TOTAL ASİMPTOTİK *I*-GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Birol GÜNDÜZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Sezgin AKBULUT
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOTAL ASİMPTOTİK *I*-GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Birol GÜNDÜZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

TOTAL ASİMPTOTİK *I*-GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Doç. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, **Birol GÜNDÜZ** tarafından hazırlanan bu çalışma **19/07/2011** tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **Matematik** Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak **oybirliği (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: **Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR**	*İmza*	:
Üye	: **Doç. Dr. Sezgin AKBULUT**	*İmza*	:
Üye	: **Doç. Dr. Abdullah KAPLAN**	*İmza*	:

(imza)

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOTAL ASİMPTOTİK I-GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN
YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Birol GÜNDÜZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezde, önce I total asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere total asimptotik I-genişlemeyen iki dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması kurulmuş ve bu iterasyon şemasının dönüşümlerin ortak sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsaması incelenmiştir. Sonrada bu iterasyon şeması sonlu iki aile için yeniden yazılmış ve bu iterasyon şemasının dönüşüm ailelerinin ortak sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsaması incelenmiştir.

2011, 80 sayfa

Anahtar Kelimeler: Total asimptotik I-genişlemeyen dönüşüm, total asimptotik genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta, kuvvetli ve zayıf yakınsama, düzgün konveks Banach uzayı, Opial Şartı, (A) Şartı, (A') Şartı, (B) Şartı, (B') Şartı.

ABSTRACT

MS Thesis

NEW APPROACH METHODS FOR TOTALLY ASYMPTOTICALLY I-NONEXPANSIVE MAPPINGS

Birol GÜNDÜZ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

In this thesis, first a new iteration process has been established for two total asymptotically I-nonexpansive mappings, where I is total asymptotically nonexpansive mapping, and the weak and strong convergence of this iteration process to a common fixed point of mappings has been investigated. Then this iteration process has been rewritten for two finite families and the weak and strong convergence of this iteration process to a common fixed point of these families has been investigated.

2011, 80 pages

Keywords: Totally asymptotically I-nonexpansive mapping, totally asymptotically nonexpansive mapping, fixed point, strongly and weakly convergence, uniformly convex Banach space, Opial's Condition, (A) Condition, (A') Condition, (B) Condition, (B') Condition.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Sezgin AKBULUT'a en içten dileklerimle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa YILDIRIM'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Birol GÜNDÜZ
Temmuz - 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

c_o	0 a yakınsayan dizilerin uzayı
$C[0,1]$	$[0,1]$ aralığından $\mathbb{R}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
$C^1(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerinde 1. mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
$D(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{D}(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$dim\ (X)$	X uzayının boyutu
$diam\ (X)$	X kümesinin çapı
X^*	X uzayının normlu duali
X^{**}	X uzayının normlu ikinci duali
X'	X uzayının cebirsel duali
X''	X uzayının cebirsel ikinci duali
B_X	X uzayındaki kapalı birim yuvar
S_X	X uzayındaki birim küre
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$I(x_0,\alpha_n,\beta_n,T)$	Ishikawa iterasyonu
$K(x_0,\lambda,T)$	Krasnoselskij terasyonu
$M(x_0,\alpha_n,T)$	Mann iterasyonu
$P(x_0,T)$	Picard iterasyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İnsanlığın ortak kültürünün çok önemli bir parçası olan matematik, doğanın anlaşılmasını oldukça kolaylaştıran bir bilim dalıdır. Matematiğin temel konusu teoremlerdir. Matematikçilerin temel amacı teoremleri bulmak, kanıtlamak, genellemek, kullanmak ve anlamaktır. Matematik bilimi mekanik, fizik, astronomi bilimlerinin temelini oluşturmasının yanı sıra sosyal bilimler, tıp, jeoloji, psikoloji, sosyoloji, iş idareciliği ve ekonomi gibi alanlarda da yaygın bir şekilde kullanılır.

Bu tezde ele alınan "Sabit Nokta Kavramı" da matematikteki önemli hesaplama yöntemlerinden biri olup, ekonomi, oyun teorisi, denge problemleri, tomografi, telekomünikasyon ve bir çok mühendislik dalında uygulamaya sahiptir.

Sabit nokta teorisinin temelleri, XX. yüzyılın başlarında L. E. J. Brouwer'ın çalışmaları ile atılmıştır. Bilinen ilk sabit nokta teoremi, "$X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: X \to X$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin X de bir sabit noktası vardır" şeklindedir. 1912 yılında Brouwer bu teoremi n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayına "B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar ve $f: B \to B$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, B de en az bir sabit noktaya sahiptir" şeklinde genişletmiştir. Brouwer'ın teoremi, ekonomi biliminde Nobel ödülü alan John Nash'ın makalelerine temel bir matematiksel malzeme olmuştur. Ekonomistler, Brouwer Sabit Nokta Teoremi'nin kesin bir ekonomik dengenin oluşturulması için yardımcı bir unsur olarak kullanılabileceğini belirtmektedirler.

1922 yılında S. Banach tarafından ifade edilen ve "Daraltan (büzülme) Dönüşüm Teoremi" olarak da bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi, sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden en önemli teoremlerden biridir. Bu teorem, "(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)\ , \quad 0 \leq \alpha < 1$$

ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir" şeklindedir. Banach Sabit Nokta Teoremi, sabit noktayı bulmak için kullanışlı bir yöntem oluşturmasının yanı sıra aynı zamanda diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermede de kolaylık sağlayan bir unsur olmuştur.

Yukarıda ifade edilen Brouwer teoremi sonsuz boyutlu uzaylar için geçerli değildir. Bu teoremin sonsuz boyutlu Banach uzaylarına bir genelleştirmesi olan ve Schauder Teoremi olarak adlandırılan teorem, 1930 yılında J. Schauder tarafından "K, bir X Banach uzayının boş olmayan kompakt, konveks bir alt kümesi ve $f: K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, K da en az bir sabit noktaya sahiptir" şeklinde ifade edilmiştir.

Daha sonra 1950 de F. E. Browder, 1965 de W. A. Kirk, 1968 de R. Kannan, 1974 de L. B. Ciric ve daha pek çok kişi bu temel sonuçları genelleştirmişlerdir. 1972 yılında Goebel ve Kirk, asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm için sabit noktanın varlığını ispatlamıştır.

2006 yılında total asimptotik genişlemeyen dönüşümler Y.I. Alber, C.E. Chidume ve H. Zeyege tarafından tanımlanmış ayrıca iterasyonlar vasıtasıyla bu dönüşümlerin sabit noktaya yakınsaması incelenmiştir. Daha sonraki yıllarda Y. Alber, C.E. Chidume, E.U. Ofoedu, Y. Hao tarafından çalışılmıştır.

Normlu bir uzayın, boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesinden bu normlu uzaya tanımlanan ve kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşümler 2007 yılında Chidume ve Ofoedu tarafından tanımlanmıştır. 2008 yılında G. Hu ve L. Yang yeni bir iterasyon şeması oluşturularak bu iterasyon şemasının uygun şartlar altında kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktalara yakınsaması incelenmiştir.

2010 yılında total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümler F. Mukhamedov ve M. Saburov tarafından tanımlanarak, total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ve I-genişlemeyen dönüşümlerin tanımları birleştirilmiştir ve ayrıca yeni bir iterasyon yöntemi kullanılarak bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarına yakınsama teoremleri ispat edilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Yine bu bölümde daraltan, kesin daraltan ve genişlemeyen dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde ilk olarak dönüşümlerin sabit noktaları bulunurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları verilmiştir. Bunlardan bazıları Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu, Krasnoselskij iterasyon metodu, Mann iterasyon metodu, Ishikawa iterasyon metodu, Noor iterasyonu ve Rhoades'in n-adım iterasyon metodudur. Daha sonra bazı dönüşümlerin sabit noktasının varlığıyla ilgili teoremler ifade edilerek ispatlarımızda kullanacağımız bazı lemmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde önce I total asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere total asimptotik I-genişlemeyen iki dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması kurulmuş ve bu iterasyon şemasının ortak sabit noktaya kuvvetli ve zayıf yakınsaması incelenmiştir. Daha sonra bu iterasyon şeması dönüşümlerin sonlu ailesleri için yeniden yazılmış ve bu iterasyon şemasının ortak sabit noktaya yakınsaması incelenmiştir. Son olarak yapılan çalışmalar bu dönüşümlerin alt sınıflarına uygulanmıştır.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızdan hareketle bazı çalışılabilecek problemlere değinilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Normlu Uzay): N, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \ \ (\alpha \in F)$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \quad \|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) bir norm ve $(N, \| \quad \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.2 (Banach Uzayı): N normlu lineer uzay olsun**.** N**,** $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

N nin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayıda reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \quad \rangle: L \times L \to F$ fonksiyonu

İ1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

İ2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

İ3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

İ4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı lineer uzaya iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(L, \langle \quad \rangle)$ veya kısaca L ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \quad \|$ iç çarpım normu olsun. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X e Hilbert uzayı denir.

Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.1.5 (Cebirsel Dual): X bir reel lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $L(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $L(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R} \text{ lineer}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in L(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $L(X, \mathbb{R})$ bir reel lineer uzaydır. Bu $L(X, \mathbb{R})$ uzayına X in cebirsel duali denir ve X' ile gösterilir. X' in cebirsel duali

$$L(X', \mathbb{R}) = (X')'$$

veya kısaca X'' ile gösterilir ve buna X lineer uzayının cebirsel ikinci duali (bidual space) adı verilir.

Tanım 2.1.6 (Normlu Dual): X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $C(X, \mathbb{R})$ bir lineer uzaydır. Bu $C(X, \mathbb{R})$ uzayına X in normlu duali denir ve X^* ile gösterilir. X^* in normlu duali

$$L(X^*, \mathbb{R}) = (X^*)^*$$

veya kısaca X^{**} ile gösterilir ve buna X normlu uzayının normlu ikinci duali (bidual space) adı verilir.

Burada X^*, $\|T\| = \sup\{T(x): \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu lineer uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzaydır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı da verilir.

Yukarıdaki tanımlardan da anlaşılacağı gibi, X^* uzayı X' cebirsel dual uzayının bir alt uzayıdır. Sonlu boyutlu uzayların normlu dualleri ile cebirsel dualleri aynıdır. Dolayısıyla sonlu boyutlu uzaylarda normlu dualle çalışmakla cebirsel dualle çalışmak arasında bir fark yoktur.

Örnek 2.1.7:

(i) Alışılmış norm ile $\mathbb{R}^n$ uzayının duali kendisidir.

(ii) ℓ_1 uzayının $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre normlu duali ℓ_∞ uzayıdır.

(iii) c_0 uzayının $\|x\| = sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$ normuna göre normlu duali ℓ_1 uzayıdır.

Tanım 2.1.8 (Doğal Dönüşüm): X bir lineer uzay olsun. Bir $x \in X$ için

$$g_x: X^* \to \mathbb{R}, \quad g_x(f) = f(x)$$

şeklinde bir g_x fonksiyoneli tanımlayalım. f lineer olduğundan bu g_x fonksiyonelinin de lineer olduğu ya da diğer bir deyişle $g_x \in X^{**}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece bir $x \in X$ için bir $g_x \in X^{**}$ öğesinin var olduğu anlaşılır. Bu durumda

$$G: X \to X^{**}, \quad G(x) = g_x$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bu G dönüşümüne X uzayından X^{**} uzayı içine doğal dönüşüm (canonical mapping) adı verilir.

Tanım 2.1.9 (Yansımalı Uzay): X normlu bir uzay iken G doğal dönüşümü örten yani

$$G(X) = X^{**}$$

ise, X uzayına yansımalı (reflexive) uzay denir. Bu kavram, Hahn (1927) tarafından ifade edilmiş ve Lorch (1939) tarafından, "reflexive" olarak adlandırılmıştır.

X normlu uzayı yansımalı ise X ve X^{**} uzayları eşmetrel eşyapılı (isomorphic) olurlar. Bunun tersi genel olarak doğru değildir. X normlu uzayı ile X^{**} uzayının eşmetrel eşyapılı olmaları, X uzayının yansımalı olmasını gerektirmediği 1950 ve 1951 yıllarında R.C. James tarafından gösterilmiştir.

Tanım 2.1.10 (Kuvvetli Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \overset{k}{\rightarrow} x$ ile gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 2.1.11 (Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \overset{z}{\rightarrow} x$ ya da $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Kuvvetli ve zayıf yakınsama arasındaki gerektirmeler aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.1.12: X normlu bir uzay olsun. Bu durumda,

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.

(b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.

(c) $\dim(X) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir (Kreyszig 1989).

Normlu uzaylarda zayıf yakınsamanın kuvvetli yakınsamayı gerektirmediğini aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

Örnek 2.1.13: $X = \ell_2$ uzayını ve bu uzayda $x \in X$ için $\|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan normu alalım. $\{x_n\}$ dizisini

$$x_n = (0,0,\dots,1,0,\dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Herhangi bir $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in X^* = \ell_2$ ve $n \to \infty$ için

$$(x_n, y) = y_n \to 0$$

olur. Böylece $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup 0$ zayıf yakınsar. Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak değildir.

Tanım 2.1.14 (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin,

1. Düzlemin döndürülmesi bir tek sabit noktaya sahiptir ve bu sabit nokta dönme merkezidir.

2. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x^2$ dönüşümünün iki sabit noktası vardır ve $F(T) = \{0,1\}$ dir.

3. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x$ izdüşüm dönüşümünün sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

4. $X = C^1(\mathbb{R})$ ve $T: X \to X$, $T(\varphi(X)) = \varphi'(X)$ olsun. Buna göre, e^x fonksiyonu T dönüşümünün sabit noktasıdır.

5. $T: (0,1] \to (0,1]$, $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ noktası tek sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dır.

6. $X = [0, \infty)$ ve $T: X \to X$, $Tx = x^2 + b$, $b > \frac{1}{4}$ olsun. Bu durumda T nin hiçbir sabit noktası yoktur.

7. $X = [0,1]$ ve $Y = [1,2]$ olmak üzere herhangi bir $T: X \to Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n. iterasyonu denir. T^n $(n \geq 1)$ dönüşümüne de T nin n. iterasyonu denir. Bundan sonra $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılacaktır.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ dönüşümü $T(a) = c, T(b) = b, T(c) = a$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{a, b, c\}$ olduğu halde $F(T) = \{b\}$ dir.

X boş olmayan bir küme ve $T, S, I: X \to X$ herhangi üç dönüşüm olsun. Eğer $Tx = Sx = Ix = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T,S ve I nın ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T) \cap F(S) \cap F(I)$ ile gösterilir. Şimdi birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla ilgili örnekler vereceğiz.

Örnek 2.1.15.

***i*:** Eğer $X = \mathbb{R}$, $Tx = x^2 + x - 1$, $Sx = x^2 + 3x + 1$ ve $Ix = 2x + 1$ ise, $F = F(T) \cap F(S) \cap F(I) = \{-1\}$ dir.

***ii*:** $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $T, S, I: X \to X$, $T(x, y) = (x, 0)$, $S(x, y) = (x, 2y)$ ve $I(x, y) = (x, \frac{y}{2})$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T) \cap F(S) \cap F(I) = \{(x, 0)\}$ dir.

2.2. Dönüşüm Çeşitleri

Tanım 2.2.1 (Lipschitzian Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre Lipschitz şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x,y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.2: $X = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ olmak üzere $T: X \to X$,

$$Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2}\sin(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$$

dönüşümü süreklidir. Fakat Lipschitzian bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.3 (Daraltan Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (conctraction) denir.

Eğer (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm ise, bu dönüşümün bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir (Banach Daralma Prensibi).

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{x}{8}$ dönüşümünü alalım. Bu T dönüşümü daraltan dönüşümdür, fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n daraltan bir dönüşüm olabilir.

Örnek 2.2.4: $C[0,1] = \{f : f: [0,1] \to \mathbb{R}\ sürekli\ fonksiyon\}$ olsun. $C[0,1]$ üzerindeki metrik $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$ şeklinde tanımlansın ve $T: C[0,1] \to C[0,1]$, $T\big(f(t)\big) = \int_0^t f(s)ds$ olsun.

i. T dönüşümü daraltan bir dönüşüm müdür?

$$
\begin{aligned}
d\big(T(f),T(g)\big) &= \int_0^1 \big|T\big(f(t)\big) - T\big(g(t)\big)\big|\, dt \\
&= \int_0^1 |\int_0^t f(s)ds - \int_0^t g(s)ds|dt \\
&\leq \int_0^1 \int_0^t |f(s) - g(s)|\, dsdt \\
&\leq \int_0^1 \{\int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds\}dt = \int_0^1 ds \int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds = d(f,g)
\end{aligned}
$$

olur. Yani, $d\big(T(f),T(g)\big) \leq 1.d(f,g)$ dir.

Burada $k = 1$ olup, T dönüşümü daraltan değildir.

ii. T^2 dönüşümü daraltan bir dönüşüm müdür?

$$
d\big(T^2(f),T^2(g)\big) = \int_0^1 \big|T^2\big(f(t)\big) - T^2\big(g(t)\big)\big|\, dt
$$

$$= \int_0^1 |T\big(T(f(t))\big) - T(T(g(t)))|\, dt$$

$$= \int_0^1 |T[\int_0^t f(s)ds] - T[\int_0^t g(s)ds]|\, dt,$$

olur.

$$\int_0^t f(s)ds = u(t), \int_0^t g(s)ds = v(t)$$

olarak alınırsa,

$$d\big(T^2(f), T^2(g)\big) = \int_0^1 |T(u(t)) - T(v(t))|\ dt$$

$$= \int_0^1 |\int_0^t u(z)dz - \int_0^t v(z)dz|\, dt$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^t |\int_0^t f(s)ds - \int_0^t g(s)ds| dzdt$$

$$\leq \int_0^1 \{\int_0^t [\int_0^t |f(s) - g(s)|\, ds]\, dz\}\, dt$$

$$\leq \int_0^1 \{\int_0^t [\int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds]\, dz\}\, dt$$

$$= \int_0^1 [\int_0^t d(f,g)dz]\, dt = \int_0^1 d(f,g)\, [\int_0^t dz]dt$$

$$= d(f,g) \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} d(f,g)$$

elde edilir. Burada $k = \frac{1}{2} < 1$ olup, T^2 dönüşümü daraltandır.

Tanım 2.2.5 (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Bir T dönüşümü daraltan dönüşüm ise kesin daraltan dönüşümdür. Ancak tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.2.6: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

Tam metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Buna karşın eğer sabit nokta varsa, bu sabit nokta tektir.

Örnek 2.2.7: $X = [1, +\infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $Tx = x + \frac{1}{x}$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ için

$$d\big(T(x), T(y)\big) = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = \left(1 - \frac{1}{xy}\right)|x - y| < d(x, y)$$

olur. Dolayısı ile T dönüşümü kesin daraltandır. Ancak, $Tx = x + \frac{1}{x} \neq x$, yani; T nin sabit noktası yoktur.

Bu tip dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

Tanım 2.2.8 (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 2.2.9: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$, $Tx = x - 2$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = |x - 2 - y + 2| = |x - y| = d(x, y)$$

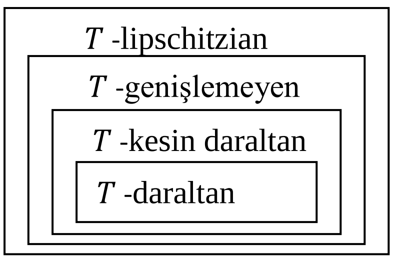
olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşüm ne daraltan ne de kesin daraltandır.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için, ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerinde bazı sınırlandırmalar yapılması gereklidir. 1965 yılında Browder, Goebel ve Kirk düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

2.2.10. Dönüşümler Arasındaki Bağlantı

Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

$$T - \text{daraltan} \Rightarrow T - \text{kesin daraltan} \Rightarrow T - \text{genişlemeyen} \Rightarrow T - \text{lipschitzian}$$



Şekil 2.1 Dönüşümler arasındaki bağlantı

Tanım 2.2.11 (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, T ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 2.2.12 (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n\|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir (Goebel and Kirk 1972).

Yukarıdaki tanımlardan görüleceği gibi asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda düzgün L-Lipschitzian bir dönüşümdür. Ayrıca asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu ifadelerin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.13: B_H, $H = \ell_2$ Hilbert uzayında kapalı birim yuvar ve $\{a_i\}$, $\prod_{i=2}^{\infty} a_i = 1/2$ $(0 < a_i < 1\,)$ şartını sağlayan bir reel sayı dizisi olsun. $T: B_H \to B_H$ dönüşümünü

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1^2, a_2x_2, a_3x_3, \cdots),$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda her $x, y \in B_H$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq 2\|x - y\|$$

dir. Diğer taraftan, her $x, y \in B_H$ ve $n \geq 2$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq 2\prod_{i=2}^{n} a_i\,\|x - y\|$$

dir. $n \to \infty$ için limit alınırsa, $k_n = 2\prod_{i=2}^{n} a_i \to 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla T asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür fakat genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.14 (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise, T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

Sonuç 2.2.14.1:
1. En az bir sabit noktaya sahip olan genişlemeyen bir dönüşüm quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür.
2. Lineer quasi-genişlemeyen bir dönüşüm genişlemeyen bir dönüşümdür.

Aşağıdaki örnek ile lineer olmayan sürekli quasi-genişlemeyen dönüşümlerin genişlemeyen dönüşüm olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 2.2.15: $X = \ell_\infty$ ve $C = B_X = \{x \in l_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ kümeleri verilsin. Her $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in C$ için $T: C \to C$ dönüşümünü

$$Tx = (0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm lineer olmayan sürekli bir dönüşümdür ve $F(T) = \{0\}$ dır. Her $x \in C$ için

$$\|Tx - 0\|_\infty = \|(0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots)\|_\infty \leq \|(0, x_1, x_2, x_3, \cdots)\|_\infty = \|x - p\|_\infty$$

olur. Dolayısıyla T quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Buna rağmen $x = (1/2\,, 1/2\,, \cdots)$ ve $y = (3/4\,, 3/4\,, \cdots)$ için,

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \left\|\left(0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \cdots\right)\right\|_\infty = \frac{5}{16} > \frac{1}{4} = \|x - y\|_\infty$$

olup, T genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.16 (Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$, her $x \in K$ ve her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x - p\|$$

olacak şekilde $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{r_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa, T dönüşümüne asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Khan et al. 2008).

Asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, quasi-genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani quasi-genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.17: $X = l^2$ uzayı olsun. Her $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in X$ için $\|.\|$ normu $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ ve $T: X \to X$ dönüşümü $Tx = (0{,}2x_1, 0{,}0, \cdots, 0, \cdots)$ ile tanımlansın.

Herhangi bir $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in X$ için $Tx = x$ den $(0{,}2x_1, 0{,}0, \cdots, 0, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ olup, $F(T) = \{0\}$ dır. Ayrıca her $n = 2,3,4, \cdots$ için $T^n x = (0{,}0{,}0, \cdots, 0, \cdots)$ dır. $r_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\{r_n\}$ ve $p \in F$ için,

$$\|Tx - p\| = 2\|x_1\| \leq (1 + r_1)\|x_n - p\|$$

ve

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x_n - p\|$$

olur. Dolayısıyla T asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Ançak T quasi-genişlemeyen dönüşüm değildir. Çünkü; $x^0 = (1{,}0{,}0, \cdots, 0, \cdots) \in X$ için

$$\|Tx^0 - p\| = \|0{,}2{,}0{,}0, \cdots, 0, \cdots\| = 2 > 1 = \|x^0 - p\|$$

dur.

Tanım 2.2.18 (Ara Anlamda Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir Normlu uzay ve K da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in K$ için,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x,y\in K} (\|T^n x - T^n y\| - \|x - y\|) \leq 0 \tag{2.2}$$

olacak şekilde $T: K \to K$ sürekli bir dönüşümü varsa, T ye ara anlamda asimptotik genişlemeyen (asimptotically nonexpansive in the intermediate sense) dönüşüm denir.

Özel olarak

$$a_n \coloneqq \sup_{x,y\in K}(\|T^n x - T^n y\| - \|x-y\|) \text{ ve } \sigma_n = \max\{0, a_n\} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $n \to \infty$ için $\sigma_n \to 0$ olur ve (2.2) ifadesi her $x, y \in K$ için,

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|x-y\| + \sigma_n, \;\; n \geq 1 \tag{2.4}$$

ifadesine dönüşür.

Yukarıdaki dönüşümler göz önüne alındığında ara anlamda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin, asimptotik genişlemeyen dönüşümleri kapsadığı kolaylıkla görülmektedir.

Örnek 2.2.19 : $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metriğini düşünelim. $T: X \to X$, $Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm, ara anlamda asimptotik genişlemeyen dönüşümüdür, ancak genişlemeyen dönüşüm değildir.

Eğer K, X düzgün konveks Banach uzayının kapalı, konveks, sınırlı boştan farklı alt kümesi ve $T: K \to K$ ara anlamda asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ise bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir (Kirk 1974).

Tanım 2.2.20 (Ara Anlamda Asimptotik Quasi-Genişlemeyen): X bir Normlu uzay ve K da X in boş olmayan alt kümesi olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in K$ ve $\forall\, n \geq 1$ için

$$\lim\sup_{n\to\infty} \sup_{x\in K, p\in F(T)} (\|T^n x - p\| - \|x-p\|) \leq 0$$

olacak şekilde $T: K \to K$ sürekli bir dönüşüm varsa, T ye ara anlamda asimptotik quasi-genişlemeyen (asimptotically quasi-nonexpansive in the intermediate sense) dönüşüm denir.

$F(T) \neq \emptyset$ olması durumunda ara anlamda asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda ara anlamda asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 2.2.21 (I-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $T, I: K \to K$ iki dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|Ix - Iy\|$$

ise, T ye I-genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir (Rhoades and Temir 2006). Ayrıca $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için,

$$\|Tx - p\| \leq \|Ix - p\|$$

ise, T ye quasi I-genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir (Yao and Wang 2007).

Sonuç 2.2.21.1:

1. En az bir sabit noktaya sahip olan I-genişlemeyen bir dönüşüm quasi I-genişlemeyen bir dönüşümdür.

2. Lineer quasi I-genişlemeyen bir dönüşüm I-genişlemeyen bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.22 (Asimptotik I-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T, I: K \to K$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|I^n x - I^n y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T ye asimptotik I-genişlemeyen dönüşüm denir.(Shahzad 2004) Ayrıca $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için,

$$\|T^n x - p\| \leq k_n \|I^n x - p\|$$

ise, T ye asimptotik quasi I-genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir (Temir and Gul 2008).

2.3. Konvekslik Kavramı

Tanım 2.3.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvekstir denir.

X Banach uzayının normunun temel özelliği, daima konveks olmasıdır. Yani normun her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\|$$

şartını sağlamasıdır. Eğer $x \neq y$ alınırsa $\lambda \in (0,1)$ için bu ifade

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \tag{2.5}$$

şeklinde olur. X Banach uzayında $S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ birim küresini göz önüne alalım. Eğer $x, y \in S_X$ ve $x \neq y$ ise, her $\lambda \in (0,1)$ için (2.5) eşitsizliği

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu ifade bize S_X birim küresinin doğru parçası içermediğini gösterir. Bununla ilgili tanım aşağıdadır.

Tanım 2.3.2 (Kesin Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Eğer $x, y \in S_X$, $x \neq y$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$$

şartı sağlanıyorsa, X Banach uzayına kesin konveks uzay denir.

Bu tanım X deki S_X birim küresine ait birbirinden farklı x ve y noktalarının orta noktasının S_X de olmadığını gösterir. Bir başka deyişle, eğer $x, y \in S_X$ ve $\|x\| = \|y\| = \|(x+y)/2\|$ ise $x = y$ dir.

Örnek 2.3.3: $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ normu verilsin. Bu durumda X kesin konvekstir.

Örnek 2.3.4: $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ normu verilsin. Bu durumda X kesin konveks değildir. Gerçekten $x = (1,0,0,\dots,0)$

ve $y = (0,1,0,0,\dots,0)$ olarak seçilirse $x \neq y$, $\|x\|_1 = 1 = \|y\|_1$ olduğu halde $\|x + y\|_1 = 2$ dir.

X normlu uzayının kesin konveksliği, $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ olmak üzere $x, y \in S_X$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktasının, S_X birim yuvarında olmadığını ifade eder, yani

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\| < 1$$

dir. Böyle uzaylarda S_X birim küresi ile $(x + y)/2$ orta noktası arasındaki uzaklık yani $1 - \|(x + y)/2\,\|$ hakkında bilgiye sahip değiliz. $1 - \|(x + y)/2\,\|$ uzunluğu hakkında daha fazla fikir sahibi olmak için, kesin konvekslikten daha güçlü bir özellik olan düzgün konveksliğe ihtiyaç vardır.

Tanım 2.3.5 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım $x, y \in B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x + y)/2$ orta noktasının S_X den bir δ uzaklığında ve B_X kapalı birim yuvar içinde olduğu ifade eder.

Örnek 2.3.6: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralelkenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

dir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_H = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet, $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde, H düzgün konveks bir uzaydır.

Örnek 2.3.7: ℓ_1 ve ℓ_∞ uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ve $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ normlarına göre düzgün konveks uzay değillerdir. Bunu göstermek için $\varepsilon = 1$ olmak üzere $x = (1,0,0,0,\ldots), y = (0,-1,0,0,\ldots) \in \ell_1$ elemanlarını alalım. Bu durumda $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre

$$\|x\|_1 = 1, \|y\|_1 = 1, \|x-y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon$$

olur. Ancak $\|(x+y)/2\|_1 = 1$ olduğundan $\|(x+y)/2\|_1 \leq 1-\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Dolayısıyla ℓ_1 uzayı düzgün konveks değildir. Benzer olarak, $\varepsilon = 1$ ve $x = (1,1,1,0,0,\ldots)$, $y = (1,1,-1,0,0,\ldots) \in \ell_\infty$ olarak alalım. Böylece $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ normuna göre

$$\|x\|_\infty = 1, \|y\|_\infty = 1, \|x-y\|_\infty = 2 > 1 = \varepsilon$$

elde edilir. $\|(x+y)/2\|_\infty = 1$ olduğundan ℓ_∞ uzayı düzgün konveks değildir.

Aşağıdaki teorem kesin konveks ve düzgün konveks uzaylar arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

Teorem 2.3.8: Her düzgün konveks Banach uzayı, kesin konveks uzaydır (Agarwal *et al*. 2009).

Teorem 2.3.8 un tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.3.9: $X = c_0$ uzayı ve $\beta > 0$ olsun. Her $x = \{x_i\} \in c_0$ için $\| \quad \|_\beta$ normu

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x_i}{i}\right)^2\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlansın. $(c_0, \| \quad \|_\beta)$ uzayı $\beta > 0$ için kesin konveks fakat düzgün konveks değildir. Eğer c_0 uzayı alışılmış norm ile verilirse, kesin konveks uzay olmaz.

Teorem 2.3.10: X bir Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) X düzgün konvekstir.

(b) X deki $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri için

$$\|x_n\| \leq 1,\ \ \|y_n\| \leq 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0 \qquad \text{(I)}$$

dır (Agarwal *et al*. 2009).

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$ X in düzgün konveks olduğunu kabul edelim ve X de $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$, $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ olacak şekilde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini alalım. Ayrıca $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| \neq 0$ olsun. Uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\|x_{n_i} - y_{n_i}\right\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\{n\}$ nin $\{n_i\}$ alt dizisi vardır. X düzgün konveks olduğundan

$$\left\|x_{n_i} + y_{n_i}\right\| \leq 2\big(1 - \delta(\varepsilon)\big) \qquad \text{(II)}$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı vardır. $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ ve (II) ifadesinden

$$2 \leq 2\big(1 - \delta(\varepsilon)\big)$$

çelişkisi elde edilir.

$(b) \Rightarrow (a)$ (I) ifadesinin sağlandığını kabul edelim. Eğer X düzgün konveks değilse $\varepsilon > 0$ için

$$\|x\| \leq 1,\ \ \|y\| \leq 1,\ \ \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \|x + y\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ sayısı yoktur. Dolayısıyla

(i) $\|x_n\| \leq 1,\ \|y_n\| \leq 1$

(ii) $\|x_n + y_n\| \geq 2(1 - 1/n)$

(iii) $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$

olacak şekilde X de $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini bulabiliriz. Açıkça $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ ifadesinin hipotez ile çeliştiğini söyleyebiliriz. Çünkü (ii) den $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ yazılabilir. O halde X düzgün konveksdir.

Teorem 2.3.11: Her düzgün konveks Banach uzayı yansımalıdır (reflexivedir) (Agarwal *et al*. 2009).

İspat: X düzgün konveks Banach uzayı, $S_{X^*} = \{j \in X^* : \|j\|_* = 1\}$ X^* da birim yuvar ve $f \in S_{X^*}$ olsun. $f(x_n) \to 1$ olacak şekilde S_X de $\{x_n\}$ dizisinin var olduğunu kabul edelim. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Tersine, $\varepsilon > 0$ ve $\left\|x_{n_i} - x_{n_j}\right\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizileri mevcut olsun. X in düzgün konveksliği $\left\|(x_{n_i} + x_{n_j})/2\right\| < 1 - \delta$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ varlığını garanti eder. Buradan

$$\left|f((x_{n_i} + x_{n_j})/2)\right| \leq \|f\|_* \left\|(x_{n_i} + x_{n_j})/2\right\| < \|f\|_* (1 - \delta) = 1 - \delta$$

yazılabilir. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olup, $x_n \to x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Açıkça $x \in S_X$ dir. Gerçekten de

$$\|x\| = \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$$

dir. James Teoreminden (Banach uzayının yansımalı olabilmesi için gerek ve yeter şart uygun $f \in S_{X^*}$ için $f(x) = 1$ olacak şekilde $x \in S_X$ olmasıdır) X yansımalıdır.

Her sonlu boyutlu Banach uzayı yansımalıdır. Fakat bu uzayların düzgün konveks olması gerekmez. Buna örnek olarak $n \geq 2$ için $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ normu ile $\mathbb{R}^n$ uzayı verilebilir.

2.4. Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Daraltan, kesin daraltan, genişlemeyen ve Lipschitzian gibi dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde, hangi tür dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu teorem ve örneklerle ifade edeceğiz. Aşağıdaki teorem analizdeki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.4.1: $[a,b]$**,** $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f:[a,b] \to [a,b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a,b]$ için $T(x) = x - f(x)$ şeklinde bir $T:[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise, $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ vardır.

Teorem 2.4.2 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda $f:B \to B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Bu teorem sonlu boyutlu uzaylarda geçerli olan bir teoremdir. Yani, Brouwer'ın bu teoremi herhangi bir sonsuz boyutlu Banach uzayında geçerli değildir. Bu durumu bir örnekle izah edelim.

Örnek 2.4.3: B, c_0 Banach uzayında bir kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, \dots)$ için

$$T:B \to B,\ T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \dots)$$

dönüşümünü alalım. Her $x, y \in B$ için

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin B de bir çözümü yoktur.

Teorem 2.4.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ boş olmayan kompakt konveks bir alt küme ve $f:K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: K kompakt olduğundan $f(K)$ ön-kompaktır. Dolayısıyla total sınırlıdır. O halde, her $x \in K$ için

$$\min_{1 \leq i \leq N_n} \|f(x) - y_i\| < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\} \subseteq f(K)$ vardır. Her bir i için

$$a_i(x) = \max\left\{\frac{1}{n} - \|f(x) - y_i\|, 0\right\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece her bir $x \in K$ için $a_i(x) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $i \in \{1,2, \dots, N_n\}$ vardır. Schauder operatörü olarak adlandırılan, $P_n : K \to K$

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)}$$

operatörünü göz önüne alalım. Burada $P_n(x)$, $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\}$ elemanlarının bir konveks kombinasyonu olduğundan $P_n(x) \in K$ dır. Ayrıca f sürekli olduğundan a_i fonksiyonlarının her biri de süreklidir.

Şimdi, $K_n = \text{conv}(\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\})$ olsun. Bu durumda K_n, $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\}$ vektörleri tarafından gerilen sonlu boyutlu Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir. Üstelik $P_n : K_n \to K_n$ dir. Brouwer teoremine göre P_n dönüşümlerinin her biri $x_n \in K_n \subseteq K$ sabit noktasına sahiptir. K kompakt olduğundan $\{x_n\}$ dizisi, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in K$ noktasına yakınsayan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisine sahiptir. Herhangi n için

$$\begin{aligned}\|P_n(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)(y_i - f(x)) \middle/ \sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) \right\| \\ &\leq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)\right] \middle/ \sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\|x_{n_k} - f(x)\| \leq \|P_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - f(x)\|$$

olduğundan $k \to \infty$ için eşitsizliğin sol tarafı $\|x - f(x)\|$ e giderken sağ tarafı 0 a gider. Yani,

$$\|x - f(x)\| \leq 0 \Rightarrow x = f(x)$$

olur. Dolayısıyla x, f nin bir sabit noktasıdır.

Teorem 2.4.5 (Banach Daralma İlkesi): (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olsun. İlk olarak $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ve daha sonra bu dizinin limit noktasının $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. $n, p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\
&\leq kd(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\
&= kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\
&\leq k^2 d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \leq \cdots \\
&\leq k^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n d(x_p, x_0) \\
&\leq k^n(d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\
&\leq k^n(kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\
&= k^n(d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + kd(x_{p-1}, x_{p-2})) \\
&\leq k^n[d(x_{p-2}, x_0) + kd(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})] \\
&\vdots \\
&\leq k^n(d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2 d(x_1, x_0) + \cdots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)(1 + k + k^2 + k^3 + \cdots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)\left(\frac{1}{1-k}\right), (n \to \infty)
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

dir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x$ ve dolayısıyla $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \to Tx$ dir.

$x_{n+1} = Tx_n$ de $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y, T nin başka bir sabit noktası yani, $Ty = y$ olsun. Bu durumda

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

olur. Bu durum $d(x,y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü,

$$d(x,y) \leq kd(x,y) \Rightarrow d(x,y) - kd(x,y) \leq 0$$
$$\Rightarrow d(x,y)[1-k] \leq 0$$

dir. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. Dolayısıyla hem $1 - k > 0$ hem de $d(x,y) \geq 0$ olduğundan $d(x,y)[1-k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x,y) = 0$ olması gerekir. Bu da $x = y$ demektir.

Örnek 2.4.6: $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $T: K \to K$, $Tx = \frac{x}{5}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{5}$ olarak seçelim. Buradan

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{25}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{125}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{625}$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0$$

$$\vdots$$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ dir. Sabit nokta tanımından da

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{5} = x \Rightarrow x = 5x \Rightarrow x = 0$$

dir. Yani $x = 0$, T dönüşümünün sabit noktasıdır. Ancak dönüşümlerin sabit noktalarını tanımdan hareket ederek bulmak her zaman kolay değildir. Bu sebeple farklı dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının bulunmasında iterasyon metodları kullanılır.

Teorem 2.4.7: (X,d) bir tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0, T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.4.8: (X,d) bir tam metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere $T: D(x_0, r) \to X$ k-daraltan bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(Tx_0, x_0) < (1-k)r$$

ise bu durumda T dönüşümü $D(x_0, r)$ diskinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal *et al*. 2001).

İspat: $d(Tx_0, x_0) < (1-k)r_0$ olmak üzere $0 \leq r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 vardır. Göstereceğiz ki $T: \overline{D(x_0, r_0)} \to \overline{D(x_0, r_0)}$ dir. $x \in \overline{D(x_0, r_0)}$ için

$$d(Tx, x_0) \leq d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0) \leq kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \leq r_0$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden dolayı T nin $\overline{D(x_0, r_0)} \subset D(x_0, r_0)$ da bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.4.9: (X,d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için,

$$\lim_{n \to \infty} T^n x = x_0$$

dir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: $x \in X$ için,

$$\phi(x) = d(x, Tx),$$

şartını sağlayan bir $\phi: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda ϕ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden ϕ, bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir. Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise,

$$d(T^{n+1}x, x_0) = d(T^{n+1}x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \to \infty$ için

$$r = \lim_{n\to\infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca X kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi yakınsak bir $(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k+1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin x_0 noktasına yakınsadığını gösterir. O halde $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$ dır.

Örnek 2.4.10: $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için,

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartını sağlıyorsa bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere,

$$|Tx - Ty| = T'(c)|(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach daralma ilkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.4.11: $X = (0,1]$ ve $T: X \to X$, $Tx = \frac{2x}{7}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = \left|\frac{2x}{7} - \frac{2y}{7}\right| = \frac{2}{7}|x - y| = \frac{2}{7}d(x, y)$$

olduğundan T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin X de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımından $\frac{2x}{7} = x \Rightarrow 2x = 7x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0,1] = X$ olduğundan T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Aşağıdaki örnekte, tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 2.4.12: $X = c_0$ Banach uzayı ve $C = B_X = \{x \in c_0 : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı verilsin. Her $x \in C$ için

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) = (1, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

şeklinde tanımlanan $T: C \to C$ dönüşümünü alalım T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $x = (1,1,1, \dots)$, T nin bir sabit noktasıdır. Fakat, $x = (1,1,1, \dots) \notin c_0$ dır. Bu durumda T genişlemeyen dönüşümü c_0 uzayında bir sabit noktaya sahip değildir.

Yine tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktasının olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.4.13: $X = c_0$ uzayı $d(x, y) = \|x - y\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$ metriği ile verilsin. $B_X = \{x \in c_0 : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarını alalım. $x \in B_X$ ve $i = 2,3, \dots$ için $y_1 = (1 + \|x\|)/2$ ve $y_i = \left(1 - 1/2^{i+1}\right)x_{i-1}$ olarak seçilirse, $|y_1| \leq 1$ ve $|y_i| \leq |x_{i-1}| \leq 1$ dir. Bu halde

$$T: B_X \to B_X \text{ , } T(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots)$$

dönüşümü tanımlanabilir. x ve y nin B_X de farklı iki nokta olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= \sup\left\{\frac{\|x\| - \|y\|}{2}, \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)|x_{i-1} - y_{i-1}| : i = 2,3,\cdots\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{\|x - y\|}{2}, \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)|x_{i-1} - y_{i-1}| : i = 2,3,\cdots\right\} \\
&< \|x - y\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani T kesin daraltan bir dönüşümdür. $Tv = v$ olacak şekilde bir $v \in B_X$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Böylece $i \geq 2$ ve $v_1 = (1 + \|v\|)/2 > 0$ için

$$
|v_i| = \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)|v_{i-1}|
$$

olur. Bu ise her $i \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
|v_i| &= \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)|v_{i-1}| \\
&= \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{i}}\right)|v_{i-2}| \\
&\vdots \\
&= \prod_{k=0}^{i-2}\left(1 - \frac{1}{2^{i+1-k}}\right)|v_1| \\
&\geq \left(1 - \sum_{k=0}^{i-2}\frac{1}{2^{i+1-k}}\right)|v_1| \\
&= \left(1 - \sum_{j=3}^{i+1}\frac{1}{2^{j}}\right)|v_1| \\
&> \frac{3}{4}|v_1|
\end{aligned}
$$

olmasını gerektirir. $i \to \infty$ iken $v_i \to 0$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla T dönüşümü B_X de herhangi bir sabit noktası yoktur.

Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayında tanımlı asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya sahip olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

Teorem 2.4.14: X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T\colon K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, K da bir sabit noktaya sahiptir (Goebel and Kirk 1972).

İspat: $y \in K$ ve $r > 0$ için y merkezli ve r yarıçaplı $B(y, r)$ yuvarını göz önüne alalım.

$$K \cap \left(\cap_{i=k}^{\infty} B\left(T^i y, r\right)\right) \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısının olduğu, bütün r sayılarından oluşan küme R_y olarak tanımlansın. Eğer d, K nın çapı yani $d = \operatorname{diam}(K)$ ise $d \in R_y$ dir. Böylece $R_y \neq \emptyset$ dir. $r_0 = inf\left\{r\colon r \in R_y\right\}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon = \cup_{k=1}^{\infty} \left(\cap_{i=k}^{\infty} B\left(T^i y, r_0 + \varepsilon\right)\right)$$

tanımlanabilir (Kirk 1969). O halde her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon \cap K$ kümesi boştan farklı ve konvekstir. X uzayının yansımalı olması

$$\cap_{\varepsilon > 0} \left(\overline{K_\varepsilon} \cap K\right) \neq \emptyset$$

olmasını gerektirir. $x \in \cap_{\varepsilon > 0} \left(\overline{K_\varepsilon} \cap K\right)$, $\eta > 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$\|x - T^n y\| \leq r_0 + \eta$$

olacak şekilde bir n_0 tamsayısı vardır. Şimdi $x \in \cap_{\varepsilon > 0} \left(\overline{K_\varepsilon} \cap K\right)$ elemanı için $\{T^n x\}$ dizisinin x noktasına kuvvetli yakınsamadığını kabul edelim. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$\|T^{n_i} x - x\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\{T^n x\}$ in bir $\{T^{n_i} x\}$ alt dizisi vardır. T^n in Lipschitz sabiti k_n olsun. O halde $m > n$ için

$$\|T^n x - T^m x\| \leq k_n \|x - T^{m-n} x\|$$

dir.

$$\left(1 - \delta_X \left(\frac{\varepsilon}{r_0 + \alpha}\right)\right)(r_0 + \alpha) < r_0$$

eşitsizliğini sağlayan $r_0 > 0$ ve $\alpha > 0$ sayılarının olduğunu kabul edelim. $\|x - T^n x\| \geq \varepsilon$ ve $k_n\left(r_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \leq r_0 + \alpha$ olacak şekilde bir n sayısı seçelim. Eğer $n_0 \geq n$ yeteri kadar büyükse bu durumda $m > n_0$ için

$$\|x - T^{m-n}y\| \leq r_0 + \frac{\alpha}{2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|T^n x - T^m y\| \leq k_n \|x - T^{m-n}y\| \leq k_n\left(r_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \leq r_0 + \alpha$$

ve

$$\|x - T^m y\| \leq r_0 + \alpha$$

olup, $m > n_0$ için X in düzgün konveksliğinden

$$\left\|\frac{1}{2}(x + T^n x) - T^m y\right\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r_0 + \alpha}\right)\right)(r_0 + \alpha) < r_0$$

elde edilir. Bu ise r_0 ın tanımına terstir. Böylece $r_0 = 0$ veya $x = Tx$ sonucu elde edilir. Fakat $r_0 = 0$, $\{T^n y\}$ nin bir Cauchy dizisi olmasını gerektirir ve böylece $\lim_{n\to\infty} T^n y = x = Tx$ olur. Bu durumda $\cap_{\varepsilon > 0}\left(\overline{K_\varepsilon} \cap K\right)$, T nin bir sabit noktasını ihtiva eden tek nokta kümesidir.

Kirk ara anlamda asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktalarının varlığı ile ilgili aşağıdaki teoremi ispat etmiştir.

Teorem 2.4.15: X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ ara anlamda asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, K da bir sabit noktaya sahiptir (Kirk 1974).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde önce bazı önemli sabit nokta iterasyonlarına ve total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümlere sonra araştırma bulgularında kullanılacak bazı kavram ve lemmalara yer verilecektir.

3.1. Bazı Sabit Nokta İterasyonları

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır. Bunlardan bazıları, Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu, Krasnoselskij iterasyon metodu, Mann iterasyon metodu, Ishikawa iterasyon metodu, Noor iterasyon metodu ve Rhoades'in n-adım iterasyon metodudur.

Picard iterasyon metodu: (X,d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T : K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 3.1.1: $X = [0,1]$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1) Picard iterasyonu,

$$x_1 = Tx_0 = 1 - a$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 = a$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 1 - a$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0$$

$$\vdots$$

şeklinde olup bu da $(a, 1 - a, a, 1 - a, \ldots)$ salınımlı dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla istenilen sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon metodlarını göz önüne almak gerekir.

Krasnoselskij iterasyon metodu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : N \to N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n, \quad n = 0,1,2, \ldots \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Kirk iterasyon metodu: X bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 Tx_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $i = 0,1,2, \ldots, k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir.

(3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

Mann iterasyon metodu: W. R. Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \,, \ \ n = 0,1,2,\dots \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,, \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon, Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

W. R. Mann'ın bulmuş olduğu sonuçlar 1971 yılında Franks ve Marzec tarafından, aynı şekilde Franks ve Marzec'in sonuçları da 1974 yılında B. E. Rhoades tarafından genişletilmiştir. Yine 1974 yılında B. E. Rhoades, herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Örnek 3.1.2: $X = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kümesi üzerinde $T: X \to X$, $Tx = \frac{1}{x}$ olarak tanımlanırsa, Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktası olan $x = 1$ e yakınsar.

Ishikawa iterasyon metodu: 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır (Berinde 2006). X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \ \ n = 0,1,2,\dots, \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Ishikawa 1974).

(3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

B. E. Rhoades ve Ş. M. Şoltuz, 2003-2004 yıllarında dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının, Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

Noor iterasyon metodu: 2000 yılında M. A. Noor tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n\,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n\,, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \quad n = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Noor 2000).

Noor, Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu tanıtmıştır.

Xu ve Noor, Noor iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinde kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır (Xu and Noor 2002).

***n*-adım iterasyon (multistep iteration) metodu:** 2004 yılında, B. E . Rhoades ve Ş. M. Şoltuz tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere n-adım iterasyonu $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = \left(1-\beta_n^i\right)x_n + \beta_n^i T z_n^{i+1}, \\ z_n^{p-1} = \left(1-\beta_n^{p-1}\right)x_n + \beta_n^{p-1} T x_n, \quad i = 1,2,\dots,p-2 \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\{\alpha_n\} \subset (0,1), \;\; \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve

$$\left\{\beta_n^i\right\} \subset [0,1)\,, \;\; 1 \leq i \leq p-1\,, \;\; \lim_{n\to\infty} \beta_n^1 = 0,$$

dir (Rhoades and Şoltuz 2004).

3.2. Total Asimptotik *I*-Genişlemeyen Dönüşümler

Bu başlık altında total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümlerin tanımları ve bu dönüşümlerle ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

Total asimptotik genişlemeyen dönüşümler Y. Alber, C.E. Chidume ve H. Zegeye tarafından 2006 yılında genişlemeyen dönüşümlerin genelleştirmesi olan dönüşümleri kapsayan bir dönüşüm elde etmek amacıyla tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1 (Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir reel Normlu uzay, K da X in boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|x-y\| + \mu_n \phi(\|x-y\|) + \lambda_n,\, n \geq 1 \tag{3.8}$$

olacak şekilde $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa T ye total asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir (Alber *et al.* 2006).

Özel olarak $\phi(a) = a$ alınırsa (3.8) ifadesi,

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + \mu_n)\|x - y\| + \lambda_n \,, n \geq 1$$

ifadesine dönüşür. Bu ifade genelleştirilmiş asimptotik genişlemeyen dönüşüm olarak bilinmektedir. $\lambda_n = 0$ ve $\phi(a) = a$ alınırsa total asimptotik genişlemeyen dönüşümler asimptotik genişlemeyen dönüşümlere dönüşür. $\mu_n = 0$ ve $\lambda_n = 0$ alınırsa genişlemeyen dönüşümlerin sınıfını içeren bir dönüşüm sınıfı elde edilir. $a_n \coloneqq \sup_{x,y\in K}(\|T^n x - T^n y\| - \|x - y\|)$ olmak üzere $\mu_n = 0$ ve $\lambda_n = \sigma_n = \max\{0, a_n\}$ alınırsa (3.8) ifadesi ara anlamda asimptotik genişlemeyen dönüşümlere indirgenir.

Tanım 3.2.2 (Total Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir reel Normlu uzay, K da X in boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in K$ ve $p \in F$ için

$$\|T^n x - p\| \leq \|x - p\| + \mu_n \phi(\|x - p\|) + \lambda_n, n \geq 1$$

olacak şekilde $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa T ye total asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Chidume and Ofoedu 2007).

Yukarıdaki tanım göz önüne alındığında total asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin, ara anlamda asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümleri ve asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümleri kapsadığı kolaylıkla görülmektedir.

Tanım 3.2.3 (Total Asimptotik *I*-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir reel Normlu uzay, K da X in boştan farklı bir alt kümesi ve $T, I: K \to K$ iki dönüşüm olsun. Her $x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|I^n x - I^n y\| + \mu_n \phi(\|I^n x - I^n y\|) + \lambda_n, n \geq 1 \qquad (3.9)$$

olacak şekilde $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa T dönüşümüne total asimptotik I-genişlemeyen dönüşüm denir (Mukhamedov and Saburov 2010).

Yukarıdaki tanımda I dönüşümü birim dönüşüm olarak alınırsa (3.9) dan (3.8) elde edilir. Böylelikle total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümler, total asimptotik genişlemeyen dönüşümlere indirgenir.

Özel olarak $\phi(a) = a$ alınırsa (3.9) dan $\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + \mu_n)\|I^n x - I^n y\| + \lambda_n$ elde edilir. Bu dönüşüm genelleştirilmiş asimptotik I-genişlemeyen dönüşüm olarak çalışılmıştır. Ayrıca $\lambda_n = 0$ alınırsa total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümler, asimptotik I-genişlemeyen dönüşümlere indirgenir.

Total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümlerin amacı, total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ile asimptotik I-genişlemeyen dönüşümlerin tanımlarını birleştirmek ve bütün sınıflarda uygulanabilir genel yakınsama teoremleri elde etmektir.

Bizde bu çalışmalar ışığında total asimptotik I-quasi-genişlemeyen dönüşümü aşağıdaki gibi tanımladık.

Tanım 3.2.4: X bir reel Normlu uzay, K da X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T, I: K \to K$ iki dönüşüm ve $F = F(T) \cap F(I) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $x \in K$ ve $p \in F$ için

$$\|T^n x - p\| \leq \|I^n x - p\| + \mu_n \phi(\|I^n x - p\|) + l_n, n \geq 1$$

olacak şekilde $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa $T: K \to K$ dönüşüme total asimptotik I-quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Burada dikkat edilirse total asimptotik I-quasi-genişlemeyen dönüşümler, I birim dönüşüm olarak alınırsa total asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlere dönüşür.

Genişlemeyen Dönüşüm	$\Rightarrow$ $\boldsymbol{F(T) \neq \emptyset}$	Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm
$\Downarrow$		$\Downarrow$
Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm	$\Rightarrow$ $F(T) \neq \emptyset$	Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm
$\Downarrow$		$\Downarrow$
Ara anlamda Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm	$\Rightarrow$ $F(T) \neq \emptyset$	Ara anlamda Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm
$\Downarrow$		$\Downarrow$
Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm	$\Rightarrow$ $F(T) \neq \emptyset$	Total Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm
$\Downarrow$		$\Downarrow$
Total Asimptotik $\boldsymbol{I}$-Genişlemeyen Dönüşüm	$\Rightarrow$ $F(T) \neq \emptyset$	Total Asimptotik I-Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm

Şekil 3.1: Dönüşümlerin Birbirlerini Gerektirmeleri

Tanım 3.2.5 (Çekme-Retraction): X bir reel Normlu uzay ve K da X nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $Px = x$ olacak şekilde $P: X \to K$ sürekli dönüşümü varsa, K ya X nin bir retractı (çekilmesi) denir. Düzgün konveks bir Banach uzayının her kapalı, konveks alt kümesi bir çekmedir. $P: X \to X$ dönüşümünün bir retraction (çekme) olabilmesi için $P^2 = P$ şartını sağlaması gerekir.

Tanım 3.2.6 (Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir reel Normlu uzay, K da X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $P: X \to K$, X in K üzerine genişlemeyen çekmesi ve $T: K \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq \|x - y\| + \mu_n \phi(\|x - y\|) + l_n, n \geq 1$$

olacak şekilde $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa $T: K \to X$ dönüşüme kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir (Chidume and Ofoedu 2007).

Bu tanımımlar göz önünde bulundurularak kendi üzerine olmayan total asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımladık.

Tanım 3.2.7 (Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir reel Normlu uzay ve K da X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $P: X \to K$, X in K üzerine genişlemeyen çekmesi ve $T: K \to X$ bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her $x \in K$ ve $p \in F(T)$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - p\| \leq \|x - p\| + \mu_n \phi(\|x - p\|) + l_n, n \geq 1$$

olacak şekilde $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa $T: K \to X$ dönüşümüne kendi üzerine olmayan total asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Alber *et al.* (2006), total asiptotik genişlemeyen dönüşümü tanımlayarak X düzgün konveks Banach uzay ve K, da X in boştan farklı kapalı konveks altkümesi, ayrıca $T: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki iterasyon yöntemini çalışmışlardır.

$$x_1 \in K, \;\; x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n \tag{3.10}$$

Burada $\{\alpha_n\} \in (0,1)$ dir.

Daha sonra Chidume and Ofoedu (2007), X bir reel Banach uzay ve K da X in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, ayrıca $T_1, T_2, \cdots, T_m: K \to K$ m tane total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olmak üzere aşağıdaki iterasyon yöntemini çalışmışlardır.

$$\begin{cases} x_1 \in K \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T_1^n x_n, \;\; m = 1, \;\; n \geq 1, \\ x_1 \in K \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T_1^n y_{1n}, \\ y_{1n} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T_2^n y_{2n}, \\ \vdots \\ y_{(m-2)n} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T_{(m-1)}^n y_{(m-1)n}, \\ y_{(m-1)n} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T_m^n x_n, m \geq 2, n \geq 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Burada $0 < a < b < 1$ olmak üzere $\{\alpha_{in}\}$, $[a, b]$ aralığında dizilerdir.

Yine Chidume and Ofoedu (2009), X bir reel Banach uzay ve K da X in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, ayrıca $T_1, T_2, \cdots, T_m: K \to K$ m tane total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan iterasyon şemasının kuvvetli yakınsamasını çalışmışlardır.

$$x_1 \in K, \;\; x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} T_i^n x_n \tag{3.12}$$

Burada $\{\alpha_{in}\}$ dizileri $(0,1)$ aralığında $\sum_{i=0}^{m} \alpha_{in} = 1$ olacak şekilde dizilerdir.

Kendi üzerine tanımlı olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramı daha önce 2007 yılında Chidume and Ofoedu tarafından tanımlanmış. Ancak ilk olarak Hu and Yang (2008) tarafından kendi üzerine tanımlı olmayan üç total asimptotik genişlemeyen dönüşüm için aşağıdaki iterasyon şeması için kuvvetli yakınsama teoremleri ispatlanmıştır.

$$\begin{cases} y_n = P((1 - a_{n3})x_n + a_{n3}T_3P(T_3)^{n-1}x_n), \\ y_{n+1} = P(1 - a_{n2} - b_{n2})x_n + a_{n2}T_2P(T_2)^{n-1}y_n + b_{n2}T_2P(T_2)^{n-1}x_n), \\ x_{n+1} = P(1 - a_{n1} - b_{n1})x_n + a_{n1}T_1P(T_1)^{n-1}y_{n+1} + b_{n1}T_1P(T_1)^{n-1}y_n) \end{cases} \tag{3.13}$$

Burada $i = 1,2,3$ için $\{a_n\}, \{b_n\}, \{1 - a_n - b_n\} \in [0,1]$ dir.

Son olarak, Mukhamedov and Saburov (2010) total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümleri tanımlamış, I total asimptotik genişlemeyen ve T total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümleri için aşağıdaki iterasyonun yakınsamasını reel düzgün konveks Banach uzaylarında çalışmışlardır.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n I^n x_n \end{aligned} \tag{3.14}$$

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında dizilerdir.

Şimdi araştırma bulguları ve sonuçlar kısmında kullanacağımız bazı tanımları ve lemmaları verelim.

Tanım 3.2.8 (Opial Şartı): Bir X Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması her $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, bu durumda X Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Bu eşitsizlikteki "limsup" ifadeleri "liminf" ile yer değiştirirse, benzer bir şart elde edilir. Yine aynı eşitsizlikte "<" yerine "≤" alınırsa zayıf Opial şartı olarak adlandırılan şart elde edilir.

Örnek 3.2.9: Her Hilbert uzayı Opial şartını sağlar. Yani bir H Hilbert uzayında $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ noktasına zayıf yakınsak ise, her $y \in H$ ve $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

dir. Her zayıf yakınsak dizi sınırlı olduğundan $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$ sonludur.

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle$$

olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 > \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2$$

elde edilir.

Tanım 3.2.10 ((A) Şartı): K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\|x - Tx\| \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise, T ye (A) şartını sağlıyor denir (Senter and Dotson 1974). Burada $d\big(x, F(T)\big) = \inf_{y \in F(T)} d(x, y)$ dir. Tan ve Xu ya göre (A) şartı, K nın kompaktlığından daha zayıftır (Tan and Xu 1993).

Khan ve Fukhar-ud-din, $T_1, T_2 : K \to K$ iki dönüşüm için (A) şartını aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir.

Tanım 3.2.11 ((A') Şartı): X Banach uzayının boştan farklı bir K alt kümesi ve $T_1, T_2 : K \to K$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{2}(\|x - T_1 x\| + \|x - T_2 x\|) \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise, $T_1, T_2 : K \to K$ dönüşümleri (A') şartını sağlıyor denir (Khan and Fukhar-ud-din 2005). Ayrıca $T_1 = T_2 = T$ olarak alınırsa (A) şartının (A') nün özel bir hali olduğu görülür.

(A') şartından hareketle (A'') şartı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2.12 ((A'') Şartı): K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi, $T, S : K \to K$ total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümler ve $I : K \to K$ total asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{3}(\|x - Tx\| + \|x - Sx\| + \|x - Ix\|) \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise, T, S ve I dönüşümleri (A'') şartını sağlıyor denir.

Tanım 3.2.13 ((B) Şartı): K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi, $\{T_i\}_{i=1}^N$ de K dan K ya tanımlı asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi ve $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\max_{i=1,2,3,\ldots,N} \|x - T_i x\| \geq f\big(d(x, F)\big)$$

ise, $\{T\}_{i=1}^{N}$ ailesi (B) şartını sağlıyor denir (Chidume and Shahzad 2005). Burada $d\big(x, F(T)\big) = \inf_{y \in F(T)} d(x, y)$ dir.

(B) şartından hareketle (B') şartını aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2.14 (($\boldsymbol{B'}$) Şartı): K bir X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi, $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ ve $\{S_i\}_{i=1}^{N}$ total asimptotik I_i-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi ve $\{I_i\}_{i=1}^{N}$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{3}\Big(\max_{i=1,2,3,\ldots,N} \|x - T_i x\| + \max_{i=1,2,3,\ldots,N} \|x - S_i x\| + \max_{i=1,2,3,\ldots,N} \|x - I_i x\|\Big) \geq f\Big(d\big(x, F(T)\big)\Big)$$

ise, $\{T_i\}_{i=1}^{N}$, $\{S_i\}_{i=1}^{N}$ ve $\{I_i\}_{i=1}^{N}$ dönüşüm aileleri (B') şartını sağlıyor denir.

Tanım 3.2.15: X bir Banach uzay, K da X in boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun.

(i) K daki $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf ve $\{Tx_n\}$ dizisi p ye kuvvetli yakınsadığında $Tx^* = p$ oluyorsa T dönüşümüne p de demicloseddir denir.

(ii) Her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin bir $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisi var ve $\left\{Tx_{n_j}\right\}$ dizisi T nin görüntü kümesinde yakınsak ise, T dönüşümüne tamamen süreklidir denir. Bir dönüşüm sürekli ve kompakt ise tamamen süreklidir.

(iii) K daki $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$ şartını sağlayan her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin K da bir x^* noktasına güçlü yakınsayan $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisi var ise T dönüşümüne semikompakttır denir.

Lemma 3.2.16: $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{\delta_n\}$

$$a_{n+1} \leq (1 + \delta_n) a_n + b_n, \;\; n \geq 1$$

eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır (Tan and Xu 1993).

İspat: $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_{n+m+1} &\leq (1+\delta_{n+m})a_{n+m} + b_{n+m} \\ &\leq (1+\delta_{n+m})(a_{n+m} + b_{n+m}) \\ &\leq (1+\delta_{n+m})\big((1+\delta_{n+m-1})(a_{n+m-1} + b_{n+m-1}) + b_{n+m}\big) \\ &\vdots \\ &\leq \left(\prod_{i=n}^{n+m}(1+\delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{n+m} b_i\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\limsup_{m\to\infty} a_m \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty}(1+\delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{\infty} b_i\right) \tag{3.15}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty}(1+\delta_i) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} b_i = 0$ elde edilir. (3.15) den $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$ eşitsizliği yazılabilir. O halde $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır.

Lemma 3.2.17: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve $t \in (0,1)$ olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X de iki dizi olmak üzere uygun bir $s \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq s, \qquad \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq s, \qquad \lim_{n\to\infty} \|tx_n + (1-t)y_n\| = s$$

şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

İspat: $s = 0$ için ispat açıktır. $s > 0$ olsun. Kabul edelim ki $\{x_n - y_n\}$ dizisi sıfıra yakınsasın. Bu durumda $\{x_n - y_n\}$ dizisinin $inf_i \|x_{n_i} - y_{n_i}\| > 0$ olacak şekilde $\{x_{n_i} - y_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq s$ ve $\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq s$ olduğundan $\|x_{n_i}\| \leq r$, $\|y_{n_i}\| \leq r$ olacak şekilde $\{n_i\}$ alt dizisi için $r \in (s, s+1)$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) < 1 \text{ ve } \|x_{n_i} - y_{n_i}\| \geq \varepsilon > 0$$

olacak şekilde $r \geq \varepsilon > 0$ seçebiliriz. X düzgün konveks olduğundan her $t \in (0,1)$, $r > 0$, $x, y \in X$, $\|x\| \leq r$ ve $\|y\| \leq r$ için

$$\|tx + (1-t)y\| \leq r\left[1 - 2\min\{t, 1-t\}\delta_X\left(\frac{\|x-y\|}{r}\right)\right] \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) dan

$$\begin{aligned}\left\|t_{n_i}x_{n_i} + (1-t_{n_i})y_{n_i}\right\| &\leq r\left[1 - 2t_{n_i}(1-t_{n_i})\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right]\\ &\leq r\left[1 - 2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right] < s\end{aligned}$$

olur. Bu durum hipotezle çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.18: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X nin boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $T : K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ise, $(I - T)$ sıfırda demicloseddir.

Lemma 3.2.19: : X Hausdorff topolojik uzay ve $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F(T)$ kapalıdır. Yani bir Hausdorff uzayın kendi üzerine tanımlı sürekli dönüşümünün sabit noktalarının kümesi kapalıdır.

İspat: $(x_\alpha) \subset F(T)$ içinde bir ağ ve $x_\alpha \to x \in X$ olsun. $x \in F(T)$ olduğunu göstermeliyiz. Her α için $(x_\alpha) \subset F(T)$ olduğundan $Tx_\alpha = x_\alpha$ olur. T sürekli olduğundan $x_\alpha \to x$ iken $Tx_\alpha \to Tx$ olup, X Hausdorff olduğundan $Tx = x$ olmalıdır. Buda $x \in F(T)$ anlamına gelir. Yani $F(T)$ kapalıdır.

Burada şu uyarıyı yapmalıyız: Eğer T dönüşümü X in herhangi bir K alt kümesinde tanımlıysa $F(T)$ nin X içinde kapalı olması gerekmez. Bunun yerine K ya kısıtlanmış metrik uzayda kapalı olacaktır. Örneğin birim dönüşümü ℝ içindeki $(0,1)$ e kısıtlayalım yani, $f: (0,1) \to (0,1), f(x) = x$ olsun. ℝ de alışılmış metriği düşünelim. Sabit noktaların kümesi $(0,1)$ dır ve kapalıdır. Ama bu küme ℝ de kapalı değildir. Bu bizim için önemli değildir, çünkü biz kapalı tanım kümelerine sahip dönüşümler üzerinde çalışacağız.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilecektir.

Önce, I total asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere total asimptotik I-genişlemeyen iki dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiştir. Sonrada bu şema için reel Banach uzaylarda ve düzgün konveks reel Banach uzaylarında yakınsama teoremleri verilmiştir.

Bu şema literatürde total asimptotik I-genişlemeyen iki dönüşüm için kurulan ilk iterasyon yöntemidir.

İkinci olarak, yukarıda bahsedilen iterasyon şeması, $\{I_i : i = 1,2,3,\ldots,N\}$ total asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ailesi olmak üzere total asimptotik I_i-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için yeniden yazılarak, bu durum için yine reel Banach uzaylarında ve düzgün konveks reel Banach uzaylarında yakınsama teoremleri ifade edilmiştir.

Üçüncü olarak, I asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere asimptotik I-genişlemeyen iki dönüşüm için yakınsama sonuçları yazılmıştır.

Son olarak $\{I_i : i = 1,2,3,\ldots,N\}$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ailesi olmak üzere asimptotik I_i-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için yakınsama sonuçları yazılmıştır.

X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S : K \to K$ total asimptotik I-genişlemeyen ve $I : K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Herhangi bir $x_0 \in K$ için $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S^n y_n \\ y_n & = & (1-\beta_n)x_n + \beta_n T^n z_n \\ z_n & = & (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n I^n x_n \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir.

4.1. Total Asimptotik I-Genişlemeyen İki Dönüşüm İçin Temel Sonuçlar

Yakınsama teoremlerinden önce bu teoremlerin ispatında kullanacağımız bazı lemmalar aşağıda verilmiştir. Bu çalışmada $F = F(S) \cap F(T) \cap F(I) \neq \emptyset$ alınacaktır.

Lemma 4.1.1: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ total asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Bu durumda her $x, y \in K$ için

$$\begin{aligned} \|I^n x - I^n y\| &\leq \|x - y\| + \mu_n \phi(\|x - y\|) + \lambda_n \\ \|T^n x - T^n y\| &\leq \|I^n x - I^n y\| + \mu_n \phi(\|I^n x - I^n y\|) + \lambda_n;\ \forall x, y \in K \\ \|S^n x - S^n y\| &\leq \|I^n x - I^n y\| + \mu_n \phi(\|I^n x - I^n y\|) + \lambda_n \end{aligned} \quad (4.2)$$

olacak şekilde $[0, \infty)$ aralığında $\mu_n, \lambda_n \to 0$ şartını sağlayan $\{\mu_n\}$,$\{\lambda_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu vardır.

İspat: $S, T: K \to K$ total asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olduğundan

$$\begin{aligned} \|I^n x - I^n y\| &\leq \|x - y\| + \tilde{\mu}_n \phi_1(\|x - y\|) + \tilde{\lambda}_n \\ \|T^n x - T^n y\| &\leq \|I^n x - I^n y\| + \mu'_n \phi_2(\|I^n x - I^n y\|) + \lambda'_n \\ \|S^n x - S^n y\| &\leq \|I^n x - I^n y\| + \mu''_n \phi_3(\|I^n x - I^n y\|) + \lambda''_n \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan $\tilde{\mu}_n, \tilde{\lambda}_n, \mu'_n, \lambda'_n, \mu''_n, \lambda''_n \to 0$ olacak şekilde sırası ile $\{\tilde{\mu}_n\}, \{\tilde{\lambda}_n\}, \{\mu'_n\}, \{\lambda'_n\}$ ve $\{\mu''_n\}, \{\lambda''_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri, ayrıca $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_3(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi_1, \phi_2, \phi_3: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonları vardır.

$$\mu_n = max\{\tilde{\mu}_n, \mu'_n, \mu''_n\}, \quad \lambda_n = max\{\tilde{\lambda}_n, \lambda'_n, \lambda''_n\}$$

ve her $a \geq 0$ için

$$\phi(a) = max\{\phi_1(a), \phi_2(a), \phi_3(a)\}$$

olarak alınırsa, bu durumda

$$\|I^n x - I^n y\| \leq \|x - y\| + \mu_n \phi(\|x - y\|) + \lambda_n$$
$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|I^n x - I^n y\| + \mu_n \phi(\|I^n x - I^n y\|) + \lambda_n$$
$$\|S^n x - S^n y\| \leq \|I^n x - I^n y\| + \mu_n \phi(\|I^n x - I^n y\|) + \lambda_n$$

olacak şekilde $[0, \infty)$ aralığında $\mu_n, \lambda_n \to 0$ şartını sağlayan $\{\mu_n\}$,$\{\lambda_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu vardır.

Bu çalışmada $T, S: K \to K$ total asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerinden bahsedildiğinde bu dönüşümlerin Lemma 4.1.1 deki şartları sağlayan dönüşümler olduğu anlaşılacaktır.

Lemma 4.1.2: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^* \kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ ise $p \in F$ olmak üzere (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için,

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - p\|$$

limiti vardır.

İspat: $F \neq \emptyset$ olduğundan herhangi bir $p \in F$ için (4.1) ve (4.2) den

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &\leq \|(1 - \gamma_n)(x_n - p) + \gamma_n(I^n x_n - p)\| \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n \|I^n x_n - p\| \\ &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n[\|x_n - p\| + \mu_n \phi(\|x - p\|) + \lambda_n] \\ &\leq \|x_n - p\| + \gamma_n \mu_n \phi(\|x_n - p\|) + \lambda_n \end{aligned} \tag{4.3}$$

yazılır. ϕ kesin artan sürekli fonksiyon olduğundan, $\kappa \leq M$ iken $\phi(\kappa) \leq \phi(M)$ ve hipotezden $\kappa \geq M$ iken $\phi(\kappa) \leq M^* \kappa$ olur. Her iki durumda da $M, M^* \geq 0$ için,

$$\phi(\kappa) \leq \phi(M) + M^*\kappa \tag{4.4}$$

elde edilir. Böylece (4.3) ve (4.4) ifadelerinden $Q_1 > 0$ için,

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &\leq \|x_n - p\| + \gamma_n\mu_n[\phi(M) + M^*\|x_n - p\|] + \lambda_n \\ &\leq (1 + \mu_n M^*)\|x_n - p\| + Q_1(\mu_n + \lambda_n) \end{aligned} \tag{4.5}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.1) ve (4.5) den $M_2, Q_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &\leq \|(1-\beta_n)(x_n - p) + \beta_n(T^n z_n - p)\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|T^n z_n - p\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n[\|I^n z_n - p\| + \mu_n\phi(\|I^n z_n - p\|) + \lambda_n] \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n[\|I^n z_n - p\| + \mu_n\phi(M) + \mu_n M^*\|I^n z_n - p\| + \lambda_n] \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n[(1+\mu_n M^*)\|I^n z_n - p\| + \mu_n\phi(M) + \lambda_n] \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n[(1+\mu_n M^*)(\|z_n - p\| + \mu_n\phi(\|z_n - p\|) + \lambda_n) \\ &\qquad + \mu_n\phi(M) + \lambda_n] \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n[(1+\mu_n M^*)(\|z_n - p\| + \mu_n M^*\|z_n - p\| \\ &\qquad + \mu_n\phi(M) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n] \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n[(1+\mu_n M^*)((1+\mu_n M^*)\|z_n - p\| + \mu_n\phi(M) \\ &\qquad + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n] \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n[(1+\mu_n M^*)((1+\mu_n M^*)((1+\mu_n M^*)\|x_n - p\| \\ &\qquad + Q_1(\mu_n + \lambda_n)) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n] \\ &\leq (1 + 3\mu_n M^* + 3(\mu_n M^*)^2 + (\mu_n M^*)^3)\|x_n - p\| \\ &\qquad + (1+\mu_n M^*)^2 Q_1(\mu_n + \lambda_n) + (1+\mu_n M^*)(\mu_n\phi(M) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) \\ &\qquad + \lambda_n \\ &\leq (1 + \mu_n M_2)\|x_n - p\| + Q_2(\mu_n + \lambda_n) \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.1) ve (4.6) dan $M_3, Q_3 > 0$ için

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|(1-\alpha_n)(x_n - p) + \alpha_n(S^n y_n - p)\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|S^n y_n - p\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n[\|I^n y_n - p\| + \mu_n\phi(\|I^n y_n - p\|) + \lambda_n] \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n[\|I^n y_n - p\| + \mu_n\phi(M) + \mu_n M^*\|I^n y_n - p\| \\ &\qquad + \lambda_n] \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n[(1+\mu_n M^*)\|I^n y_n - p\| + \mu_n\phi(M) + \lambda_n] \end{aligned}$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n[(1+\mu_n M^*)(\|y_n - p\| + \mu_n\phi(\|y_n - p\|)$$
$$+ \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n]$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n[(1+\mu_n M^*)(\|y_n - p\| + \mu_n M^*\|y_n - p\|$$
$$+ \mu_n\phi(M) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n]$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n[(1+\mu_n M^*)((1+\mu_n M^*)\|y_n - p\| + \mu_n\phi(M)$$
$$+ \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n]$$
$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\|$$
$$+ \alpha_n[(1+\mu_n M^*)((1+\mu_n M^*)((1+\mu_n M_2)\|x_n - p\| + Q_2(\mu_n + \lambda_n))$$
$$+ \mu_n\phi(M) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n]$$
$$\leq (1 + (M_2 + M^*)\mu_n + (2M^*M_2 + (M^*)^2)\mu_n^2 + M_2(M^*)^2\mu_n^3)\|x_n - p\|$$
$$+ (1+\mu_n M^*)^2 Q_2(\mu_n + \lambda_n) + (1+\mu_n M^*)(\mu_n\phi(M) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M)$$
$$+ \lambda_n$$
$$\leq (1+\mu_n M_3)\|x_n - p\| + Q_3(\mu_n + \lambda_n) \tag{4.7}$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$ olduğundan (4.7) ve Lemma 3.2.16 dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır.

Teorem 4.1.3: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ sürekli total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$ ise $p \in F$ olmak üzere (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin S, T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0 \tag{4.8}$$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik şartı açıktır. Bu yüzden sadece yeterlilik şartını ispatlayacağız.

S, T ve I sürekli olduğundan $F(S), F(T)$ ve $F(I)$ kapalıdır. Dolayısı ile $F = F(S) \cap F(T) \cap F(I)$ boştan farklı kapalı bir kümedir. (4.7) den her $p \in F$ için

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1+\mu_n M_3)\|x_n - p\| + Q_3(\mu_n + \lambda_n)$$

olup

$$d(x_{n+1},F) \leq (1+\mu_n M_3)d(x_n,F) + Q_3(\mu_n+\lambda_n) \tag{4.9}$$

yazılır. Bu durumda Lemma 3.2.16 ve (4.9) dan $\lim_{n\to\infty} d(x_n,F)$ limiti vardır. Ayrıca (4.8) den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,F) = \liminf_{n\to\infty} d(x_n,F) = 0 \tag{4.10}$$

olur.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin S,T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına yakınsadığını gösterelim. Bunun için ilk olarak $\{x_n\}$ nin X de bir Cauchy dizisi olduğunu göstermeliyiz. Her $t \geq 0$ için $1+t \leq \exp(t)$ olduğundan (4.7) den

$$\|x_{n+1}-p\| \leq exp(M_3\mu_n)\|x_n-p\| + Q_3(\mu_n+\lambda_n) \tag{4.11}$$

yazılır. Böylece m,n herhangi pozitif tamsayılar olmak üzere (4.11) den

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m}-p\| &\leq \exp(M_3\mu_{n+m-1})\,\|x_{n+m-1}-p\| + Q_3(\mu_{n+m-1}+\lambda_{n+m-1}) \\
&\leq \\
&\vdots \\
&\leq exp\left(\sum_{i=n}^{n+m-1} M_3\mu_i\right)\left(\|x_n-p\| + \sum_{i=n}^{n+m-1} Q_3(\mu_i+\lambda_i)\right) \\
&\leq exp\left(\sum_{i=n}^{\infty} M_3\mu_i\right)\left(\|x_n-p\| + \sum_{i=n}^{\infty} Q_3(\mu_i+\lambda_i)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $p \in F$ için,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m}-x_n\| &\leq \|x_{n+m}-p\| + \|x_n-p\| \\
&\leq \left(1 + exp\left(\sum_{i=n}^{\infty} M_3\mu_i\right)\right)\|x_n-p\| \\
&\quad + exp\left(\sum_{i=n}^{\infty} M_3\mu_i\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty} Q_3(\mu_i+\lambda_i)\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $D = 1 + exp(\sum_{i=n}^{\infty} M_3\mu_i) > 0$ olmak üzere

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq D\|x_n - p\| + D\left(\sum_{i=n}^{\infty}(\mu_i + \lambda_i)\right) \tag{4.12}$$

yazılır. (4.12) de $p \in F$ üzerinden infimum alınırsa

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq Dd(x_n, F) + D\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_i + \lambda_i)\right) \tag{4.13}$$

elde edilir.

(4.10) dan ve $\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_i + \lambda_i) < \infty$ olduğundan dolayı $\varepsilon > 0$ verildiğinde $N_0 > 0$ iken her $n > N_0$ için $d(x_n, F) < \frac{\varepsilon}{2D}$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}(\mu_i + \lambda_i) < \frac{\varepsilon}{2D}$ olur. Sonuç olarak, her $n > N_0$ tamsayısı ve $m \geq 1$ için (4.13) den $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$ olur ki bu $\{x_n\}$ nin X de bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. Böylece X tam olduğundan $x_n \to x^*$olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. Şimdi x^* ın S, T ve I dönüşümlerinin bir ortak sabit noktası olduğunu gösterelim. $x^* \notin F$ olduğunu kabul edelim. F, X in kapalı altkümesi olduğundan $d(x^*, F) > 0$ dır. Fakat her $p \in F$ için

$$\|x^* - p\| \leq \|x_n - x^*\| + \|x_n - p\|$$

olur. Bu da

$$d(x^*, F) \leq \|x^* - x_n\| + d(x_n, F)$$

olmasını gerektirir. Böylece $n \to \infty$ iken $d(x^*, F) = 0$ olur ki; bu $d(x^*, F) > 0$ ile çelişir. Dolayısıyla x^* noktası S, T ve I dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

Lemma 4.1.4: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $F \neq \emptyset$ ve

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$

ii. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [t, 1-t], t \in (0,1)$

ise (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - S^n x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - T^n x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - I^n x_n\| = 0 \text{ dır.}$$

İspat: Lemma 4.1.2 den her $p \in F$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| = d \tag{4.14}$$

yazılır. Bu durumda (4.1) den

$$\|x_{n+1} - p\| = \|(1-\alpha_n)(\, x_n - p) + \alpha_n(S^n y_n - p)\| \to d \tag{4.15}$$

olur. (4.2) ve (4.4) den

$$\begin{aligned}
\|S^n y_n - p\| &\le \|I^n y_n - p\| + \mu_n \phi(\|I^n y_n - p\|) + \lambda_n \\
&\le \|I^n y_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \mu_n M^* \|I^n y_n - p\| + \lambda_n \\
&\le (1 + \mu_n M^*)\|I^n y_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \lambda_n \\
&\le (1 + \mu_n M^*)(\|y_n - p\| + \mu_n \phi(\|y_n - p\|) + \lambda_n) + \mu_n \phi(M) + \lambda_n \\
&\le (1 + \mu_n M^*)(\|y_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \mu_n M^* \|y_n - p\| + \lambda_n) + \mu_n \phi(M) \\
&\quad + \lambda_n \\
&\le (1 + \mu_n M^*)[(1+\mu_n M^*)\|y_n - p\| \\
&\quad + \mu_n \phi(M) + \lambda_n] + \mu_n \phi(M) + \lambda_n
\end{aligned} \tag{4.16}$$

yazılır. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \|S^n y_n - p\| \le \limsup_{n\to\infty} \|y_n - p\|$$

elde edilir. (4.6) dan

$$\limsup_{n\to\infty} \|S^n y_n - p\| \le \limsup_{n\to\infty} (1 + \mu_n M_2)\|x_n - p\| + Q_2(\mu_n + \lambda_n)$$

ve böylece

$$\limsup_{n\to\infty} \|S^n y_n - p\| \le d \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.14), (4.15), (4.17) eşitsizlikleri ve Lemma 3.2.17 den

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - S^n y_n\| = 0 \tag{4.18}$$

elde edelir. Ayrıca (4.16) ve (4.18) den

$$\begin{aligned}
\|x_n - p\| &\le \|x_n - S^n y_n\| + \|S^n y_n - p\| \\
&\le (1 + \mu_n M^*)\big((1 + \mu_n M^*)\|y_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \lambda_n\big) + \mu_n \phi(M) + \lambda_n
\end{aligned}$$

olur. Buradan $d \le \lim_{n\to\infty} \|y_n - p\|$ ve (4.6) dan $\lim_{n\to\infty} \|y_n - p\| \le d$ bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - p\| = d \tag{4.19}$$

elde edilir. Yine

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \|x_n - S^n y_n\| = 0 \tag{4.20}$$

dır. (4.19) dan

$$\|y_n - p\| = \|(1-\beta_n)(x_n - p) + \beta_n (T^n z_n - p)\| \to d \tag{4.21}$$

yazılır. (4.2) ve (4.4) den

$$\begin{aligned}
\|T^n z_n - p\| &\leq \|I^n z_n - p\| + \mu_n \phi(\|I^n z_n - p\|) + \lambda_n \\
&\leq \|I^n z_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \mu_n M^* \|I^n z_n - p\| + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)\|I^n z_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)(\|z_n - p\| + \mu_n \phi(\|z_n - p\|) + \lambda_n) + \mu_n \phi(M) + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)(\|z_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \mu_n M^* \|z_n - p\| + \lambda_n) + \mu_n \phi(M) \\
&\quad + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)\big((1+\mu_n M^*)\|z_n - p\| \\
&\quad + \mu_n \phi(M) + \lambda_n) + \mu_n \phi(M) + \lambda_n
\end{aligned} \tag{4.22}$$

yazılır. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n z_n - p\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|z_n - p\|$$

bulunur. Dolayısı ile (4.5) ifadesinden

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n z_n - p\| \leq \limsup_{n\to\infty} (1 + \mu_n M^*)\|x_n - p\| + Q_1(\mu_n + \lambda_n)$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n z_n - p\| \leq d \tag{4.23}$$

olur. (4.14), (4.21), (4.23) ve Lemma 3.2.17 den

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T^n z_n\| = 0 \tag{4.24}$$

elde edilir. Ayrıca (4.22) ve (4.24) den

$$\begin{aligned}
\|x_n - p\| &\leq \|x_n - T^n z_n\| + \|T^n z_n - p\| \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)\big((1 + \mu_n M^*)\|z_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \lambda_n\big) + \mu_n \phi(M) + \lambda_n
\end{aligned}$$

olur. Buradan $d \leq \lim_{n\to\infty} \|z_n - p\|$ ve (4.5) den $\lim_{n\to\infty} \|z_n - p\| \leq d$ bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - p\| = d \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.1) iterasyonu ve (4.25) eşitliğinden

$$\|z_n - p\| = \|(1-\gamma_n)(x_n - p) + \gamma_n(I^n x_n - p)\| \to d \tag{4.26}$$

yazılır. Ayrıca (4.2) ve (4.4) den

$$\begin{aligned}
\|I^n x_n - p\| &\leq \|x_n - p\| + \mu_n \phi(\|x_n - p\|) + \lambda_n \\
&\leq \|x_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \mu_n M^* \|x_n - p\| + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)\|x_n - p\| + \mu_n \phi(M) + \lambda_n
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitsizlikten

$$\limsup_{n\to\infty} \|I^n x_n - p\| \leq d \tag{4.27}$$

bulunur. (4.14), (4.26), (4.27) ve Lemma 3.2.17 den

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - I^n x_n\| = 0 \tag{4.28}$$

elde edilir. Şimdi $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^n x_n\| = 0$ olduğunu gösterelim. Öncelikle (4.28) kullanılarak

$$\|z_n - x_n\| = \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n I^n x_n - x_n\| = \gamma_n \|x_n - I^n x_n\| \to 0 \tag{4.29}$$

bulunur. Öte yandan (4.24) den

$$\begin{aligned}
\|x_n - T^n x_n\| &\leq \|x_n - T^n z_n\| + \|T^n z_n - T^n x_n\| \\
&\leq \|I^n z_n - I^n x_n\| + \mu_n \phi(\|I^n z_n - I^n x_n\|) + \lambda_n \\
&\leq \|I^n z_n - I^n x_n\| + \mu_n \phi(M) + \mu_n M^* \|I^n z_n - I^n x_n\| + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)\|I^n z_n - I^n x_n\| + \mu_n \phi(M) + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)(\|z_n - x_n\| + \mu_n \phi(\|z_n - x_n\|) + \lambda_n) + \mu_n \phi(M) + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)(\|z_n - x_n\| + \mu_n \phi(M) + \mu_n M^* \|z_n - x_n\| + \lambda_n) \\
&\quad + \mu_n \phi(M) + \lambda_n \\
&\leq (1 + \mu_n M^*)((1 + \mu_n M^*)\|z_n - x_n\| + \mu_n \phi(M) + \lambda_n) + \mu_n \phi(M) \\
&\quad + \lambda_n
\end{aligned}$$

olur. Böylece (4.29) dan hareketle limit alınarak

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^n x_n\| = 0 \tag{4.30}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty}\|x_n - S^n x_n\| = 0$ olduğunu gösterelim. Öncelikle (4.24) kullanılarak

$$\|y_n - x_n\| = \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n T^n z_n - x_n\| = \beta_n\|x_n - T^n z_n\| \to 0 \tag{4.31}$$

bulunur. Ayrıca (4.18) den

$$\begin{aligned}
\|x_n - S^n x_n\| &\le \|x_n - S^n y_n\| + \|S^n y_n - S^n x_n\| \\
&\le \|I^n y_n - I^n x_n\| + \mu_n\phi(\|I^n y_n - I^n x_n\|) + \lambda_n \\
&\le \|I^n y_n - I^n x_n\| + \mu_n\phi(M) + \mu_n M^*\|I^n y_n - I^n x_n\| + \lambda_n \\
&\le (1+\mu_n M^*)\|I^n y_n - I^n x_n\| + \mu_n\phi(M) + \lambda_n \\
&\le (1+\mu_n M^*)(\|y_n - x_n\| + \mu_n\phi(\|y_n - x_n\|) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n \\
&\le (1+\mu_n M^*)(\|y_n - x_n\| + \mu_n\phi(M) + \mu_n M^*\|y_n - x_n\| + \lambda_n) \\
&\quad + \mu_n\phi(M) + \lambda_n \\
&\le (1+\mu_n M^*)((1+\mu_n M^*)\|y_n - x_n\| + \mu_n\phi(M) + \lambda_n) + \mu_n\phi(M) + \lambda_n
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte limit alınırsa (4.31) den

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - S^n x_n\| = 0 \tag{4.32}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5: X bir düzgün konveks reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T,S: K \to K$ sürekli total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \ge M$ için $\phi(\kappa) \le M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. $F \ne \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$ olmak üzere S, T ve I dönüşümlerinden en az biri kompakt ise $\{x_n\}$ dizisi S, T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Diyelim ki S kompakt olsun. S sürekli ve kompakt olduğundan tamamen süreklidir. Bu sebeple $\{S^n x_n\}$ dizisinin $x^* \in K$ için $S^{n_k}x_{n_k} \to x^*$ olacak şekilde $\{S^{n_k}x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Böylece $k \to \infty$ için $S^{n_k+1}x_{n_k} \to Sx^*$ ve (4.32) den $\{x_{n_k}\}$

dizisi x^* a kuvvetli yakınsar. Benzer şekilde (4.30) dan $T^{n_k}x_{n_k} \to x^*$ ve $T^{n_k+1}x_{n_k} \to Tx^*$ ve yine (4.28) $I^{n_k}x_{n_k} \to x^*$ ve $I^{n_k+1}x_{n_k} \to Ix^*$ elde edilir. Ayrıca $\left\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\right\| \to 0$ olduğundan, $\left\|S^{n_k+1}x_{n_k+1} - S^{n_k+1}x_{n_k}\right\| \to 0$, $\left\|T^{n_k+1}x_{n_k+1} - T^{n_k+1}x_{n_k}\right\| \to 0$ ve $\left\|I^{n_k+1}x_{n_k+1} - I^{n_k+1}x_{n_k}\right\| \to 0$ bulunur. Şimdi x^* ın bu dönüşümlerin ortak bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|x^* - Sx^*\| \leq{} & \left\|x^* - x_{n_k+1}\right\| + \left\|x_{n_k+1} - S^{n_k+1}x_{n_k+1}\right\| + \left\|S^{n_k+1}x_{n_k+1} - S^{n_k+1}x_{n_k}\right\| \\ & + \left\|S^{n_k+1}x_{n_k} - Sx^*\right\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x^* - Tx^*\| \leq{} & \left\|x^* - x_{n_k+1}\right\| + \left\|x_{n_k+1} - T^{n_k+1}x_{n_k+1}\right\| + \left\|T^{n_k+1}x_{n_k+1} - T^{n_k+1}x_{n_k}\right\| \\ & + \left\|T^{n_k+1}x_{n_k} - Tx^*\right\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|x^* - Ix^*\| \leq{} & \left\|x^* - x_{n_k+1}\right\| + \left\|x_{n_k+1} - I^{n_k+1}x_{n_k+1}\right\| + \left\|I^{n_k+1}x_{n_k+1} - I^{n_k+1}x_{n_k}\right\| \\ & + \left\|I^{n_k+1}x_{n_k} - Ix^*\right\|\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliklerde $k \to \infty$ için limit alınırsa $x^* = Sx^*, x^* = Tx^*$ ve $x^* = Ix^*$ elde edilir. Yani $x^* \in F$ dir. Lemma 4.1.2 den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limitinin varlığı göz önüne alınırsa $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\| = \lim_{n\to\infty}\left\|x_{n_k} - x^*\right\| = 0$ olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi x^* a kuvvetli yakınsar.

Lemma 4.1.6: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $F \neq \emptyset$ ve

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$

ii. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [t, 1-t], t \in (0,1)$

ise (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - Sx_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - Ix_n\| = 0$$

İspat: (4.20) den $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\|I^{n-1}x_{n-1} - I^{n-1}x_n\| &\le \|x_n - x_{n-1}\| + \mu_n\phi(\|x_n - x_{n-1}\|) + \lambda_n \\ &\le \|x_n - x_{n-1}\| + \mu_n\phi(M) + \mu_n M^*\|x_n - x_{n-1}\| + \lambda_n \\ &\to 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

olur. (4.20), (4.28) ve (4.33) den

$$\begin{aligned}\|x_n - I^{n-1}x_n\| &\le \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - I^{n-1}x_{n-1}\| + \|I^{n-1}x_{n-1} - I^{n-1}x_n\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca I düzgün sürekli olduğundan, $\omega_1(0) = 0$ ve

$$\|I^n x_n - Ix_n\| = \|I(I^{n-1}x_n) - Ix_n\| = \omega_1(\|I^{n-1}x_n - x_n\|)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli artan $\omega_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|I^n x_n - Ix_n\| = 0 \tag{4.34}$$

yazılır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\|x_n - Ix_n\| \le \|x_n - I^n x_n\| + \|I^n x_n - Ix_n\|$$

olur. (4.28) ve (4.34) göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Ix_n\| = 0$$

elde edilir.

Şimdi $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ olduğunu gösterelim. (4.30) dan

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T^n x_n\| = 0$$

yazılır. (4.33) den

$$\begin{aligned}\|T^{n-1}x_{n-1} - T^{n-1}x_n\| &\le \|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\| + \mu_n\phi(\|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\|) + \lambda_n \\ &\le \|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\| + \mu_n\phi(M) \\ &\quad + \mu_n M^*\|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\| + \lambda_n \\ &\to 0\end{aligned}$$

olur. Böylece (4.20), (4.30) ve son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}\|x_n - T^{n-1}x_n\| &\le \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - T^{n-1}x_{n-1}\| + \|T^{n-1}x_{n-1} - T^{n-1}x_n\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

bulunur. T düzgün sürekli olduğundan, $\omega_2(0)=0$ şartını ve

$$\|T^n x_n - Tx_n\| = \|T(T^{n-1}x_n) - Tx_n\| = \omega_2(\|T^{n-1}x_n - x_n\|)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli artan $\omega_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n x_n - Tx_n\| = 0 \tag{4.35}$$

yazılır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \|x_n - T^n x_n\| + \|T^n x_n - Tx_n\|$$

olup, (4.30) ve (4.35) göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

elde edilir.

Son olarak $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\| = 0$ olduğunu gösterelim. (4.32) den

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - S^n x_n\| = 0$$

yazılır. (4.33) den

$$\begin{aligned}\|S^{n-1}x_{n-1} - S^{n-1}x_n\| &\leq \|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\| + \mu_n \phi(\|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\|) + \lambda_n \\ &\leq \|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\| + \mu_n \phi(M) \\ &\quad + \mu_n M^* \|I^{n-1}x_n - I^{n-1}x_{n-1}\| + \lambda_n \\ &\to 0\end{aligned}$$

olur. Böylece (4.32), (4.20) ve son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}\|x_n - S^{n-1}x_n\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - S^{n-1}x_{n-1}\| + \|S^{n-1}x_{n-1} - S^{n-1}x_n\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

elde edilir. S düzgün sürekli olduğundan, $\omega_3(0)=0$ şartını ve

$$\|S^n x_n - Sx_n\| = \|S(S^{n-1}x_n) - Sx_n\| = \omega_3(\|S^{n-1}x_n - x_n\|)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli artan $\omega_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|S^n x_n - Sx_n\| = 0 \tag{4.36}$$

yazılır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\|x_n - Sx_n\| \leq \|x_n - S^n x_n\| + \|S^n x_n - Sx_n\|$$

olup, (4.32) ve (4.36) göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\| = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7: X Opial şartını sağlayan düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. $F \neq \emptyset$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ ve E birim dönüşüm olmak üzere $E - S, E - T$ ve $E - I$ dönüşümleri 0 da demiclosed ise $\{x_n\}$ dizisi S, T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $p \in F$ alalım. Bu durumda Lemma 4.1.2 ye göre $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. $\{x_n\}$ dizisinin F de bir tek altdizisel limiti olduğunu göstermeliyiz. $\{x_n\}$ dizisi düzgün konveks X Banach uzayında sınırlı olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizileri vardır. $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri sırasıyla $w_1 \in K$ ve $w_2 \in K$ olsun. Lemma 4.1.6 ya göre $\lim_{n\to\infty} \|x_{n_i} - Sx_{n_i}\| = 0$ ve $E - S$, 0 da demiclosed olduğundan $Sw_1 = w_1$ bulunur. Benzer şekilde $Tw_1 = w_1$ ve $Iw_1 = w_1$ elde edilir. Yani, $w_1 \in F$ dir. Aynı şekilde $w_2 \in F$ olur.

Şimdi tekliği gösterelim. Bunun için $w_1 \neq w_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Opial şartından

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n - w_1\| &= \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - w_1\| \\
&< \lim_{i\to\infty} \|x_{n_i} - w_2\| \\
&= \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - w_2\| \\
&< \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j} - w_1\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x_n - w_1\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $w_1 = w_2$ dir. O halde $\{x_n\}$ dizisi S, T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Teorem 4.1.8: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^* \kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olmak üzere S, T ve I dönüşümleri (A'') şartını sağlıyor ise $\{x_n\}$ dizisi S, T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 4.1.2 den her $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. Bu limit d olsun. Eğer $d = 0$ ise ispat açıktır. Kabul edelim ki, $d > 0$ dır.

(4.9) ve Lemma 3.2.16 dan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ limiti vardır. (A') şartı kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, F)\big) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(\|x - Tx\| + \|x - Sx\| + \|x - Ix\|) = 0$$

olur. Lemma 4.1.6 dan $\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, F)\big) = 0$ elde edilir.

$f(0) = 0$ ve f azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.1.3 uygulanarak sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.9: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik I-genişlemeyen, $I: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^* \kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olmak üzere S, T ve I dönüşümlerinden biri semikompakt ise $\{x_n\}$ dizisi S, T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Kabul edelim ki S,T ve I dönüşümlerinden biri semikompakt olsun. Lemma 4.1.6 ye göre $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Sx_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Ix_n\| = 0$ dır. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin $x^* \in K$ noktasına kuvvetli yakınsayan bir $\{x_{n_j}\}$ altdizisi vardır. Dolayısıyla

$\|x^* - Sx^*\| = \lim_{n\to\infty}\left\|x_{n_j} - Sx_{n_j}\right\| = 0$, $\|x^* - Tx^*\| = \lim_{n\to\infty}\left\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\right\| = 0$

ve $\|x^* - Ix^*\| = \lim_{n\to\infty}\left\|x_{n_j} - Ix_{n_j}\right\| = 0$ olur. Buradan $x^* \in F$ dır. $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\|$ limiti mevcut ve $\{x_{n_j}\}$ altdizisi x^* noktasına yakınsadığından $\{x_n\}$ dizisi $x^* \in F$ noktasına yakınsar.

4.2. Total Asimptotik I-Genişlemeyen İki Dönüşüm Ailesi İçin Temel Sonuçlar

Bu bölümde total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümler için yapılan çalışmalar bu dönüşümlerin sonlu aileleri için genelleştirilmiştir.

X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ total asimptotik I_i-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri ve $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi verilsin. Herhangi bir $x_0 \in K$ için $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S_n^n y_n \\ y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n^n z_n,\ n \geq 1 \\ z_n &= (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n I_n^n x_n \end{cases} \tag{4.37}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$, $S_n = S_{n(modN)}, T_n = T_{n(modN)}$ ve $I_n = I_{n(modN)}$ dir.

Aşağıda vereceğimiz lemma, (4.2) şartlarının dönüşümlerin sonlu aileleri için genelleştirilmesidir. Bundan sonra sonlu aileler için yazılan teoremlerde $F = (\bigcap_{i=1}^N F(S_i)) \cap (\bigcap_{i=1}^N F(T_i)) \cap (\bigcap_{i=1}^N F(I_i))$ alınacaktır.

Lemma 4.2.1: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $i = 1,2,3,\cdots,N$ için $T_i, S_i : K \to K$ total asimptotik I_i-genişlemeyen ve $I_i : K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Bu durumda her $x, y \in K$ için

$$\|I_i^n x - I_i^n y\| \le \|x-y\| + \mu_n \phi(\|x-y\|) + \lambda_n$$
$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \le \|I_i^n x - I_i^n y\| + \mu_n \phi(\|I_i^n x - I_i^n y\|) + \lambda_n \tag{4.38}$$
$$\|S_i^n x - S_i^n y\| \le \|I_i^n x - I_i^n y\| + \mu_n \phi\left(\left\|\|I_i^n x - I_i^n y\|\right\|\right) + \lambda_n$$

İspat: $i = 1,2,3,\cdots,N$ için $S_i, T_i : K \to K$ total asimptotik I_i-genişlemeyen dönüşümler ve $I_i : K \to K$ dönüşümü total asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan

$$\|I_i^n x - I_i^n y\| \le \|x-y\| + \tilde{\mu}_{in} \phi_{1i}(\|x-y\|) + \tilde{\lambda}_{in}$$
$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \le \|I_i^n x - I_i^n y\| + \mu'_{in} \phi_{2i}(\|I_i^n x - I_i^n y\|) + \lambda'_{in}$$
$$\|S_i^n x - S_i^n y\| \le \|I_i^n x - I_i^n y\| + \mu''_{in} \phi_{3i}(\|I_i^n x - I_i^n y\|) + \lambda''_{in}$$

eşitsizliklerini sağlayan $[0,\infty)$ aralığında $\tilde{\mu}_{in}, \tilde{\lambda}_{in}, \mu'_{in}, \lambda'_{in}, \mu''_{in}, \lambda''_{in} \to 0$ olacak şekilde sırası ile $\{\tilde{\mu}_{in}\}, \{\tilde{\lambda}_{in}\}, \{\mu'_{in}\}, \{\lambda'_{in}\}$ ve $\{\mu''_{in}\}, \{\lambda''_{in}\}$ reel sayı dizileri, ayrıca $\phi_{1i}(0) = \phi_{2i}(0) = \phi_{3i}(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi_{1i}, \phi_{2i}, \phi_{3i} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonları vardır. $i = 1,2,3,\cdots,N$ olmak üzere her $a \ge 0$ için

$$\mu_n = max\{\mu'_{in}, \mu''_{in}, \tilde{\mu}_{in}\}, \;\; \lambda_n = max\{\lambda'_{in}, \lambda''_{in}, \tilde{\lambda}_{in}\}$$

ve

$$\phi(a) = max\{\phi_{1i}(a), \phi_{2i}(a), \phi_{3i}(a)\}$$

olarak alınırsa,

$$\|I_i^n x - I_i^n y\| \le \|x-y\| + \mu_n \phi(\|x-y\|) + \lambda_n$$
$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \le \|I_i^n x - I_i^n y\| + \mu_n \phi(\|I_i^n x - I_i^n y\|) + \lambda_n$$
$$\|S_i^n x - S_i^n y\| \le \|I_i^n x - I_i^n y\| + \mu_n \phi\left(\left\|\|I_i^n x - I_i^n y\|\right\|\right) + \lambda_n$$

olacak şekilde $[0,\infty)$ aralığında $\mu_n, \lambda_n \to 0$ şartını sağlayan $\{\mu_n\}$,$\{\lambda_n\}$ reel sayı dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu vardır.

Bu çalışmada $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ total asimptotik I_i-genişlemeyen ve $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ total asimptotik genişlemeyen sonlu dönüşüm ailelerinden bahsedildiğinde bu dönüşüm ailelerinin Lemma 4.2.1 deki şartları sağlayan dönüşüm aileleri olduğu anlaşılacaktır.

Teorem 4.2.2: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ sürekli total asimptotik I_i-genişlemeyen, $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümleri sonlu aileleri ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olmak üzere (4.37) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

olmasıdır

İspat: Lemma 4.2.1 kullanılarak, Lemma 4.1.2 de ispatlandığı gibi $A, B > 0$ için

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 + \mu_n A)\|x_n - p\| + B(\mu_n + \lambda_n)$$

olduğu görülür. Buradan Lemma 3.2.16 dan $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. İspatın geri kalanı Lemma 4.1.3 ün aynısıdır.

Teorem 4.2.3: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ sürekli total asimptotik I_i-genişlemeyen, $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $F \neq \emptyset$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olmak üzere $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N, \{I_i\}_{i=1}^N$ ailelerindeki dönüşümlerden en az biri kompakt ise (4.37) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi bu dönüşüm ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 4.1.4 de $S := S_n, T := T_n$ ve $I := I_n$ alınırsa $\lim_{n\to\infty}\|x_n - S_n^n x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - T_n^n x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - I_n^n x_n\| = 0$ bulunur. $S_n = S_{n(modN)}, T_n = T_{n(modN)}$ ve $I_n = I_{n(modN)}$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - S_i^n x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - T_i^n x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - I_i^n x_n\| = 0 \tag{4.39}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki S_1 kompakt olsun. S_1 kompakt ve sürekli olduğundan tamamen süreklidir. Bu nedenle $\{S_1^n x_n\}$ dizisinin bir $x^* \in K$ için $k \to \infty$ iken $S_1^{n_k} x_{n_k} \to x^*$ olacak şekilde $\{S_1^{n_k} x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Böylece $k \to \infty$ için $S_1^{n_k+1} x_{n_k} \to S_1 x^*$ ve (4.39) dan $\{x_{n_k}\}$ dizisi x^* a kuvvetli yakınsar. Dolayısıyla (4.39) dan her $i = 1,2,3,\cdots,N$ için $S_i^{n_k} x_{n_k} \to x^*$ ve $S_i^{n_k+1} x_{n_k} \to S_i x^*$ a kuvvetli yakınsar. Benzer şekilde (4.39) $T_i^{n_k} x_{n_k} \to x^*$ ve $T_i^{n_k+1} x_{n_k} \to T_i x^*$ ve yine (4.39) dan $I_i^{n_k} x_{n_k} \to x^*$ ve $I_i^{n_k+1} x_{n_k} \to I_i x^*$ bulunur. Bunun yanı sıra $\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| \to 0$ olduğundan $\|S_i^{n_k+1} x_{n_k+1} - S_i^{n_k} x_{n_k}\| \to 0$, $\|T_i^{n_k+1} x_{n_k+1} - T_i^{n_k} x_{n_k}\| \to 0$ ve $\|I_i^{n_k+1} x_{n_k+1} - I_i^{n_k} x_{n_k}\| \to 0$ elde edilir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|x^* - S_i x^*\| \le{}& \|x^* - x_{n_k+1}\| + \|x_{n_k+1} - S_i^{n_k+1} x_{n_k+1}\| + \|S_i^{n_k+1} x_{n_k+1} - S_i^{n_k+1} x_{n_k}\| \\ &+ \|S_i^{n_k+1} x_{n_k} - S_i x^*\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x^* - T_i x^*\| \le{}& \|x^* - x_{n_k+1}\| + \|x_{n_k+1} - T_i^{n_k+1} x_{n_k+1}\| + \|T_i^{n_k+1} x_{n_k+1} - T_i^{n_k+1} x_{n_k}\| \\ &+ \|T_i^{n_k+1} x_{n_k} - T_i x^*\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|x^* - I_i x^*\| \le{}& \|x^* - x_{n_k+1}\| + \|x_{n_k+1} - I_i^{n_k+1} x_{n_k+1}\| + \|I_i^{n_k+1} x_{n_k+1} - I_i^{n_k+1} x_{n_k}\| \\ &+ \|I_i^{n_k+1} x_{n_k} - I_i x^*\|\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliklerde $k \to \infty$ için limit alınırsa $x^* = S_i x^*, x^* = T_i x^*$ ve $x^* = I_i x^*$ elde edilir. Bu $x^* \in F$ olduğu anlamına gelir. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti var olduğundan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{n_k} - x^*\| = 0$ olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisinin x^* a kuvvetli yakınsar.

Teorem 4.2.4: X Opial şartını sağlayan düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik I_i-genişlemeyen, $\{I_i\}_{i=1}^N: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen sonlu dönüşüm aileleri ve her $\kappa \ge M$ için $\phi(\kappa) \le M^* \kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$

aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $F \neq \emptyset$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ ve E birim dönüşüm olmak üzere her $i = 1,2,3,\cdots,N$ için $E - S_i, E - T_i$ ve $E - I_i$ dönüşümleri 0 da demiclosed ise $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^{N}, \{S_i\}_{i=1}^{N}$ ve $\{I_i\}_{i=1}^{N}$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: Lemma 4.1.6 da $S := S_n, T := T_n$ ve $I := I_n$ alınır ve $S_n = S_{n(modN)}, T_n = T_{n(modN)}$ ve $I_n = I_{n(modN)}$ olduğu gözönünde bulundurulursa

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - S_i x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - I_i x_n\| = 0 \tag{4.40}$$

elde edilir.

$p \in F$ alalım. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. $\{x_n\}$ dizisinin F de bir tek altdizisel limiti olduğunu göstermeliyiz. $\{x_n\}$ dizisi düzgün konveks X Banach uzayında sınırlı olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizileri vardır. $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri sırasıyla $w_1 \in K$ ve $w_2 \in K$olsun. (4.40) a göre $\lim_{n\to\infty} \left\|x_{n_i} - S_i x_{n_i}\right\| = 0$ ve $E - S_i$, 0 da demiclosed olduğundan $S_i w_1 = w_1$elde edilir. Benzer şekilde $T_i w_1 = w_1$ ve $I_i w_1 = w_1$ elde edilir. Yani, $w_1 \in F$ dir. Aynı yolla $w_2 \in F$ elde edilir.

Şimdi tekliği gösterelim. Bunun için $w_1 \neq w_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Opial şartından

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n - w_1\| &= \lim_{i\to\infty} \left\|x_{n_i} - w_1\right\| \\
&< \lim_{i\to\infty} \left\|x_{n_i} - w_2\right\| \\
&= \lim_{j\to\infty} \left\|x_{n_j} - w_2\right\| \\
&< \lim_{j\to\infty} \left\|x_{n_j} - w_1\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x_n - w_1\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $w_1 = w_2$ dir. O halde $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^{N}, \{S_i\}_{i=1}^{N}$ ve $\{I_i\}_{i=1}^{N}$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Teorem 4.2.5: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik I_i-genişlemeyen, $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olmak üzere $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu aileleri (B') şartını sağlıyor ise $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: $p \in F$ olsun. Lemma 4.1.2 de ispat edildiği gibi her $n \in \mathbb{N}$ ve $A, B > 0$ için

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 + \mu_n A)\|x_n - p\| + B(\mu_n + \lambda_n)$$

olduğu görülür.

Bu da

$$d(x_{n+1}, F) \leq (1 + \mu_n A) d(x_n, F) + B(\mu_n + \lambda_n)$$

olmasını gerektirir. Bu durumda Lemma 3.2.16 dan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ limiti vardır. $\{T_i\}_{i=1}^m, \{S_i\}_{i=1}^m$ ve $\{I_i\}_{i=1}^m$, (B') Şartını sağladığından

$$f\big(d(x_n, F)\big) \leq \frac{1}{3}\Big(\max_{i=1,2,3,\ldots,N}\|x - T_i x\| + \max_{i=1,2,3,\ldots,N}\|x - S_i x\| + \max_{i=1,2,3,\ldots,N}\|x - I_i x\|\Big)$$

olur. (4.40) dan $\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, F)\big) = 0$ elde edilir.

$f(0) = 0$ ve f azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.2.2 uygulanarak sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.6: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik I_i-genişlemeyen, $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri ve her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayıları mevcut olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n <$

∞, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olmak üzere $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerindeki dönüşümlerin biri semi kompakt ise $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Kabul edelim ki $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerindeki dönüşümlerden biri semikompakt olsun. (4.40) a göre $\lim_{n\to\infty}\|x_n - S_i x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_i x_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n - I_i x_n\| = 0$ dır. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin $x^* \in K$ noktasına kuvvetli yakınsayan bir $\{x_{n_j}\}$ altdizisi vardır. Böylece,

$\|x^* - S_i x^*\| = \lim_{n\to\infty} \left\|x_{n_j} - S_i x_{n_j}\right\| = 0$, $\|x^* - T_i x^*\| = \lim_{n\to\infty} \left\|x_{n_j} - T_i x_{n_j}\right\| = 0$

ve $\|x^* - I_i x^*\| = \lim_{n\to\infty} \left\|x_{n_j} - I_i x_{n_j}\right\| = 0$ olur. Bu da $x^* \in F$ olmasını gerektirir. $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\|$ limiti mevcut ve $\{x_{n_j}\}$ altdizisi x^* noktasına yakınsadığından $\{x_n\}$ dizisi $x^* \in F$ noktasına kuvvetli yakınsar.

4.3. Asimptotik I-Genişlemeyen İki Dönüşüm İçin Temel Sonuçlar

(4,1) iterasyonunda T, S asimptotik I-genişlemeyen dönüşümler ve I da asimptotik genişlemeyen dönüşüm olarak alınırsa $\lambda_n = 0$ ve $\phi(a) = a$ olur. Dolayısı ile her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^*\kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayılarının var olduğunu kabul etmeye gerek kalmaz. Ayrıca bu durumda (4.2) şartları her $x, y \in K$ için

$$\begin{aligned} \|I^n x - I^n y\| &\leq (1 + \mu_n)\|x - y\| \\ \|T^n x - T^n y\| &\leq (1 + \mu_n)\|I^n x - I^n y\| \\ \|S^n x - S^n y\| &\leq (1 + \mu_n)\|I^n x - I^n y\| \end{aligned} \tag{4.41}$$

şeklinde yazılır. Böylece bu dönüşümlerin sürekliliği de göz önüne alınarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Bu başlık altında geçen $T, S: K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümlerinin (4.41) şartlarını sağladığı kabul edilecektir.

Sonuç 4.3.1: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T,S: K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve $F \neq \emptyset, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olsun. Bu durumda (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin S,T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim \inf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

olmasıdır.

Sonuç 4.3.2: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T,S: K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve $F \neq \emptyset, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. S,T ve I dönüşümlerinden en az biri kompakt ise $\{x_n\}$ dizisi S,T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 4.3.3: X Opial şartını sağlayan düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T,S: K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve $F \neq \emptyset, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi S,T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Sonuç 4.3.4: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T,S: K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve $F \neq \emptyset, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. S,T ve I dönüşümleri (A'') şartını sağlıyor ise $\{x_n\}$ dizisi S,T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 4.3.5: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T,S: K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $I: K \to K$

asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve $F \neq \emptyset, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. S, T ve I dönüşümlerinden biri semi kompakt ise $\{x_n\}$ dizisi S, T ve I dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

4.4. Asimptotik I-Genişlemeyen İki Dönüşüm Ailesi İçin Temel Sonuçlar

(4.37) iterasyonunda T_i, S_i asimptotik I_i-genişlemeyen dönüşümler ve I_i de asimptotik genişlemeyen dönüşüm olarak alınırsa $\lambda_n = 0$ ve $\phi(a) = a$ olur. Dolayısı ile her $\kappa \geq M$ için $\phi(\kappa) \leq M^* \kappa$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ sayılarının var olduğunu kabul etmeye gerek kalmaz. Ayrıca bu durumda (4.38) şartları

$$\begin{gathered} \|I_i^n x - I_i^n y\| \leq (1+\mu_n)\|x-y\| \\ \|T_i^n x - T_i^n y\| \leq (1+\mu_n)\|I_i^n x - I_i^n y\| \\ \|S_i^n x - S_i^n y\| \leq (1+\mu_n)\|I_i^n x - I_i^n y\| \end{gathered} \tag{4.42}$$

şeklinde yazılır. Böylece bu dönüşümlerin sürekliliği de göz önüne alınarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Bu başlık altında geçen $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik genişlemeyen sonlu dönüşüm ailelerinin (4.42) şartlarını sağladığı kabul edilecektir.

Sonuç 4.4.1: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $\{I_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri verilsin. $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olmak üzere (4.37) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

olmasıdır.

Sonuç 4.4.2: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve

$\{I_i\}_{i=1}^N: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri verilsin. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olduğunu kabul edelim. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ ailelerindeki dönüşümlerden en az biri kompakt ise $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 4.4.3: X Opial şartını sağlayan düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $\{I_i\}_{i=1}^N: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri verilsin. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olduğunu kabul edelim. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Sonuç 4.4.4: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $\{I_i\}_{i=1}^N: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu aileleri verilsin. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olduğunu kabul edelim. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$ için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu aileleri (B') şartını sağlıyor ise $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 4.4.5: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N : K \to K$ asimptotik I-genişlemeyen ve $\{I_i\}_{i=1}^N: K \to K$ de asimptotik genişlemeyen dönüşüm sonlu aileleri verilsin. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ olduğunu kabul edelim. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ bir $t \in (0,1)$için $[t, 1-t]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.37) ile tanımlansın. $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerindeki dönüşümlerin biri semi kompakt ise $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu ailelerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde öncelikle çalışmamızın sonuçlarının daha önce tanımladığımız total asimptotik I-quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sınıfına taşınılabileceğine değinilmiştir. Daha sonra kendi üzerine olmayan total asimptotik I-genişlemeyen ve kendi üzerine olmayan total asimptotik I-quasi-genişlemeyen dönüşümler tanımlanarak dördüncü bölümdeki teoremlerin bu dönüşüm sınıfları için de ispatlanabileceği söylenmiştir.

$S: K \to K$ ve $T: K \to K$ total asimptotik I-quasi-genişlemeyen ve $I: K \to K$ total asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm alınarak, bu çalışmanın bütün teoremleri çok az değişiklikle ya da hiç değişiklik yapılmaksızın yeniden yazılabilir ve aynı ispat metotları kullanılarak ispat edilebilir.

Tanım 5.1: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $P: X \to K$, X in K üzerine genişlemeyen çekmesi ve $T, I: K \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq \|I(PI)^{n-1}x - I(PI)^{n-1}y\|$$
$$+\mu_n \phi(\|I(PI)^{n-1}x - I(PI)^{n-1}y\|) + l_n, n \geq 1$$

olacak şekilde $n \to \infty$ iken $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa kendi üzerine olmayan $T: K \to X$ dönüşümü total asimptotik I-genişlemeyen dönüşüm diye adlandırılır.

Tanım 5.2: X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $F = F(T) \cap F(I) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $P: X \to K$, X in K üzerine genişlemeyen çekmesi ve $T, I: K \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - p\| \leq \|I(PI)^{n-1}x - p\| + \mu_n \phi(\|I(PI)^{n-1}x - p\|) + l_n, n \geq 1$$

olacak şekilde $n \to \infty$ iken $\mu_n, l_n \to 0$ şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri ve $\phi(0) = 0$ şartını sağlayan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan sürekli fonksiyonu varsa kendi üzerine olmayan $T: K \to X$ dönüşümü total asimptotik I-quasi-genişlemeyen dönüşüm diye adlandırılır.

Bu durumda $\{x_n\}$ iterasyon dizisi aşağıdaki gibi yeniden iki farklı şekilde tanımlanır.

X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to X$ kendi üzerine olmayan total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümler ve ayrıca $I: K \to X$ dönüşümü de kendi üzerine olmayan bir total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Herhangi bir $x_0 \in K$ ile $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & P\big((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S(PS)^{n-1}y_n\big) \\ y_n & = & P\big((1-\beta_n)x_n + \beta_n T(PT)^{n-1}z_n\big) \\ z_n & = & P\big((1-\gamma_n)x_n + \gamma_n I(PI)^{n-1}x_n\big) \end{cases} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır.

X bir reel Banach uzayı ve K da X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T, S: K \to X$ kendi üzerine olmayan total asimptotik I-quasi-genişlemeyen dönüşümler ve ayrıca $I: K \to X$ dönüşümü de kendi üzerine olmayan bir total asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm olsun. Herhangi bir $x_0 \in K$ ile $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & P\big((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S(PS)^{n-1}y_n\big) \\ y_n & = & P\big((1-\beta_n)x_n + \beta_n T(PT)^{n-1}z_n\big) \\ z_n & = & P\big((1-\gamma_n)x_n + \gamma_n I(PI)^{n-1}x_n\big) \end{cases} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iterasyon şemalarında P bir genişlemeyen çekme alınırsa iterasyonun iyi tanımlı olması garanti edilmiş olur. Bu durumda yukarıda verilen iterasyon şemaları kullanılarak, dördüncü bölümde ispatlanan tüm teoremler bu dönüşüm sınıfları için yeniden yazılabilir ve aynı ispat metotları kullanılarak ispat edilebilir.

Ayrıca yukarıdaki ifadeler $\{T_i\}_{i=1}^N, \{S_i\}_{i=1}^N$ ve $\{I_i\}_{i=1}^N$ sonlu dönüşüm aileleri içinde geçerlidir.

KAYNAKLAR

Alber, Ya.I., Chidume, C.E. and Zegeye, H., 2006. Approximating fixed points of total asymptotically nonexpansive mappings, Fixed Point Theory and Appl., 2006 Article ID 10673, 1-20.

Alber, Ya.I., Espinola, R. and Lorenzoc, P., 2008. Strongly convergent approximations to fixed points of total asymptotically nonexpansive mappings, Acta Math. Sinica, Eng. Ser., 24, 1005-1022.

Agarwal, R. P., Meehan, M. and O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, doi 10.1007/978-0-387-75818-3.

Aksoy, A. G. and Khamsi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory. ISBN 0-387-97364-8.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics.

Browder, F. E., 1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Natl. Acad. Sci., 54, 1041-1044.

Chang, S. S., Cho, Y. J. and Zhou, H., 2001. Demi-closed principle and weak convergence problem for asymptotically nonexpansive mappings, J.Korean Math. Soc., 38, 1245-1260.

Chidume, C.E., 2009. Geometric properties of Banach spaces and nonlinear iterations, in: Lecture Notes Math., vol. 1965, Springer-Verlag, London.

Chidume, C.E. and Ofoedu, E.U., 2007. Approximation of common fixed points for finite families of total asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 333 (1), 128-141.

Chidume, C.E. and Ofoedu, E.U., 2009. A new iteration process for approximation of common fixed points for finite families of total asymptotically nonexpansive mappings, Internat. J. Math. Math. Sci., 2009 Article ID 615107, 17 p.

Chidume, C.E. and Ofoedu, E.U., 2010. Corrigendum to the paper, "A new iteration process for approximation of common fixed points for finite families of total asymptotically nonexpansive mappings" arXiv:1011.1522v1 [math.FA] http://arxiv.org/abs/1011.1522v1

Chidume, C.E. and Shahzad, N., 2005. Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Anal. 65, 1149-1156.

Ciric, L. B., 1974. A generalization of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

Franks, R. L. and Marzec, R. P., 1971. A theorem on mean-value iterations, Proc. Amer. Math. Soc., 30, 324-326.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 35, 171-174.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1990. Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, Cambridge.

Gohde, D., 1965. Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, (German) Math. Nachr., 30, 251-258.

Hahn, H., 1927. Über lineare Gleichungssysteme in linearen Raumen, Journal Reine Angew. Math., 157, 214-229.

Hu, G. and Yang, L., 2008. Strong convergence of the modified three step iterative proces in Banach spaces. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis 15, 555-571

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150.

James, R. C., 1950, Bases and reflexivety of Banach spaces, Annals of Math., 52, 518-527.
James, R. C., 1951, A non-reflexive Banach space isometric with its second cunjugate space. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 37, 174-177.
Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.
Khan, S. H. and Fukhar-ud-din, H., 2005. Weak and stronge convergence of a scheme with errors of two nonexpansive mappings, Nonlinear Anal., 61, 1295-1301.
Khan, A. R., Domlo A. A. and Fukhar-ud-din H., 2008. Common fixed points Noor iteration for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 341, 1-11.
Kirk, W. A., 1969. On nonlinear mappings of strongly semicontractive type, J. Math. Anal. Appl., 27, 409-412.
Kirk, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, Glasgow Math. J., 6-9.
Kirk, W. A., 1974. Fixed point theorems for non-Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type, Israel J. Math., 17, 339-346.
Kirk, W. A., 1989. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72, 1004-1006.
Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk., 10, 123-127.
Kreyszig, E., 1989. Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library Edition Published.
Kumam P., Kumethong W. and Jewwaiworn N., 2008. Weak convergence theorems of three-step Noor iterative scheme for I-quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces, Applied Mathematical Sciences, vol. 2, no. 57–60, 2915–2920.
Lorch, E. R., 1939. On a calculus of operators in reflexive vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 45, 217-234.
Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510.
Mukhamedov, F. and Saburov, M., 2010. Strong convergence of an explicit iteration process for a totally asymptotically I-nonexpansive mapping in Banach spaces, Applied Mathematics Letters, 23, 1473-1478
Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.
Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc., 591-597.
Petryshyn, W. V. and Williamson, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 43, 459-497.
Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.
Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176.
Rhoades, B. E. and Soltuz, S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration, Nonlinear Analysis, 58, 219-228.
Rhoades, B. E. and Temir S., 2006. Convergence theorems for I-nonexpansive mapping, IJMMS., Volume 2006, Article ID 63435, Pages 1-4.
Schu, J., 1991. Iterative construction of a fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 158, 407-413.
Schu, J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc., 43, 153-159.
Senter, H. F. and Dotson, W. G., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 375-380.
Shahzad, N., 2004. Generalized I-nonexpansive maps and best approximations in Banach spaces, Demonstratio Math. 37 (3) 597_600.

Tan, K. K. and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by Ishikawa iteration process, J. Math. Anal. Appl., 178, 301-308.

Temir, S., 2009. On the convergence theorems of implicit iteration process for a finite family of I-asymptotically nonexpansive mappings, Journal of Computational and Applied mathematics., 225(2), 398-405.

Temir, S., Gul, O., 2007. Convergence theorem for I-asymptotically quasi-nonexpansive mapping in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl., 329, 759-765.

Wojtaszczyl, P., 1991. Banach spaces for analysts, Cambridge University Press, Cambridge.

Xu, B. and Noor, M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453.

Yao, S.S. and Wang, L., 2007. Strong convergence theorem for I-quasi-nonexpansive mappings, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 27 (1), 111–119.

Zhang, Y. and Wang, L., 2007. Strong convergence theorems of I-nonexpansive mapings, Math. SCI. Res. J., 11(2), 384-388.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Erzurum da doğdu. İlköğretiminin ilk beş yılını Çayırtepe ilköğretim okulunda, son üç yılını ise Gazi Ahmet Muhtar Paşa ilköğretim okulunda okudu. Lise öğrenimini 2003 yılında Erzurum Lisesinde tamamlayıp aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2007 yılında bu bölümden mezun oldu. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen burada yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.