemen hemen holomorfik) tensör alanları

$\overset{*}{t}$, $X_n(\mathbb{C})$ holomorfik manifoldu üzerinde kompleks tensör alanı olsun. Böyle bir tensör alanının reel modeli φ afinor yapısının etkisine bağlı, vektör veya kovektör argümanlarından bağımsız M_{2n} üzerinde bir tensör alanıdır. Böyle tensör alanlarının φ 'ye göre pür olduğu söylenir. Bu şekildeki yapılar birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Kruchkovich 1972; Salimov 1994; Salimov 1996; Tachibana 1960; Vishnevskii, Shirokov and Shurygin 1985; Vishenevskii 2002; Yano and Ako 1968). Özellikle $(0, q)$ tipli bir ω tensör alanı için pürlük şartı, her $X_1, ..., X_q \in \Im_0^1(M_{2n})$ için

$$\omega(\varphi X_1, X_2, ..., X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2, ..., X_q) = ... = \omega(X_1, X_2, ..., \varphi X_q)$$

şartının sağlanmasıdır.

ω pür tensör alanına uygulanan

$$\Phi_\varphi : \Im_q^0(M_{2n}) \to \Im_{q+1}^0(M_{2n})$$

operatörü, L_Y, Y ye göre Lie türevi olmak üzere;

$$(\Phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2, ..., Y_q) = (\varphi X)(\omega(Y_1, Y_2, ..., Y_q)) - X(\omega(\varphi Y_1, Y_2, ..., Y_q))$$

$$+\omega((L_{Y_1}\varphi)X, Y_2, ..., Y_q) + ... + \omega(Y_1, Y_2, ..., (L_{Y_q}\varphi)X),$$

ile tanımlanır.

φ, M_{2n} de kompleks yapı ve $\Phi_\varphi \omega$ tensör alanı sıfır olduğunda, $X_n(\mathbb{C})$ deki $\overset{*}{\omega}$ kompleks tensör alanına holomorfiktir denir (Kruchkovich 1972; Tachibana 1960; Yano and Ako 1968). $X_n(\mathbb{C})$ üzerindeki böyle bir $\overset{*}{\omega}$ holomorfik tensör alanı, her $X, Y_1, ..., Y_q \in \Im_0^1(M_{2n})$ için

$$(\Phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2, ..., Y_q) = 0$$

olacak şekilde ω pür tensör alanı formundaki M_{2n} üzerinde gerçekleştirilir. Bu nedenle M_{2n} üzerindeki böyle bir ω tensör alanına holomorfik tensör alanı denir. φ, M_{2n} de bir hemen hemen kompleks yapı ise $\Phi_\varphi \omega = 0$ şartını sağlayan ω tensör alanına hemen hemen holomorfiktir denir.

4.1.3. Holomorfik Norden (Kahler -Norden) metrikler

Bir Norden manifoldunda Norden metriği her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_{2n})$ için

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = 0 \tag{4.1}$$

şartını sağlıyorsa g metriğine holomorftur denir.

(4.1) denkleminde $X=\partial_k$, $Y=\partial_i$, $\mathrm{Z}=\partial_j$ yazarsak, $x^1,...,x^n$ keyfi local koordinat sistemine göre $\Phi_\varphi g$ 'nin $(\Phi_\varphi g)_{kij}$ bileşenlerini

$$(\Phi_\varphi g)_{kij}=\varphi_k^m\partial_m g_{ij}-\varphi_i^m\partial_k g_{mj}+g_{mj}(\partial_i\varphi_k^m-\partial_k\varphi_i^m)+g_{im}\partial_j\varphi_k^m=0$$

şeklinde elde ederiz.

Eğer (M_{2n},φ,g), g holomorf Norden metriğine sahip bir Norden manifold ise (M_{2n},φ,g) 'ye holomorfik Norden manifold denir.

Bazı durumlarda holomorfik Norden manifoldlara Kahler manifoldlarının benzeri olarak bakabiliriz. Aşağıdaki teorem hemen hemen Hermitian manifoldunun Kahler manifold olması için gerek ve yeter şart hemen hemen kompleks yapının Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır şeklinde bilinen sonuca benzerdir.

Teorem 4.1.3.1: (Salimov and İşcan 2009) g Norden metriğine sahip hemen hemen kompleks manifold için $\Phi_\varphi g=0$ olma şartı, $\nabla\varphi=0$ olma şartına denktir. Burada ∇, g 'nin Levi-Civita konneksiyonudur.

Kahler-Norden manifold, ∇, g 'nin Levi-Civita konneksiyonu ve g metriği Norden metriği olmak üzere $\nabla\varphi=0$ olacak şekilde φ hemen hemen kompleks yapısına ve g Pseudo-Riemannian metriğine sahip M_{2n} manifoldunu içeren (M_{2n},φ,g) şeklindeki bir üçlüdür. Bu nedenle Kahler-Norden manifoldları ile holomorfik metriğe sahip Norden manifoldları arasında bire-bir uygunluk vardır. Böyle bir manifoldda Riemannian eğrilik tensörü pür ve holomorfiktir. Hatta skaler eğrilik lokal olarak holomorfik fonksiyondur ((Salimov and İşcan 2009), (Salimov 1983)).

φ hemen hemen kompleks yapının integrallenebilmesi, $\nabla\varphi = 0$ şartını sağlayan burulmasız bir afin konneksiyonun varlığına denk olduğu bilinir. g 'nin ∇ Levi-Civita konneksiyonu burulmasız bir afin konneksiyon olduğu durumda, $\Phi_\varphi g = 0$ ise φ integrallenebilirdir diyebiliriz. Dolayısıyla, $\Phi_\varphi g = 0$ ve $N_\varphi \neq 0$ şartlarına sahip hemen hemen Norden manifoldu yani, hemen hemen holomorfik Norden manifoldu yoktur.

Bu çalışmada 4-boyutlu Norden manifoldlarına bakacağız. Walker metriğini kullanarak uygun bir hemen hemen kompleks yapıya sahip yeni Norden-Walker metrikleri elde etmeye çalışacağız.

4.2. Norden-Walker Metrikler

4.2.1. g Walker metriği

M_4 manifoldunda g metriğine göre paralel olan 2 boyutlu bir D null dağılımı varsa, 4-boyutlu M_4 manifoldu üzerindeki g nötral metriğine Walker metriği denir. Walker 'in (Walker 1950) teoreminden, a, b ve c, (x, y, z, t) koordinatlarının diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere, lokal koordinat sistemine göre Walker metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

ile verilir. Paralel D null 2 manifoldu lokal olarak $\{\partial_x, \partial_y\}$ ile örtülür. Burada $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$ ile göstereceğiz.

(Matsushita 2005) de, g ye göre uygun bir J hemen hemen kompleks yapısı $J\partial_x = \partial_y$ ve $J\partial_y = -\partial_x$ olmak üzere;

$$J = (J_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

şeklinde tek türlü olarak tanımlanmıştır.

Buradaki uygun J hemen hemen kompleks yapının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$a_x - b_x - 2c_y = 0, \qquad a_y - b_y - 2c_x = 0 \tag{4.4}$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanmasıdır.

(Bonome *et al.* 2005) de, 4 boyutlu Walker manifoldu üzerinde böyle bir uygun J hemen hemen kompleks yapısı için (g^{N+}, J) hemen hemen Norden yapısı inşa edilmiştir. Burada g^{N+}, M de $g^{N+}(JX, JY) = -g^{N+}(X, Y)$ özelliklerini sağlayan bir metriktir. Böyle bir metrik

$$g^{N+} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & -a & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) \\ -b & -2c & \frac{1}{2}(1-ab) & -2c \end{pmatrix}$$

formundadır (Bonome *et al.* 2005). Bu şekildeki metrik, hemen hemen Norden-Walker metriği olarak adlandırılır. Böyle bir yapıyı inşa etmek, Walker metriğinden farklı olan, verilen hemen hemen kompleks yapı için bir Norden metriği bulmaktır.

Bu çalışmanın amacı, tanımlanan uygun bir F hemen hemen kompleks yapısına sahip, metriği Walker metriği olmayan, (g,F) şeklinde bir hemen hemen Norden-Walker yapısı bulmaktır. Yani g metriği sabit tutularak, $g(FX,FY)=-g(X,Y)$ şartını sağlayan F hemen hemen kompleks yapısı bulacağız.

(Bonome *et al.* 2005) de verilen bir hemen hemen kompleks yapı için bir metrik inşa edilmiştir. Ancak bizim metodumuzda, verilen metrik için hemen hemen kompleks yapı inşa etmeye çalışacağız.

4.3. Hemen Hemen Norden-Walker Manifoldlar

M_4 Walker manifoldu üzerinde F hemen hemen kompleks yapısı

i. $F^2=-I,$

ii. $g(FX,Y)=g(X,FY),$ (Nordenlik Özelliği)

iii. $F\partial_x=\partial_y,\quad F\partial_y=-\partial_x$

şartlarını sağlamış olsun.

Bu üç özellikten

$$\begin{cases} F\partial_x = \partial_y, \\ F\partial_y = -\partial_x, \\ F\partial_z = \alpha\partial_x + \frac{1}{2}(a+b)\partial_y - \partial_t, \\ F\partial_t = -\frac{1}{2}(a+b)\partial_x + \alpha\partial_y + \partial_z \end{cases}$$

şeklinde tek olmayan F yapısı tanımlanır. F 'nin lokal bileşenleri, $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$ doğal çatısına göre,

$$F = (F^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ keyfi fonksiyonlardır.

$\alpha = c$ alırsak, hemen hemen kompleks yapımız

$$\varphi = (\varphi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & c & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

şeklinde tek türlü elde edilmiş olur.

(4.5) dan $a = -b$ ve $c = 0$ alırsak φ 'nin integrallenebilir olduğu kolayca görebiliriz.

4.3.1. φ 'nin integrallenebilmesi

İntegrallenebilme şartı için genel duruma bakacağız.

Hemen hemen Norden-Walker manifoldlar üzerindeki hemen hemen φ kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$(N_\varphi)^i_{jk} = \varphi^m_j \partial_m \varphi^i_k - \varphi^m_k \partial_m \varphi^i_j - \varphi^i_m \partial_j \varphi^m_k + \varphi^i_m \partial_k \varphi^m_j = 0 \tag{4.6}$$

olmasıdır.

(4.5) ve (4.6) dan aşağıdaki integrallenebilme şartı elde edilir.

Teorem 4.3.1.1: Norden-Walker manifoldlar üzerindeki uygun φ hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} a_x + b_x + 2c_y = 0 \\ a_y + b_y - 2c_x = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

olmasıdır.

Bu teoremden kolayca görülür ki, $a = -b$ ve $c = 0$ ise bu durumda φ integrallenebilirdir.

(M_4, φ, g) Norden-Walker manifold $(N_\varphi = 0)$ ve $a = b$ olsun. Bu durumda (4.7) denklemi

$$\begin{aligned} a_{xx} + a_{yy} &= 0 \\ c_{xx} + c_{yy} &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliğinden

$$\begin{cases} a_x = -c_y \\ a_y = c_x \end{cases} \tag{4.9}$$

ye sadeleştirilir.

Burada a ve c fonksiyonları x ve y argümanlarına göre harmoniktir.

Böylelikle aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.3.1.2: (M_4, φ, g) üçlüsü Norden-Walker manifold ve $a = b$ ise bu durumda a ve c , x ve y argümanlarına göre harmoniktir.

4.3.2. Norden-Walker metriği için örnek

Biz şimdi Norden-Walker metriklerinin özel tiplerinin varlığını ispatlamak için Teorem 4.3.1.2'yi uygulayacağız.

$a = b$ ve $h(x, y)$ de x ve y değişkenlerinin harmonik bir fonksiyonu olsun. Örneğin; $h(x, y) = e^x \cos y$ olsun. Bu durumda

$$a = a(x, y, z, t) = h(x, y) + \alpha(z, t) = e^x \cos y + \alpha(z, t)$$

yazabiliriz. Burada α, z ve t'nin keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Bu durumda a da x ve y'ye göre harmoniktir.

$$a_x = e^x \cos y$$
$$a_y = -e^x \sin y$$

yazılır.

(4.9) den c için

$$c_x = a_y = -e^x \sin y$$
$$c_y = -a_x = -e^x \cos y$$

şeklinde verilen kısmi diferensiyel denklemi elde ederiz. Bu denklem için

$$c = -e^x \sin y + \beta(z,t),$$

şeklinde çözümler vardır. Burada β, z ve t'nin keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Dolayısıyla Norden-Walker metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & e^x \cos y + \alpha(z,t) & -e^x \sin y + \beta(z,t) \\ 0 & 1 & -e^x \sin y + \beta(z,t) & e^x \cos y + \alpha(z,t) \end{pmatrix}$$

formunda olmuş olur.

4.4. Holomorfik Norden-Walker (Kahler -Norden-Walker) Metrikler

(M_4, φ, g) hemen hemen Norden-Walker manifold olsun.

$$(\Phi_\varphi g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{ij} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj}(\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m) + g_{im}\partial_j \varphi_k^m = 0 \tag{4.10}$$

ise Teorem 4.1.3.1'den dolayı φ integrallenebilirdir ve (M_4, φ, g) üçlüsü bir holomorfik Norden-Walker veya Kahler-Norden-Walker manifolddur. Burada hemen hemen Norden-Walker manifoldlar için $\Phi_\varphi g = 0$ ve $N_\varphi \neq 0$ olan manifoldların olmadığını görürüz.

(4.2) ve (4.5) ifadeleri (4.10) de yerine yazılırsa

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{xzz} = a_y,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{xzt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{xtz} = \tfrac{1}{2}(b_x - a_x) + c_y,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{xtt} = b_y - 2c_x,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{yzz} = -a_x,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{yzt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{ytz} = \tfrac{1}{2}(b_y - a_y) - c_x,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{ytt} = -b_x - 2c_y,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{zxz} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{zzx} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{txt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{ttx} = c_x,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{zxt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{ztx} = -\left(\Phi_\varphi g\right)_{txz} = -\left(\Phi_\varphi g\right)_{tzx} = \tfrac{1}{2}(a_x + b_x),$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{zyz} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{zzy} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{tyt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{tty} = c_y,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{zyt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{zty} = -\left(\Phi_\varphi g\right)_{tyz} = -\left(\Phi_\varphi g\right)_{tzy} = \tfrac{1}{2}(a_y + b_y),$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{zzz} = ca_x - a_t + 2c_z + \tfrac{1}{2}(a+b)a_y,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{zzt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{ztz} = cc_x + b_z + \tfrac{1}{2}(a+b)c_y,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{ztt} = cb_x + a_t - 2c_z + \tfrac{1}{2}(a+b)b_y,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{tzz} = ca_y - b_z - \tfrac{1}{2}(a+b)a_x,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{tzt} = \left(\Phi_\varphi g\right)_{ttz} = cc_y - a_t + 2c_z - \tfrac{1}{2}(a+b)c_x,$$

$$\left(\Phi_\varphi g\right)_{ttt} = cb_y + b_z - \tfrac{1}{2}(a+b)b_x.$$

elde edilir.

Bu eşitliklerden aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.4.1: (M_4, φ, g) üçlüsünün Kahler-Norden-Walker olması için gerek ve yeter şart

$$a_x = a_y = c_x = c_y = b_x = b_y = b_z = 0, \qquad a_t - 2c_z = 0. \tag{4.11}$$

kısmi diferensiyel denklemin sağlanmasıdır.

Sonuç:

$$g=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b(t) \end{pmatrix}$$

metriğine sahip (M_4,φ,g) üçlüsü daima Kahler-Norden-Walker 'dir.

4.5. Norden-Walker Manifoldlarının Eğrilik Özellikleri

R ve r sırasıyla Walker metriğinin eğrilik ve skaler eğriliği ise bu durumda R ve r 'nin bileşenleri sırasıyla

$$R_{xzxz}=-\tfrac{1}{2}a_{xx},\quad R_{xzxt}=-\tfrac{1}{2}c_{xx},$$

$$R_{xzyz}=-\tfrac{1}{2}a_{xy},\quad R_{xzzt}=\tfrac{1}{2}a_{xt}-\tfrac{1}{2}c_{xz}-\tfrac{1}{4}a_yb_x+\tfrac{1}{4}c_xc_y,$$

$$R_{xzyt}=-\tfrac{1}{2}c_{xy},\quad R_{xtxt}=-\tfrac{1}{2}b_{xx},$$

$$R_{xtyz}=-\tfrac{1}{2}c_{xy},\quad R_{xtzt}=\tfrac{1}{2}c_{xt}-\tfrac{1}{2}b_{xz}-\tfrac{1}{4}(c_x)^2+\tfrac{1}{4}a_xb_x-\tfrac{1}{4}b_xc_y+\tfrac{1}{4}b_yc_x,$$

$$R_{xtyt}=-\tfrac{1}{2}b_{xy},\quad R_{yzyz}=-\tfrac{1}{2}a_{yy},$$

$$R_{yzyt}=-\tfrac{1}{2}c_{yy},\quad R_{ytyt}=-\tfrac{1}{2}b_{yy}, \tag{4.12}$$

$$R_{yzzt}=\tfrac{1}{2}a_{yt}-\tfrac{1}{2}c_{yz}-\tfrac{1}{4}a_xc_y+\tfrac{1}{4}a_yc_x-\tfrac{1}{4}a_yb_y+\tfrac{1}{4}(c_y)^2,$$

$$R_{ytzt}=\tfrac{1}{2}c_{yt}-\tfrac{1}{2}b_{yz}-\tfrac{1}{4}c_xc_y+\tfrac{1}{4}a_yb_x,$$

$$R_{ztzt}=c_{zt}-\tfrac{1}{2}a_{tt}-\tfrac{1}{2}b_{zz}-\tfrac{1}{4}a(c_x)^2+\tfrac{1}{4}aa_xb_x+\tfrac{1}{4}ca_xb_y-\tfrac{1}{2}cc_xc_y-\tfrac{1}{2}a_tc_x$$

$$+\tfrac{1}{2}a_xc_t-\tfrac{1}{4}a_xb_z+\tfrac{1}{4}ca_yb_x+\tfrac{1}{4}ba_yb_y-\tfrac{1}{4}b(c_y)^2-\tfrac{1}{2}b_zc_y$$

$$+\tfrac{1}{4}a_yb_t+\tfrac{1}{4}a_zb_x+\tfrac{1}{2}b_yc_z-\tfrac{1}{4}a_tb_y$$

dir ve

$$r = a_{xx} + 2c_{xy} + b_{yy} \tag{4.13}$$

şeklinde ifade edilir. ((Matsushita 2005), ek A ve C)

(M_4, φ, g) üçlüsünün Kahler-Norden-Walker olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.11) daki son eşitlik ve (4.12) den

$$R_{ztzt} = c_{zt} - \tfrac{1}{2} a_{tt} = -\tfrac{1}{2}(a_t - 2c_z)_t = 0$$

olduğu görülür.

(4.11) dan kolayca R'nin (4.12) deki diğer bileşenlerinin doğrudan sıfır olduğu görülür. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.5.1: (M_4, φ, g) Norden-Walker manifoldu, Kahler-Norden-Walker ise bu durumda M_4 düzgün (düzlemsel) manifolddur.

(M_4, φ, g) integrallenebilen uygun φ yapısına sahip bir Norden-Walker manifold olsun. Yani $N_\varphi = 0$ olsun. Eğer $a = b$ ise bu durumda Teorem 4.3.1.2'nin ispatından (4.8) eşitliğinin sağlandığı görülür. Eğer $c = c(y,z,t)$ ve $c = c(x,z,t)$ ise bu durumda $c_{xy} = (c_x)_y = (c_y)_x = 0$ olur. Bu durumlarda (4.8) den dolayı sırasıyla $a = a(x,z,t)$ ve $a = (y,z,t)$ bulunur. $c_{xy} = 0$ ve $a_{xx} + b_{yy} = 0$ ifadelerini kullanarak (4.13) den $r = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.5.2: (M_4, φ, g)

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x,z,t) & c(y,z,t) \\ 0 & 1 & c(y,z,t) & a(x,z,t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(y,z,t) & c(x,z,t) \\ 0 & 1 & c(x,z,t) & a(y,z,t) \end{pmatrix}$$

metriklerine sahip bir Norden-Walker non-Kahler manifold ise bu durumda M_4 skaler düzgün manifolddur.

4.6. Hemen Hemen Norden-Walker ve Kahler-Norden-Walker Manifoldlarının Goldberg Varsayımı Arasındaki İlişki

(M_{2n}, φ, g) bir hemen hemen Norden manifold olsun ve M_{2n} üzerinde $\Omega_\varphi(X,Y) = h(\varphi X, Y)$ şartını sağlayan uygun bir $\varphi - 2$ form seçelim. Burada $h(X,Y) = \tilde{g}(X,Y) + \tilde{g}(\varphi X, \varphi Y)$, her $\tilde{g}$ Riemannian metriği için M_{2n} de parakompakt olma şartını sağlayan Hermitian metriktir (Kobayashi 1963). Bu durumda biz Goldberg varsayımının aşağıdaki şekilde verilen Norden versiyonunu önerebiliriz (Matsushita 2007).

(G_1) M_{2n} kompakt,

(G_2) g, Einstein,

(G_3) $\varphi -$uygun 2-form kapalı

ise bu durumda φ integrallenebilir olmalıdır.

Tüm kompakt Norden-Walker 4-manifoldlar kümesinde iki alt aileyi

$$KNW=\left\{(M_4,\varphi,g):\ \Phi_\varphi g=0\right\},$$

$$GNW=\left\{\left(M_4,\varphi,g\right):\ M_4\ ,(G_2)\text{ ve }(G_3)\text{ şartlarına sahiptir.}\right\}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 4.6.1: $M_4\in KNW$ olsun. Bu durumda M_4, GNW nin *(G₂)* şartına sahip bir manifold ve φ integrallenebilir olmalıdır.

İspat: $M_4\in KNW$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 4.5.1'den M_4 düzlemseldir. Bu yüzden g'nin Einstein olduğu görülür. Teorem 4.1.3.1'den dolayı, $\Phi_\varphi g=0$ ise φ'nin integrallenebilir olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilecektir.

Bu tezde hemen hemen kompleks yapı ile donatılmış Walker metriği araştırılmıştır. Bu çalışmada ilk olarak Walker manifoldun tanımı verilmiş ve Walker metriğin $\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ koordinatları üzerinde bazı a, b ve c fonksiyonlarına bağlı olan

$$g\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu ifade edilmiştir.

İkinci olarak M_4 Walker manifoldu üzerinde F hemen hemen kompleks yapısı olmak üzere;

i. $F^2 = -I,$

ii. $g(FX, Y) = g(X, FY),$ (Nordenlik Özelliği)

iii. $F\partial_x = \partial_y, \quad F\partial_y = -\partial_x$

şartlarını sağlayan $\alpha = c$ alınarak tek türlü

$$\varphi = (\varphi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & c & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

yapısı bulunmuştur. Bu yapının integrallenebilmesi ve holomorf olması şartları araştırılmıştır.

Üçüncü olarak (M_4, φ, g) üçlüsünün Kahler-Norden-Walker manifold olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır.

Dördüncü olarak Norden-Walker manifoldlarının eğrilik özellikleri araştırılmıştır.

Son olarak hemen hemen Norden-Walker ve Kahler-Norden-Walker manifoldları ile Goldberg Varsayımı arasındaki ilişki incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Bonome A., Castro R., Hervella L. M. and MatsushitaY., Construction of Norden structures on neutral 4-manifolds, JP J. Geom. Topol.,**5** (2) (2005), 121-140.

Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-RíoE., Matsushita Y., MuškarovO.,Vázquez-LorenzoR., Almost Kahler Walker 4-manifolds, J. Geom. Phys.,**57** (2007), 1075-1088.

Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Muškarov O., Vázquez-Lorenzo R., Hermitian-Walker 4-manifolds, J. Geom. Phys.,**58** (2008), 307-323.

Etayo F. and Santamaria R., $(J^2 = \pm 1)$-metric manifolds, Publ. Math. Debrecen, **57** (2000), no.3-4, 435-444.

Ganchev G.T. and Borisov A. V., Note on the almost complex manifolds with a Norden metric, C. R. Acad. Bulgarie Sci.,**39** (1986), no.5, 31-34.

Iscan M. and Salimov A.A., On Kahler-Norden manifolds, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.,**119** (2009), no.1, 71-80.

Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry I, Willey, 1963.

Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of Differential Geometry II, Willey, 1969.

Kruchkovich G.I., Hypercomplex structure on a manifold, I, Tr. Sem. Vect. Tens. Anal., Moscow Univ., **16** (1972), 174-201.

Matsushita Y., Four-dimensional Walker metrics and symplectic structure, J. Geom. Phys.,**52** (2004), 89-99.

Matsushita Y., Walker 4-manifolds with proper almost complex structure, J. Geom. Phys.,**55** (2005), 385-398.

Matsushita Y., Counterexamples of compact type to the Goldberg conjecture and various version of the conjecture, to appear in Proceedings of The 8th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Sofia, Bulgaria, August 20 - 26, 2004, ed. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific 2007.

Matsushita Y., Haze S., Law P. R., Almost Kahler-Einstein structure on 8-dimensional walker manifolds, Monatsh. Math.,**150** (2007), 41-48.

Norden A.P., On a certain class of four-dimensional A-spaces, Iz. VUZ,(1960), no.4, 145-157.

Salimov A.A., Almost analyticity of a Riemannian metric and integrability of a structure, (Russian) Trudy Geom. Sem. Kazan. Univ., (1983), no.15, 72-78.

Salimov A.A., Generalized Yano-Ako operator and the complete lift of tensor fields, Tensor (N.S.), **55** (1994), no.2, 142-146.

Salimov A.A., Lifts of poly-affinor structures on pure sections of a tensor bundle, Russian Math. (Iz. VUZ),**40**(1996), no.10, 52-59.

Salimov A.A., Iscan M. and Etayo F., Paraholomorphic B-manifold and its properties. Topology Appl.,**154** (2007), 925-933.

Tachibana S., Analytic tensor and its generalization,Tôhoku Math. J.,**12** (2)(1960), 208-221.

Vishnevskii V.V., Shirokov A.P. and Shurygin V.V., Spaces over algebras, Kazan Gos. University, Kazan, 1985, Russian.

Vishnevskii V.V., Integrable affinor structures and their plural interpretations, J. of Math. Sciences, **108** (2002), no.2, 151-187.

Walker A.G., Canonical form for a Rimannian space with a paralel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford **1** (2) (1950), 69-79.

Yano K. and Ako M., On certain operators associated with tensor fields, Kodai Math. Sem. Rep.,**20** (1968), 414-436.

ÖZGEÇMİŞ

Sibel TURANLI 18.01.1987 tarihinde Erzurum da dünyaya geldi. İlk ve orta öğretimini Erzurum da tamamladı. 2005 tarihinde Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2009 tarihinde mezun oldu. Aynı yıl Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans'a başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.