ÜNİVALENT FONKSİYONLAR
ve
ALT SINIFLARI

Evrim TOKLU

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜNİVALENT FONKSİYONLAR ve ALT SINIFLARI

Evrim TOKLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

Ünivalent Fonksiyonlar ve Alt Sınıfları

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Evrim TOKLU tarafından hazırlanan bu çalışma 19/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matemetik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Ahmet IŞIK *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Muhammet KAMALİ *İmza* :

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜNİVALENT FONKSİYONLAR ve ALT SINIFLARI

Evrim TOKLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

Bu tezde, ünivalent fonksiyonlar ve alt sınıfları incelenmiştir. Tezin ilk bölümünde ünivalent fonksiyonların tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümünde ünivalent fonksiyonlar ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiş, üçüncü bölümünde literatürde bulunan ünivalent fonksiyonlarla ilgili temel teoremler ve sonuçlar derlenmiş, konveks ve starlike fonksiyonlar incelenmiş, dördüncü bölümünde ünivalent fonksiyonların alt sınıfları ve bu alt sınıfları detaylı bir biçimde ele alınmış ve beşinci bölümde ise ünivalent fonksiyonların alt sınıfları ile ilgili literatürde bulunan sonuçlar derlenmiştir.

Bu tezin amacı, ünivalent fonksiyonları ve ünivalent fonksiyonların alt sınıflarını detaylı bir biçimde incelemek bu alt sınıflarla ilgili sonuçları yorumlamaktır.

2011, 87 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ünivalent fonksiyonlar, S sınıfı, Starlike ve Konveks Fonksiyon, α dereceden Konvekslik, Close-to-convexlik.

ABSTRACT

Master Thesis

UNIVALENT FUNCTIONS and SUBCLASSES

Evrim TOKLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

In the present thesis, univalent functions and their subclasses were evaluated. In the first chapter historical development of univalent functions have been mentioned, in the second chapter definitions and theorems which related to univalent functions have been given, in the third chapter the result of basic theorems, growth, covering and distortion have been emphasized on and in the fourth chapter subclasses of univalent functions and the result of these subclasses have been focused on in detail. Finally in the fifth chapter, literal findings about subclasses of univalent functions were reviewed.

The aim of this thesis is to evaluate the univalent functions and the subclasses of univalent functions in detail and to interpret the result of these subclasses.

2011, 87 pages

Keywords: Univalent functions, S subclass, Starlike and Convex Functions, Convexity of order α, Close-to-convexity.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca, benden bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU' na teşekkürlerimi sunarım.

Hem lisans eğitimim hem de yüksek lisans eğitimim boyunca bana her türlü bilgi ve desteği veren Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünün çok değerli hocalarına teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında değerli yardımları ile bana yardımcı olan eşim Sayın Alev TOKLU'ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Eğitimimin tüm süreçlerinde her türlü destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme teşekkür ederim.

Evrim TOKLU
Temmuz 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

U_r	0 merkezli r Yarıçaplı Açık Birim Disk
K	U da Normalleştirilmiş Konveks Fonksiyonların Sınıfı
S^*	U da Normalleştirilmiş Starlike Fonksiyonların Sınıfı
$K(\beta)$	β Dereceden Normalleştirilmiş Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$S^*(\alpha)$	α Dereceden Normalleştirilmiş Starlike Fonksiyonların Sınıfı
$\operatorname{Re} z$	z Kompleks Sayısının Reel Kısmı
M_α	α Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$H(G)$	$\mathbb{C}$ nin Bir G Açık Alt Kümesinde Holomorfik Fonksiyonların Kümesi
$H_u(D)$	$\mathbb{C}$ nin Bir D Bölgesinde Ünivalent Fonksiyonların Kümesi
C	Normalleştirilmiş Close-to-convex Fonksiyonların Sınıfı
$\hat{S}_\alpha$	α Tipinde Normalleştirilmiş Spirallike Fonksiyonların Sınıfı
$U(z_0, r)$	r Yarı Çaplı z_0 merkezli Açık Birim Disk
Σ	$\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \alpha_1 / \zeta + \ldots$ Olacak Şekilde Normalleştirilmiş ve ∞ da Basit Kutba Sahip Olan Δ daki φ Ünivalent Fonksiyonlarının Sınıfı
U	Açık Birim Disk
S	U da Normalleştirilmiş Ünivalent Fonksiyonların Sınıfı
Δ	Kapalı Birim Diskin Dışı
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\operatorname{Im} z$	z Kompleks Sayısının İmajiner (Sanal) Kısmı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\prec$	Subordination
□	Carathêodory Sınıfı
□	Schwarz Fonksiyonlarının Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisindeki en güzel konulardan birisi ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Bu konunun temeli Koebe'nin 1907 de yayımladığı makalesi olup, bunu 1914 de Granwall'ın alan teoreminin ispatı ve 1916 da Bieberbach'ın normalleştirilmiş ünivalent fonksiyonların ikinci dereceden katsayıları için sonucu ve onun özellikleri izlemiştir.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir has alt kümesini birim diske konform olarak tasvir eden bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi olarak bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ şartıyla normalleştirilmiş fonksiyonların oluşturduğu bir S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 de Koebe, S sınıfına ait fonksiyonlar altında U birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve U birim diskinin $f\in S$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(U)$ nun orijine olan uzaklığının 1/4 den küçük olamayacağını ispatlamıştır.

1916 da Bieberbach tarafından ileri sürülen $z\in U$ olmak üzere $f\in S$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $k=2,3,...$ için $|a_k|\le k$ dır sonucu uzun yıllar matematikçileri meşgul eden bir problem olmuş ve nihayetinde 1985 yılına kadar ispatlanamayan bu sonuç Branges tarafından ispatlanmıştır.

Bieberbach teoreminin en önemli sonuçlarından birisi de S sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ sonucunu kullanarak Koebe tarafından verilen ve distortion (bükülme) teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Bieberbach sonucunun Branges tarafından ispatlanmasına kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler S sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili ilginç bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlilerinden bazıları starlike (yıldızıl), konveks, close-to-convex, alfa konveks ve Φ-like fonksiyonlardan oluşan alt sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir.

Sunulan bu tezde birim diskte analitik, ünivalent ve $f(0)=f'(0)-1=0$ şartıyla normalleştirilmiş fonksiyonların oluşturduğu S sınıfının ve onun bazı alt sınıflarının bir takım önemli özellikleri incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunulmuştur.

Tanım 2.1 (r komşuluğu) Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $U(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<r\}$ kümesine z_0 noktasının r komşuluğu denir.

$U(z_0,r)$ kümesi z_0 merkezli r yarıçaplı çemberin içindeki noktalardan oluşmuştur. Bu $U(z_0,r)$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı disk adı da verilmektedir. $\overline{U}(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|\le r\}$ kümesine $U(z_0,r)$ nin kapanışı, $\partial U(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|=r\}$ kümesine de $U(z_0,r)$ nin sınırı adı verilmektedir.

Tanım 2.2 (İç nokta) S, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. $z_0\in S$ için $U(z_0,r)\subset S$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.3 (Açık Küme) S, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. S kümesinin her noktası bir iç nokta ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.4 (Kapalı Küme) S, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Bu S kümesinin tümleyeni açık küme ise S'ye kapalı küme denir.

Tanım 2.5 (Bağlantılı Küme) $S\subset\mathbb{C}$ olsun. Eğer $S\subset S_1\cup S_2$, $S\cap S_1\neq\varnothing$, $S\cap S_2\neq\varnothing$ ve $S\cap S_1\cap S_2=\varnothing$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ de S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise S'ye bağlantılı küme denir, aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.6 (Bölge) $\mathbb{C}$ de hem açık hem de bağlantılı bir kümeye bölge denir.

Tanım 2.7 (Süreklilik) $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu $S_1 \subset S$ kümesinin her noktasında sürekli ise f ye S_1 kümesinde sürekli fonksiyon denir, $S_1 = S$ olması halinde f ye sürekli fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.8 (Eğri) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de eğri denir.

Bu tanımda a noktasındaki sürekliliğin sağdan ve b noktasındaki sürekliliğin soldan olduğu anlaşılacaktır. Ayrıca $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun kuralı parametrik olarak $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ile verilir. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ eğrisini $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ ile de gösterebiliriz. Bir eğriyi geometrik olarak $[a,b]$ aralığının γ fonksiyonu altındaki görüntüsü olan şekil ile veririz.

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ eğrisi verildiğinde $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ eğrinin uç noktaları olarak adlandırılır. $\gamma(a)$ ya eğrinin başlangıç noktası, $\gamma(b)$ ye de eğrinin bitiş noktası adı verilir.

Tanım 2.9 (Kapalı Eğri) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.10 (Basit Kapalı Eğri) Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğriler denir.

Yani, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ eğrisi $[a,b)$ (veya $(a,b]$) aralığında bire-bir ise $\gamma(t)$ eğrisine basit eğri adı verilir. Buradan anlaşılacağı gibi eğrinin uç noktalarının çakışması onun basit eğri oluşunu etkilemez. Bir eğri hem basit hem de kapalı olabilir. Böyle eğrilere basit kapalı eğri (veya Jordan eğrisi) denir.

Basit kapalı γ eğrisi, kompleks düzlemi bir sınırlı diğeri sınırsız iki bölgeye ayırır. Sınırlı bölgeye γ basit kapalı eğrisinin içi, sınırsız bölgeye ise γ basit kapalı eğrisinin dışı denir.

Tanım 2.11 (Dizi) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f(n) = z_n$ olan fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir dizi (veya kompleks dizi) denir.

Tanım 2.12 (Yakınsaklık) (z_n) bir kompleks dizi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \ge n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. (z_n) dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.13 (Seri) (a_n) bir kompleks dizi olmak üzere

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

toplamına kompleks sayı serisi (veya kompleks seri) denir. $a_1, a_2, \dots$ sayılarına serinin terimleri adı verilir.

Tanım 2.14 (Yakınsak Seri) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, bir kompleks seri ve (s_n), bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer (s_n) dizi bir s sayısına yakınsıyor ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi de s sayısına yakınsıyor denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_n = s \tag{1}$$

olarak yazılır. Bu s sayısına serinin toplamı adı verilir. Bir sayıya yakınsayan seriye yakınsak seri, aksi halde ıraksak seri denir. Bir serinin yakınsaklık veya ıraksaklığına o serinin karakteri adı verilir.

Bu açıklamalardan sonra, şekilsel olarak,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

yazılır. Bu yüzden seriyi, (s_n) kısmi toplamlar dizisi olarak da tanımlayabiliriz.

Tanım 2.15 (Diferansiyellenebilme) $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyon $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.16 (Analitik) $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir (veya holomorf) denir.

Tanım 2.17 (Tam Fonksiyon) Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Tanım 2.18 (Ayrık Tekil Nokta) Bir $\omega = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının $B(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 2.19 (Laurent Teoremi) z_0 kompleks sayısı verilsin. a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

fonksiyon serisine, z_0 merkezli, Laurent serisi denir.

Teorem 2.20 (Taylor Teoremi) $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında komşuluğunda analitik ise bu noktanın uygun bir komşuluğunda

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots \tag{2}$$

şeklinde bir kuvvet serisine açılır.

Tanım 2.21 (Kutup Noktası) z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğunda, $f(z)$ fonksiyonunun Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası (veya kutbu) denir.

Tanım 2.22 (Meromorf fonksiyon) Bir B bölgesinde $f(z)$ fonksiyonu analitik veya bu bölgede esas singüler noktası yoksa $f(z)$ fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.23 (Maksimum Modül Teoremi) $f(z)$, B bölgesinde analitik ancak sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde maksimum değer alamaz.

B, sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli içinde ise analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini B bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.24 (Minimum Modül Teoremi) $f(z)$, B bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde minimum değer alamaz.

B sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun B bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini B bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.25 (Harmonik Fonksiyon) $B \subset \mathbb{R}^2$, bir bölge olmak üzere $u : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. u nun birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerinin B bölgesinde var ve sürekli olduğunu kabul edelim. Ayrıca her $(x, y) \in B$ için

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$$

oluyorsa u ya B bölgesinde harmonik fonksiyon denir.

Teorem 2.26 (Cauchy-Goursat Teoremi) $f(z)$ fonksiyonu basit kapalı bir γ çevresi içinde ve üzerinde analitikse

$$\int_{\gamma} f=0$$

olur.

Teorem 2.27 (Cauchy İntegral Formülü) $f(z)$, pozitif yönlü basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu çevrenin içinde bir nokta olsun. Bu durumda

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

olur.

Teorem 2.28 (Cauchy Türev Formülü) $f(z)$, pozitif yönlü basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda $n=0,1,2,...$ için

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=0,1,2,...)$$

olur.

Teorem 2.29 (Schwarz Lemması) $f(z)$ fonksiyonu $D=\{z:|z|<1\}$ diskinde analitik ve bu diskte $|f(z)|\leq 1$, $f(0)=0$ şartları sağlanıyorsa

$$|f(z)|\leq |z| \text{ ve } |f'(0)|\leq 1$$

olur. D diskinde sıfırdan farklı en az bir z noktasında $f(z)=|z|$ olması için gerek ve yeter şart $|c|=1$ olmak üzere $f(z)=cz$ olmasıdır.

Tanım 2.30 (Konform Dönüşüm) $f:S\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0\in S$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileri de $\omega_0=f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından aynı α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir.

f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0)\neq 0$ ise f, z_0 noktasında konform bir dönüşümdür denir.

Teorem 2.31 (Liouville Teoremi) Tam ve sınırlı bir $f(z)$ fonksiyonu sabittir.

Teorem 2.32 (Schwarz-Pick) $z\in U$ olmak üzere $|f(z)|<1$ olacak şekilde $f:U\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu verilsin. Bu durumda $z\in U$ için

$$|f'(z)|\leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

dir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Kompleks Düzlemde Ünivalentlik

3.1.1. Ünivalent Fonksiyonlar Teorisindeki Temel Sonuçlar

Çalışmamızda yazım kolaylığı sağlaması bakımından $U(0,r)$ diskini U_r ile, U_1 birim diskini de U ile göstereceğiz. Ayrıca G, £ nin açık bir altkümesi olmak üzere $H(G)$ ile de G deki analitik olan bütün fonksiyonların kümesini göstereceğiz

D bir bölge olmak üzere f, D de bire-bir ve $f \in H(D)$ ise $f : D \rightarrow$ £ fonksiyonuna D de ünivalenttir denir. D de ünivalent olan fonksiyonların sınıfını $H_u(D)$ ile göstereceğiz. Eğer özel olarak D yerine £ alırsak elde ettiğimiz $H_u($£$)$ sınıfı $a, b \in$ £ , $a \neq 0$ olmak üzere $f(z) = az + b$ biçimindeki fonksiyonları ihtiva eder. Ancak $D \subset \square$ ve $D \neq \square$ bölgesi için, $H_u(D)$ bunların dışında birçok fonksiyonu içerir.

$f \in H(D)$ olmak üzere her bir $z \in D$ noktası, $f|_V$ ünivalent olacak şekilde bir V komşuluğuna sahipse f fonksiyonu lokal ünivalenttir denir. $f(z)$ fonksiyonu analitik olmak şartıyla her bir $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ olması $f(z)$ nin lokal ünivalent olması şartına denktir.

Bir değişkenli ünivalent fonksiyonlar teorisindeki en temel sonuçlardan biri Riemann dönüşüm teoremidir.

Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme o noktada konformdur denildiğini biliyoruz. Eğer f fonksiyonu analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ oluyorsa $\omega = f(z)$ dönüşümü o kümede konform olur (Dönmez 1999).

Riemann Dönüşüm Teoremi Her basit bağlantılı $D \subset £$ bölgesi birim disk üzerine konform olarak dönüşür. Ayrıca, $z_0 \in D$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ oluyorsa $f : D \to U$ konform dönüşümü tektir.

Basit bağlantılı bölgeler homeomorfik olmasına rağmen konform olarak denk olmaları gerekmez, Liouville teoremine göre, kompleks düzlem basit bağlantılı olmasına rağmen U birim diskine konform olarak denk değildir.

Carathéodory'e göre D nin sınırı bir Jardon eğrisi olması halinde Riemann dönüşüm teoreminin güçlü bir versiyonu vardır.

Carathéodory Teoremi $D \subset £$, bir Jardon eğrisi tarafından sınırlanmış basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu halde D den U ya herhangi bir konform dönüşüm $\overline{D}$ dan $\overline{U}$ a bir homeomorfizme genişler.

Riemann dönüşüm teoremine göre herhangi basit bağlantılı bir bölgede çalışma yerine U birim diskinde çalışmak yeterlidir. Bundan dolayı bizde ünivalent fonksiyonları U birim diskinde çalışacağız. Bu amaçla, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartıyla normalleştirilmiş $f \in H_u(U)$ fonksiyonlarının S sınıfını tanıtacağız ($f(0) = f'(0) - 1 = 0$ eşitliğini sağlayan U da analitik olan herhangi bir f fonksiyonunun normalleştirilmiş olduğunu söyleyeceğiz). g, U da ünivalent herhangi bir fonksiyon ve $h = \{g - g(0)\} / g'(0)$ olsun. Bu halde $h \in S$ dir. S sınıfının bu şekilde incelenmesi U da herhangi bir ünivalent fonksiyon hakkında bilgi verir. Aynı şekilde, $0 < r < 1$ için bazen normalleştirilmiş $f \in H_u(U_r)$ fonksiyonlarının $S(U_r)$ sınıfını dikkate alacağız.

S sınıfındaki bir f fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ... \ (z \in U) \tag{3}$$

biçiminde Taylor seri açılımına sahiptir.

Ayrıca ∞da basit kutba sahip, normalleştirilmiş ve $\Delta = \{\zeta \in £ : |\zeta| > 1\}$de ünivalent φ fonksiyonlarının sınıfını Σ ile göstereceğiz. $\varphi \in \Sigma$ ise φ nin ∞ daki Laurent açılımı

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\zeta^n} + \ldots \; (|\zeta| > 1) \tag{4}$$

şeklindedir.

Bu şekilde $\varphi \in \Sigma$ fonksiyonu Δ yı bağlantılı kompakt bir kümenin tümleyenine eşler.

Aşağıda vereceğimiz özellikler S ve Σ sınıfları ile yakından ilgilidir.

i. $f \in S$ ve $\beta \in £ \Rightarrow \varphi(\zeta) = \dfrac{1}{f(1/\zeta)} + \beta \in \Sigma$

Gerçekten, f sadece $z = 0$ noktasında sıfıra eşit olduğu için φ nin Δ da analitik ve ∞ da (4) biçimindeki Laurent seri açılımına sahip olduğu görülür. Ayrıca f nin ünivalentliği φ nin ünivalentliğini de gerektirir.

ii. $\varphi \in \Sigma$ ve $\beta \in £ \setminus \varphi(\Delta) \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{\varphi(1/z) - \beta} \in S$

Gerçekten, $\beta \notin \varphi(\Delta)$ olduğu için f, U da analitiktir. f nin ünivalent olduğunu ve φ nin normalleşmesinin f nin normalleşmesini gerektirdiğini görmek kolaydır.

Yukarıdaki bağıntıları kullanarak, Σ sınıfına karşılık gelen sonuçlardan S sınıfının özelliklerini elde edeceğiz.

Teorem 3.1.1 $f \in S$, $z \in U$, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar geçerlidir.

i. $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k e^{i(k-1)\theta} z^k \quad , (z \in U)$$

olarak verilen fonksiyon S ye aittir ve buna f nin bir rotasyonu denir.

ii. $r \in (0,1)$

$$\frac{1}{r} f(rz) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k r^{k-1} z^k \quad , (z \in U)$$

olarak verilen fonksiyon S ye aittir ve buna f nin bir genişlemesi denir.

iii. Farz edelim ki; $\omega \notin f(U)$ ve g,

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{\omega}} \quad , (z \in U)$$

olarak tanımlansın. O zaman $g \in S$ dır ve buna f nin bir ihmal edilmiş değer fonksiyonu denir.

iv. $z_0 \in U$ olmak üzere,

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z_0+z}{1+\overline{z_0}z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}\ ,\ (z\in U)$$

olarak tanımlansın. Bu halde $g\in S$ dir ve buna f nin bir Koebe dönüşümü denir.

v. $n=2,3,4,...$ ve h,

$$h(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z\left(\frac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}\ ,\ (z\in U)$$

olarak tanımlansın. O zaman $h\in S$ dir ve h fonksiyonuna f nin n.dereceden kök dönüşümü denir. Biz

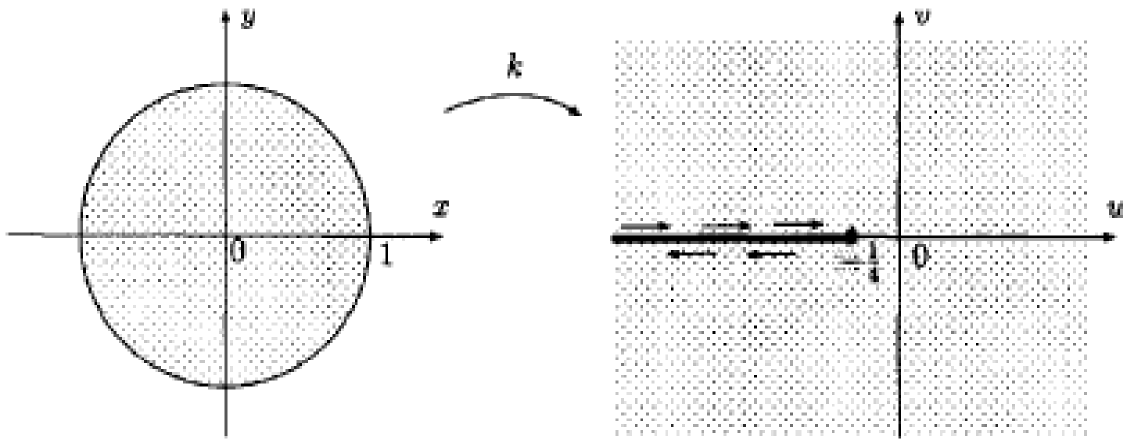
$$\left(\frac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}\Big|_{z=o}=1$$

olacak şekilde kuvvet fonksiyonunun bir dalını seçeceğiz.

Ünivalent Fonksiyonların Örnekleri

i. $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ $(z\in U)$,

fonksiyonu S deki en önemli fonksiyonlardan bir tanesidir. Buna Koebe fonksiyonu denir. Bu fonksiyon U birim diskini kompleks düzlemde negatif reel eksen üzerindeki $\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right]$ aralığı çıkarılmış bölgeye dönüştürür (Goodman 1983).



Şekil 3.1. Koebe Fonksiyonu

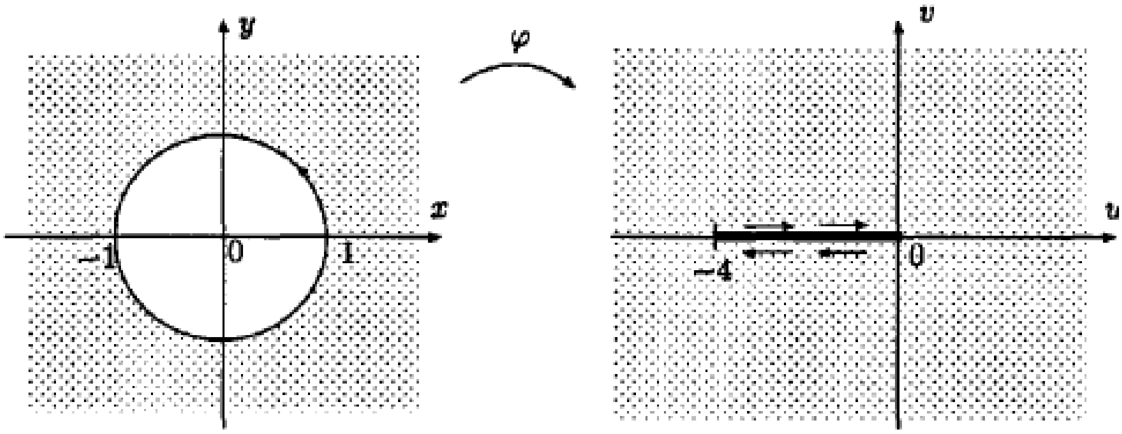
ii. $k(z)$ Koebe fonksiyonu olması halinde

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{k(1/\zeta)} \in \Sigma$$

olup, bu da

$$\varphi(\zeta) = \zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}$$

olarak verilir. Bu fonksiyon Δ yı reel eksen üzerindeki $[-4,0]$ aralığı hariç tüm kompleks düzleme dönüştürür. (Bak Şekil 3.2)



Şekil 3.2. $\varphi(\zeta)=\zeta-2+\dfrac{1}{\zeta}$ fonksiyonu

iii. Koebe fonksiyonunun rotasyonu, yani her bir $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}\,,\ (z\in U)$$

olan $k_\theta(z)$ fonksiyonu S sınıfına aittir. Bu halde birim diskin görüntüsü $-e^{-i\theta}/4$ den ∞ a kesik bir ışın hariç kompleks düzlemdir.

iv. $\alpha \in (0,2]$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right],\ (z\in U)$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu denir ve bu fonksiyon da S ye aittir.

v. Koebe fonksiyonunun karekök dönüşümü,

$$f(z)=\frac{z}{1-z^2}$$

olarak verilir. Bu fonksiyon birim diski, biri *i/2* den ∞ a uzanan diğeri -*i/2* den ∞ a uzanan aynı doğrultudaki iki ışının tümleyeni olan kompleks düzlemin altkümesine eşler.

$f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu lineer kesirli bir dönüşümdür ve U birim diskini $\operatorname{Re}\omega>-1/2$ yarı düzlemine eşler. $f(z)$ normalleştirilmiş olduğundan S ye aittir. Bu fonksiyon konveks görüntülü fonksiyonları içeren S nin alt sınıflarındaki çoğu problemde önemli bir rol oynar.

vi. $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^{2e^{-i\alpha}\cos\alpha}}$$

fonksiyonu S sınıfındadır. Bu fonksiyon altında birim diskin görüntüsü logaritmik α-spiral bir yayın tümleyenidir.

$f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^3}$ ($z\in U$) fonksiyonu U da analitiktir, ancak ($f'(-1/2)=0$ olduğu için) U diskinin tamamında ünivalent değildir. Bu fonksiyonun $U_{1/2}$ diskinde ünivalent olduğunu ve f nin ünivalent olduğu 0 merkezli en geniş diskin $U_{1/2}$ olduğunu belirtelim.

3.1.2. Alan Teoremi

Konumuza alan teoremi denilen Σ sınıfındaki fonksiyonların Laurent serisi katsayıları hakkındaki bir teoremle başlayacağız. 1914 de Gronwall tarafından ispatlanan bu teorem, Σ ve S sınıflarının temel özellikleri ile ilgili çalışmalarda önemli bir rol oynar.

Teorem 3.1.2 $\varphi \in \Sigma$ fonksiyonu (4) deki gibi olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\alpha_n\right|^2 \leq 1 \tag{5}$$

dir (Graham and Kohr 2003).

Σ sınıfındaki fonksiyonlar için aşağıdaki katsayı sınırları alan teoreminin doğrudan sonuçlarıdır.

Sonuç 3.1.3 $\varphi \in \Sigma$ (4) deki gibi verilmiş olsun. O zaman $\left|\alpha_1\right| \leq 1$ dir. $\left|\alpha_1\right| = 1$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart $\varphi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + e^{i\theta}\zeta^{-1}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ olmasıdır. Ayrıca, $\varphi(\zeta) \neq 0$, $\left|\zeta\right| > 1$ ise o zaman $\left|\alpha_0\right| \leq 2$ dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $\varphi(\zeta) = \zeta + 2e^{i\sigma} + e^{2i\sigma}\zeta^{-1}$ $(\sigma \in \mathbb{R})$ olmasıdır.

Şimdi S sınıfı için bu sonuçların anlamlarını ele alacağız. Sonuç 3.1.3 deki ilk ifade, 1916 da Bieberbach tarafından elde edilen S deki bir fonksiyonun Taylor seri açılımındaki ikinci dereceden teriminin katsayısı için bir sonuç çıkarılmasına fırsat verir.

Teorem 3.1.4 $f \in S$, $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ $(z \in U)$ olarak verilsin, bu durumda

$$\left|a_2\right| \le 2 \tag{6}$$

dir. (6) da eşitliğin olması için gerek ve yeter şart f nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmasıdır (Goodman 1983).

İspat $f \in S$ olduğundan, $\varphi(\zeta) = 1/f(1/\zeta)$, $\left|\zeta\right| > 1$ olarak tanımlanan φ fonksiyonu Σ ya aittir**.** Ayrıca $\varphi(\zeta) \ne 0, \left|\zeta\right| > 1$ dir. φ nin Laurent serisinin

$$\varphi(\zeta) = \zeta - a_2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^k} \quad , (\left|\zeta\right| > 1)$$

olduğu görülür. Sonuç 3.1.3 den $\left|a_2\right| \le 2$ ve eğer eşitlik olursa uygun $\sigma \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(\zeta) = \zeta - 2e^{i\sigma} + \frac{e^{2i\sigma}}{\zeta}$$

yazılır. Bu halde

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(1/z)} = \frac{z}{(1 - e^{i\sigma} z)} \quad , (z \in U)$$

olur.

Diğer taraftan, f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise ikinci dereceden a_2 katsayısının $\left|a_2\right| = 2$ şartını karşılayacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Bieberbach Tahmini $f \in S$ ve $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ($z \in U$) olsun. Bu halde $k = 2,3,...$ için $|a_k| \leq k$ dır. $k \geq 2$ olduğunda $|a_k| = k$ eşitliğinin elde edilebilmesi için gerek ve yeter şart f nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmasıdır.

Bu sonuç De Branges'in 1985 yılında verdiği ispata kadar çözümsüz kaldı. Sonraki yıllarda, özel katsayılar, genel n ler için sonuçlar, asimptotik sonuçlar ve S sınıfının bazı özel alt sınıfları için sonuçları da içeren pek çalışma yapıldı.

3.1.3. S Sınıfında Growth, Covering ve Distortion sonuçları

$|a_2| \leq 2$ sonucu S sınıfındaki fonksiyonlar hakkında çok önemli teoremlerin bazıları için temeldir. Bu teoremler ünivalent fonksiyon teorisinin temel özelliklerini, en azından temel yönlerini, belirler. Bu kısımdaki sonuçlar $£^n$ de B birim küresinde normalleştirilmiş ünivalent dönüşümlerin $S(B)$ sınıfı için daha yüksek boyutlara genişletilemeyeceğini vurgulayalım.

Teorem 3.1.5 (Koebe $\frac{1}{4}$-Teoremi) $f \in S$ ise $f(U) \supset U_{1/4}$ olur. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun rotasyonu için kesindir. Ayrıca

$$\mathrm{I}_{f \in S} \, f(U) = U_{1/4}$$

dır.

Bu teoreme göre $U_{1/4}$, S deki her bir fonksiyonun görüntüsünde ihtiva edilen orijin merkezli en geniş disktir.

S deki bir fonksiyonun ikinci dereceden a_2 katsayısı için Bieberbach teoreminin çok önemli başka bir sonucu (8) de verilen Koebe distortion teoremidir (Bu sonucun kesin biçimi Bieberbach tarafından verilmiştir).

Teorem 3.1.6 $f \in S$ olsun. Bu durumda bütün $z \in U$ için

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{7}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{8}$$

ve

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{9}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Verilen bir $z \neq 0$ noktasında bu sonuçlardan birinde eşitliğin olması için gerek ve yeter şart f nin Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu olmasıdır.

İspat (Adım1) $z \neq 0$ iken bu sonuçların tamamını ispatlamak yeterli olacaktır. Sabit z, $|z| = r \in (0,1)$ ve f nin Koebe dönüşümünün

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{\zeta + z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)} = \zeta + b_2\zeta^2 + \dots \quad (\zeta \in U) \tag{10}$$

olarak verildiğini göz önüne alalım. Bu fonksiyon S ye aittir ve basit bir hesaplama ile

$$b_2 = \frac{1}{2}\left[(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right]$$

olduğu görülür. Teorem 3.1.4 den $|b_2| \le 2$ olduğunu biliyoruz ve böylece

$$\left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \le 4 \tag{11}$$

olur. Buradan da

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \le \frac{4r}{1-r^2}$$

elde ederiz. Bu son ifadeden de

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \le \operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \le \frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

yazılır.

Ayrıca, $f'(z) \ne 0$ ve $f'(0) = 1$ olduğu için $\log f'(z)\big|_{z=0} = 0$ olacak şekilde $\log f'(z)$ nin analitik bir dalı vardır. $z = re^{i\theta}$ için

$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| = \frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\left[\log f'(z)\right] = \frac{1}{r}\operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$$

sonucuna varırız. Bu eşitlikten ve (11) i kullanarak

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \le \frac{\partial}{\partial r} \log\left|f'(re^{i\theta})\right| \le \frac{2r+4}{1-r^2} \tag{12}$$

elde ederiz. θ sabit tutularak r ye göre integral alınırsa ve $f'(0)=1$ olduğundan

$$\log\left[\frac{1-r}{(1+r)^3}\right] \le \log\left|f'(re^{i\theta})\right| \le \log\left[\frac{1+r}{(1-r)^3}\right]$$

sonucuna varırız ki bu ifade e üzerine alınarak (8) elde edilir. Ayrıca bu sınırlar kesindir. Gerçekten bazı $z = re^{i\theta}$ için (8) deki eşitsizliklerin birinde eşitlik olursa $0 \le \rho \le r$ olmak üzere bütün ρ lar için (12) de karşılık gelen eşitsizlik eşitlik olur. Bu halde $\rho \to 0$ olsun, $f'(0)=1$ olduğundan

$$4 = \left|\frac{\partial}{\partial \rho} \log\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|\right|_{\rho=0} = \left|\mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\theta} f''(0)}{f'(0)}\right]\right|$$

elde ederiz. Böylece

$$\left|\mathrm{Re}\left[e^{i\theta} f''(0)\right]\right| = 4$$

olur. O halde $\left|f''(0)\right| \ge 4$. Teorem 3.1.4 den dolayı $\left|f''(0)\right| = 4$ sonucuna varırız. Bu da f nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmasını gerektirir.

Aksine, f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu iken bir ışın boyunca (8) deki alt ve üst sınır sonuçlarının her birinde eşitliğin geçerli olduğunu görmek kolaydır.

Adım2 (7) deki üst sınırı ispatlayacağız. $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$ olsun. 0 ve z arasındaki kapalı doğru parçası $[0, z]$ ile gösterilirse

$$f(z) = \int_{[0,z]} f'(\zeta) d\zeta = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho$$

olur. (8) deki üst sınır sonucunu kullanarak,

$$|f(z)| \le \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \le \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}$$

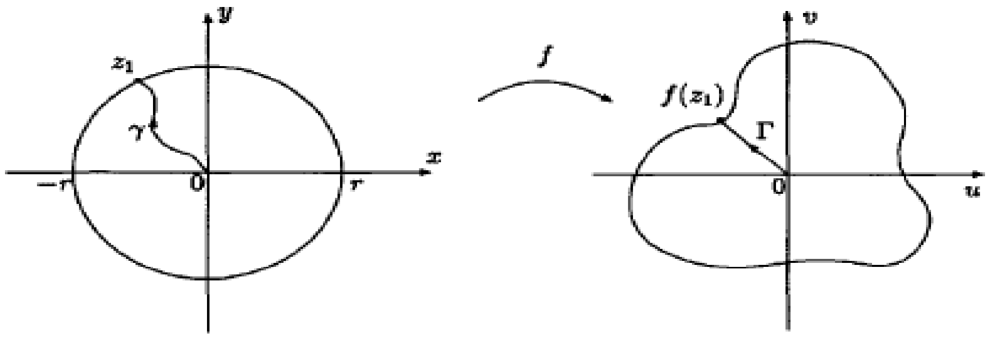
elde ederiz ki bu da istenilen sonuçtur.

(7) deki alt sınırı ispatlamak için $m(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$ olsun. O zaman açıktır ki $\overline{U}_r$ diskinin görüntüsü $\overline{U}_{m(r)}$ kapalı diskini ihtiva eder. $|f(z_1)| = m(r)$ olacak şekilde $z_1 \in U$, $|z_1| = r$ olsun, Bu halde 0 ve $f(z_1)$ arasındaki Γ kapalı parçası tamamen $\overline{U}_{m(r)}$ kapalı diskinde bulunur. γ, Γ nın ters görüntüsü olsun (Şekil 3.3 deki gibi). Bu halde γ, $|z| \le r$ nin ihtiva ettiği basit bir yaydır ve γ üzerinde $f'(\zeta)d\zeta$ nin sabit argümana sahip olduğu kullanılarak ve (8) deki alt sınırdan

$$m(r) = |f(z_1)| = \int_\Gamma |d\omega| = \int_\gamma |f'(\zeta)| d\zeta \ge \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} |d\zeta|$$

$$\ge \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} d|\zeta| = \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

dir. Burada γ üzerinde $|d\zeta| \ge d|\zeta|$ olmasını kullandık.



Şekil 3.3. $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$

Bazı $z \neq 0$ için (7) deki eşitlik, 0 dan bu z noktasını birleştiren ışın boyunca (8) deki eşitliği gerektirir ve böylece f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmak zorundadır. Aksine, f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu ise (7) deki eşitlik büyüme (growth) teoreminden görülür.

Adım 3 Sonuç (9) u ispatlayalım. Bu amaçla, (10) daki gibi verilen f nin g Koebe dönüşümü için büyüme teoremini ele almak yeterli olacaktır.

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \leq |g(\zeta)| \leq \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2}$$

eşitsizliğinde $\zeta = -z$ konulursa

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq \frac{|f(z)|}{(1-|z|^2)|f'(z)|} \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

elde edilir ki bu (9) da istenilen sonuçtur.

uygun $z \in U - \{0\}$ için (9) un her iki tarafında eşitlik geçerli olursa , (10) da verilen g Koebe dönüşümü için

$$\left|g(-z)\right| = \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \text{ veya } \left|\text{g(-z)}\right| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \tag{13}$$

olur. (13) deki eşitliğin her birinden, g nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmak zorunda olduğu sonucuna varırız. Bu f nin de Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunu gösterir. Aksi açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.4. Birim Diskte Ünivalent Fonksiyonların Alt Sınıfları

Bu bölümde, kendilerine özgü ilginç özellikleri olan S sınıfının belirli alt sınıflarının temel özelliklerini ele alacağız. Bunlar starlike, konveks, close-to-convex, alfa konveks, spirallike fonksiyonlarını içerir. Bu alt sınıfların çoğu hem analitik hem de geometrik karakterizasyonlara sahiptir. Bazı durumlarda, S sınıfındakine göre daha kısıtlayıcı olan büyüme, covering ve distortion teoremleri vardır. Bu sınıflar subordination ve pozitif reel kısımlı fonksiyonlar ile yakından ilişkilidir.

3.2. Carathéodory Sınıfı

Aşağıda U birim diskinde pozitif reel kısımlı fonksiyonların temel özelliklerini vereceğiz.

□, p(0)=1 ve $z \in U$ $\operatorname{Re} p(z) > 0$ olacak şekilde U da analitik p fonksiyonlarının sınıfını göstersin. Bu sınıf genellikle Carathéodory sınıfı olarak bilinir. Örneğin; $p(z) = (1+z)/(1-z)$ $(\mathrm{z} \in \mathrm{U})$ □ ye aittir. Bu fonksiyon, U dan sağ yarı düzleme konform bir dönüşümü verir ve S sınıfında Koebe fonksiyonunun oynayacağı rolü □ sınıfında oynar.

Schwarz fonksiyonlarının sınıfını □ ile gösterelim. Örneğin $\varphi \in$ □ olması için gerek ve yeter şart U da $\varphi \in H(U)$, $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ olmasıdır. Bir başka deyişle □, Schwarz lemmasının hipotezlerini sağlayan U da analitik fonksiyonların tamamını ihtiva eder.

□ ve □ sınıfları arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$p \in \mathrm{P}$ olması için gerek ve yeter şart $p(z) = \dfrac{1+\varphi}{1-\varphi}$, $\varphi \in$ □ olmasıdır. Bu ilişkiden dolayı □ nin bazı özellikleri □ sınıfından, □ sınıfının bazı özellikleri de □ sınıfından elde edilebilir.

Teorem 3.2.1 $p \in$ □ fonksiyonu $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ kuvvet serisine sahip olsun. Bu halde, $n = 1,2,3...$ için $|p_n| \le 2$ olur. Bu sonuçlar kesindir.

Sonuç 3.2.2 □ kompakt bir kümedir.

3.3. Konveks ve Starlike Fonksiyonlar

Bu kısım, S nin çok önemli iki alt sınıfı olan konveks ve starlike fonksiyonlara ayrılmıştır. Bu sınıflar geometrik düşüncelerle tanımlanır fakat bunların her ikisi de çok kullanışlı analitik karakterizasyonlara sahiptir. Bu sınıflardaki fonksiyonlar için Taylor serilerinin katsayılarının sınırları S sınıfındakilere göre çok daha kolay elde edilebilir. Starlike fonksiyonlar da bütün S sınıfında olduğu gibi büyüme, distortion ve covering teoremleri ile aynı özellikleri sağlarken konveks fonksiyonlar ve diğer bazı alt sınıflar daha güçlü özelliklere sahiptir. Starlikelık ve konveksliğin analitik karakterizasyonları yüksek boyutlara genelleştirilebilir ancak ispatlar önemli ölçüde değişmek zorundadır.

Tanım 3.3.1 Ω, £ de bir küme olsun. $\omega_0 \in \Omega$ noktasını bir $\omega \in \Omega$ noktası ile birleştiren doğru parçası tamamen Ω içinde kalıyorsa Ω, $\omega_0 \in \Omega$ noktasına göre starliketır denir.

Ayrıca her $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ için ω_1 ve ω_2 yi birleştiren doğru parçası tamamen Ω içinde kalıyorsa Ω ya konveks küme adı verilir.

Konveksliği şu şekilde de tanımlayabiliriz: Ω nın konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart Ω nın her bir noktasına göre starlike olmasıdır.

$r \in [0,1]$, $f \in H(U_r)$ ve $z_0 \in U_r$ olsun. Eğer f, U_r de ünivalent ve $f(U_r)$ görüntüsü $\omega_0 = f(z_0)$ a göre starlike bir bölge ise f fonksiyonuna U_r de starlikedır deriz. Bundan sonra "Starlike" kelimesini sıfır noktasına göre starlike anlamında kullanacağız. Ayrıca, f U_r de ünivalent ve $f(U_r)$ görüntüsü £ de konveks bir bölge ise f fonksiyonuna konvekstir diyeceğiz. U_r de normalleştirilmiş starlike ve konveks fonksiyonların her birini içeren $S(U_r)$ nin alt sınıfları, sırasıyla, $S^*(U_r)$ ve $K(U_r)$ veya S^* ve K ile göstereceğiz. Bunlar U birim diskinde normalleştirilmiş starlike fonksiyonların ve normalleştirilmiş konveks fonksiyonların sınıflarıdır.

Aşağıdaki teorem starlike fonksiyonların analitik karakterizasyonu olarak bilinir.

Teorem 3.3.2 $f : U \to$ £ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda f nin starlike olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve U da

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

olmasıdır.

İspat İlk olarak f nin starlike olduğunu kabul edelim. Bu halde f ünivalenttir ve bu nedenle $f'(0) \neq 0$ dır. Bütün $r \in (0,1)$ için $f(U_r)$ nin, sıfır noktasına göre, starlike bir bölge olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $r \in (0,1)$ i sabitleyelim, $t \in (0,1)$ olsun ve

$z \in U$ için $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f starlike olduğundan bu fonksiyon iyi tanımlı ve U da analitiktir. $g(0) = 0$ ve U da $|g(z)| < 1$ dir. Schwarz lemmasından U da $|g(z)| < |z|$ sonucuna varırız ve böylece bütün $z \in U_r$ için $tf(z) = f(g(z)) \in f(U_r)$ dır. Böylece $f(U_r)$ sıfıra göre starlike bir bölgedir. Geometrik düşüncelerle $|z| = r$ çemberinin görüntüsünün 0 noktasına göre starlike bir eğri olduğu elde edilir, yani $[0, 2\pi]$ de θ artarken $\arg f(e^{i\theta} r)$ de artar. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \geq 0 \, , \, (\theta \in [0, 2\pi])$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im}\left[\log f(re^{i\theta})\right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{izf'(z)}{f(z)}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

olduğundan, $\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$, $(z \in U_r)$ sonucuna varırız. $f'(z) \neq 0$ olduğundan minimum prensibinden dolayı $z \in U_r$ için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

yazılır. r keyfi olduğundan, U da

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

elde edilir.

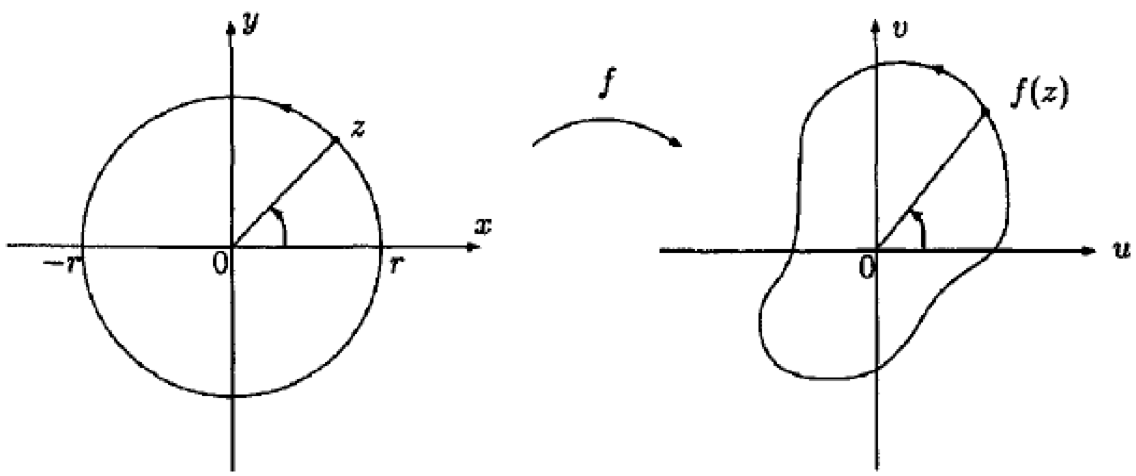
Aksine, $f'(0)\neq 0$ ve $\operatorname{Re}\left[\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right]>0$, $|z|<1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z\in U-\{0\}$ için $f(z)\neq 0$ dır. Aksi halde $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu U da bir kutup noktasına sahip olur. İspatın ilk kısmında olduğu gibi, basit bir hesaplama ile $\theta\in[0,2\pi]$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})>0$$

olduğu görülür. Böylece $\arg f(re^{i\theta})$, $\theta\in[0,2\pi]$ de artan bir fonksiyondur. Ayrıca, f U birim diskin tamamında sadece bir basit sıfıra sahip olduğundan, $\theta\in[0,2\pi]$ için $f(re^{i\theta})$ nin argümentinin değişimi 2π ye eşittir. Gerçekten

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})d\theta=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right\}=2\pi$$

dır. Bu nedenle; $|z|=r$ nin görüntüsü basit starlike bir eğridir ve $f(U_r)$ starlike bir bölgedir. Ayrıca, f, $|z|=r$ çemberinde bire bir olduğundan, sınırda ünivalentlik prensibinden, f nin U_r diskinde de ünivalent olduğu anlaşılır. r keyfi olduğundan, U diskinin tamamında f nin ünivalent olduğu sonucuna varırız. Son olarak $f(U)=\bigcup_{0<r<1}f(U_r)$ olduğundan, $f(U)$ sıfıra göre starlike bir bölge sonucuna varırız.



Şekil 3.4. U_r nin görüntüsünün starlikelığı (yılıdızıllığı)

Aşağıda konveks fonksiyonlar için analitik karakterizasyon olarak bilinen teoremi vereceğiz.

Teorem 3.3.3 $f : U \to £$ analitik bir fonksiyon olsun. Bu halde f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve

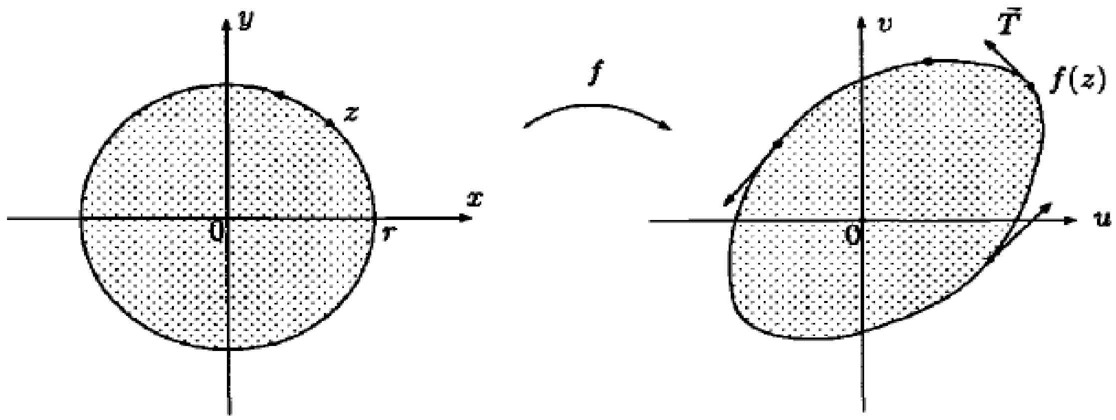
$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0\,,\ (z\in U)$$

olmasıdır.

İspat Öncelikle kabul edelim ki f konveks olsun. Bu durumda f ünivalenttir ve böylece $f'(0) \neq 0$ dır. Bütün $r \in (0,1)$ için $f(U_r)$ nin konveks bir bölge olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla, $r \in (0,1)$ i sabitleyelim, $z_2 \neq 0$, $|z_1| \leq |z_2|$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in U_r$ ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. $g : U \to U$

$$g(z) = f^{-1}\left((1-t)f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + tf(z)\right), \ (z \in U)$$

olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. f konveks olduğundan, g iyi tanımlı ve U da analitiktir. Ayrıca, Schwarz lemmasından dolayı $g(0)=0$ ve bu nedenle $z \in U$ için $|g(z)| \le |z|$ dır. $z = z_2$ için $|g(z_2)| \le |z_2| < r$ sonucuna varırız ve buradan $(1-t)f(z_1) + tf(z_2) \in f(U_r)$ dir. Böylece $f(U_r)$ nin konveks bir bölge olduğu sonucuna varırız.



Şekil 3.5. U_r nin görüntüsünün konveksliği

Γ_r, $|z| = r$ çemberinin görüntüsü olsun. Bu halde Γ_r, pozitif yönlü bir Jordan eğrisidir ve bu eğrinin iç bölgesi konveks bir bölgedir. Ayrıca; Γ_r, $\omega = f(re^{i\theta})$, $0 \le \theta \le 2\pi$ parametrik temsil ile verilmiş olsun.

$f(U_r)$ konveks bir bölge olduğundan, Γ_r teğet vektörünün argümenti de azalmayan bir fonksiyondur. Yani

$$\psi(\theta) = \arg\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right] = \arg\left[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right]$$

ise, $\theta \in [0, 2\pi]$ için $\psi'(\theta) \geq 0$ veya

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \mathrm{Im}\left[\log(izf'(z))\right] \geq 0, \; (z = re^{i\theta})$$

dır. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \mathrm{Im}\left[\log(izf'(z))\right] = \mathrm{Im}\left[i\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right], \; (z = re^{i\theta})$$

olduğunu görürüz ve böylece $|z| = r$ de

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0$$

olur.

Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibini göz önüne alarak, $z = 0$ da kesin eşitsizlik geçerli olduğundan, $z \in U_r$

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

sonucuna varırız. r keyfi olduğundan, $z \in U$

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

elde ederiz. Bu halde ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

Aksine, kabul edelim ki $f'(0) \neq 0$ ve U da

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

olsun. Bu halde, $z \in U-\{0\}$ için $f'(z) \neq 0$ olur. $r \in (0,1)$ olmak üzere r yi sabitleyelim. Yukarıda yapılan hesaplamadaki adımların tersine,

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\arg\left[ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})\right] \geq 0\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi\ )$$

elde ederiz ve böylece, $|z|=r$ çemberinin görüntüsü olan Γ_r eğrisine ait teğetin argümenti θ nın azalmayan bir fonksiyonudur. Ayrıca, $[0,2\pi]$ de $\psi(\theta)$ nın toplam artışı 2π ye eşittir. Gerçekten,

$$\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta}\arg\left[ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})\right]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left[1+\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right]d\theta$$

$$= \mathrm{Re} \int_{|z|=r} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \frac{dz}{iz} = 2\pi$$

dir.

Böylece Γ_r nin basit konveks bir eğri olduğu görülür ve bu nedenle $f(U_r)$ konveks bir bölgedir. $f(U) = \bigcup_{0<r<1} f(U_r)$ olduğundan, $f(U)$ nun konveks bir bölge olduğu sonucuna varırız. Ayrıca, f $|z| = r$ çemberinde bire bir olduğundan, sınırda ünivalentlik prensibi f nin her bir $r \in (0,1)$ için U_r de de ünivalent olmasını gerektirir. Böylece f U da ünivalenttir ve bu nedenle konvekstir.

Konvekslik için bazen kullanışlı olan başka gerekli ve yeterli şartlar vardır.

Teorem 3.3.4 $f : U \to \mathbb{C}$ normalleştirilmiş analitik bir fonksiyon olsun. Bu halde $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right] \geq 0 \,, \; (z, \zeta \in U) \tag{14}$$

olmasıdır.

Uyarı 3.3.5 Teorem 3.3.4 ün ispatından birim diskte normalleştirilmiş bir analitik fonksiyonun konveksliği için şu karakterizasyonu da verebiliriz. $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right] > 0 \,, \; (|\zeta| < |z| < 1) \tag{15}$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.2 de ve Teorem 3.3.3 de verilen sonuçlar bizi S^* ve K arasında çok kullanışlı bir ilişkiye götürür. Bu ilişki ilk olarak Alexander tarafından keşfedildi.

Teorem 3.3.6 f, U da normalleştirilmiş analitik bir fonksiyon ve $g(z) = zf'(z)$ ($z \in U$) olsun. Bu halde $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*$ olmasıdır (Alexander 1915-1916).

Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları S^* sınıfına ait olduğundan, S sınıfının tamamında distortion ve büyüme sonuçlarının S^* sınıfı için de kesin olduğu sonucuna varırız.

Teorem 3.3.7 $f \in S^*$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \tag{16}$$

ve

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{17}$$

olur.

Bu sonuçların tamamı kesindir. Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu için bu ifadelerin her birinde eşitlik geçerlidir.

Normalleştirilmiş konveks fonksiyonlar için aşağıdaki büyüme ve distortion teoremlerine sahibiz.

Teorem 3.3.8 $f \in K$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r} \tag{18}$$

ve

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2} \tag{19}$$

dır. Bu sonuçların tamamı kesindir. Eşitlik durumu uygun $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ ve $z \neq 0$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{z}{1-\lambda z}$ fonksiyonu için sağlanır.

Teorem 3.3.9 $f \in K$ olsun bu halde $f(U)$, $U_{1/2}$ diskini ihtiva eder. Bu sonuç kesindir.

İspat $\omega = f(z) = z/(1-z)$ (U dan $\operatorname{Re}\omega > -1/2$ yarı düzlemine konform bir dönüşüm) fonksiyonu veya onun rotasyonları göz önüne alınarak kesinlik elde edilir. $r \to 1$ olduğunda (18) deki alt sınır sonucundan ifade elde edilir.

İkinci bir ispat 1964 de MacGregor tarafından verildi: Eğer $\omega \notin f(U)$ ise $|\omega| \geq 1/2$ olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu amaçla, $g(z) = [f(z) - \omega]^2$, ($z \in U$) olsun. g nin U da ünivalent, $g(0) = \omega^2$ ve $g'(0) = -2\omega$ olduğunu göstermek kolaydır. $h(z) = (\omega^2 - g(z))/(2\omega)$, ($z \in U$) olsun. Teorem 1.1.5 ve $h \in S$ olduğundan $|\omega/2| \geq 1/4$ sonucuna varırız. Bu da $|\omega| \geq 1/2$ demektir.

Teorem 3.3.10 $f(z)=z+a_2z^2+...+a_nz^n+...$ U da starlike olsun. Bu halde, her $n=2,3,...$ için $|a_n|\leq n$ olur. Herhangi bir $n\geq 2$ için $|a_n|=n$ eşitliğinin geçerli olması için f nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması gerekir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu kısımda birim diskte normalleştirilmiş starlike ve konveks fonksiyonların bazı alt sınıfları incelenecek ve bu sınıfların bazı temel özellikleri verilecektir. Ayrıca birim diskte ünivalent olan fonksiyonların close-to-convex ve spirallike alt sınıfları ele alınacaktır.

4.1. α Dereceden Starlikelık ve Konvekslik. Alfa Konvekslik

4.1.1. α Dereceden Starlikelık ve Konvekslik

Tanım 4.1.1 $f : U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ ve

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha,\ z\in U$$

ise f fonksiyonuna, α $(0\leq\alpha<1)$ dereceden starliketır deriz ve α dereceden starlike fonksiyonların sınıfını $S^*(\alpha)$ ile gösteririz. Eğer $f'(0)\neq 0$ ve

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha,\ z\in U$$

ise f fonksiyonuna, α $(0\leq\alpha<1)$ dereceden konvekstir denir ve α dereceden konveks fonksiyonların sınıfını da $K(\alpha)$ ile gösteririz.

$Q_{S^*}(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ve $Q_K(z) = 1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda $Q_{S^*}(0)=Q_K(0)=1$ olduğunda, $\alpha\leq 1$ elde edeceğimiz açıktır, aksi taktirde $S^*(\alpha)$ ve

$K(\alpha)$ kümeleri boş kümelerdir. Ayrıca, $\alpha = 1$ ise $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ kümeleri sadece $f(z) = z$ fonksiyonunu ihtiva ederler. Eğer $\alpha < 0$ ise bu kümelerdeki herhangi bir fonksiyon ünivalent olmaz (Goodman 1983).

$S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sırasıyla birim diskte α dereceden normalleştirilmiş starlike ve konveks fonksiyonların sınıflarını gösterir. $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sınıflarının Alexander türü sonuç ifadesi vardır: $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*(\alpha)$, $g(z) = zf'(z),\ z \in U$ olmasıdır.

Bu sınıflar hakkındaki en önemli sonuçlardan biri, $1/2$ dereceden starliklık ve konvekslik arasında bağlantı kuran Strohhacker ve Marx teoremleridir. Bu tezde verilen ispat Teorem 3.3.4 de verilen konvekslik özelliklerine dayanan ve Suffridge'e atfedilen ispattır.

Teorem 4.1.2 $f \in K$ olsun bu durumda $f \in S^*(1/2)$ dır. Bu sonuç kesindir, yani $1/2$ nin yerine daha büyük bir sayı konulamaz.

İspat $f \in K$ olduğundan; Teorem 3.3.4 den

$$\mathrm{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right] \geq 0,\ z,\zeta \in U$$

yazılır. Bu ifade de $\zeta = 0$ alınırsa

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq \frac{1}{2},\ z \in U$$

bulunur. Bu da $f \in S^*\left(\frac{1}{2}\right)$ olması demektir.

Şimdi de sonucun kesinliğini görelim. Bunun için, birim diski bire-bir olarak $\{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\omega > -1/2\}$ yarı düzlemine dönüştüren $f(z) = z/(1-z)$ fonksiyonunu göz önüne almak yerlidir. Bu halde $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = \dfrac{z\left(\dfrac{1-z+z}{(1-z)^2}\right)}{\dfrac{z}{1-z}} = \dfrac{z}{(1-z)^2}\dfrac{1-z}{z} = \dfrac{1}{1-z}$ olduğu görülür. Burada $z = re^{i\theta}$ alınıp $\theta = \pi$ ve $r \to 1$ için

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} = \operatorname{Re}\frac{1}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{1}{1-re^{i\theta}} = \operatorname{Re}\frac{1}{1-r(\cos\pi + i\sin\pi)} = \frac{1}{2}$$

olur.

Marx ve Strohhacker'e atfedilen bir başka sonuç ise aşağıda verilmiştir. Aşağıda verilen ispat Suffridge'ye aittir.

Sonuç 4.1.3 $f \in K$ olsun. Bu durumda $z \in U$ için $\operatorname{Re}[f(z)/z] > 1/2$ olur.

İspat $f \in K$ olduğundan, (14) ifadesi geçerlidir.

$$F(z,\zeta) = \frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{\zeta}{z-\zeta}, \quad z,\zeta \in U$$

olsun. (14) deki ifadede $z,\zeta \in U$ için $\operatorname{Re}F(z,\zeta) \geq 1/2$ ye denktir.

$\zeta \in U$ sabit olsun. $F(z,\zeta)$ z değişkenine göre kuvvet serisine açılımından

$$F(z,\zeta) = 1 + \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)}\right)z + \ldots$$

sonucuna varırız. Önceki iki ifadeden $2F(\cdot,\zeta)-1\in \mathrm{P}$ olur. Böylece Teorem 3.2.1 i kullanılarak

$$\left|\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{f(\zeta)}\right|\leq 1$$

sonucuna varırız. Her iki taraf ζ ile çarpılırsa $|1-\zeta\,/\,f(\zeta)|\leq|\zeta|<1$ elde edilir. Buradan da $\mathrm{Re}\left[f(\zeta)/\zeta\right]>1/2$ yazılır. Bu istenilen sonuçtur.

Teorem 4.1.2 nin genelleştirilmiş bir hali Jack tarafından verilmiştir. Ancak burada sonuç kesin değildir.

Teorem 4.1.4 $\alpha\in[0,1)$, $f\in K(\alpha)$ olsun.

$$\beta=\beta(\alpha)=\frac{2\alpha-1+\sqrt{(2\alpha-1)^2+8}}{4}$$

olmak üzere $f\in S^*(\beta)$ dır.

Aşağıdaki sonuç $\alpha\in[0,1)$ olmak üzere $S^*(\alpha)$ ile S^* ve $K(\alpha)$ ile S^* arasında bir bağıntı vermektedir.

Teorem 4.1.5 $\alpha\in[0,1)$ olsun. Bu durumda

i. $f \in S^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $z \in U$ olmak üzere $g \in S^*$ olmasıdır. Burada $\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde fonksiyonunun bir dalını seçtik.

ii. $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $h(z) = z(f'(z))^{1/(1-\alpha)}$ $(z \in U)$ olmak üzere $h \in S^*$ olmasıdır. Burada $(f'(z))^{1/(1-\alpha)}\big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde fonksiyonunun bir dalını seçtik.

Bu sonuçları kullanarak, $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere α dereceden konveks fonksiyonlar için distortion ve büyüme teoremleri verilebilir.

Teorem 4.1.6 $f \in K(\alpha),\ \alpha \in [0,1)$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}} \tag{20}$$

olur. Eğer $\alpha \ne 1/2$ ise

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \le |f(z)| \le \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \tag{21}$$

ve $\alpha = 1/2$ ise

$$\log(1+r) \le |f(z)| \le -\log(1-r) \tag{22}$$

yazılır. Bu sonuçlar kesindir. Eşitlik durumu

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, & \alpha\neq\dfrac{1}{2}\\ -\log(1-z), & \alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

fonksiyonu için elde edilir. Burada, $(1-z)^{2\alpha-1}\big|_{z=0}=1$ ve $\log(1-z)\big|_{z=0}=0$ olacak şekilde $\log(1-z)$ nin ve $(1-z)^{2\alpha-1}$ fonksiyonlarının dalları seçilmiştir.

İspat (20) daki eşitsizliği ispatlayalım. Starlike fonksiyonlar için büyüme teoreminden

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq|h(z)|\leq\frac{r}{(1-r)^2}$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 4.1.5 (*ii*) den $f\in K(\alpha)$ ise $h(z)=z\left(f'(z)\right)^{1/(1-\alpha)}$ $(z\in U)$ olmak üzere $h\in S^*$ olduğunu kullanarak

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leq\left|z\left(f'(z)\right)^{1/(1-\alpha)}\right|\leq\frac{r}{(1-r)^2}\Rightarrow\frac{r}{(1+r)^2}\leq|z||f'(z)|^{1/(1-\alpha)}\leq\frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2}\leq|f'(z)|^{1/(1-\alpha)}\leq\frac{1}{(1-r)^2}\Rightarrow\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}}\leq|f'(z)|\leq\frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(21) ve (22) büyüme teoremlerindeki üst sınırları elde etmek için, (20) deki eşitsizliğin sağ tarafının integralini almak yeterlidir. $z=re^{i\theta}$, $0<r<1$ ve $f(0)=0$ olduğundan

$$f(z)=\int_0^r f'(\rho e^{i\theta})d\rho$$

olur. Böylece (20) eşitsizlikten $\alpha \neq \frac{1}{2}$ için

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \leq \int_0^r \frac{1}{(1-\rho)^{2(1-\alpha)}} d\rho = \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$$

olduğu görülür. Şimdi de alt sınır sonuçlarını ispatlayalım. $|z| = r < 1$ ve $f \in K(\alpha)$ olduğundan, $f(U)$, 0 ve $f(z)$ arasındaki kapalı Γ parçasını ihtiva eder. γ ile Γ nın ters görüntüsünü gösterelim bu durumda γ, 0 dan z ye basit bir eğridir. (20) deki eşitsizliğin alt sınır sonucunu kullanarak $\alpha \neq \frac{1}{2}$ için

$$|f(z)| = \int_\Gamma |d\omega| = \int_\gamma |f'(\zeta)||d\zeta| \geq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \geq \int_0^r \frac{1}{(1+\rho)^{2(1-\alpha)}} d\rho = \frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1}$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.5 (i) veya (20) distortion sonucundan $\alpha \in [0,1)$ için $S^*(\alpha)$ daki fonksiyonlar için büyüme teoremini elde edebiliriz.

Teorem 4.1.7 $\alpha \in [0,1)$**,** $f \in S^*(\alpha)$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

yazılır. Bu sonuçlar kesindir. Eşitlik durumu $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ $(z \in U)$ fonksiyonu için elde edilir.

Brown, $\alpha \in [0,1)$ olmak zere α dereceden konvekslik için aşağıda verilen ilginç sonucu elde etti. Özellikle, Brown'un sonucu f, U da konveks ise f nin her $|z-\zeta| < r < 1-|\zeta|$, $|\zeta| < 1$ diskini konveks bir bölge üzerine dönüştürdüğünü göstermektedir.

Teorem 4.1.8 $f : U \to \mathbb{C}$ normalleştirilmiş analitik bir fonksiyon ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda $f \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha, \ |z-\zeta| < 1-|\zeta|, \ |\zeta| < 1$$

olmasıdır.

İspat İlk olarak, kabul edelim ki

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha, \ |z-\zeta| < 1-|\zeta|, \ |\zeta| < 1$$

olsun. $\zeta = 0$ için $f \in K(\alpha)$ sonucuna varırız.

Aksine, farz edelim ki $f \in K(\alpha)$ dır. Bu durumda $|\zeta| = r < 1$ olacak şekilde ζ yı sabit seçelim ve

$$A \equiv 1+\left(\frac{z-\zeta}{1-\alpha}\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

olarak tanımlayalım. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibine göre $|z-\zeta| = \rho < 1-r$ için $\operatorname{Re} A > 0$ olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. Bu amaçla, $|z-\zeta| = \rho$ olacak şekilde $z \in U$ alalım. $f \in K(\alpha)$ olduğundan, $p \in \mathrm{P}$ olmak üzere

$$A = \frac{(z-\zeta)(p(z)-1)}{z} + 1 \tag{23}$$

olduğu anlaşılır (Burada P Caratheodary sınıfını göstermektedir). P' nin ekstrem noktası ($p \in \mathrm{P}$ ve $p = tg + (1-t)h,\ 0 < t < 1,\ g \in \mathrm{P}$ ve $h \in \mathrm{P}$, olması $g = h$ olmasını gerektiriyorsa p, P' nin ekstrem noktasıdır) $p_\theta(z) = \dfrac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z},\ \theta \in \mathbb{R}$ fonksiyonları olarak bilinir ve (23) eşitliğinin sağ tarafındaki nicelik P de bir affine fonksiyonel olduğundan $\min\limits_{p \in \mathrm{P}} \operatorname{Re} A$ nın P nin bir ekstrem noktasına ulaştığı anlaşılır. Şimdi, $\zeta = re^{i\varphi}$ ve $z = \zeta + \rho e^{i\phi}$ için basit bir hesaplamadan sonra

$$\operatorname{Re} A \geq \min_{0 \leq \theta < 2\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{(z-\zeta)(p_\theta(z)-1)}{z} + 1\right]$$

$$= \min_{0 \leq \theta < 2\pi} \left|1 - e^{i\theta}z\right|^{-2}\left[-\rho^2 + 1 - 2r\cos(\theta+\varphi) + r^2\right]$$

$$\geq \min_{0 \leq \theta < 2\pi} \left|1 - e^{i\theta}z\right|^{-2}\left[(1-r)^2 - \rho^2\right] > 0$$

elde edilir. Buradan da

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} A > 0 &\Rightarrow \operatorname{Re}\left[1+\frac{z-\zeta}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] > 0 \\
&\Rightarrow (1-\alpha)\operatorname{Re}\left[1+\frac{z-\zeta}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] > 0\cdot(1-\alpha) \\
&\Rightarrow \operatorname{Re}\left[1-\alpha+(z-\zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] > 0 \\
&\Rightarrow \operatorname{Re}\left[1+(z-\zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

4.1.2. Alfa Konvekslik

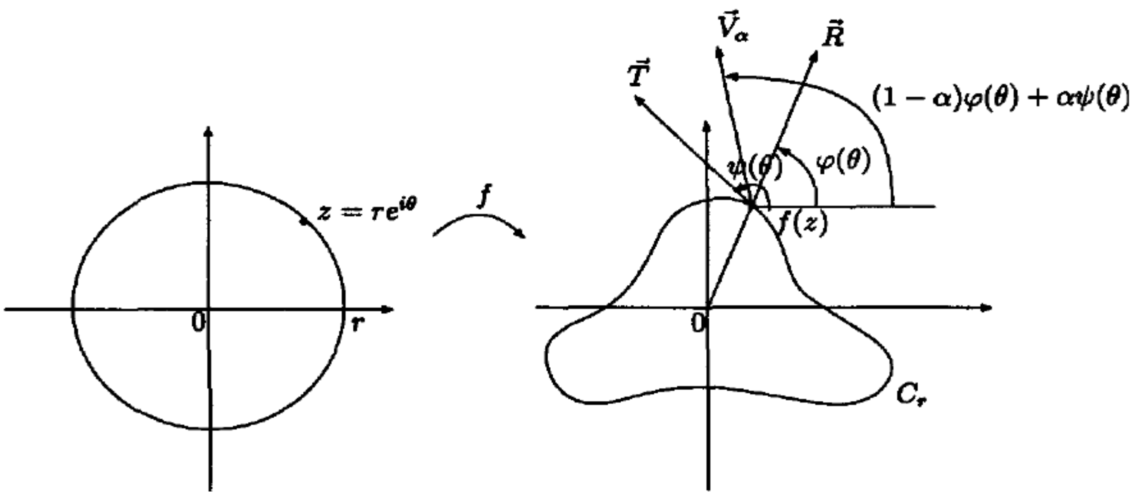
Bu kısımda, S nin bir başka alt sınıfı olan alfa konveks fonksiyonlar incelenecektir. Bu fikir, konveks fonksiyonlardan starlike fonksiyonlara sürekli bir geçiş sağlamak için S nin alt sınıflarının bir parametreli bir ailesini inşa etmek amacıyla, 1969 da Mocanu tarafından sunulmuştur. Alfa konveks fonksiyonlarla ilgili fikirlerin bazıları ilk olarak Sakaguchi'nin çalışmalarında yer almıştır.

Tanım 4.1.9 f, $z \in U$ için $\dfrac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ olacak şekilde U da normalleştirilmiş analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\alpha \in$ □ ve

$$
J(\alpha, f; z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \quad (\mathrm{z} \in \mathrm{U})
$$

verilsin. $z \in U$ için $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$ şartı sağlanıyorsa f ye α-konveks fonksiyon denir.

Sakaguchi ve Fukui tarafından1979 da “$z \in U$ için $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$ ise $\dfrac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ dır.” olduğu ispatlandığından Tanım 4.1.9 daki $\dfrac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ şartı ihmal edilebilir.



Şekil 4.1. C_r nin α konveksliği

α konveks fonksiyonların sınıfı Mocanu fonksiyonlarının sınıfı olarak da adlandırılır ve M_α ile gösterilir. $M_0 = S^*$ ve $M_1 = K$ olduğu açıktır.

Mocanu, orijinal makalesinde α konveksliği geometrik bir şekilde tanımladı ve Tanım 4.1.9 daki analitik şartını bir sonuç olarak sundu. α yı $0 \le \alpha \le 1$ durumuna kısıtlayarak Mocanu’nun ortaya attığı tezi ana hatları ile ele alacağız.

$f(0) = 0$ olmak üzere $f \in H_u(U)$ olsun. Ayrıca $r \in (0,1)$ olmak üzere $|z| = r$ birim çemberinin görüntüsünü C_r ile gösterelim. f, U da ünivalent olduğundan C_r, $\omega = f(re^{i\theta}) = \omega(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ile verilen pozitif yönlü bir Jordan eğrisidir.

Hatırlanacağı üzere: z, $|z|=r$ çemberi üzerinde pozitif yönde hareket ederken $\arg f(z)$ aynı oranda artıyorsa C_r nin sınırladığı küme starliketır. Ayrıca, C_r nin teğet vektörünün argümenti $\theta \in [0,2\pi]$ nin azalmayan bir fonksiyonu ise C_r nin sınırladığı küme konvekstir.

$\varphi(\theta)=\arg f(re^{i\theta})$ konum vektörünün argümenti ve $\psi(\theta)$, $\omega=f(re^{i\theta})$ noktasında C_r ye teğet vektörün argümenti olsun. $\overrightarrow{V_\alpha}=\overrightarrow{V_\alpha}(\theta)$, $\omega=f(re^{i\theta})$ konum vektörü ile $\omega=f(re^{i\theta})$ noktasında C_r ye teğet vektörler arasındaki açıyı α oranında bölen $f(re^{i\theta})$ noktasından başlayan bir vektör olsun. Bu durumda $\overrightarrow{V_\alpha}(\theta)$ nin eğim açısı $(1-\alpha)\varphi(\theta)+\alpha\psi(\theta)$ olur.

Bu açı $\theta \in [0,2\pi]$ nin artan bir fonksiyonu ise C_r eğrisinin α konveks olduğunu söyleriz. Bu ifadenin $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$, $|z|=r$ ifadesine eşdeğer olduğunu görmek kolaydır.

Şimdi α konveks fonksiyonlar ile ilgili temel sonuçların bazılarını vereceğiz. Bunlardan en ilginç olanı aşağıdaki teoremdir.

Teorem 4.1.10 $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $M_\alpha \subseteq S^*$ dır. Ayrıca, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha/\beta < 1$ için $M_\beta \subset M_\alpha$ dır.

İspat İlk olarak, $f \in M_\alpha$ olduğunda $f \in S^*$ olduğunu ispatlayacağız. $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ ($z \in U$) olsun. Bu durumda p, U da analitik bir fonksiyon, $p(0)=1$ ve $\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0$ ($z \in U$) şartından

$$\operatorname{Re}\left[p(z) + \alpha \frac{zp'(z)}{p(z)} \right] > 0,\ (z \in U)$$

olur. Bu halde $\operatorname{Re} p(z) > 0$ $(z \in U)$ sonucuna varırız ve Teorem 3.3.2 den sonuç anlaşılır.

Şimdi, $0 \le \alpha/\beta < 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. $0 \le \alpha/\beta < 1$ ile aynı olan $0 \le \alpha < \beta$ durumunu ele alacağız. Kabul edelim ki $f \in M_\beta$ olsun. İlk ifadenin ispatındaki gibi

$$\operatorname{Re}\left[p(z) + \alpha \frac{zp'(z)}{p(z)} \right] > 0,\ (z \in U)$$

ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ $(z \in U)$ bilgilerine sahibiz. Şimdi, $z \in U$ sabit ve $a = \operatorname{Re} p(z)$ ve $b = \operatorname{Re}\left[\frac{zp'(z)}{p(z)} \right]$ ve $h(t) = a + tb$, $t \in [0, \beta]$ olsun. $h(0) = a > 0$ ve $h(\beta) > 0$ olduğundan, her $t \in [0, \beta]$ için $h(t) > 0$ olacağı aşikârdır. Bu ispatı tamamlar.

Bu teoreme göre M_α sınıfı α negatif iken genişler ve α pozitif olduğunda ise daralır. Ancak bu sınıfların en genişi $M_0 = S^*$ dır.

Teorem 4.1.10 dan elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.1.11

i. $\alpha \ge 1$ olduğunda $M_\alpha \subseteq K$ olur.

ii. Ayrıca, $0 \le \alpha < 1$ olduğunda $K \subseteq M_\alpha$ olur.

iii. $\bigcap_{\alpha=0}^{\infty} M_\alpha = \{id\}$, $id(z) = z$, $(z \in U)$ dir.

Aşağıdaki sonuç $\alpha \geq 0$ iken S^* ve M_α sınıfları arasında bir ilişki kurar.

Teorem 4.1.12 $\alpha \geq 0$ olsun. Bu durumda $f \in M_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $g(z) = f(z)\left[\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right]^\alpha$ $(z \in U)$ olarak tanımlanan fonksiyonun S^* a ait olmasıdır. Burada fonksiyonunun dalını $\left[\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right]^\alpha \Big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçtik.

M_α, $\alpha > 0$ sınıfındaki fonksiyonlar için aşağıda verdiğimiz sonuçlar Miller'e aittir. İspat için Teorem 4.1.12 yi ve Teorem 3.3.8 in ispatındaki aynı bilgileri kullanmak yeterli olacaktır.

Teorem 4.1.13 $\alpha > 0$ ve $f \in M_\alpha$ olsun. Bu durumda

$$-K(-r;\alpha) \leq |f(z)| \leq K(r;\alpha), \ (|z| = r < 1)$$

olur. Burada

$$K(z;\alpha) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{\zeta^{\frac{1}{\alpha}} d\zeta}{\zeta(1-\zeta)^{\frac{2}{\alpha}}}\right], \ (z \in U).$$

şeklinde α-konveks Koebe fonksiyonudur. Fonksiyonunun dalı $K(z;\alpha)$, U da normalleştirilmiş analitik olacak şekilde seçilmiştir. Bu sonuçlar kesindir.

4.2. Birim Diskte Close-to- Convexity, Spirallikelık

4.2.1. Birim Diskte Close-to-convexity

Şimdi birim diskte ünivalent fonksiyonların close-to-convex ve spirallike fonksiyonlar olarak bilinen diğer iki alt sınıflarını tanıtacağız. İlk olarak close-to-convex kavramına değineceğiz. Önce Noshiro, Warschaeski ve Wolff'a atfedilen aşağıdaki teoremi sunarak başlayalım.

Teorem 4.2.1 D, $\mathbb{C}$ 'de konveks bir bölge olsun. $f \in H(D)$ fonksiyonu D de $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ şartını sağlıyorsa f, D de ünivalenttir.

İspat $z_1 \neq z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in D$ olsun. γ, z_1 ile z_2 yi birleştiren bir doğru parçası olsun. $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda $z(t) \in D$, $t \in [0,1]$ ve

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{\gamma} f'(\zeta)\,d\zeta = (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(z(t))\,dt$$

olur.

Hipotezleri göz önüne alarak,

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right] = \int_0^1 \operatorname{Re}\left[f'(z(t))\right]dt > 0$$

sonucuna varırız ve böylece $f(z_2) \neq f(z_1)$ dir. İspat tamamdır.

Bu teorem kullanılarak aşağıda Ozaki ve Kaplan' a atfedilen aşağıdaki sonuç kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 4.2.2 D, $\mathbb{C}$ de bir bölge; f ve g, D de analitik fonksiyonlar g, D de ünivalent ve $g(D)$ konveks bir bölge olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0\,,\ (z \in D)$$

ise f, D de ünivalenttir (Duren 2004).

İspat $g^{-1}(\omega)$ ters fonksiyonu $H = g(D)$ konveks bölgesinde analitiktir ve $\varphi(\omega) = f\left(g^{-1}(\omega)\right)$ fonksiyonu için Teorem 4.2.1 kullanarak

$$\mathrm{Re}\,\varphi'(\omega) = \mathrm{Re}\frac{f'(z)}{g'(z)} > 0 \ \left(\omega = g(z) \in H\right)$$

olur. Böylece, $\omega_1, \omega_2 \in H$ için, $\varphi(\omega)$ H da ünivalent olduğu için

$$\mathrm{Re}\frac{\varphi(\omega_2) - \varphi(\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} = \int_0^1 \mathrm{Re}\,\varphi'\left(\omega_1 + t(\omega_2 - \omega_1)\right)dt > 0$$

olur ve böylece $f(z) = \varphi(g(z))$ fonksiyonu D de ünivalent olur.

Aşağıdaki tanım Kaplan tarafından verilmiştir.

Tanım 4.2.3 $f \in H(U)$ olsun. Bu halde

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0\,,\ (z \in U) \tag{24}$$

olacak şekilde U da konveks bir g fonksiyonu varsa f, U da close-to-convex tir (veya kısaca close-to-convex) deriz.

Teorem 3.3.6 göz önüne alınarak (24) şartı ile h, U da starlike bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{h(z)}\right] > 0 \,,\ (z \in U) \tag{25}$$

şartını yer değiştirebiliriz. Böylece f, U da starlike ise aynı zamanda close-to-konvekstir sonucunu söyleriz.

U da normalleştirilmiş close-to-convex fonksiyonların kümesini C ile göstereceğiz. Bu durumda $K \subset S^* \subset C \subset S$ olduğu açıktır.

Reade, Bieberbach sonucunun close-to-convex fonksiyonlar için doğru olduğunu 1955 yılında ispatladı. Bu ispattaki argümanlar Teorem 3.3.10 da starlike fonksiyonlar için verilen argümanların aynısıdır.

Teorem 4.2.4 $f(z) = z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$ close-to-convex bir fonksiyon olsun, bu durumda $n = 2,3,...$ için $|a_n| \le n$ olur. f, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda verilen bir $n \ge 2$ için $|a_n| = n$ eşitliği geçerli olur.

İspat $f \in C$ olduğundan, U da

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] > 0$$

olacak şekilde konveks bir h fonksiyonu mevcuttur. Bu nedenle $\operatorname{Re}\left[1/h'(0)\right]>0$, ve $\alpha=\arg h'(0)$ ise $|\alpha|<\pi/2$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca

$$g(z)=\frac{h(z)-h(0)}{h'(0)},\ (z\in U)$$

olsun. Bu durumda $g\in K$ olur ve eğer

$$q(z)=\frac{f'(z)}{e^{i\alpha}g'(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n z^n$$

fonksiyonunu ele alırsak, $q_0=e^{-i\alpha}$ ve $\operatorname{Re}q(z)>0$, $(z\in U)$ sonucuna varırız. Ayrıca,

$$p(z)=\frac{q(z)+i\sin\alpha}{\cos\alpha}=1+p_1z+\ldots+p_nz^n+\ldots,\ (z\in U)$$

olsun. Bu fonksiyon □ ye aittir ve kolayca görülebilir ki $n\geq 1$ için $q_n=p_n\cos\alpha$ dır.

$$g(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots,\ (z\in U)$$

ise $f'(z)$ ve $e^{i\alpha}g'(z)q(z)$ fonksiyonlarının kuvvet serilerindeki katsayılar karşılaştırılırsa, kolaylıkla

$$na_n=e^{i\alpha}\left[nc_ne^{-i\alpha}+(n-1)c_{n-1}q_1+(n-2)c_{n-2}q_2+\ldots+2c_2q_{n-2}+q_{n-1}\right]$$

sonucunu elde ederiz.

$p \in \mathcal{P}$ olduğundan, $n = 2,3,...$ için $|p_n| \leq 2$ ve ayrıca $|q_n| \leq 2\cos\alpha \leq 2$ yazarız. $g \in K$ olduğu için de $n = 2,3,...$ için $|c_n| \leq 1$ olur. Bu nedenle

$$n|a_n| \leq n + 2(n-1) + 2(n-2) + ... + 2.2 + 2 = n^2$$

ve böylece $n = 2,3,...$ için $|a_n| \leq n$ elde edilir.

f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda verilen bir $n \geq 2$ için $|a_n| = n$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Close-to-convex fonksiyonlar hakkındaki temel sonuçlardan biri Kaplan tarafından verilen geometrik karakterizasyondur. İspat için aşağıdaki teoreme gereksinim vardır.

Teorem 4.2.5 $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$v(t + 2\pi) - v(t) = 2\pi \,,\ (t \in \mathbb{R}),$$

$$v(t_1) - v(t_2) < \pi \,,\ t_1 < t_2 .$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda $\omega(t + 2\pi) - \omega(t) = 2\pi$, $t \in \mathbb{R}$ ve $|\omega(t) - v(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ ($t \in \mathbb{R}$) olacak şekilde azalmayan bir $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

İspat $\omega(t) = \sup_{s \leq t} v(s) - \frac{\pi}{2}$ olsun. Bu fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de azalmayan bir fonksiyon olduğu açıktır. Hipotezde

$$v(t + 2\pi) - v(t) = 2\pi \,,\ (t \in \mathbb{R})$$

olarak verildiğinden,

$$\omega(t+2\pi) = \sup_{s \le t} v(s+2\pi) - \frac{\pi}{2} = \omega(t) + 2\pi$$

elde edilir. Başka bir deyişle,

$$v(s) < v(t) + \pi \ , \ s < t$$

ifadesinden,

$$\omega(t) \le v(t) + \frac{\pi}{2}$$

olduğunu görürüz. Ayrıca

$$v(t) \le \sup_{s \le t} v(s) = \omega(t) + \frac{\pi}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Bu son iki eşitsizlikten

$$\left|\omega(t) - v(t)\right| \le \frac{\pi}{2}$$

sonucuna varırız ki bu istenilen sonuçtur.

Teorem 4.2.6 f , $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olacak şekilde U da lokal ünivalent analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin close-to-convex olması için gerek ve yeter şart her bir $r \in (0,1)$ ve $0 \le \theta_2 - \theta_1 \le 2\pi$ olacak şekilde θ_1, θ_2 reel sayıları için

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] d\theta > -\pi \, , \; (z = re^{i\theta}) \tag{26}$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

İspat İlk olarak, kabul edelim ki f close-to-convex bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] > 0 \, , \; (z \in U)$$

olacak şekilde konveks bir h fonksiyonu vardır. Yani

$$\left|\arg\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right]\right| < \frac{\pi}{2}$$

dir. $f'(z) \neq 0$ ve $z \in U$ için $h'(z) \neq 0$ olduğundan

$$\left|\arg f'(z) - \arg h'(z)\right| < \frac{\pi}{2} \, , \; (z \in U)$$

olacak şekilde argümentlerin dalları seçilebilir. $a(z) = \arg f'(z)$ ve $b(z) = \arg h'(z)$ olsun. $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$ ($\theta \in \mathbb{R}$) için

$$V(r,\theta) = a(re^{i\theta}) + \theta = \arg\left[re^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right],$$

ve

$$W(r,\theta) = b(re^{i\theta}) + \theta = \arg\left[re^{i\theta} h'(re^{i\theta})\right]$$

olsun. Bu durumda

$$\left|V(r,\theta)-W(r,\theta)\right|<\frac{\pi}{2}$$

sonucuna ulaşırız.

h konveks bir fonksiyon olduğundan, $W(r,\theta)$, θ nın artan bir fonksiyonudur. (Alexander'ın teoremini kullanarak veya doğrudan bunu görebiliriz.) Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden $\dfrac{\partial W}{\partial \theta}$ sonucunu elde ederiz. Bir önceki eşitsizlikle bunu birleştirerek, $0\le\theta_2-\theta_1\le 2\pi$ için,

$$\begin{aligned}V(r,\theta_1)-V(r,\theta_2)&=\left[V(r,\theta_1)-W(r,\theta_1)\right]\\&+\left[W(r,\theta_1)-W(r,\theta_2)\right]+\left[W(r,\theta_2)-V(r,\theta_2)\right]\\&\le\left[V(r,\theta_1)-W(r,\theta_1)\right]+\left[W(r,\theta_2)-V(r,\theta_2)\right]<\pi.\end{aligned}$$

sonucuna varırız. Böylece

$$V(r,\theta_2)-V(r,\theta_1)>-\pi$$

olduğunu görürüz. Yani

$$\arg\left[re^{i\theta_2}f'(re^{i\theta_2})\right]-\arg\left[re^{i\theta_1}f'(re^{i\theta_1})\right]>-\pi.$$

Bu eşitsizlik, açıkça görülebileceği gibi, (26) ya denktir ve böylece ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

Aksine, farz edelim ki f, U da lokal ünivalent bir fonksiyon ve (26) şartını sağlasın. f nin close-to-convex olduğunu ispatlamalıyız. Bu amaçla, $\rho \in (0,1)$ sabit seçelim ve

$$v_\rho(\theta) = V(\rho,\theta) = \arg\left[\rho e^{i\theta} f'(\rho e^{i\theta})\right] = \theta + \arg\left[f'(\rho e^{i\theta})\right]$$

ifadesini ele alalım. (26) şartı

$$v_\rho(\theta_1) - v_\rho(\theta_2) < \pi, \ \theta_1 < \theta_2$$

ifadesine eşdeğerdir. $f'(z) \neq 0, \quad z \in U$, olduğundan $\arg\left[f'(\rho e^{i\theta})\right]$, θ da 2π periyoduna sahip olmalıdır ve böylece

$$v_\rho(\theta + 2\pi) - v_\rho(\theta) = V(\rho,\theta + 2\pi) - V(\rho,\theta) = 2\pi$$

olur. Teorem 4.2.5 e göre

$$\omega_\rho(\theta + 2\pi) - \omega_\rho(\theta) = 2\pi$$

olacak şekilde azalmayan bir $\omega_\rho(\theta)$ fonksiyonu vardır ve

$$\left|\omega_\rho(\theta) - v_\rho(\theta)\right| \leq \frac{\pi}{2}, \ (\theta \in \mathbb{R}) \tag{27}$$

olur.

Şimdi, $P_\rho(r,\theta)$, U_ρ diskinde *Poisson çekirdeği*, yani

$$P_\rho(r,\theta)=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos\theta+r^2},\ (r<\rho)$$

olsun. U_ρ da harmonik olan

$$b_\rho(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\rho(r,\theta-s)\big[\omega_\rho(s)-s\big]ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\rho(r,t)\big[\omega_\rho(t+\theta)-(t+\theta)\big]dt$$

olarak verilen b_ρ Poisson integralini ele alalım.

Ayrıca,

$$W_\rho(r,\theta)=b_\rho(r,\theta)+\theta$$

olsun. $tP_\rho(r,t)$ fonksiyonunun t nin tek fonksiyonu olduğunu kullanarak kolaylıkla görebiliriz ki

$$W_\rho(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\rho(r,t)\omega_\rho(t+\theta)dt \tag{28}$$

dir. Buradan, herhangi bir sabit $r<\rho$ için $W_\rho(r,\theta)$ fonksiyonunun θ nın artan bir fonksiyonu olduğunu görürüz. Gerçekten, $\theta_1<\theta_2$ için, $\omega_\rho(\theta)$ nın θ nın artan bir fonksiyonu olduğunu kullanarak

$$W_{\rho}(r,\theta_2)-W(r,\theta_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{\rho}(r,t)\left[\omega_{\rho}(t+\theta_2)-\omega_{\rho}(t+\theta_1)\right]dt\geq 0$$

elde ederiz. Bu nedenle

$$\frac{\partial W_{\rho}}{\partial\theta}(r,\theta)\geq 0$$

ve bu bir harmonik fonksiyon olduğundan bu eşitsizliğin sağlandığı kabul edilebilir. Bir başka ifade ile, (27) den

$$\left|V(\rho,\theta)-\omega_{\rho}(\theta)\right|\leq\frac{\pi}{2}$$

elde ederiz. $V(r,\theta)-\theta=\arg f'(re^{i\theta})$ fonksiyonu U_{ρ} da harmonik bir fonksiyon (tek değerli) olduğundan (28) ifadesi göz önüne alınarak

$$V(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{\rho}(r,t)V(\rho,t+\theta)dt\,,\ (r<\rho)$$

ifadesine ulaşılır. (28) kullanılarak ve önceki ifadeden $r<\rho$ için

$$\left|V(r,\theta)-W_{\rho}(r,\theta)\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{\rho}(r,t)\left|V(\rho,t+\theta)-\omega_{\rho}(t+\theta)\right|dt\leq\frac{\pi}{2}$$

ifadesini elde ederiz.

$\operatorname{Re} g_\rho(0)=0$ ve $z=re^{i\theta}$ için $\operatorname{Im} g_\rho(z)=b_\rho(r,\theta)$ şartlarını sağlayan $g_\rho : U_\rho \to \mathbb{C}$ bir harmonik fonksiyon olsun. Ayrıca

$$h_\rho(z)=\int_0^z e^{g_\rho(\zeta)}d\zeta \ , \ (z\in U_\rho)$$

olsun. Bu durumda h_ρ, U_ρ da analitiktir, $h_\rho(0)=0$ ve $|h'_\rho(0)|=1$ dir. Ayrıca, h_ρ, U_ρ da konveksdir. Gerçekten, $z=re^{i\theta}$ için, $r<\rho$,

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zh''_\rho(z)}{h'_\rho(z)}\right]=1+\operatorname{Re}\left[zg'_\rho(z)\right]=1+\frac{\partial b_\rho}{\partial\theta}(r,\theta)=\frac{\partial W_\rho}{\partial\theta}(r,\theta)>0$$

elde ederiz. Son olarak,

$$V(r,\theta)=\theta+\arg f'(re^{i\theta})$$

$$W_\rho(r,\theta)=\theta+b_\rho(r,\theta)=\theta+\operatorname{Im} g_\rho(re^{i\theta})=\theta+\arg h'_\rho(re^{i\theta})$$

ve

$$\left|V(r,\theta)-W_\rho(r,\theta)\right|\le\frac{\pi}{2}$$

olduğundan,

$$\left|\arg f'(z)-\arg h'_\rho(z)\right|\le\frac{\pi}{2}, \ z=re^{i\theta}, \ (r<\rho)$$

veya buna eşdeğer olarak

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{h'_{\rho}(z)}\right] \geq 0 \, , \; (|z| < \rho)$$

sonucuna varırız. Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden dolayı,

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{h'_{\rho}(z)}\right] > 0, \; (|z| < \rho)$$

elde ederiz.

Ayrıca, $h_{\rho}(0) = 0$, $|h'_{\rho}(0)| = 1$ ve h_{ρ} konveks bir fonksiyon olduğundan herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için $\rho_n = 1 - 1/n$ olmak üzere $\left\{h_{\rho_n}\right\}_{n \geq m}$ ailesi U_{ρ_m} de konveks fonksiyonların bir normal ailesidir. Böylece, bir sonraki adımda $\left\{h_{\rho_{n_k}}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ nın $\rho < 1$ iken her bir U_{ρ} diski üzerinde düzgün olarak yakınsadığı sonucunu çıkarırız. h limit fonksiyonu U da konvekstir ve

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] \geq 0 \, , \; (z \in U)$$

şrtını sağlar. Tekrar harmonik fonksiyonlar için minimum prensibini kullanarak

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{h'(z)}\right] > 0 \, , \; (z \in U)$$

yazarız. Böylece f, h a göre close-to-convex olur.

Bu kısmı birim diskte close-to-convex fonksiyonlarla ilgili olarak bazı uyarılarla sonlandıracağız.

Teorem 4.2.6 nın geometrik yorumu f normalleştirilmiş close-to-convex bir fonksiyon ve $0<r<1$ olsun. Ayrıca Γ_r ile de $|z|=r$ çemberinin f altındaki görüntüsü gösterilsin. $\vec{T}_1$ ve $\vec{T}_2$ ile sırasıyla $f(re^{i\theta_1})$ ve $f(re^{i\theta_2})$ de Γ_r ye teğet birim vektörleri gösterirse, (26) ifadesi

$$\arg\vec{T}_2-\arg\vec{T}_1>-\pi\ ,\ 0\le\theta_2-\theta_1\le 2\pi$$

ifadesine eşdeğerdir. Bir başka ifade ile Γ_r Jordan eğrisi saat yönünde bir U dönüşü yapmaz, yani θ, $[0,2\pi]$ de artan değerler aldığında teğet vektörü π ye eşit veya daha büyük bir açı ile geriye dönüş yapmaz.

Örnek 4.2.7 $a_n\in\mathbb{C}$ için $f(z)=z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ lokal ünivalent fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu halde $p_n=(n+1)a_{n+1}-na_n$ olmak üzere

$$(1-z)f'(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

elde ederiz. Farz edelim ki $|p_2-1|\le 1$ ve $n\ge 2$ için $p_{n+1}=p_{n-1}$ özel durumunu göz önüne alalım. Bu durumda $f(z)$ nin $\beta=0$ için, U da $\operatorname{Re}\{(1-z)f'(z)\}>0$ ifadesine denk olan

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|p_{n+1}-p_{n-1}|\le(1-\beta)-|p_2-(1-\beta)|$$

ifadesinin sağlandığını bulmak kolaydır. Aslında $n \geq 2$ için $p_{n+1} = p_{n-1}$ şartı

$$(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} - na_n + (n-1)a_{n-1} = 0\,,\ n \geq 2$$

ifadesinin tekrarına denktir. Bu çözüm $k \geq 1$ için

$$a_{2k} = \frac{3(k-1)a_3 + 2a_2 - (k-1)}{2k} \text{ ve } a_{2k+1} = \frac{3ka_3 - (k-1)}{2k+1}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu iki ifadeden dolayı f, kolay bir hesaplamadan sonra

$$f(z) = z + \left(\frac{3a_3 - 2a_2 - 1}{2}\right)\left(\frac{z^2}{1-z} + \log(1-z^2) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + z\right)$$

$$+a_2\left(\frac{z^2}{1-z}\right) + (1-a_2)\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - z\right) \tag{29}$$

ifadesine denk olarak yazılabilen

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(k-1)a_3 + 2a_2 - (k-1)}{2k} z^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3ka_3 - (k-1)}{2k+1} z^{2k+1}$$

biçiminde elde edilir. $|p_2 - 1| \leq 1$ şartı $|3a_3 - 2a_2 - 1| \leq 1$ şartına denktir. Bu şart altında (29) biçimindeki her lokal ünivalent $f(z)$ fonksiyonu $-\log(1-z)$ konveks fonksiyonuna göre daima close-to-convex dir. Eğer f (29) daki gibi verilen bir fonksiyon ise

$$f'(z) = \frac{1 + (2a_2 - 1)z + (3a_3 - 2a_2 - 1)z^2}{(1-z)^2(1+z)}$$

olduğunu görmek kolaydır. Özellikle, eğer $3a_3 = 2a_2 + 1$ ise f

$$f(z) = a_2\left(\frac{z}{1-z}\right) + (1-a_2)\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

biçiminde elde edilir ve bundan dolayı a_2 $[0,1]$ kapalı birim aralığında bir reel olduğunda

$$f'(z) = \frac{1+(2a_2-1)z}{(1-z)^2(1+z)}$$

ifadesi f nin lokal ünivalent olduğunu gösterir, ve böylece f U da close-to-convex dir. U da $\mathrm{Re}\{(1-z)f'(z)\} > 0$ şartını sağlayan sırasıyla $a_2 = 1$ ve $a_2 = 0$ durumlarının karşılığı olan

$$f(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

fonksiyonları bulunur. Bu fonksiyonlar $-\log(1-z)$ ye göre close-to-convex dir.

Örnek 4.2.8 Kabul edelim ki $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \in \square$ **)** lokal ünivalent olsun. Bu durumda $p_n = (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1}$ olmak üzere

$$(1-z^2)f'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

yazılır. Farz edelim ki $n \geq 2$ için $|p_2 - 1| \leq 1$ ve $p_{n+1} = p_{n-1}$ olsun. Bu durumda a_2 ve a_3 katsayılarını içeren U da $\text{Re}\{(1-z)f'(z)\} > 0$ ifadesini sağlayan $f(z)$ nin aşikar biçimini elde etmek kolaydır. $n \geq 2$ için $p_{n+1} = p_{n-1}$ şartı

$$(n+2)a_{n+2} - 2na_n + (n-2)a_{n-2} = 0\,,\ n \geq 2$$

ifadesinin yinelenmesine denktir. Bu denklemin çözümünden, $k \geq 1$ için

$$a_{2k} = a_2 \text{ ve } a_{2k+1} = \frac{3ka_3 - (k-1)}{2k+1}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu iki ifadeyi kullanarak, gerekli hesaplamalardan sonra

$$f(z) = z + a_2\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right) + \left(\frac{3a_3 - 2}{2}\right)\left(\frac{z^3}{1-z^2} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + z\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{z^3}{1-z^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) - z\right) \tag{30}$$

veya buna denk olarak yazılabilen f fonksiyonu

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_2 z^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3ka_3 - (k-1)}{2k+1} z^{2k+1}$$

biçiminde elde edilir. $|p_2 - 1| \leq 1$ şartı $|3a_3 - 2| \leq 1$ eşitsizliğine denktir. Bu şart altında (30) daki gibi tanımlanan her lokal ünivalent f fonksiyonunun $\frac{1}{2}\log\left((1-z)/(1+z)\right)$ konveks fonksiyonuna göre daima close-to-convex olduğu sonucuna varırız. Lokal ünivalentliği tartışmak için,

$$f'(z)=\frac{1+2a_2z+(3a_3-2)z^2}{(1-z^2)^2}$$

göz önüne alırız. Özellikle, $a_3=1$ ise, f

$$f(z)=\frac{z}{1-z^2}+a_2\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)$$

biçiminde olduğundan

$$f'(z)=\frac{1+2a_2z+z^2}{(1-z^2)^2}$$

olur. Böylece $a_2\in\mathbb{R}$ ve $\left|-a_2+\sqrt{a_2^{\,2}-1}\right|=1$ olması durumunda f nin U da lokal ünivalent olduğu görülür. $a_2=0$ ve $a_2=1$ durumları, sırasıyla, $z/(1-z^2)$ ve $z/(1-z)$ fonksiyonlarını verir. Ayrıca, $a_3=\frac{2}{3}$, $a_2\in\mathbb{R}$ ve $\left|-a_2+\sqrt{a_2^{\,2}-1}\right|=1$ ise U da close-to-convex olan

$$f(z)=z+a_2\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^3}{1-z^2}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-z\right)$$

fonksiyonunu elde ederiz. Örneğin, $a_2=\frac{1}{2}$ için

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)$$

close-to-convex fonksiyonunu elde ederiz.

Doğrusal olarak erişilebilen bölgeler (Linearly Accessible Domains). Close-to-convex fonksiyonlarla ilgili olarak bir başka geometrik yorum Lewandowski'nin çalışmasından elde edilebilir. 1936 da Biernacki doğrusal olarak erişilebilen (Linearly accessible) fonksiyon fikrini tanıttı ve 1958 de Lewandowski close-to-convex ile doğrusal erişilebilirlik arasındaki denkliği gösterdi. Daha açık olarak, $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere Ω nın tümleyeni ışınlar veya yarı doğruların birleşmi oluyorsa Ω ya geniş anlamda lineer erişilebilir (Linearly accessible in the large sense) bölge denir. Böyle bir bölgenin basit bağlantılı olduğu açıktır. Eğer f fonksiyonu U da ünivalent bir fonksiyon ve $f(U)$ geniş anlamda lineer erişilebilir bir bölge ise f ye en geniş anlamda lineer olarak erişilebilir bir fonksiyon adı verilir.

Ω bölgesinin tümleyeni ayrık ışınlarla birleştirilebiliyorsa (bir ışının başlangıç noktası bu tür başka ışın üzerinde olması durumu hariç) Ω, kesin anlamda lineer erişilebilirdir (Linearly accessible in the strick sense) veya basit lineer erişilebilirdir deriz. U da ünivalent bir fonksiyon U yu bu tür bir bölge üzerine konform bir şekilde dönüştürebiliyorsa bu fonksiyona kesin anlamda lineer erişilebilir (veya basit lineer erişilebilir) bir fonksiyon denir. Biernacki her iki şartı da verdi ancak bunlardan ikincisi ve Lewandowski'nin sonucu olan; f nin close-to-convex olması için gerek ve yeter şart f nin kesin anlamda lineer erişilebilir olmasıdır sonucu ile çalıştı.

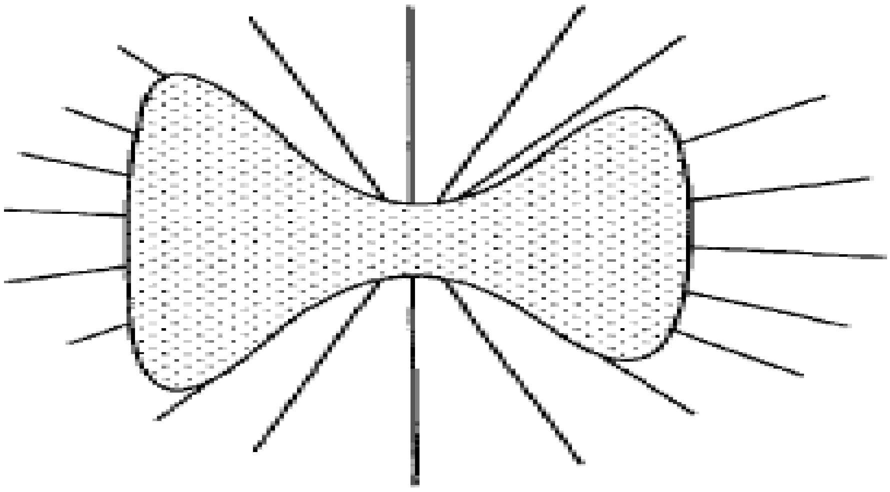
Daha sonra Bielecki ve Lewandowski, Lewandowski'nin teoremi ile ilgili olarak kısa ve zarif bir ispat buldular.

Çok ilginç bazı sonuçları içeren ve Sheil-Small'a atfedilen geniş anlamda lineer olarak erişilebilir fonksiyonlarla ilgili çalışmalar vardır. Aşağıdaki teorem Kaplan'a aittir.

Teorem 4.2.9 U da ünivalent ve analitik bir f fonksiyonunun genel anlamda lineer olarak erişilebilir olması için gerek ve yeter şart her bir r $(0 < r < 1)$, ve her bir $z_0 \in U$ için, $\theta_2 > \theta_1$ olduğunda

$$\frac{1}{2}\theta_2 + \arg\frac{f(re^{i\theta_2}) - f(z_0)}{re^{i\theta_2} - z_0} - \frac{1}{2}\theta_1 - \arg\frac{f(re^{i\theta_1}) - f(z_0)}{re^{i\theta_1} - z_0} > -\pi$$

olmasıdır.



Şekil 4.2. Close-to-convex bölge lineer olarak erişilebilirdir

$z_0 \in U$ noktasında tanımlı olmayan g fonksiyonu hariç, aşağıdaki teorem close-to-convexliğin tanımına benzer bir şartı vermektedir.

Teorem 4.2.10 U da ünivalent ve analitik bir f fonksiyonunun geniş anlamda lineer erişilebilir olması için gerek ve yeter şart her bir sabit $z_0 \in U$ noktası için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z\big(f(z) - f(z_0)\big)}{g(z)(z - z_0)}\right] > 0 \, , \, (z \in U)$$

eşitsizliği geçerli olacak şekilde $1/2$ dereceden starlike bir $g(z) = g_{z_0}(z)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Yukarıdaki g fonksiyonunun normalleştirilmesinin gerekli olmadığını hatırlatmalıyız. Ayrıca,

$$h(z)=z_0 g'(0)+(z-z_0)\frac{g(z)}{z}, \; (z\in U) \tag{31}$$

ise, bu durumda

$$z\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=g(z) \tag{32}$$

olur ve Teorem 4.2.10 daki eşitsizlik

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{h(z)-h(z_0)}\right]>0 \tag{33}$$

ifadesine eşdeğerdir sonucunu söyleriz.

f close-to-convex bir fonksiyon ise bu durumda uygun bir h konveks fonksiyonu için (33) ün sağlandığı iyi bilinmektedir. Bu durumda $g(z)=g_{z_0}(z)$ fonksiyonunu (32) deki gibi tanımlarsak g fonksiyonu $1/2$ dereceden starlikedır ve böylece Teorem 4.2.10 un şartları sağlanmış olur.

C kümesindeki aşağıda verilen rotasyon teoremi Krzyz tarafından elde edildi.

Teorem 4.2.11 $f\in C$ olsun. Bu durumda

$$\left|\arg f'(z)\right|\le 4\arcsin\left|z\right|, \; (z\in U)$$

olur. Bu sonuç kesindir.

Krzyz, S kümesi için r_{cc} close-to-convexlik yarıçapını da buldu. O, $0.80 < r_{cc} < 0.81$ olacak şekilde r_{cc} nin bir denklemin tek çözümü olduğunu gösterdi.

4.2.2 Birim Diskte Spirallike Fonksiyonlar

Bu kısımda birim diskte ünivalent fonksiyonların bir başka alt sınıfı olan ve spirallike fonksiyonlar olarak adlandırılan fonksiyonların sınıfını ele alacağız. Bu sınıf Spacek tarafından 1933 de tanıtıldı.

$\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ olsun. ω_0, bir kompleks sayı olmak üzere

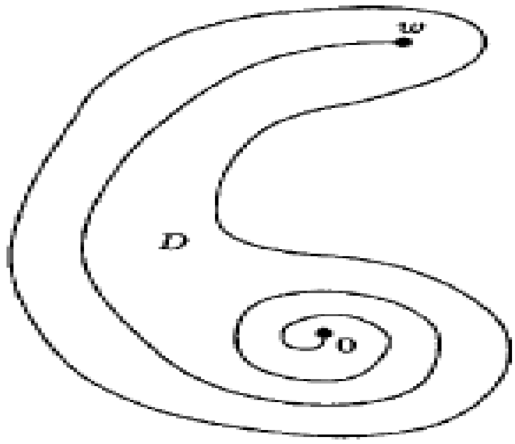
$$\omega = \omega_0 \exp(-e^{-i\alpha} t), \; (t \in \mathbb{R})$$

olarak verilen bir eğriye logaritmik α-spiral veya sadece α-spiral dir denir. Böylece $\omega = \omega(t)$ bir logaritmik α-spiral ise bu durumda

$$\operatorname{Im}\left[e^{i\alpha} \log \omega(t) \right] = sabit, \; (t \in \mathbb{R})$$

olur.

D, $\mathbb{C}$ de orijini içeren bir bölge olmak üzere her bir $\omega \in D$ için ω yı orijine birleştiren α-spiral eğrisi D de kalıyorsa D ye α-spirallike veya α tipinden spirallike denir.



Şekil 4.3. Spirallike Bölge

Eğer her bir $\omega = \omega(t)$ α -logaritmik spirali γ yı bir tek noktada kesiyorsa γ kapalı eğrisi α tipinde logaritmik olarak spiralliketır deriz. Böyle bir γ eğrisi bir Jordan eğrisi olur ve γ tarafından sınırlandırılmış Ω bölgesi α tipinde spirallike bir bölgedir.

$f : U \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ ve $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ olacak şekilde U da analitik bir fonksiyon olsun. Eğer f , U da ünivalent ve $f(U)$ α dereceden spirallike bir bölge ise f , α tipinde spirallikedır (veya α -spirallike) deriz. α türünden normalleştirilmiş spirallike fonksiyonların sınıfını $\widehat{S}_\alpha$ ile göstereceğiz. Uygun bir $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ için f , α dereceden spirallike ise kolaylıkla söyleyebiliriz ki f spirallikedır. 0-spirallike fonksiyonların starlike oldukları aşikârdır.

Spacek tarafından verilen aşağıdaki teorem birim diskte α tipinde spirallikelık için gerek ve yeter şartı verir.

Teorem 4.2.12 $f : U \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olacak şekilde analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $|\alpha| < \pi/2$ şeklinde verilsin. Bu durumda f nin α tipinde spirallike olması için gerek ve yeter şart

$$\text{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\,,\ (z \in U) \tag{34}$$

olmasıdır (Kühnau 2002).

İspat İlk olarak kabul edelim ki f (34) i sağlasın. Bu halde $z \in U \setminus \{0\}$ için $f(0) = 0$ ve bir de $z \in U$, $f'(z) \neq 0$ sonucuna varılır. Yani f, U da lokal ünivalenttir. $r \in (0,1)$ için $\Gamma_r = f(\partial U_r)$ olsun. Γ_r nin kesişmeyen Jordon eğrileri olduğunu ispat etmeliyiz. Bu, f nin ünivalentliğini gerektirecektir. Bu amaçla, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\{\gamma_\varphi\}$

$$\gamma_\varphi(t) = e^{i\varphi}\exp(-e^{-i\alpha}t) = e^{-t\cos\alpha}e^{i(\varphi + t\sin\alpha)}\,,\ (t \in \mathbb{R}) \tag{35}$$

olarak tanımlanan spirallerin ailesi olur.

Her bir $\omega \in \mathbb{C} - \{0\}$ noktasının $\{\gamma_\varphi\}$ ailesinin belirli bir spirali üzerinde kalacağı açıktır. Böylece $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ için

$$f(z) = \gamma_\varphi(t) \tag{36}$$

denklemi bir tek $\varphi = \varphi(r,\theta) \in [0, 2\pi)$ için sağlanır.

İlk olarak göstermeliyiz ki Γ_r, $r \in (0,1)$ için bir Jordan eğrisidir. Bu amaçla,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) > 0\,,\ (\theta \in [0, 2\pi)) \tag{37}$$

ve

$$Var_{0\le\theta<2\pi}\varphi(r,\theta)=2\pi \tag{38}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Burada Var, total varyasyonu göstermektedir. (33) ve (34) den kolayca

$$-t\cos\alpha=\log\left|f(z)\right| \tag{39}$$

ve

$$\varphi+t\sin\alpha=\arg f(z) \tag{40}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\varphi=\arg f(z)+\tan\alpha\log\left|f(z)\right| \tag{41}$$

ve buradan da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})+\tan\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left|f(re^{i\theta})\right|$$

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right]-\tan\alpha\operatorname{Im}\left[\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right]$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right],\ (z=re^{i\theta})$$

elde edilir.

(34) ve yukarıdaki ifade göz önüne alınarak, (37) yi elde ederiz. Ayrıca, $f(z) \neq 0$, $0 < |z| < 1$ olduğundan, $0 < r < 1, \Gamma_r$ eğrilerinin $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da homotopik olduğu sonucuna varırız. Böylece Γ_r her bir $r \in (0,1)$ için orijine göre aynı indekse sahiptir. Ancak f lokal ünivalenttir ve orijinin bir komşuluğunda yönü korur. Yeteri kadar küçük r için Γ_r sıfıra göre indeksi 1 dir. Böylece Γ_r boyunca argümentin total varyasyonu 2π dir. (41) den ve bu sonuçtan, bütün $r \in (0,1)$ için

$$Var_{0 \leq \theta < 2\pi} \varphi(r, \theta) = Var_{0 \leq \theta < 2\pi} \arg f(re^{i\theta}) = 2\pi$$

elde ederiz.

Her bir $r \in (0,1)$ için Γ_r, α tipine logaritmik olarak spirallike bir Jordan eğrisi olduğunu ispatlarız.

Geriye f nin U da ünivalent olduğunu göstermek kaldı. Bu amaçla, $r_1, r_2 \in (0,1)$ $r_1 \neq r_2$ için $\Gamma_{r_1} \cap \Gamma_{r_2} = \varnothing$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varphi \in (0, 2\pi)$ yi sabitleyelim

$$f(z) = \gamma_{\varphi}(t), \ |z| = r, \ 0 < r < 1$$

sistemini göz önüne alarak, bir tek $z = re^{i\theta}$, $\theta = \theta(r)$ için $t = t(r, \theta) = t(r)$ bir tek çözümü elde edilir. Sadece

$$\frac{dt}{dr} < 0, \ (r \in (0,1))$$

olduğunu göstermeliyiz. (39) ve (40) ifadelerinin r ye göre türevlerinden

$$-\frac{dt}{dr}\cos\alpha = \frac{1}{r}\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] - \frac{d\theta}{dr}\mathrm{Im}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$
$$\frac{dt}{dr}\sin\alpha = \frac{1}{r}\mathrm{Im}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] + \frac{d\theta}{dr}\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitliklerde $\frac{d\theta}{dr}$ yok edilirse

$$-\left|f(z)\right|^2 \frac{dt}{dr}\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] = r\left|f'(z)\right|^2$$

bulunur. Şimdi Hipotezi kullanarak, $\frac{dt}{dr} < 0$ sonucuna varırız. Bu istenilen sonuçtur.

Böylece f nin U da ünivalent olduğunu ve her bir $f(U_r)$ bölgesinde α türden spirallike olduğunu göstermiş olduk. $f(U) = \bigcup_{r=0} f(U_r)$ olduğundan, $f(U)$ nun α türden spirallike bir bölge olduğu sonucuna varırız. Bu ispatın ilk kısmını tamamlar.

Aksine, kabul edelim ki f, α tipinde spirallike olsun. Bu halde her bir $z \in U$ için, f nin görüntü kümesi orijin ile $f(z)$ yi birleştiren α-spiral yayı ihtiva eden bir bölgedir. Yani her bir $t \geq 0$ için, $f(z)\exp(-e^{-i\alpha}t) \in f(U)$ dur.

$$\gamma(z,t) = f^{-1}(f(z)\exp(-e^{-i\alpha}t)),\ (0 \leq t < \infty) \tag{42}$$

olsun.

Bu halde $\gamma(z,0)=z$ ve her bir sabit t için, $\gamma(z,t)$, $\gamma(0,t))=0$ olacak şekilde U yu kendi üzerine dönüştüren analitik bir dönüşümdür. Bu yüzden Schwarz lemmasına göre $|\gamma(z,t)|\leq|z|$ dir. Ayrıca, (42) nin her iki taraftan türevi alınırsa

$$f'(\gamma(z,t))\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,t)=-e^{-i\alpha}\exp(-e^{-i\alpha}t)f(z)$$

elde edilir. Burada $t=0$ için

$$e^{-i\alpha}\frac{f(z)}{zf'(z)}=-\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,0)}{z}$$

olur.

Böylece, (34) ü göstermek için

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,0)\right]\leq 0$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. $|\gamma(z,t)|\leq|z|$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{z}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(z,0)\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\operatorname{Re}\left[\frac{\gamma(z,t)}{z}-1\right]\leq 0$$

elde ederiz ki bu istenilen sonuçtur. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki spirallikelık özelliğini kullanarak, aşağıdaki S^* ve $\widehat{S}_\alpha$ arasındaki benzerliği verebiliriz. Bu sonuç birim diskte spirallike fonksiyonlarla ilgili birçok örnek oluşturma fırsatı verir.

Teorem 4.2.13 $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ve $\beta = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olsun. Bu halde $f \in \widehat{S}_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta},\ (z \in U) \qquad (43)$$

olacak şekilde $g \in S^*$ olmasıdır. Burada fonksiyonunun dalı $\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta}\Big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçilmiştir.

İspat İlk olarak $f \in \widehat{S}_\alpha$ olduğunu kabul edelim. Açıkça (43) ifadesi

$$g(z) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{e^{i\alpha}/\cos\alpha},\ (z \in U)$$

ifadesine denktir. Kuvvet fonksiyonunun $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{e^{i\alpha}/\cos\alpha}\Big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde bir dalını seçelim. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = (1 + i\tan\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} - i\tan\alpha,\ (z \in U)$$

ifadesini elde ederiz. Böylece f, α türden spirallike olduğundan

$$\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{1}{\cos\alpha}\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0,\ (z \in U)$$

olur. Sonuç olarak g istenildiği gibi starliketır.

Aksine, $g \in S^*$ olsun. Bu durumda yukarıdaki ifadeden ve $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ olmasından

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0 \, , \, (z \in U)$$

sonucuna varılır. Böylece Teorem 4.2.12 ye göre f , α tipinde spirallike olur.Bu ispatı tamamlar.

(43) kullanılarak

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2e^{-i\alpha}\cos\alpha}} \, , \, (z \in U)$$

fonksiyonunun $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tipinde spirallike bir fonksiyon olduğu görülebilir. Bu fonksiyona α -spiral Koebe fonksiyonu denir ve birim diski logaritmik α -spiral bir yayın tümleyeni üzerine dönüştürür.

$\widehat{S}_\alpha$ daki fonksiyonların ikinci dereceden katsayıları için aşağıdaki kesin sınır Teorem 4.2.13 ün doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 4.2.14 $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ türden spirallike bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|a_2| \le 2\cos\alpha$ dır. Bu sınır kesindir. Eşitliğe α -spiral Koebe fonksiyonu için ulaşılır.

İspat $f \in \widehat{S}_\alpha$ olsun bu durumda, $\beta = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olduğunda

$$f(z)=z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta},\ (z\in U)$$

olacak şekilde bir $g\in S^{*}$ fonksiyonu vardır. $g(z)=z+b_2z^2+...$ olsun. Kuvvet serisi açılımlarındaki katsayılardan $a_2=b_2\beta$ olduğu kolaylıkla görülür. Teorem 3.3.10 u göz önüne alarak istediğimiz sonucu elde ederiz.

5. SONUÇ

Bu bölümde ünivalent fonksiyonların alt sınıfları ile ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Sonuç 5.1 Kabul edelim ki f birim diskte analitik olsun. Bu durumda $f \in K$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in S^*$ olmasıdır.

Sonuç 5. $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$ şeklinde verilen f fonksiyonu U da analitik olsun ve $\mathrm{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu starliketır.

Sonuç 5.3 f konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

a) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \dfrac{1}{2}$

ve

b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{f(z)}{z}\right) > \dfrac{1}{2}$ olur.

c) Bunlara ek olarak kabul edelim ki, f fonksiyonu $\dfrac{z}{1-\gamma z}$, $|\gamma| = 1$ şeklinde olmasın. Bu durumda, $\mathrm{Re}\left(zf'(z)f(z)\right) > \alpha$ olacak şekilde $\alpha > 1/2$ sayısı vardır.

Sonuç 5.4 $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $M_\alpha \subseteq S^*$ dır. Ayrıca, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha / \beta < 1$ için $M_\beta \subset M_\alpha$ dır.

Sonuç 5.5 $\alpha \ge 0$ olsun. Bu durumda $f \in M_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $g(z) = f(z)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^\alpha$ $(z \in U)$ olarak tanımlanan fonksiyonun S^* a ait olmasıdır. Burada fonksiyonunun dalını $\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^\alpha \Big|_{z=0} = 1$ olacak şekilde seçtik.

Sonuç 5.6 Kabul edelim D, $\mathbb{C}$ ' de konveks bir bölge olsun. $f \in H(D)$ fonksiyonu D de $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ şartını sağlıyorsa f , D de ünivalenttir.

Sonuç 5.7 D, $\mathbb{C}$ de bir bölge, f ve g , D de analitik fonksiyonlar g , D de ünivalent ve $g(D)$ konveks bir bölge olsun. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0, \; (z \in D)$$

ise f , D de ünivalenttir.

Sonuç 5.8 $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ close-to-convex bir fonksiyon olsun, bu durumda $n = 2, 3, \ldots$ için $|a_n| \le n$ olur. f , Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda verilen bir $n \ge 2$ için $|a_n| = n$ eşitliği geçerli olur.

Sonuç 5.9 Sprallike fonksiyonlar ünivalenttir.

KAYNAKLAR

Alexander, J. W., 1915-1916, Functions Which Map The Interior of The Unit Circle Upon Simple Regions. Ann. Of Math., 17, 12-22.

Anderson, J. M., Barth K. F. and Brannan D. A., 1977, Research Problems In Complex Analysis, Bull. London Math. Soc., 17, 129-162.

Barnard, R. W. and Suffridge T. J., 1983, On The Simultaneous Univalence of f and f', Michigan Math. J., 30, 9-16.

Başkan, T., 1996, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. İkinci Baskı, Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Bieberbach, L., 1916, Über die Koeffizienten Derjenigen Potenzreihen, Welche Eine Schlichte Abbildung des Einheintskreiss Vermitteln. S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 940-955.

Carathêodory, C., 1907, Über den Variabilitetesbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die Gegebene Werte Nicht Annehmen, Math. Ann., 64, 95-115.

de Branges, L., 1985, A Proof of The Bieberbach Conjecture., Acta Math., 154, 137-152.

Dönmez, A., 1999, Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı. Beta Basım Yayım Dağıtım A. Ş., İstanbul.

Duren, P. L., 1983, Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

Duren, P. 2004, Harmonic Mappings In The Plane, Cambridge University Press, New York., 72-111.

Goodman, A. W., 1983, Univalent Functions, Mariner Publishing Company Inc, USA

Graham, I. and Kohr, G., 2003, Geometric Function Theory in One and Highet Dimensions, Marcel Dekker. Inc. New York. Basel, 3-87.

Graham, I. and Varolin, D., 1996, Bloch Constants in One and Several Variables, Pacif. J. Math., 174, 347-357.

Gronwall, T. H., 1914|15, Some Remarks on Conformal Representation, Ann. Math., 16, 72-76.

Herglotz, G., 1911, Über Potenzreihen Mit Pozitivem, Reelen Teil im Einheitskreis, S.-B., Sachs. Akad. Wiss. Leibzig. Math. - Natur. KI., 63, 501-511.

Koebe, P., 1907, Uber die Uniformisierung beliebiger analytischer kurven. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. K1., 191-210.

Kühnau, R., 2002, Handbook Of Complex Analysis: Geometric Function Theory Volume 1, Elsevier Science B.V, Amsterdam, 3-24.

MacGregor, T. H., 1964, A Covering Theorem for Convex Functions, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 310.

Nehari, Z., 1952, Conformal Mapping. McGraw-Hill, New York.

Noshiro, K., 1934|35, On The Theory of Schlicht Functions, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 310.

Özkın, İ. K., 1989, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

Warschawski, S. E., 1935, On The Higher Derivatives at The Boundary in Conformal Mapping, Trans. Amer Math. Soc., 38, 310-348.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Mersin (İçel) ilinin Anamur ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Hatay ilinin İskenderun ilçesinde tamamladı. 1998 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Tezsiz yüksek lisans öğrenimine başladı ve 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl askerlik hizmetini yerine getirdi. 2006 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında tezli yüksek lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesinde Öğretim Görevlisi olarak akademisyenliğe başladı. Halen aynı üniversitede öğretim görevlisi olarak çalışmakta olup evli ve iki çocuk babasıdır.