T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WEYL GRUPLARI VE BASİT LIE CEBİRLERİ

Tezi Hazırlayan
Tülay YAĞMUR

Tezi Yöneten
Prof. Dr. Himmet CAN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2008
KAYSERİ

Prof. Dr. Himmet CAN danışmanlığında **Tülay YAĞMUR** tarafından hazırlanan **"Weyl Grupları ve Basit Lie Cebirleri''** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Üye : Prof. Dr. Himmet CAN

ONAY :

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 19/08/2008 tarih ve 2008/26-06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

19/08./2008

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Weyl Grupları ve Basit Lie Cebirleri" isimli yüksek lisans tezi çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle beni yüreklendiren ve yönlendiren saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Himmet CAN' a teşekkür ederim. Çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

WEYL GRUPLARI VE BASİT LIE CEBİRLERİ

Tülay YAĞMUR
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2008
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Himmet CAN

ÖZET

Bu tezin esas amacı, Weyl gruplarını tanıtmak ve bu grupların basit Lie cebirleri vasıtasıyla nasıl inşa edildiğini göstermektir. Burada tartışılan konular yeni değildir; yani, Weyl grupları ve basit Lie cebirleri bir çok yazar tarafından incelenmiştir. Carter, Benson ve Grove, Humphreys, Serre ve Bourbaki'nin çalışmaları buna örnek gösterilebilir. Bu tez temel olarak, Roger Carter'ın çalışmalarını gözönüne alarak, Weyl grupları ve basit Lie cebirleri üzerindeki sonuçları ele alır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili bir giriş yapıldı.

İkinci bölümde, yansıma, Weyl grupları, kök sistemler ve kök sistemlerin alt sistemleri hakkında bazı temel bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde, bir Weyl grubu üzerinde uzunluk fonksiyonu tanıtıldı. Ayrıca, bir Weyl grubu üreteçleri vasıtasıyla soyut bir grup olarak tanımlandı.

Dördüncü bölümde, bir Weyl grubunun parabolik alt grupları incelendi.

Beşinci bölümde, Lie cebirlerinin özelliklerini tanıtıyoruz. Daha sonra, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı her bir basit Lie cebirinin bir kök sistem ve bir Weyl grubu belirlediğini gösteriyoruz. Son olarak, Lie cebirlerinin Dynkin diagramlarını tanımlıyoruz.

Anahtar Kelimeler: Yansıma, Weyl grupları, Kök sistemler, Basit Lie cebirleri, Dynkin diagramları.

WEYL GROUPS AND SIMPLE LIE ALGEBRAS

Tülay YAĞMUR
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, July 2008
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Himmet CAN

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to introduce the Weyl groups and to show how to construct this groups in terms of simple Lie algebras. The ideas discussed here are not new; that is; Weyl groups and simple Lie algebras have been studied by many authors, see, for example, the works of Carter, Benson and Grove, Humphreys, Serre and Bourbaki. The thesis is mainly concerned with the results on Weyl groups and simple Lie algebras by following the work of Carter.

The thesis consists of five chapters:

In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis.

In the second chapter, some basic information about reflection, Weyl groups, root systems and subsystems of the root systems is given.

In the third chapter, the length function on a Weyl group is introduced. Furthermore, a Weyl group has been defined as an abstract group by its generators.

In the fourth chapter, the parabolic subgroups of a Weyl group have been examined.

In the fifth chapter, we introduce the properties of Lie algebras. Later on, we give the classification of the simple Lie algebras over $\mathbb{C}$. In this classification, we show that every simple Lie algebra over $\mathbb{C}$ determines a root system and a Weyl group. Finally, we define the Dynkin diagrams of the Lie algebras.

Keywords: Reflection, Weyl groups, Root systems, Simple Lie algebras, Dynkin diagrams.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

V	: IR üzerinde tanımlı Euclid uzayı
π	: Basit sistem
Φ	: Kök sistem
Φ^{+}	: Pozitif kök sistem
W	: Weyl grubu
$h(r)$	: $r \in \pi$ nin boyu
$\ell(w)$	: $w \in W$ nin uzunluğu
W_J	: W nin parabolik alt grubu
L	: Basit Lie cebiri
H	: L nin Cartan alt cebir

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Weyl grupları ve Weyl gruplarını esas alan cebirsel yapılar üzerindeki çalışmalar günümüzde de yoğun bir şekilde devam etmektedir. Bazı Weyl grupları, örneğin E_6, E_7, E_8 tipindeki Weyl grupları, çok yüksek mertebelere sahip olduğundan bu grupların cebirsel yapıları tam olarak son zamanlara kadar ne yazık ki anlaşılamamıştır. Bilgisayar teknolojilerindeki ilerlemelerin bir sonucu olarak yukarıda zikredilen Weyl gruplarının cebirsel yapısı artık aydınlığa kavuşturulmuştur. En son olarak 2007 yılında E_8 tipindeki Weyl grubu da bilgisayar programları kullanılarak incelenebilmiştir.

Bu çalışmada biz esas olarak sırasıyla kök sistemleri, kök sistemlerine karşılık gelen Weyl gruplarını ve basit Lie cebirlerini incelemek istiyoruz. Bu konular hakkındaki doyurucu temel bilgiler Carter [1,2], Benson ve Grove [3], Humphreys [4], Serre [5] ve Bourbaki [6] gibi yazarların kitaplarında bulunabilir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, kök sistemler aksiyomatik olarak tanımlandıktan sonra, her bir kök sisteme bir Weyl grubunun karşılık geldiği gösterilmektedir. Ayrıca kök sistemlerin temel özellikleri ve Weyl gruplarının cebirsel yapıları incelenmektedir. Daha sonra, üçüncü bölümde, bir Weyl grubu üzerinde uzunluk fonksiyonu kavramı verilerek, bu fonksiyon yardımıyla bir Weyl grubunun soyut bir grup (Coxeter grubu) olarak ifade edilebileceği ispatlanmaktadır. Bu ispatta esas olarak Steinberg' in çalışmasından [7] faydalanılmaktadır. Dördüncü bölümde ise, parabolik alt grup olarak adlandırılan Weyl gruplarının alt grupları üzerinde durulmaktadır. Burada parabolik alt grupların seçilmiş koset temsilcileri tanımlanarak; w_J parabolik alt gruba ait bir eleman, d_J seçilmiş bir koset temsilcisi olmak üzere, bir Weyl grubunun her bir elemanının $w_J d_J$ formunda yazılabileceği gösterilmektedir.

Son bölümde, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde basit Lie cebirleri tanımlanmaktadır. Burada basit Lie grupları Lie cebirlerinin otomorfizmlerinin bir grubu olarak ifade edilir. Basit Lie cebirlerinin inşası yapıldıktan sonra bu cebirlerin bir klasifikasyonu verilir. Bu klasifikasyon yardımıyla her bir Lie cebirinin bir kök sistem ve bir Weyl grubu belirttiğini söyleyebiliriz. Böylece her bir Lie cebirine bir kök sistem karşılık geldiğinden kök sistemler aksiyomatik inşadan kurtularak gerçek bir cebirsel temele kavuşurlar. Bu nedenle Weyl gruplarının varlık nedenini Lie cebirlerine dayandırabiliriz.

Bu çalışmanın önemi; temel olarak yukarıda zikredilen yazarların çalışmaları izlenerek, son zamanlarda büyük önem kazanan Weyl gruplarını ve Lie cebirlerini bütünleyici bir bakışla yeniden ele almaktır.

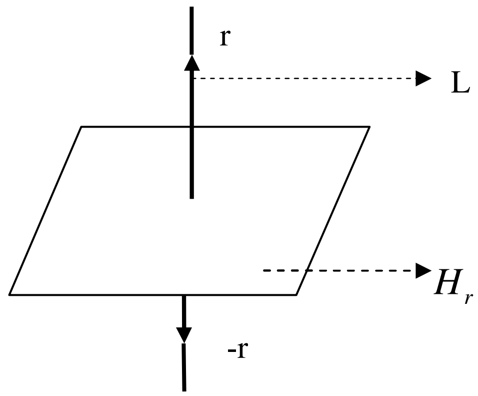
Son olarak belirtmeliyiz ki bu sadece bahse konu olan kavramlar üzerinde bir inceleme çalışması olup, bu sahadaki çalışmalara herhangi bir yenilik katmamaktadır.

2. BÖLÜM

WEYL GRUPLARI

Bu bölümde standart referans olarak Carter'ın çalışmalarını $[1,2]$ kullanıyoruz. Şimdi, V, IR üzerinde tanımlı n boyutlu bir Euclid uzayı olsun.

Tanım 2.1. $\forall\, r \in V$, $r \neq 0$, için w_r , r ye ortogonal olan H_r hiperdüzlemindeki *yansıma*yı göstersin.



$$H_r = \langle r\rangle^{\perp} = \{x \in V\colon \langle x, r\rangle = 0\}$$

$$\mathrm{L} = \langle r\rangle = \{\lambda r : \lambda \in \mathrm{IR}\} = Sp\{r\}$$

olup $V = L \oplus H_r$ dır.

Böylece; $boyL = 1$, $boy\,H_r = n\text{-}1$ olup,

$$boyV = boy(L \oplus H_r) = boyL + boy\,H_r \text{ dır.}$$

Buradan , w_r yansıması $\forall x \in V$ için

$$w_r(x) = x - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$$

şeklinde tanımlanan bir $w_r : V \to V$ dönüşümüdür.

Açık olarak $w_r(r) = -r$ ve $x \in H_r$ ise $w_r(x) = x$ dir.

Teorem 2.2. *$\forall\, r \in V$, $r \neq 0$, için $w_r : V \to V$ bir yansıma olsun. Bu taktirde;*

1. *w_r lineerdir.*
2. *$w_r^2 = 1$ dır.*
3. *$\forall 0 \neq \lambda \in IR$ için $w_{\lambda r} = w_r$ dır.*
4. *w_r ortogonaldir.*
5. *$f : V \to V$ tersinir ortogonal bir dönüşüm olmak üzere $f w_r f^{-1} = w_{f(r)}$ dır.*
6. *w_r ye karşılık gelen matris*

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

7. *$\det w_r$ = -1 dır* $[8]$.

İspat.

1. $\forall x, y \in V$ için,

$$\begin{aligned} w_r(x+y) &= x+y-2\frac{\langle x+y, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r \\ &= x+y-2\left(\frac{\langle x, r\rangle + \langle y, r\rangle}{\langle r, r\rangle}\right) r \\ &= x-2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r + y - 2\frac{\langle y, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r \\ &= w_r(x) + w_r(y) \end{aligned}$$

dır.

Şimdi $\lambda \in IR, x \in V$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} w_r(\lambda x) &= \lambda x - 2\frac{\langle \lambda x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r \\ &= \lambda x - 2\lambda \frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r \end{aligned}$$

$$= \lambda\left(x - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r \right)$$

$$= \lambda w_r(x)$$

dır. O halde w_r lineerdir.

2. $\forall\, x \in V$ için,

$$w_r^{\,2}(x) = w_r(w_r(x)) = w_r\left(x - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r \right)$$

$$= w_r(x) - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} w_r(r)$$

$$= x - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r + 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$$

$$= x$$

$$= 1(x)$$

dır.

3. $\forall x \in V,\ 0 \neq \lambda \in IR$ için,

$$w_{\lambda r}(x) = x - 2\frac{\langle x, \lambda r\rangle}{\langle \lambda r, \lambda r\rangle} \lambda r$$

$$= x - 2\lambda\frac{\langle x, r\rangle}{\lambda^2\langle r, r\rangle} \lambda r$$

$$= x - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$$

$$= w_r(x)$$

dır.

4. Şimdi $f : V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. $\forall x, y \in V$ için $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ ise f ye *V üzerinde ortogonal bir dönüşüm* denir. O halde,

$\forall x, y \in V$ için, iç çarpım bilineer olduğundan,

$$\langle w_r(x), w_r(y)\rangle = \langle x - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r,\ y - 2\frac{\langle y, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r\rangle \quad = \langle x, y\rangle$$

dır. O halde w_r ortogonaldir.

5. $\forall\, x \in V$ için,

$$\left(f w_r f^{-1} \right)(x) = f(w_r(f^{-1}(x)))$$

$$= f\left(f^{-1}(x) - 2\frac{\langle f^{-1}(x), r\rangle}{\langle r, r\rangle} r \right)$$

$$= f(f^{-1}(x)) - 2\frac{\langle f^{-1}(x), r\rangle}{\langle r, r\rangle} f(r)$$

$$= f(f^{-1}(x)) - 2\frac{\langle f(f^{-1}(x)), f(r)\rangle}{\langle f(r), f(r)\rangle} f(r)$$

$$= x - 2\frac{\langle x, f(r)\rangle}{\langle f(r), f(r)\rangle} f(r)$$

$$= w_{f(r)}(x)$$

dır.

6. *BoyV=n* , $V = \langle r\rangle \oplus \langle r\rangle^{\perp}$ olduğundan {r}, $\langle r\rangle$ nin bir bazı ve $\{ r_{1,} r_2, ..., r_{n-1} \}$ de $\langle r\rangle^{\perp}$ in bir bazı olmak üzere; $\{ r, r_{1,} r_2, ..., r_{n-1} \}$ *V* nin bir bazı olsun.

$$w_r(r) = -r = -1r + 0r_1 + 0r_2 + ... + 0r_{n-1}$$

$$w_r(r_1) = r_1 = 0r + 1r_1 + 0r_2 + ... + 0r_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$w_r(r_{n-1}) = r_{n-1} = 0r + 0r_1 + 0r_2 + ... + 1r_{n-1}$$

olup w_r ye karşılık gelen matris

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

dır.

7. w_r ye karşılık gelen matris diagonal bir matris olduğundan w_r nın determinantı matrisin asal köşegeni üzerindeki terimlerinin bir çarpımıdır, yani

$$\det w_r = -1.1.1\ldots1$$
$$= -1$$

dır.

Tanım 2.3. Bir $\Phi \subset V$ alt cümlesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa *V* de bir *kök sistem* denir. Ayrıca Φ nin elemanlarına da *kökler* denir:

1. $\Phi = \{r \in V : r \neq 0\}$ sonlu cümledir.

2. $V = Sp\{\Phi\}$ dır.

3. Eğer $r, s \in \Phi$ ise $w_r(s) \in \Phi$ dır.

4. Eğer $r, s \in \Phi$ ise $2\dfrac{\langle r, s\rangle}{\langle r, r\rangle}$ bir rasyonel sayıdır.

5. $r, \lambda r \in \Phi \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ olmasıdır $[9]$.

Tanım 2.4. Φ bir kök sistem olsun. $\forall r \in \Phi$ için, w_r yansımaları tarafından üretilen grup *W(*Φ*)* ile gösterilsin. Bu *W(*Φ*)* grubuna Φ nin *Weyl grubu* denir, ve bundan sonra genel olarak bu grup W ile gösterilecektir$[10]$. Elbette $W(\Phi) = \langle w_r : r \in \Phi\rangle$ dır. $\forall r \in \Phi$ için w_r yansıması V üzerinde ortogonal olduğundan *W(*Φ*)* Weyl grubu ortogonal dönüşümlerin bir grubudur. Tanım 2.3 de (3) aksiyomundan dolayı *W(*Φ*)* nin her elemanı Φ yi kendi içine dönüştürür, yani $w_r(\Phi) \subseteq \Phi$ dır. Tanım 2.3 de (2) aksiyomundan $W(\Phi)\Phi = \Phi$ olduğu görülür. Φ sonlu bir cümle olduğundan *W(*Φ*)* Weyl grubu sonlu bir gruptur.

Tanım 2.3 de (2) aksiyomundan dolayı Φ, V yi germesine rağmen $r, -r \in \Phi$ olduğundan Φ lineer bağımsız değildir.

Böylece Φ, V nin bazı olan bir gerçek alt cümle ihtiva eder. Gerçekten göstermek istiyoruz ki, Φ aşağıdaki tanımda verilen şartları sağlayan bir π alt cümlesi ihtiva eder:

Tanım 2.5. *1.* π lineer bağımsızdır.

2. Φ deki her kök π deki köklerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılır ve bu yazılışta katsayılar ya tamamen non-negatif ya da tamamen non-pozitiftir.

Bu şartları sağlayan Φ nin bir π alt cümlesine bir *basit sistem* denir. Ayrıca π nin elemanlarına da *basit kökler* denir.

Elbette $\pi = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ ve $r \in \Phi$ ise $r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i$ dir. Burada $\lambda_i \in IR$ olup $\forall i$ için ya $\lambda_i \geq 0$ ya da $\lambda_i \leq 0$ dır.

Örnek 2.6. $\Phi_{A_3} = \pm\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_3 - e_4\}$
cümlesi bir kök sistem olup A_3 tipindeki basit sistem:

$$\pi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$$

olur. Gerçekten;

$$e_1 - e_4 = 1(e_1 - e_2) + 1(e_2 - e_3) + 1(e_3 - e_4)$$

$$e_2 - e_4 = 0(e_1 - e_2) + 1(e_2 - e_3) + 1(e_3 - e_4)$$

$$e_1 - e_2 = 1(e_1 - e_2) + 0(e_2 - e_3) + 0(e_3 - e_4)$$

$$e_4 - e_1 = (-1)(e_1 - e_2) + (-1)(e_2 - e_3) + (-1)(e_3 - e_4)$$

$$e_2 - e_1 = (-1)(e_1 - e_2) + 0(e_2 - e_3) + 0(e_3 - e_4)$$

dır.

Basit sistemin varlığını ispatlamak için V üzerinde bir tam sıralama bağıntısı tanımlayalım:
Aşağıdaki şartları sağlayan V nin bir alt cümlesi V^+ olsun:

1. Eğer $v \in V^+$ ve $\lambda \rangle 0$ ise $\lambda v \in V^+$ dır.

2. Eğer $v_1, v_2 \in V^+$ ise $v_1 + v_2 \in V^+$ dır.

3. V nin her bir v elemanı için ya $v \in V^+$ ya $-v \in V^+$ ya da $v = 0$ dır.

Şimdi V üzerinde bir '$\succ$' sıralama bağıntısı $v_1, v_2 \in V$ için , eğer $v_1 - v_2 \in V^+$ ise $v_1 \succ v_2$ şeklinde tanımlansın.
Bu V üzerinde bir tam sıralamadır. Gerçekten,
$v_1 \neq v_2$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ olmak üzere v_1 ve v_2 V den alınan herhangi iki vektör olsun. Bu durumda $v_1 - v_2 \in V$ olup yukarıdaki V^+ üzerinde konulan (3) şartından dolayı ya $v_1 - v_2 \in V^+$ ya da $-(v_1 - v_2) \in V^+$ dır. Eğer $v_1 - v_2 \in V^+$ ise $v_1 \succ v_2$ dir. Tersine, eğer $-(v_1 - v_2) \in V^+$ ise $v_2 - v_1 \in V^+$ olup bu durumda $v_2 \succ v_1$ olacaktır. O halde, V den alınan sıfırdan ve birbirlerinden farklı herhangi iki v_1 ve v_2 vektörü için daima ya $v_1 \succ v_2$ ya da $v_2 \succ v_1$ dır. Bu sıralama toplama ve pozitif terimli skaler çarpımla uyumludur.

Tanım 2.7. V üzerinde tanımlanan bu tam sıralamaya göre $\Phi \cap V^+$, Φ nin alt cümlesi olup buna bir *pozitif sistem* denir ve Φ^+ ile gösterilir $[11]$. Yani $\Phi^+ = \Phi \cap V^+$ dır.

Teorem 2.8. Φ *deki her bir pozitif sistem bir basit sistem ihtiva eder* $[2]$.

İspat. Φ^+, Φ de bir pozitif sistem olsun. Bu taktirde $\Phi^+ = \Phi \cap V^+$ olacak şekilde V üzerinde yukarıdaki gibi tanımlanan bir tam sıralama vardır. Şimdi, π aşağıdaki şartları sağlayan Φ^+ nın bir alt cümlesi olsun.

1. Φ^+ daki her bir pozitif kök , π deki basit köklerin non-negatif katsayılarla birlikte bir lineer kombinasyonu olarak yazılır.
2. π nin hiçbir alt cümlesi (1) şartını sağlamaz.

Böyle bir π alt cümlesi kesinlikle mevcuttur, çünkü Φ^+ cümlesi (1) şartını sağlar. Şimdi (1), (2) şartlarını sağlayan π alt cümlesinin bir basit sistem olduğunu gösterelim. O halde π nin lineer bağımsız olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bununla birlikte ilk olarak $r, s \in \pi$, $r \neq s$ olmak üzere $\langle r, s\rangle \leq 0$ olduğunu ispatlayalım.

Aksine olarak, kabul edelim ki, $\langle r, s\rangle \rangle 0$ olsun.

$w_r(s) = s - 2\dfrac{\langle s, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$ ise $\lambda = 2\dfrac{\langle s, r\rangle}{\langle r, r\rangle}$ ve $\lambda \rangle 0$ olmak üzere $w_r(s) = s - \lambda r$ dır.

Eğer $w_r(s) \in \Phi^+$ ise $\forall \alpha_i \geq 0$ olmak üzere $w_r(s) = \sum_{r_i \in \pi} \alpha_i r_i$ dır.

Böylece, $\forall \alpha_i \geq 0$ ve $\lambda \rangle 0$ olmak üzere,

$$s = \lambda r + \sum_{r_i \in \pi} \alpha_i r_i$$

dır. Eşitliğin sağ tarafındaki toplamdaki s in katsayısı birden küçük olmalıdır. Aksi taktirde;

$$\lambda r + \sum_{r_i \in \pi} \alpha_i r_i - s \quad \in V^+$$

olur.

Böylece *s*, π deki geri kalan köklerin negatif olmayan katsayılarla birlikte bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bu ise bir çelişkidir.

Diğer taraftan;

Eğer $-w_r(s) \in \Phi^+$ ise $\forall \alpha_i \geq 0$ olmak üzere $-w_r(s) = \sum_{r_i \in \pi} \alpha_i r_i$ dır.

Böylece, $\forall \alpha_i \geq 0$ ve $\lambda \rangle 0$ olmak üzere,

$$\lambda r = s + \sum_{r_i \in \pi} \alpha_i r_i$$

dır. Eşitliğin sağ tarafındaki toplamdaki r nin katsayısı λ dan küçük olmalıdır. Böylece r, π deki geri kalan köklerin negatif olmayan katsayılarla birlikte bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bu ise yine bir çelişkidir. O halde, mecburen $\forall\ r,s \in \pi$, $r \neq s$ olmak üzere $\langle r,s \rangle \leq 0$ olmalıdır.

Şimdi π nin lineer bağımsız olduğunu ispatlamak kolaydır.

$r_i \neq s_i$ ve $r_i, s_i \in \pi$ olmak üzere π deki elemanları içeren herhangi bir lineer birleşim $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ olmak üzere,

$$\vartheta = \sum \alpha_i r_i = \sum \beta_i s_i$$

formunda yazılır. Buradan,

$$0 \leq \langle \vartheta, \vartheta \rangle = \langle \sum \alpha_i r_i, \sum \beta_i s_i \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \langle r_i, s_j \rangle \leq 0$$

dır. Bu ise $\vartheta = 0$ olmasını gerektirir.

$r_i, s_i \in V^+$ olduğundan bu durum $\forall i$ için $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ olmasını gerektirir. Böylece π lineer bağımsızdır.

O halde π bir basit sistemdir. Bu ise ispatı tamamlar.

Bu ispatın bir sonucu aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir.

Sonuç 2.9. *Eğer* $\pi = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$, Φ *de bir basit sistem ise bu taktirde* $\forall i \neq j$ *için* $\langle r_i, r_j \rangle \leq 0$ *dır* $[2]$.

Eğer π bir basit sistem ise bu taktirde π yi ihtiva eden sadece bir tek pozitif sistem vardır. Çünkü, $\pi \subset V^+$ olacak şekilde belli bir sıralama V üzerinde seçebiliyoruz. Böylece, $\forall \lambda_i \geq 0$ olmak üzere $r = \sum_{r_i \in \pi} \lambda_i r_i$ formundaki herhangi bir $r \in \Phi$ kökü için elbette $r \in V^+$ dır. Diğer taraftan , $\lambda_i \leq 0$ olacak şekilde Φ deki her kök için $-r \in V^+$ olacaktır. Böylece, $\Phi^+ = \Phi \cap V^+$ pozitif sistemi π tarafından belirlenir. Φ^+ daki köklere *pozitif kökler,* ve Φ de geri kalan diğer köklere de *negatif kökler* denir. Negatif köklerin cümlesi de Φ^- ile gösterilir. Tanım 2.3 de (5) aksiyomundan dolayı $\Phi^- = -\Phi^+$ olup $\Phi^+ \cap \Phi^- = \varnothing$, $\Phi = \Phi^+ \bigcup \Phi^-$ ve $\Phi = \bigcup_{r \in \Phi^+} \{r, -r\}$ diyebiliriz.

Önerme 2.10. Φ *deki her bir pozitif sistem sadece bir basit sistem ihtiva eder. Böylece* Φ *deki basit sistemlerle pozitif sistemler arasında birebir bir ilişki vardır* [1].

İspat. Kabul edelim ki $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ ve $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$, Φ^+ da iki basit sistem olsun. Bu durumda, $\alpha_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0$ olmak üzere,

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} s_j \qquad \text{ve} \qquad s_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} r_j$$

dır. Böylece, (α_{ij}) ve (β_{ij}) matrisleri için, $(\alpha_{ij}) = (\beta_{ij})^{-1}$ dır. $\forall i$ için $\alpha_{ij} \neq 0$ olacak şekilde bir j mevcuttur.

$$\forall k \neq i \text{ için } \quad \sum_{m=1}^{n} \alpha_{im} \beta_{mk} = 0$$

olduğundan, $\forall k \neq i$ için $\beta_{jk} = 0$ dır. Buradan $\beta_{ji} \neq 0$ dır. Benzer olarak bu $\forall k \neq j$ için $\alpha_{ik} = 0$ olmasını gerektirir. O halde, (α_{ij}) bir monomial matristir.

$s_1, s_2, ..., s_n$ basit kökleri uygun olarak yeniden numaralandırılırsa, (α_{ij}) matrisi diagonal olacaktır. Şimdi, $r_i, s_i \in \Phi^+$ olduğundan, $\forall i$ için $\alpha_{ii} \rangle 0$ dır. Tanım 2.3 de (5) aksiyomundan, $\forall i$ için $\alpha_{ii} = 1$ dir. O halde $s_i = r_i$ dir.

Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 2.11. $r \in \pi$ *olmak üzere,* w_r *yansıması,* r *yi* $-r$ *ye fakat diğer her pozitif kökü bir başka pozitif köke dönüştürür. Yani* $w_r(\Phi^+ / \{r\} \cup \{r\}) = \Phi^+ / \{r\} \cup \{-r\}$ *dır* [2].

İspat. Açık olarak $w_r(r) = -r$ dır. O halde şimdi, $s \neq r$, $s \in \Phi^+$ olsun. Bu durumda $\forall \alpha_i \geq 0$ olmak üzere, $s = \sum_{r_i \in \pi} \alpha_i r_i$ yazılır. Tanım 2.3 (5) den, $r_i \neq r$ ye karşılık gelen bazı $\alpha_i \rangle 0$ katsayıları vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} w_r(s) &= \sum_{r_i \in \pi} \alpha_i w_r(r_i) \\ &= \alpha_1 w_r(r_1) + \alpha_2 w_r(r_2) + ... + \alpha_i w_r(r_i) + ... + \alpha_n w_r(r_n) \end{aligned}$$

olup, $w_r(s)$ deki r_i nin katsayısı da pozitiftir. O halde, $w_r(s) \in \Phi^+$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 2.12. Φ *deki her kök, katsayılar rasyonel olmak üzere* π *deki basit köklerin bir lineer kombinasyonudur* $[2]$.

İspat. Φ^+ daki kökler için ispat yapmak yeterlidir. O halde $r \in \Phi^+$ olsun. Eğer $r \in \pi$ ise ispat tamamdır. Dolayısıyla $r \notin \pi$ olsun. O zaman $\forall \lambda_i \geq 0$ için

$$r = \sum_{r_i \in \pi} \lambda_i r_i$$

dır. Ayrıca bu yazılışta en az iki tane $\lambda_i \rangle 0$ dır. Şimdi, $\langle r_i, r \rangle \rangle 0$ olacak şekilde bazı $r_i \in \pi$ basit kökleri vardır. Çünkü, eğer, $\forall i$ için, $\langle r_i, r \rangle \leq 0$ olsaydı, bu durumda

$$0 \leq \langle r, r \rangle = \sum \lambda_i \langle r_i, r \rangle \leq 0$$

olup, bu da $r = 0$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Öyleyse $\langle r_i, r \rangle \rangle 0$ olacak şekilde bir $r_i \in \pi$ basit kökü seçelim. Bu taktirde,

$$w_{r_i}(r) = r - 2\frac{\langle r_i, r \rangle}{\langle r_i, r_i \rangle} r_i$$

dır.

$w_{r_i}(r)$, π deki basit köklerin bir lineer birleşimi olarak ifade edildiği zaman, sadece bir katsayı ile r den farklıdır. Böylece $w_{r_i}(r)$ nin en az bir katsayısı pozitiftir. O halde $w_{r_i}(r) \in \Phi^+$ dır.

Şimdi, r nin *boyu* $h(r) = \sum \lambda_i$ ile tanımlansın. O zaman $h(w_{r_i}(r)) \langle h(r)$ dır. Böylece her bir basit olmayan kök için daha kısa boyda olan bir başka pozitif kök vardır. O halde boyu bir olan minimal uzunlukta pozitif kökler birer basit köktür. Şimdi $h(r)$ üzerinde tümevarım ile bu iddiamızı ispatlayalım.

Boyu bir olan kökler için bu iddia doğrudur. $r \notin \pi$ olmak üzere, verilen $r \in \Phi^+$ kökü için yukarıdaki gibi $r_i \in \pi$ basit kökünü seçelim. O zaman, tümevarımdan dolayı, $w_{r_i}(r)$, π deki köklerin tamsayı katsayılı bir lineer birleşimidir. Böylece,

$$r = w_{r_i}(r) + 2\frac{\langle r_i, r \rangle}{\langle r_i, r_i \rangle} r_i$$

ve Tanım 2.3 de (4) aksiyomundan $2\frac{\langle r_i, r \rangle}{\langle r_i, r_i \rangle}$ rasyonel katsayı olduğundan r de π deki köklerin rasyonel katsayılı bir lineer birleşimidir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 2.13. *(i)* Φ *deki her kök* W *nin bazı elemanları altında* π *nin bazı köklerinin görüntüleridir.*

(ii) $r \in \pi$ *olmak üzere* W *Weyl grubu ,* w_r *basit yansımaları tarafından üretilir. Yani,* W *Weyl grubu* $W = \langle w_r : r \in \pi \rangle$ *şeklinde bir gösterime sahiptir* $[2]$.

İspat. $W_0 = \langle w_r : r \in \pi \rangle \leq W$ olsun.

(i) Göstermek istiyoruz ki, Φ deki her kök bazı $w \in W_0$ ve $s \in \pi$ için $w(s)$ formundadır.

$r \in \Phi^+$ olsun. Eğer $h(r) = 1$ ise, r istenilen formda kesinlikle ifade edilebilir. O halde $h(r)$ üzerinde tümevarım uygulayalım. Eğer $h(r) \rangle 1$ ise , $\langle r_i, r \rangle \Big\rangle 0$ olacak şekilde bir $r_i \in \pi$ kökü vardır. Buradan $w_{r_i}(r) \in \Phi^+$ olup Önerme 2.12 nin ispatındaki gibi $h(w_{r_i}(r)) \langle h(r)$ dır. Tümevarımdan bazı $w' \in W_0$, $s \in \pi$ için $w_{r_i}(r) = w'(s)$ dır.

Buradan, $r = w_{r_i} w'(s)$ ve $w_{r_i} w' \in W_0$ dır.

$$-r = w_{r_i} w'(-s) = w_{r_i} w' w_s(s)$$

ve $w_{r_i} w' w_s \in W_0$ olduğundan negatif köklerde istenilen formda ifade edilebilir.

(ii) Şimdi $W_0 = W$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$W = \langle w_r : r \in \Phi \rangle$ olduğundan $w_r \in W$ için $w_r \in W_0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü, $\pi \subset \Phi$ olduğundan $W_0 \subset W$ olduğu açıktır. O halde $W \subset W_0$ olduğunu gösterelim. Bazı $s \in \pi$ ve $w \in W_0$ için $r = w(s)$ olsun. Buradan $w_r = w w_s w^{-1}$ dır. Çünkü, $\forall x \in V$ için

$$\begin{aligned} w w_s w^{-1}(x) &= w\left(w^{-1}(x) - \frac{2\langle s, w^{-1}(x)\rangle}{\langle s, s\rangle} s \right) \\ &= x - \frac{2\langle w(s), x\rangle}{\langle w(s), w(s)\rangle} w(s) \\ &= x - \frac{2\langle r, x\rangle}{\langle r, r\rangle} r \\ &= w_r(x) \end{aligned}$$

dır. Böylece $w_r \in W_0$ olup $W \subset W_0$ dır. Bu durumda $W_0 = W$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

3. BÖLÜM

UZUNLUK FONKSİYONU VE SOYUT BİR GRUP OLARAK WEYL GRUBU

Bu bölümde temel kaynak olarak Humphreys $[4]$ ve Serre $[5]$'nin çalışmalarını esas alıyoruz.

Bir önceki bölümdeki Önerme 2.13 (ii) den biliyoruz ki bir W Weyl grubu, $r \in \pi$ olmak üzere, w_r basit yansımaları tarafından üretilir. Yani, W Weyl grubunun her elemanı w_r basit yansımalarının bir çarpımı olarak ifade edilebilir. Daha açık bir ifadeyle, eğer $\pi = \{r_1, r_2, ...r_n\}$ ise $w \in W$ elemanı, $r_{i_j} \in \pi$ olmak üzere

$$w = w_{r_{i_1}} w_{r_{i_2}} ... w_{r_{i_k}}$$

formunda yazılabilir. w elemanının bu formdaki herhangi bir yazılışındaki minimal uzunluğa w elemanının *uzunluğu* denir ve $\ell(w)$ ile gösterilir$[12]$. Eğer w nin yukarıdaki ifadesi minimal ise bu taktirde $\ell(w) = k$ olacaktır. Böylece,

$$\ell(1) = 0 \text{ ve } r \in \pi \text{ için } \ell(w_r) = 1$$

olduğu açıktır. Şimdi uzunluk fonksiyonunu farklı bir yoldan tanımlamak istiyoruz: $\forall\ w \in W$ için, $n(w)$ tamsayısı ; $n(w) = \left|\Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-)\right|$ şeklinde tanımlansın. Yani,

$$n(w) = w \textit{ tarafından negatif köklere dönüştürülen pozitif köklerin sayısı}$$

olarak tanımlansın.

Şimdi $n(w)$ nin bazı elementer özelliklerini aşağıdaki lemmada verelim.

Lemma 3.1. *$r \in \pi$, $w \in W$ olsun. Bu taktirde*

1. eğer $w^{-1}(r) \in \Phi^+$ ise $n(w_r w) = n(w) + 1$,

2. eğer $w^{-1}(r) \in \Phi^-$ ise $n(w_r w) = n(w) - 1$, *3. eğer* $w(r)\in\Phi^+$ *ise* $n(ww_r)=n(w)+1$,

4. eğer $w(r)\in\Phi^-$ *ise* $n(ww_r)=n(w)-1$,

dır $[12]$.

İspat. $r\in\pi$ ve $w\in W$ olsun.

1. $w^{-1}(r)\in\Phi^+$ olsun. $n(w_rw)=n(w)+1$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için öncelikle $\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})=\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-)$ olduğunu gösterelim.

İlk olarak, $\alpha\in\Phi^+$ ve $\alpha\in w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})$ olsun. Buradan, $\beta\in\Phi^-$ ve $\beta\neq -r$ olmak üzere $\alpha=w^{-1}(\beta)$ dır. O halde $w^{-1}(\beta)\in w^{-1}(\Phi^-)$ dır. Böylece $\alpha\in\Phi^+$ ve $\alpha=w^{-1}(\beta)\in w^{-1}(\Phi^-)$ olup $\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})\subset\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-)$ dır.

Diğer taraftan, $\sigma\in\Phi^+$ ve $\sigma\in w^{-1}(\Phi^-)$ olsun. Buradan, $\sigma\in\Phi^+$ ve $\gamma\in\Phi^-$ olmak üzere $\sigma=w^{-1}(\gamma)$ dır. Şimdi ya $\gamma=-r$ ya da $\gamma\neq -r$ dır. Eğer $\gamma=-r$ ise $\sigma=w^{-1}(-r)=-w^{-1}(r)\in\Phi^-$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $\gamma\neq -r$ olmalıdır. Bu yüzden $\gamma\in\Phi^-\setminus\{-r\}$ olup $\sigma=w^{-1}(\gamma)\in w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})$ dır. Böylece $\sigma\in\Phi^+$ ve $\sigma\in w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})$ dır. Dolayısıyla $\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})\supset\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-)$ dır. O halde ,

$$\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})=\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-)\qquad \text{... } (*)$$

dır. Şimdi ,

$$\begin{aligned}
n(w_rw) &= \left|\Phi^+\cap(w_rw)^{-1}(\Phi^-)\right| \\
&= \left|\Phi^+\cap w^{-1}w_r^{-1}(\Phi^-)\right| \\
&= \left|\Phi^+\cap w^{-1}w_r(\Phi^-)\right| \\
&= \left|\Phi^+\cap w^{-1}w_r(\Phi^-\setminus\{-r\}\cup\{-r\})\right| \\
&= \left|\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\}\cup\{r\})\right| \quad ; \quad \textit{(Lemma 2.11 den)} \\
&= \left|\Phi^+\cap[w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})\cup\{w^{-1}(r)\}]\right| \\
&= \left|\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})\right|+\left|\Phi^+\cap\{w^{-1}(r)\}\right| \\
&= \left|\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-\setminus\{-r\})\right|+1 \\
&= \left|\Phi^+\cap w^{-1}(\Phi^-)\right|+1 \quad ; \text{ ((*) } \textit{eşitliğinden} \text{)}
\end{aligned}$$

$$= n(w) + 1$$

dır.

Diğer şıklar da benzer olarak ispatlanabilir.

Teorem 3.2. $w \in W$ *olmak üzere* $\ell(w) = n(w)$ *dır* $[12]$.

İspat. $w \in W$ ve $\ell(w) = k$ olsun. O zaman $r_i \in \pi$ olmak üzere

$$w = w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_k}$$

olup , Lemma 3.1 den

$$n(w) \leq n(w_{r_1} w) + 1 \leq n(w_{r_2} w_{r_1} w) + 2 \leq ... \leq k$$

dır. Bu durumda $n(w) \leq \ell(w)$ dır.

Eğer mümkünse , kabul edelim ki $n(w) \langle k$ olsun. Bu taktirde Lemma 3.1 (iii) den

$$w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_j} (r_{j+1}) \in \Phi^-$$

olacak şekilde $j \leq k - 1$ tamsayısı vardır.

Ayrıca,

$$w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} (r_{j+1}) \in \Phi^+ \qquad , \qquad w_{r_i} w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} (r_{j+1}) \in \Phi^-$$

olacak şekilde $i \leq j$ tamsayısı vardır.

w_{r_i} sadece r_i ve $-r_i$ nin işaretini değiştirdiğinden

$$w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} (r_{j+1}) = r_i$$

dir. Buradan ,

$$w_{r_i} = w_{w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} (r_{j+1})}$$

$$= w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} w_{r_{j+1}} (w_{r_{i+1}} ... w_{r_j})^{-1}$$

$$= w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} w_{r_{j+1}} w_{r_j} ... w_{r_{i+1}}$$

olup,

$$w_{r_{i+1}} ... w_{r_{j+1}} = w_{r_i} ... w_{r_j}$$

dır. Şimdi bu bağıntıyı w nin orijinal ifadesini kısaltmak için kullanabiliriz.

$$w = w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_k}$$

$$= w_{r_1} ... w_{r_{i-1}} w_{r_i} w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} w_{r_{j+1}} w_{r_{j+2}} ... w_{r_k}$$

$$= w_{r_1} \ldots w_{r_{i-1}} w_{r_{i+1}} w_{r_{i+2}} \ldots w_{r_{j+1}} w_{r_{j+1}} w_{r_{j+2}} \ldots w_{r_k}$$

$$= w_{r_1} \ldots w_{r_{i-1}} w_{r_{i+1}} \ldots w_{r_j} w_{r_{j+2}} \ldots w_{r_k}$$

olup $\ell(w) = k-2$ elde edilir.

Böylece $\ell(w) \langle k$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu çelişkiye $n(w)\langle k$ kabulü ile düştük. O halde $n(w) \leq \ell(w) = k$ nın manası ya $n(w)\langle k$ ya da $n(w) = k$ dır. $n(w)\langle k$ olamadığından , mecburen $n(w) = k = \ell(w)$ dır.

Sonuç 3.3. *$w \in W$ için $w(\pi) = \pi$ ise $w = 1$ dir.*

Teorem 3.4. *Eğer π, Φ de bir basit sistem ise bu taktirde $w \in W$ için $w(\pi)$ de Φ de bir basit sistemdir. Ayrıca Φ de verilen herhangi iki π_1, π_2 basit sistemi için $w(\pi_1) = \pi_2$ olacak şekilde bir tek $w \in W$ vardır* $[4]$.

İspat. π yi ihtiva eden pozitif sistem Φ^+ olsun. O zaman *V* üzerinde verilen bir tam sıralama için $\Phi^+ = \Phi \cap V^+$ dır. $w(V^+)$ da *V* üzerinde bir tam sıralama tanımlar.

Bu sıralamaya göre pozitif kökler $w(\Phi^+) = \Phi \cap w(V^+)$ dır. Dolayısıyla, $w(\pi)$, $w(\Phi^+)$ da ihtiva edilen bir basit sistemdir.

Şimdi π_1, π_2 ; Φ de iki basit sistem olsun. Bu durumda göstermek istiyoruz ki $w(\pi_1) = \pi_2$ olacak şekilde bir tek $w \in W$ vardır.

Şimdi Φ_1^+, Φ_2^+ sırasıyla π_1, π_2 yi ihtiva eden iki pozitif sistem olsun.

$n = \left|\Phi_1^+ \cap \Phi_2^-\right|$ üzerinde tümevarım uygulayalım.

Eğer $n = 0$ ise $\Phi_1^+ \cap \Phi_2^- = \varnothing$ olup $\Phi_1^+ = \Phi_2^+$ dır. Böylece $\pi_1 = \pi_2$ dir. Bu durumda $w = 1$ dir.

O halde $n\rangle 0$ kabul etmeliyiz. O zaman $\pi_1 \cap \Phi_2^- \neq \varnothing$ olur. Çünkü , eğer π_1 deki her kök Φ_2^+ de olsaydı , bu durumda Φ_1^+ daki her kök de Φ_2^+ de olurdu.

O halde en az bir $r \in \pi_1 \cap \Phi_2^-$ elemanı vardır. Bu durumda , $w_r(\Phi_1^+)$ cümlesi r ile *-r* nin yer değiştirmesi ile Φ_1^+ dan elde edilen bir cümledir. Böylece $\left|w_r(\Phi_1^+) \cap \Phi_2^-\right| = n-1$ dir.

Şimdi $w_r(\pi_1)$, $w_r(\Phi_1^+)$ de ihtiva edilen bir basit sistemdir. Böylece , tümevarımdan dolayı $w'w_r(\pi_1)=\pi_2$ olacak şekilde $w'\in W$ vardır. Böylece $w=w'w_r$ dersek $w(\pi_1)=\pi_2$ dir.

Son olarak w nin tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $w_1(\pi_1)=\pi_2$ ve $w_2(\pi_1)=\pi_2$ olacak şekilde iki tane w_1 , w_2 $\in W$ elemanı mevcut olsun. Bu taktirde , $w_2^{-1}w_1(\pi_1)=\pi_1$ olup , Sonuç 3.3 den $w_2^{-1}w_1=1$ dır ve böylece $w_1=w_2$ olur ki bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.5. Φ *de ki basit sistemlerin sayısı* = $|W|$ *dır* $[4]$.

Şimdi oldukça farklı iki yol izleyerek bir Weyl grubunu üreteçler ve bağıntılar yoluyla soyut bir grup olarak ifade etmek istiyoruz.

Şimdi π , Φ de bir basit sistem olsun. $r\in\pi$ olmak üzere , w_r basit yansımalarının W Weyl grubunu ürettiğini biliyoruz. Yani ,

$$W=\langle w_r : r\in\pi\rangle$$

dır. $r,s\in\pi$ olmak üzere , $w_rw_s\in W$ elemanının mertebesi m_{rs} olsun. Bu durumda elbette $\forall r\in\pi$ için $m_{rr}=1$ olacaktır. O halde ,

$$(w_rw_s)^{m_{rs}}=1$$

eşitliği W üzerinde bir bağıntı tanımlar. Daha tam bir ifade aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.6. *W bir Weyl grubu olsun. Bu taktirde soyut bir grup olarak W Weyl grubu ,*

$$W=\langle w_r :\ \forall r,s\in\pi,\ (w_rw_s)^{m_{rs}}=1\rangle$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Kabul edelim ki sonuç yanlış olsun. Bu taktirde, $r_i\in\pi$ için

$$w_{r_1}w_{r_2}...w_{r_k}=1$$

eşitliği minimal k uzunluğunda teoremde verilen bağıntının bir sonucu olmayan bir bağıntı olsun.

Biliyoruz ki , $r\in\Phi$ için , her zaman $\det w_r=-1$ dir. O halde ,

$$\det(\mathrm{w}_{r_1}w_{r_2}...w_{r_k})=(-1)^k$$
$$=\det(1)=1$$

dır. Buradan k çifttir ve k=2m yazılabilir.

Böylece,

$$w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_{2m}} = 1 \ ,$$

$$w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_m} w_{r_{m+1}} w_{r_{m+2}} ... w_{r_{2m-1}} w_{r_{2m}} = 1 \ ,$$

$$w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_m} w_{r_{m+1}} = w_{r_{2m}} w_{r_{2m-1}} ... w_{r_{m+2}}$$

olup , $\quad \ell(w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_m} w_{r_{m+1}}) \langle (m+1)$ dır.

Lemma 3.1 den $\quad w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_j} (r_{j+1}) \in \Phi^-$ olacak şekilde bir $j \leq m$ tamsayısı vardır.

Bu nedenle,

$$w_{r_{i+1}} w_{r_{i+2}} ... w_{r_j} (r_{j+1}) \in \Phi^+ ,$$

$$w_{r_i} w_{r_{i+1}} w_{r_i} ... w_{r_j} (r_{j+1}) \in \Phi^-$$

olacak şekilde bazı $i \leq j$ tamsayıları mevcuttur. Bu durumda , $r_i \in \pi$ olduğundan

$$w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} (r_{j+1}) = r_i$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned} w_{r_i} &= w_{w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} (r_{j+1})} \\ &= (w_{r_{i+1}} ... w_{r_j}) w_{r_{j+1}} (w_{r_{i+1}} ... w_{r_j})^{-1} \\ &= w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} w_{r_{j+1}} w_{r_j} ... w_{r_{i+1}} \end{aligned}$$

olup ,

$$w_{r_{i+1}} ... w_{r_{j+1}} = w_{r_i} ... w_{r_j}$$

dır. Bu 2(j-i+1) uzunluğunda bir bağıntıdır. Eğer bu uzunluk 2m den kısa ise bu taktirde bağıntı verilen bağıntının bir sonucudur.

Bu bağıntıyı ve $w_{r_i}^{\ 2} = 1$ bağıntısını kullanırsak;

$$\begin{aligned} w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_k} &= w_{r_1} ... w_{r_{i-1}} w_{r_i} w_{r_{i+1}} ... w_{r_{j-1}} w_{r_j} w_{r_{j+1}} ... w_{r_k} \\ &= w_{r_1} ... w_{r_{i-1}} w_{r_{i+1}} ... w_{r_{j+1}} w_{r_{j+1}} ... w_{r_k} \\ &= w_{r_1} ... w_{r_{i-1}} w_{r_{i+1}} ... w_{r_j} w_{r_{j+2}} ... w_{r_k} = 1 \end{aligned}$$

dır. Bu bağıntının uzunluğu k dan daha kısadır. Böylece $w_{r_1} w_{r_2} ... w_{r_k} = 1$ bağıntısı teoremde verilen bağıntıdan elde edilebilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece mecburen 2(j-i+1)=2m olmalıdır. O halde j=m , i=1 dir.

Buradan,

$$w_{r_{i+1}}...w_{r_j}(r_{j+1}) = r_i$$

olduğundan

$$w_{r_2}...w_{r_m}(r_{m+1}) = r_1$$

dır. Bununla birlikte, $w_{r_1}w_{r_2}...w_{r_k} = 1$ bağıntısı $w_{r_2}...w_{r_k}w_{r_1} = 1$ bağıntısına denktir.

Böylece,

$$w_{r_3}...w_{r_{m+1}}(r_{m+2}) = r_2$$

dır. Buradan ,

$$w_{r_2} = w_{w_{r_3}...w_{r_{m+1}}(r_{m+2})}$$

$$= w_{r_3}...w_{r_{m+1}}w_{r_{m+2}}w_{r_{m+1}}...w_{r_3} \quad ,$$

olup ,

$$w_{r_3}...w_{r_{m+2}} = w_{r_2} \; ... \; w_{r_{m+1}}$$

dır. Bu bağıntı hipotezde verilen bağıntıdan çıkarılamaz. Çünkü,

$$w_{r_1}...w_{r_k} = w_{r_1}w_{r_2}w_{r_3}...w_{r_m}w_{r_{m+1}}w_{r_{m+2}}w_{r_{m+3}}...w_{r_k}$$

$$= w_{r_1}w_{r_2}w_{r_2}w_{r_3}...w_{r_m}w_{r_{m+1}}w_{r_{m+3}}...w_{r_k}$$

$$= w_{r_1}w_{r_3}...w_{r_{m+1}}w_{r_{m+3}}...w_{r_k} = 1$$

dır. Yani $w_{r_1}w_{r_2}...w_{r_k} = 1$ ifadesi , k uzunluğundan daha kısa olarak yazıldı.

Böylece, teoremde verilen bağıntıdan elde edilemeyen $2m$ uzunluğunda başka bir bağıntıya sahibiz ve bu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$w_{r_3}w_{r_2}w_{r_3}w_{r_4}...w_{r_{m+1}}w_{r_{m+2}}w_{r_{m+1}}...w_{r_4} = 1 .$$

Yine önceki gibi $w_{r_2}...w_{r_m}(r_{m+1}) = r_3$ elde ettik. Halbuki daha önceden $w_{r_2}...w_{r_m}(r_{m+1}) = r_1$ elde etmiştik. O halde $r_1 = r_3$ olmalıdır.

Şimdi , $w_{r_1}w_{r_2}...w_{r_k} = 1$ bağıntısını $r_1, r_2, ..., r_k$ nın devir permütasyonları formunda yazarsak , bu taktirde

$$r_1 = r_3 = ... = r_{2m-1} \quad ,$$

$$r_2 = r_4 = ... = r_{2m}$$

olduğu görülür.

Şimdi , $r_1 = r$, $r_2 = s$ alırsak, bu durumda

$$w_{r_1}w_{r_2}...w_{r_k} = 1$$

bağıntısı $(w_r w_s)^m = 1$ olacaktır. Böylece, m, $w_r w_s$ nin mertebesi olan m_{rs} nin bir katıdır. Fakat $(w_r w_s)^m = 1$, $(w_r w_s)^{m_{rs}} = 1$ bağıntısının bir sonucudur ki, bu verilen bağıntıdan biridir. O halde, bu bir çelişkidir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıda, az önce verilen zarif ispat Steinberg $[7]$' e aittir. Şimdi, $r \in \Phi$ olmak üzere, bütün w_r yansımalarını ihtiva eden bağıntılar ve üreteçler vasıtasıyla bir W Weyl grubunu soyut bir grup olarak bir başka şekilde yeniden tanımlamak istiyoruz:

Teorem 3.7. *Bir W Weyl grubu soyut bir grup olarak*

$$W = \left\langle w_r : r, s \in \Phi \text{ için}, \ w_r^{\,2} = 1, \ w_r w_s w_r = w_{w_r(s)} \right\rangle$$

şeklinde tanımlanır $[7]$.

Bu teorem de yine Steinberg $[7]$' e ait olup, burada ispatsız olarak veriyoruz.

Tanım 3.8. Eğer bir G grubu bağıntılar ve üreteçler vasıtasıyla

$$G = \left\langle a_i : (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, \ m_{ii} = 1 \right\rangle$$

şeklinde tanımlanabiliyor ise bu taktirde G bir *Coxeter grubu* olarak adlandırılır $[13,14]$.

Bu tanım altında, elbette her Weyl grubu bir Coxeter grubudur, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

4. BÖLÜM

BİR WEYL GRUBUNUN PARABOLİK ALT GRUPLARI

Bu bölümde bir Weyl grubunun gerçek alt gruplarını belirlemek istiyoruz. Bu alt gruplar, Φ kök sisteminin gerçek alt sistemlerine karşılık gelen Weyl gruplarıdır. Şimdi, π, Φ kök sisteminde bir basit sistem ve Φ^+ da π ye karşılık gelen pozitif sistem olsun. Eğer $J \subseteq \pi$ ise bu taktirde $V_J = Sp\{J\}$, V Euclid uzayının bir alt uzayı, $\Phi_J = \Phi \cap V_J$ ve $W_J = \langle w_r : r \in J \rangle$ de W Weyl grubunun bir alt grubu olarak tanımlansın. Bu taktirde,

Önerme 4.1. *1. Φ_J, V_J de bir kök sistemdir.*

2. J, Φ_J de bir basit sistemdir.

3. Φ_J nin Weyl grubu W_J dir. Yani, $W(\Phi_J) = W_J$ dır [2].

İspat.

1. Açık olarak, $V_J = Sp\{\Phi_J\}$ dır. Ayrıca, $r, s \in \Phi_J$ için $w_r(s) \in \Phi_J$ dır.
O halde, Φ_J, V_J de bir kök sistemdir.

2. Şimdi, $J \subseteq \pi$ olup, π lineer bağımsız olduğundan ve lineer bağımsız bir cümlenin her alt cümlesi de lineer bağımsız olacağından J lineer bağımsızdır.
Yine $J \subseteq \pi$ olduğundan Φ_J deki her kök J deki basit köklerin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Bu yazılışta katsayılar ya tamamen non-negatif ya da tamamen non-pozitiftir.
O halde J, Φ_J de bir basit sistemdir.

3. Φ_J nin Weyl grubu, $r \in J$ olmak üzere w_r basit yansımaları tarafından üretilir.
O halde,

$$W_J = \langle w_r : r \in J \rangle = W(\Phi_J)$$

dır.

Tanım 4.2. Eğer π, Φ kök sisteminde bir basit sistem ve $J \subseteq \pi$ ise W_J alt gruplarına ve bunların W deki konjugelerine W nin *parabolik alt grupları* denir. Buradaki " konjugenin'' manası aşağıdaki gibidir:

$\forall\ w \in W$ için, $w W_J\ w^{-1}$ grubuna W_J nin *konjugesi* denir. Bir başka deyişle, W nin iki alt grubu W_J ve W_K olsun. Eğer $W_K = w\, W_J\, w^{-1}$ olacak şekilde en az bir $w \in W$ elemanı mevcut ise bu taktirde W_J, W_K ya *konjugedir* denir.

Önerme 4.3. *π nin farklı J alt cümleleri için W_J alt grupları da farklıdır* $[4]$.

İspat. Kabul edelim ki $K \neq J \subseteq \pi$ ve $W_J = W_K$ olsun.

Genelliği yitirmeksizin $r \in K$ fakat $r \notin J$ olacak şekilde bir r kökünü gözönüne alalım. Bu taktirde ,

$$w_r(x) = x - 2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$$

olup ,

$$w_r(x) - x = -2\frac{\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$$

dır.

Fakat $r \in K$ olduğundan $w_r \in W_K$ ve $W_J = W_K$ olduğundan $w_r \in W_J$ dır. Dolayısıyla, $\forall x \in V_J$ için $(w_r(x) - x) \in V_J$ dır. $\langle r, x\rangle \neq 0$ olacak şekilde x elemanı seçersek $r \in V_J$ olur. Bu ise basit köklerin lineer bağımsızlığı ile çelişir. O halde $W_J \neq W_K$ dır.

Şimdi , $r \in \Phi$ olmak üzere , H_r , r ye ortogonal olan bir hiperdüzlem olsun. Bu durumda $x \in H_r \Leftrightarrow \langle r, x\rangle = 0$ olmasıdır. Topolojik olarak hiperdüzlemler V nin kapalı alt cümleleri olduğundan $\bigcup_{r \in \Phi} H_r$ kapalı olup bu birleşimin tümleyeni olan $V - \bigcup_{r \in \Phi} H_r$ cümlesi V de açıktır. Eğer herhangi iki vektör her bir hiperdüzlemin aynı tarafında yatıyor ise bu taktirde bu vektörlere bağlantılıdır denir.

Bu durumda $V - \bigcup_{r \in \Phi} H_r$ cümlesinin bağlantılı bileşenleri *hücre* olarak adlandırılır ve C ile gösterilir.

Lemma 4.4. *$\overline{C}$, C hücresinin kapanışı olmak üzere,* $v \in \overline{C}$ *ve* $w(v)=v$ *olacak şekilde* $w \in W$ *olsun. Bu taktirde,*

$$J=\{r \in \pi : \langle r,v \rangle = 0\}$$

olmak üzere $w \in W_J$ *dır* [2].

Sonuç 4.5. $v \in V$ *ve* $w(v)=v$ *olacak şekilde* $w \in W$ *olsun. Bu taktirde,* w*,* v *ye ortogonal olan köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır* [2].

Teorem 4.6. $w \in W$ *ve V de w tarafından sabit bırakılan bütün vektörlerden oluşan alt uzay U olsun. Yani*

$$U=\{v \in V: w(v)=v\},$$

V nin bir alt uzayı olsun. Bu taktirde, w*, U nun ortogonal komplemanı olan* $U^{\perp}$ *deki köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır. Yani,*

$$U^{\perp}=\{r \in V : \forall u \in U, \ \langle r,u \rangle = 0\}$$

olmak üzere, $r_1, r_2, ..., r_k \in U^{\perp}$ *için* $w=w_{r_1}w_{r_2}...w_{r_k}$ *dır* [2].

İspat. $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, U nun bir bazı olsun. Göstermeliyiz ki w, $v_1, v_2, ..., v_k$ ya ortogonal olan köklere karşılık gelen yansımaların çarpımıdır. Daha genel olarak ispatlamalıyız ki eğer w, $v_1, v_2, ..., v_k$ vektörlerinin herhangi bir sonlu alt cümlesini sabit bırakabiliyorsa bu taktirde w, $v_1, v_2, ..., v_k$ lara ortogonal olan köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır. Şimdi, k üzerinde tümevarım uygulayarak ispatımızı yapacağız.

Eğer k=1 ise, Sonuç 4.5 den iddiamız doğrudur. Diğer taraftan, π basit sistemini öyle seçelim ki $v_k \in \overline{C}$ ve $J=\{v \in \pi : \langle v, v_k \rangle = 0\}$ olsun. Bu durumda $V=V_J \oplus V_J^{\perp}$ eşitliğini göz önüne alalım. $v_i' \in V_J$ ve $v_i'' \in V_J^{\perp}$ olmak üzere $v_i = v_i' + v_i''$ olsun. Lemma 4.4 den $w \in W_J$ dir ve bu yüzden $w(v_i'')=v_i''$ dir. $w(v_i)=v_i$ olduğundan $w(v_i')=v_i'$ dır.

Şimdi W_J, V_J üzerinde etkiyen bir Weyl grubudur ve $w \in W_J$, $v_1', v_2', ..., v_{k-1}'$ elemanlarını sabit bırakır.Böylece, w, tümevarımdan $v_1', v_2', ..., v_{k-1}'$ elemanlarına ortogonal olan V_J deki köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır. Bu köklerin hepsi $v_1, v_2, ..., v_k$ lara ortogonal olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7. *$J, K \subseteq \pi$ olsun. Bu taktirde,*

1. W_J ve W_K tarafından üretilen W nın alt grubu $W_{J\cup K}$ dır.

2. $W_J \cap W_K = W_{J\cap K}$ dır [2].

İspat.

1. $W_J = \langle w_r : r \in J \rangle$ ve $W_K = \langle w_r : r \in K \rangle$ olduğundan;

$$\begin{aligned} W_{J\cup K} &= \langle w_r : r \in J \cup K \rangle \\ &= \langle w_r : r \in J \rangle \cup \langle w_r : r \in K \rangle \\ &= W_J \cup W_K \end{aligned}$$

dır.

2. $J \cap K \subseteq J$ olduğundan $W_{J\cap K} \subseteq W_J$ ve $J \cap K \subseteq K$ olduğundan $W_{J\cap K} \subseteq W_K$ olup

$$W_{J\cap K} \subseteq W_J \cap W_K \qquad \ldots (1)$$

dır.

Şimdi $w \in W_J \cap W_K$ olsun. $w \in W_{J\cap K}$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall v \in V_J{}^{\perp}$ için $w(v) = v$ dır. Benzer şekilde $\forall v \in V_K{}^{\perp}$ için $w(v) = v$ dır. Böylece *w*, $V_J{}^{\perp} + V_K{}^{\perp}$ daki her kökü sabit bırakır. Diğer taraftan ,

$$V_J{}^{\perp} + V_K{}^{\perp} \subseteq V_{J\cap K}{}^{\perp}$$

dır. Ayrıca $boyV = n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} boy(V_J{}^{\perp} + V_K{}^{\perp}) &= boyV_J{}^{\perp} + boyV_K{}^{\perp} - boy(V_J{}^{\perp} \cap V_K{}^{\perp}) \\ &= boyV_J{}^{\perp} + boyV_K{}^{\perp} - boy(V_J + V_K)^{\perp} \\ &= n - boyV_J + n - boyV_K - n + boy(V_J + V_K) \\ &= n - boyV_J - boyV_K + boy(V_J + V_K) \\ &= n - boyV_J - boyV_K + boyV_J + boyV_K - boy(V_J \cap V_K) \\ &= n - boy(V_J \cap V_K) \\ &= n - boyV_{J\cap K} \\ &= boyV_{J\cap K}{}^{\perp} \end{aligned}$$

dır. O halde , $V_J^{\perp}+V_K^{\perp}=V_{J\cap K}^{\perp}$ dır. Böylece w, $V_{J\cap K}^{\perp}$ deki her vektörü sabit bırakır. Teorem 4.6 dan dolayı , w, $V_{J\cap K}$ daki köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır. Dolayısıyla $w\in W_{J\cap K}$ dır. O halde

$$W_J \cap W_K \subseteq W_{J\cap K} \qquad \ldots(2)$$

dır. (1) ve (2) den ispat tamamdır.

Şimdi, W da W_J nın wW_J sol kosetlerinin temsillerini seçmenin bir doğal yolu olduğunu göstermek istiyoruz. $J\subseteq \pi$ olmak üzere D_J cümlesini,

$$D_J=\{w\in W : \forall r\in J,\ w(r)\in \Phi^{+}\}$$

şeklinde tanımlayalım. D_J , genel olarak , W nın bir alt grubu değildir.

Teorem 4.8. *$J\subseteq \pi$ olsun. Bu taktirde $d_J\in D_J$ ve $w_J\in W_J$ olmak üzere $\forall w\in W$ elemanı $w=d_Jw_J$ şeklinde bir tek biçimde yazılır. Ayrıca $\ell(w)=\ell(d_J)+\ell(w_J)$ dır* [15].

İspat. İlk önce $d_J\in D_J$ ve $w_J\in W_J$ olmak üzere $\forall w\in W$ elemanının $w=d_Jw_J$ şeklinde ve $\ell(w)=\ell(d_J)+\ell(w_J)$ formunda yazılabileceğini ispatlayalım.
Eğer $\ell(w)=0$ ise $w=1$ olup 1=1.1 şeklinde yazılabildiğinden ispat aşikardır. Ayrıca $\ell(1)=\ell(1)+\ell(1)$ olduğundan $0=0+0$ dır. O halde $\ell(w)\rangle 0$ kabul edelim ve $\ell(w)$ üzerinde tümevarım uygulayalım.
Eğer $w\in D_J$ ise w=w.1 olup istenilen çarpım elde edilmiş olur.
Eğer $w\notin D_J$ ise $w(r)\in \Phi^{-}$ olacak şekilde en az bir $r\in J$ kökü vardır. Lemma 3.1 den $\ell(ww_r)=\ell(w)-1$ dir. Tümevarımdan $ww_r=d_Jw_J$ ve $\ell(d_J)+\ell(w_J)=\ell(ww_r)$ dir. Böylece $w=d_Jw_Jw_r$ olup , burada $d_J\in D_J$ ve $w_Jw_r\in W_J$ dır. Ayrıca $\ell(d_J)+(\ell(w_J)+1)=\ell(w)$ dır.

Şimdi $\ell(w_Jw_r)\le \ell(w_J)+1$ olsun. Bununla birlikte eğer $\ell(w_Jw_r)\langle \ell(w_J)+1$ olursa w, $\ell(d_J)+\ell(w_J)+1$ den daha kısa uzunluğa sahip basit yansımaların çarpımı olarak ifade edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\ell(w_Jw_r)=\ell(w_J)+1$ ve böylece $\ell(d_J)+\ell(w_J w_r)=\ell(w)$ dır.

Şimdi $w=d_J w_J$ yazılışının tek olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $d_J, d_J^{'} \in D_J$ ve $w_J, w_J^{'} \in W_J$ olmak üzere $w=d_J w_J = d_J^{'} w_J^{'}$ yazılsın. O halde $d_J w_J = d_J^{'} w_J^{'}$ olduğundan , $d_J^{'} = d_J w_J (w_J^{'})^{-1}$ dır.

Kabul edelim ki , $w_J (w_J^{'})^{-1} \neq 1$ olsun. Önerme 4.1 den dolayı W_J , J basit sistemine sahip Φ_J kök sisteminin bir Weyl grubudur. Böylece , $w_J (w_J^{'})^{-1}(r) \in \Phi_J^{-}$ olacak şekilde $r \in J$ mevcuttur. O halde $d_J w_J (w_J^{'})^{-1}(r) \in \Phi_J^{-}$ dır. Bununla birlikte $d_J^{'}(r) \in \Phi_J^{+}$ dır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $w_J (w_J^{'})^{-1} = 1$ dır. Buradan $w_J = w_J^{'}$ olup $d_J = d_J^{'}$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.9. *Her bir wW_J kosetinde D_J nin bir tek elemanı vardır ve bu elemanın uzunluğu wW_J deki diğer elemanların uzunluğundan daha kısadır* [15].

Tanım 4.10. D_J nin elemanlarına , W_J nin W daki *seçilmiş koset temsilcileri* denir [15].

5. BÖLÜM

BASİT LIE CEBİRİ, CARTAN PARÇALANMASI VE DYNKIN DİAGRAMI

İkinci bölümde kök sistemleri aksiyomatik olarak inşa etmiştik. Bu bölümde ise ilk olarak Lie cebirleri üzerinde temel bilgileri vereceğiz. Daha sonra göstereceğiz ki her bir Lie cebiri bir kök sistem ve dolayısıyla bir Weyl grubu belirler. Böylece kök sistemler gerçek bir cebirsel temele istinat etmektedir. Bu bölüm için standart kaynak olarak Jacobson'un $[16]$ ve Carter'ın $[1,2]$ kitaplarını veriyoruz.

Tanım 5.1. *L, K* cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$[,]: L\times L \to L$$

$$(x, y) \to [xy]$$

çarpım operasyonu (Lie çarpımı)

1. $\forall\ x, y \in L$ için, $[xy]$ *bilineer*dir,
2. $\forall\ x \in L$ için, $[xx]=0$ dır,
3. $\forall\ x, y, z \in L$ için, $[[xy]z]+[[yz]x]+[[zx]y]=0$ dır,

şartlarını sağlıyor ise L ye bir *Lie cebiri* denir.

Burada, (3) axiomu *Jakobi özdeşliği* olarak adlandırılır. Dikkat edelim ki $[[xy]z] \neq [x[yz]]$ dır. O halde, genellikle Lie çarpımının birleşme özelliği yoktur.

(1) ve (2) axiomunun basit bir sonucu olarak,

$$0=[x+y, x+y]=[xx]+[xy]+[yx]+[yy]=[xy]+[yx]$$

olup,

$$[xy]=-[yx]$$

dır. Buradan Lie çarpımı anti-komutatiftir diyebiliriz.

Burada, sadece sonlu boyutlu Lie cebirleriyle ilgileneceğiz.

L bir Lie cebiri ve M, N de L nin alt uzayları olsun. $[MN]$ yi L nin bir alt uzayı olarak,

$$[MN] = Sp\{[xy]: \ x \in M, y \in N\}$$

şeklinde tanımlayalım. $[yx] = -[xy]$ olduğundan $[NM] = [MN]$ olduğu açıktır. Böylece alt uzayların çarpımı komutatiftir. L nin bir alt cebiri, $[MM] \leq M$ olacak şekilde L nin bir M alt uzayıdır. L nin bir ideali, $[ML] \leq M$ olacak şekilde L nin bir M alt uzayıdır. $[ML] = [LM]$ olduğundan Lie cebiri teorisinde sol idealler ve sağ idealler arasında bir fark yoktur.

L bir Lie cebiri olmak üzere, $\forall x \in L$ için $y \in L$ olmak üzere $adx.y = [xy]$ olacak şekilde L den kendi içine bir adx dönüşümü tanımlayalım. Yani,

$$adx : L \to L$$
$$y \to adx.y = [xy]$$

şeklinde tanımlı adx dönüşümü

$$adx.[yz] = [x[yz]] = [[xy]z] + [y[xz]] = [adx.y, z] + [y, adx.z]$$

şartını sağlayan bir lineer dönüşümdür. Şimdi,

$y, z \in L$ olmak üzere , $\delta[yz] = [\delta y, z] + [y, \delta z]$ şartını sağlayan L den kendi içine tanımlı bir δ lineer dönüşümüne L nin bir *türevi* denir.

Böylece $\forall x$ için, adx, L nin bir türevidir. Ayrıca dikkat edelim ki,

$$adx.ady - ady.adx = ad[xy]$$

dir. Bunun yanında $z \in L$ için,

$$(adx.ady - ady.adx)z = [x[yz]] - [y[xz]] = [[xy]z] = ad[xy].z$$

dır.

Lie cebiri teorisinde, *Killing form* denen skaler çarpım önemli bir rol oynar.

$\forall x, y \in L$ için, $\langle x, y \rangle$ skaler çarpımını,

$$\langle x, y \rangle = iz(adx.ady)$$

şeklinde tanımlayalım.

Burada, $\langle x, y \rangle$, K cisminin bir elemanıdır. Bu şekilde tanımlanan skaler çarpım bilineerdir ve aynı zamanda, θ, ϕ , L den L ye lineer dönüşümler olmak üzere $iz(\theta\phi) = iz(\phi\theta)$ olduğundan simetriktir. Bu başlangıç tanımlarından sonra artık $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı basit Lie cebirlerini gözönüne alabiliriz.

Eğer sıfır uzayı ve kendisinden başka hiçbir ideali yoksa bir Lie cebirine *basittir* denir. Herhangi bir cisim üzerinde bir boyutlu bir Lie cebiri kesinlikle basittir ve buna *aşikar cebir* denir. Biz aşikar olmayan basit Lie cebirleriyle ilgileneceğiz. Şimdi, genel teorinin ana özelliklerini açıklayan bir örnekle başlayalım.
Açık olarak, $[xy]=xy-yx$ şeklinde bir Lie çarpımı tanımlanarak herhangi bir assosyatif cebir bir Lie cebirine dönüştürülebilir. Gerçekten de $\left[xy\right]$ bilineerdir, ayrıca $[xx]=0$ olup ve $[[xy]z]+[[yz]x]+[[zx]y]=0$ olduğu kolayca görülebilir.
Şimdi, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tüm $(n+1)$ x $(n+1)$ matrislerinin cebirini dikkate alalım. Bu cebirin boyutu $(n+1)^2$ dir ve bu yukarıda az önce tasvir edildiği gibi bir Lie cebirine dönüştürülebilir. İzi sıfır olan matrisler bu Lie cebirinin $(n+1)^2-1=n(n+2)$ boyutlu bir alt cebirlerini oluşturur. Çünkü;
$iz(x+y)=izx+izy=0$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ için, $iz(\lambda x)=\lambda izx=0$ ve
$iz[xy]=iz(xy-yx)=0$ dır. İzi sıfır olan tüm $(n+1)$ x $(n+1)$ matrislerinin Lie cebiri aslında basittir.
$\mathbb{C}$ cismi üzerindeki basit Lie cebirlerinin klasifikasyonu Killing ve Cartan tarafından verilmiştir. Bu konu ile ilgili bütünleyici bir çalışma Jacobson $\left[16\right]$ ve Carter $\left[2\right]$ isimli yazarların eserlerinde bulunabilir.

Tanım 5.2. L bir Lie cebiri olsun. L nin aşağıdaki şartları sağlayan bir H alt cebirine bir *Cartan alt cebiri* denir:

1. Bazı r ler için, $\left[\left[\left[H,H\right],H\right]...\right]=0$ dır.

2. $\forall h\in H$ için , eğer $\left[xh\right]\in H$ ise $x\in H$ dır.

Burada (1) şartını sağlayan alt cebirlere *nilpotenttir* denir.

Gösterilebilir ki, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde herhangi bir Lie cebiri bir Cartan alt cebirine sahiptir ve herhangi iki Cartan alt cebiri izomorfiktir. Gerçekten,
L nin verilen herhangi iki Cartan alt cebiri için birini diğerine dönüştüren L nin bir otomorfizmi vardır. L nin Cartan alt cebirlerinin boyutuna L nin *rankı* denir ve n ile gösterilir.

Eğer L cebiri $\mathbb{C}$ cismi üzerinde basit ise, Cartan alt cebirleri $[HH]=0$ bağıntısını sağlar. Fakat bu basit olmayan cebirler için genel olarak doğru değildir. Böylece bir basit Lie cebiri için bu Cartan alt cebiri içerisindeki Lie çarpımı aşikardır.

Tanım 5.3. L, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir basit Lie cebiri ve H, L nin bir Cartan alt cebiri olsun. L, H ile çarpım altında invaryant olan bir boyutlu alt uzaylar ile H ın direkt toplamı olarak yazılabilir. Yani, $\forall i$ için, $boy(L_{r_i})=1$ ve $\left[HL_{r_i}\right]=L_{r_i}$ olmak üzere;

$$L = H \oplus L_{r_1} \oplus L_{r_2} \oplus \ldots \oplus L_{r_k}$$

dır. Buna L nin bir *Cartan parçalanması* denir.

Örneğin; eğer L, izi sıfır olan tüm $(n+1)$ x $(n+1)$ matrislerinin cebiri ise izi sıfır olan diagonal matrislerin bir H Cartan alt cebiri oluşturduğunu görmek kolaydır. Buradan, (i, j). elemanı 1, diğer elemanları 0 olan standart matris e_{ij} olmak üzere;

$$L = H \oplus \sum_{i \neq j} \mathbb{C} e_{ij}$$

dır. Bu direkt parçalanma bir Cartan parçalanmasıdır. Çünkü,

$$h = diag(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ise ,

$$\left[he_{ij}\right] = he_{ij} - e_{ij}h = (\lambda_i - \lambda_j)e_{ij} = \mathbb{C}e_{ij} = \langle e_{ij} \rangle$$

dır. Böylece bir boyutlu $\mathbb{C}e_{ij}$ alt uzayı H altında invaryanttır.

Şimdi, L, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir basit Lie cebiri ve

$$L = H \oplus L_{r_1} \oplus L_{r_2} \oplus \ldots \oplus L_{r_k}$$

ifadesi de L nin bir Cartan parçalanması olsun. Her biri bir boyutlu olan L_r alt uzaylarında bir $e_r \neq 0$ elemanı seçebiliriz. Bu taktirde her $h \in H$ için, $[he_r]$, e_r nin bir skaler katıdır, yani

$$[he_r] = r(h)e_r$$

yazalım. O halde, $r : H \to \mathbb{C}$ dönüşümü bu yolla tanımlanan bir lineer dönüşümdür ve bu yüzden H ın, H^* olarak gösterilen dual uzayının bir elemanıdır.

Tanım 5.4. $1 \leq i \leq k$ için $r_i : H \to \mathbb{C}$ olmak üzere, $r_1, r_2, ..., r_k$ dönüşümlerine L nin *kökleri* ve $L_{r_1}, L_{r_2}, ..., L_{r_k}$ alt uzaylarına da L nin *kök-uzayları* denir. Buradaki $r_1, r_2, ..., r_k$ köklerinin hepsi sıfırdan ve birbirinden farklıdır. Böylece, sıfır dönüşümü bir kök değildir. Bu kökler H^* uzayının elemanları olarak tanımlanmasına rağmen Killing form dikkate alınarak H ın da elemanları olarak gözönüne alınabilir.
Bir L Lie cebirin Killing formunun tersinir olması için gerek ve yeter şart L nin yarı basittir olmasıdır; yani Lie çarpımı aşikar olacak şekilde L nin hiçbir gerçek ideale sahip olmamasıdır.
Her basit aşikar olmayan cebir yarı basittir. Böylece L nin Killing formu, kendisi sıfır olurken, H ın Cartan alt cebirine kısıtlandığında tersinir kalmaktadır. Böylece, H ın dual uzayının her bir elemanı bir tek $x \in H$ için $h \to \langle x, y \rangle$ formunda ifade edilebilir. $h \to r(h)$ dönüşümü ile ilişkili olan x elemanı r kökü ile gösterilebilir.
Böylece r, ya H ın bir elemanı ya da H^* ın elemanıdır. Bu ikisi arasındaki bağıntı

$$h \in H \text{ olmak üzere,} \quad r(h) = \langle r, h \rangle$$

dır.

H ın elemanları olarak kökleri gözönüne alırsak, bu yolla elde edilen H ın sonlu bir alt cümlesi Φ olsun. Gösterilebilir ki, $H = Sp\{\Phi\}$ dir ve eğer H ın bazı olan Φ nin herhangi bir alt cümlesini seçersek, Φ nin her bir elemanı rasyonel katsayılar ile birlikte bu alt cümledeki köklerin bir lineer birleşimidir. Aynı zamanda , $\forall r, s \in \Phi$ için $\langle r, s \rangle$ rasyoneldir. Şimdi,

$$H_{IR} = \{h \in H : \ h = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_i, \ \lambda_i \in IR, \ r_i \in \Phi\}$$

cümlesini tanımlayalım. Açık olarak, H_{IR} bir reel vektör uzayıdır ve $boyH_{IR} = boyH$ dır. Aynı zamanda, eğer $x \in H_{IR}$ ise $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır. Böyle Killing form H_{IR} üzerinde pozitif tanımlıdır. O halde, H_{IR} bir Euclid uzayı olarak gözönüne alınabilir.

Ayrıca bir $x \in H_{IR}$ elemanının uzunluğunu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlayabiliriz. Yine $x, y \in H_{IR}$ vektörleri arasındaki θ açısı

$$Cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|.\|y\|}$$

ile tanımlanabilir.

Şimdi, H_{IR} Euclid uzayının Φ alt cümlesinin Tanım 2.3 anlamında bir kök sistem olduğu gösterilecektir. Özel olarak, $\forall r, s \in \Phi$ için $2\frac{\langle r, s \rangle}{\langle r, r \rangle}$ bir rasyonel sayıdır. Burada bu sayının bir yorumunu da vermek istiyoruz.

Şimdi kabul edelim ki, r, s kökleri lineer bağımsız olsun. Φ cümlesi sonlu olduğundan $-p \le i \le q$ için $ir + s \in \Phi$ fakat $-(p+1)r + s \notin \Phi$ ve $(q+1)r + s \notin \Phi$ olacak şekilde $p, q \ge 0$ tamsayıları mevcuttur. $-pr + s, ..., s, ..., qr + s$ şeklindeki köklerin dizisine s boyunca köklerin bir *r-zinciri* denir.

Şimdi r ye ortogonal hiperdüzlemdeki w_r yansımasının, Φ nin elemanlarını dönüştürdüğü gösterilebilir. Aslında w_r, köklerin her r-zincirini tersine dönüştürerek etkir. Özellikle $-pr + s$ kökünü $qr + s$ köküne dönüştürür ve böylece $-pr + s$ kökü $qr + s$ kökü olarak r ye ortogonal hiperdüzlemde bir aynadaki gibi yansır. Böylece,

$$\langle (-pr + s) + (qr + s), r \rangle = 0$$

dır. Buradan,

$$2\frac{\langle r, s \rangle}{\langle r, r \rangle} = p - q$$

olur.

Her bir $r, s \in \Phi$ kök çifti için, $A_{rs} = 2\frac{\langle r, s \rangle}{\langle r, r \rangle}$ yazarsak, A_{rs} bir rasyonel sayı olur ve $w_r(s) = s - A_{rs}r$ dir. Teorem 2.8 den, Φ kök sistemi bir π basit sistemi ihtiva eder. Bu basit sistemi $\pi = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ ile gösterelim. Φ nin her elemanı π nin elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılır. Bu yazılışta katsayılar ya tamamen pozitif ya da tamamen negatiftir. Elbette, π basit sistemine göre,

$$\Phi^+ = \{\alpha : \alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i, \lambda_i \ge 0\} \quad ,$$

$$\Phi^{-} = \{\alpha : \alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i, \lambda_i \leq 0\}$$

diyebiliriz.

Şimdi bir örnek ile durumu açıklamak istiyoruz.

L, izi sıfır olan tüm $(n+1)$ x $(n+1)$ matrislerinin bir Lie cebiri olsun. Gösterebiliriz ki, L deki diagonal matrisler bir H Cartan alt cebiri oluştururlar. Ayrıca $L = H \oplus \sum_{i \neq j} \mathbb{C}e_{ij}$ bir Cartan parçalanmasıdır. $h = diag(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ dersek $\left[he_{ij}\right] = (\lambda_i - \lambda_j)e_{ij}$ ve böylece $\mathbb{C}e_{ij}$ alt uzayına karşılık gelen kök $h \to \lambda_i - \lambda_j$ olarak tanımlanan H dan $\mathbb{C}$ içine tanımlı bir dönüşümdür. O halde, $p_{1,} p_{2,} ..., p_n$ kökleri

$$p_1 : h \to \lambda_0 - \lambda_1$$
$$p_2 : h \to \lambda_1 - \lambda_2$$
$$\vdots$$
$$p_n : h \to \lambda_{n-1} - \lambda_n$$

şeklinde tanımlansın.

O zaman, $\pi = \{p_{1,} p_{2,} ..., p_n\}$ dir ve diğer köklerde $i < j$ için $\pm(p_{i+1} + ... + p_j)$ biçimindedir. O halde, bu Lie cebirinin pozitif kökleri biri diğerini izleyen basit köklerin toplamıdır.

Şimdi, bir Lie cebirinin Dynkin diagramını tanımlamak istiyoruz.

p_i, p_j bir basit L Lie cebirinin farklı basit kökleri olsun ve bu iki kök arasındaki açı θ_{ij} olsun. $-p_i + p_j$ bir kök olmadığından onun boyunca köklerin p_i zincirinin ilk üyesi p_j dir. $2\dfrac{\langle r, s\rangle}{\langle r, r\rangle} = p - q$ bağıntısını kullanarak ve $p = 0$ olduğuna dikkat edersek, $\langle p_i, p_j\rangle \leq 0$ olduğu görülür. Böylece iki farklı kök arasındaki açı geniş açıdır. Gerçekten,

$$-1 \leq Cos\theta_{ij} = \frac{\langle p_i, p_j\rangle}{\|p_i\| \cdot \|p_j\|} \leq 0$$

olduğundan $\theta_{ij} \geq 90^{\circ}$ dir.

Bu θ_{ij} açısının değerleri için yalnızca birkaç ihtimal vardır. Çünkü,

$$2\frac{\langle p_i, p_j\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} \quad \text{ve} \quad 2\frac{\langle p_j, p_i\rangle}{\langle p_j, p_j\rangle}$$

değerlerinin her ikisi de tamsayıdır ve

$$2\frac{\langle p_i, p_j\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle}.2\frac{\langle p_j, p_i\rangle}{\langle p_j, p_j\rangle} = 4\frac{\langle p_i, p_j\rangle^2}{\langle p_i, p_i\rangle.\langle p_j, p_j\rangle} = 4Cos^2\theta_{ij}$$

ifadesi de bir tamsayıdır.

O halde, $0 \le Cos^2\theta_{ij} \le 1$ olduğundan $0 \le 4Cos^2\theta_{ij} \le 4$ olup, $4Cos^2\theta_{ij} = 0,1,2,3,4$ dır. Fakat θ_{ij} geniş açı olduğundan $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\pi$ dır. p_i, p_j basit kök olduğundan lineer bağımsızdırlar ve bu yüzden $\theta_{ij} = \pi$ olamaz. O halde $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}$ dır.

Şimdi $n_{ij} = 4Cos^2\theta_{ij}$ ile n_{ij} tamsayısını tanımlayalım. Böylece, $i \neq j$ ise $n_{ij} = 0,1,2,3$ dır. n_{ij} ifadesi,

$$n_{ij} = 2\frac{\langle p_i, p_j\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle}.2\frac{\langle p_j, p_i\rangle}{\langle p_j, p_j\rangle}$$

şeklinde pozitif olmayan iki tamsayının çarpımı olarak yazılabilir. Şimdi n_{ij} nin bu yazılışı ile ortaya çıkabilecek bütün farklı durumları gözönüne alalım.

- Eğer $n_{ij} = 1$ ise $1 = (-1).(-1)$ olmak zorundadır. Böylece, $\langle p_i, p_i\rangle = \langle p_j, p_j\rangle$ dir ve p_i ile p_j aynı uzunluğa sahiptir.
- Eğer $n_{ij} = 2$ ise $2 = (-1).(-2)$ olmak zorundadır. Böylece , p_i, p_j den biri diğerinden $\sqrt{2}$ defa daha uzundur.
- Eğer $n_{ij} = 3$ ise $3 = (-1).(-3)$ olmak zorundadır. Böylece , p_i, p_j den biri diğerinden $\sqrt{3}$ defa daha uzundur.
- Eğer $n_{ij} = 0$ ise p_i ile p_j nin uzunlukları arasındaki ilişki hakkında hiç bir bilgi elde edemeyiz.

p_j boyunca köklerin p_i- zincirinin uzunluğu 1,2,3 veya 4 olmalıdır. Çünkü , p , q tamsayıları, daha önceki gibi p_j boyunca köklerin p_i- zinciri tarafından tanımlı olmak üzere,

$$2\frac{\langle p_i, p_j\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} = p - q$$

ifadesi için,

$$2\frac{\langle p_i, p_j\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} = 0, -1, -2 \text{ veya } -3$$

dır. Üstelik, p_j boyunca, p_j , p_i- zinciri olarak başladığından $p = 0$ dır. Böylece , $q \leq 3$ dır ve buradan p_j boyunca p_i- zinciri en fazla dört kök ihtiva eder.

Aynı tartışma, herhangi bir $r-$zincirinin de en fazla dört köke sahip olacağını gösterir. Çünkü, herhangi bir $r-$zincirinde ilk kök s olursa, bu taktirde,

$2\frac{\langle r, s\rangle}{\langle r, r\rangle} = p - q$ olup, önceki gibi, bu ifade de 0, -1,-2,-3 değerlerinden birini almak zorundadır. Öyleyse $p = 0$ olduğundan $q \leq 3$ dır ve böylece $r-$zinciri en fazla 4 köke sahiptir [2].

Şimdi bir L Lie cebirinin Dynkin diagramını tanımlayalım.

Tanım 5.5. Bir L Lie cebirinin *Dynkin diagramı*, n tane düğümden meydana gelen bir grafiktir. Bu grafikte her bir düğüm bir p_i basit köküne karşılık gelir; ayrıca *i.* düğüm *j.* düğüme n_{ij} kuvvetinde bir bağ ile bağlıdır.

Şimdi, örnek olarak, izi sıfır olan bütün $(n+1)$ x $(n+1)$ tipindeki matrislerin Lie cebirini gözönüne alalım. Bu Lie cebirinde bütün $p_1, p_2, \dots, p_n$ basit kökleri aynı uzunluğa sahiptir. Ayrıca ardışık olmayan basit kökler biri diğerine ortogonal olurken, ardışık p_i, p_{i+1} kökleri arasındaki açı $\frac{2\pi}{3}$ dır.

Böylece bu cebirin Dynkin diagramı

1 *2* *n-1* *n*

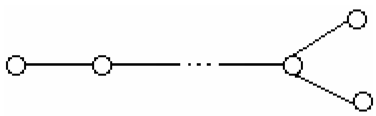
olacaktır.

Şimdi Cartan ve Killing' in klasik sonuçlarını kullanarak basit Lie cebirlerinin mümkün olan bütün Dynkin diagramlarını listelemek istiyoruz. Gösterilebilir ki, bir basit Lie cebirinin Dynkin diagramı bir bağlantılı grafik olmak zorundadır. Üstelik, basit Lie cebirlerinin Dynkin diagramları olan bağlantılı grafikler aşağıdaki listeden birisine karşılık gelir $\left[1,2,4,5,12,14\right]$:

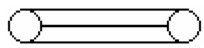
$A_n (n \geq 1)$:

$\left.\begin{matrix} B_n (n \geq 2) \\ C_n (n \geq 3) \end{matrix}\right\}$:

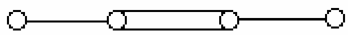
$D_n (n \geq 4)$:



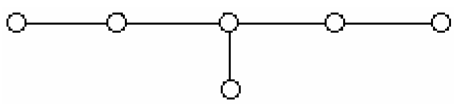
G_2 :



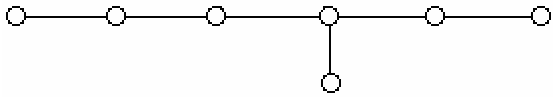
F_4 :



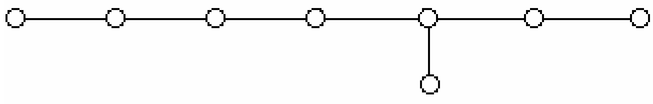
E_6 :



E_7 :



E_8 :



Genel olarak, diagramlar yukarıda gösterildiği gibi isimlendirilir. Örneğin D_n diagramındaki n indisi grafikteki düğüm sayısını bir başka deyişle diagramın rankını gösterir.

Yukarıdaki listedeki ikinci tip diagrama iki farklı isim verilmesinin sebebi, bu Dynkin diagram izomorflar içinde her zaman basit bir Lie cebiri belirtmez.

Şimdi Dynkin diagramı bilgisinden basit kökler tarafından biçimlendirilen konfigürasyonun yeniden elde edilmesi problemini gözönüne alalım:

diagramında $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ basit köklerinin hepsi aynı uzunluğa sahiptir, fakat p_n kökü diğerlerinden ya $\sqrt{2}$ kat daha uzun ya da $\sqrt{2}$ kat daha kısadır. Eğer p_n kısa ise, basit kök sistemi B_n tipine sahiptir. Aksine, eğer p_n uzun ise, basit kök sistemi C_n tipine sahiptir denir. Eğer $n = 2$ ise bu taktirde düğümleri uygun olarak numaralayarak B_n ve C_n nin ikisinden birini elde edebileceğimiz için B_n ve C_n arasında bir fark yoktur. Yine G_2 ve F_4 tipinde diagramlar simetrik olduğundan, G_2 ve F_4 tipinde sadece birer basit kök sistemi vardır.Tüm geri kalan durumlarda Dynkin diagramı sadece tekli bağlar ihtiva eder, böylece tüm basit kökler aynı uzunluğa sahiptir ve basit kökler tarafından biçimlendirilen konfigürasyon diagram tarafından bir tek şekilde belirlenir.

Şimdi, basit köklerin göreli uzunlukları ve aralarındaki açılardan faydalanarak (basit köklerin lineer kombinasyonları olarak) köklerin komple sistemini yeniden elde etmek mümkündür. Çünkü, bir kök sisteme ait konfigürasyon basit kökler tarafından belirlenir, ayrıca $r \in \pi$ olmak üzere w_r basit yansımaları W Weyl grubunu ürettiğinden Weyl grubu artık biliniyor demektir. Diğer taraftan her $\alpha \in \Phi$ kökünü $\alpha_1,...,\alpha_k,\beta \in \pi$ uygun basit kökler olmak üzere $\alpha = w_{\alpha_1}...w_{\alpha_k}(\beta)$ şeklinde yazmak mümkündür, yani $\Phi = W(\pi)\pi$ şeklinde Φ kök sistemi ifade edilebildiğinden bir komple kök sistemi belirlenmiş olur.

Az önce, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanan her basit Lie cebirinin bir kök sistem belirlediğini gördük. Şimdi hangi kök sistemlerin basit Lie cebirlerinden doğduğu meselesini incelemek istiyoruz.

İlk olarak bir Φ kök sisteminin ayrıştırılamazlığı kavramından söz ederek işe başlayalım. Φ_1 ve Φ_2, $\forall r \in \Phi_1$, $\forall s \in \Phi_2$ için $\langle r,s \rangle = 0$ olacak şekilde biri diğerinin tümleyeni olan boştan farklı Φ nin iki alt cümlesi olmak üzere, eğer Φ kök sistemi $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ şeklinde yazılamıyor ise bu taktirde Φ kök sistemine *ayrıştırılamaz* denir.

İkinci olarak verilen iki kök sistemin denkliğini tanımlamak istiyoruz. Φ_1 ve Φ_2 verilen iki kök sistem olsun. $r,s \in \Phi_1$; λ, r ve s köklerinden bağımsız pozitif bir reel sayı olmak üzere, eğer,

$$\langle \alpha(r), \alpha(s) \rangle = \lambda \langle r,s \rangle$$

olacak şekilde birebir ve örten bir $\alpha : \Phi_1 \to \Phi_2$ dönüşümü mevcut ise bu taktirde Φ_1 ve Φ_2 kök sistemi *denk*tir denir ve $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ şeklinde gösterilir.

Bir basit Lie cebirinin Dynkin diagramı bağlantılı olduğundan, basit bir Lie cebiri tarafından belirlenen bir kök sistem ayrıştırılamazdır.

Aşağıda Varlık Teoremi olarak adlandırılan iddia, ayrıştırılamaz bir kök sisteme basit bir Lie cebirinin karşılık geldiğini söyler; yani,

Teorem 5.6. (Varlık Teoremi). *Φ ayrıştırılamaz bir kök sistem olsun. Bu taktirde Φ ye denk bir kök sisteme sahip $\mathbb{C}$ cismi üzerinde basit bir Lie cebiri vardır* $[17]$.

Burada özetlediğimiz kavramları kullanan Varlık Teoreminin bir ispatı Tits'in çalışmasında $[17]$ bulunabilir.

Şimdi denk kök sistemlere sahip iki basit Lie cebiri arasındaki ilişkiyi gözönüne almak istiyoruz.

İlk olarak bir Cartan parçalanmasında kök uzayların çarpımı ile ilgili bazı özellikleri tanımlayalım: Şimdi,

$$L = H \oplus \sum_{r\in\Phi} L_r$$

L nin bir Cartan parçalanması olsun. Böylece , herhangi bir $r,s\in\Phi$ kök çifti için şu özelliklere sahibiz:

a) Eğer $r+s\in\Phi$ ise , $[L_rL_s]=L_{r+s}$ dir.

b) Eğer $r+s\notin\Phi$ ve $r+s\neq 0$ ise , $[L_rL_s]=0$ dır.

c) $[L_rL_{-r}]=\mathbb{C}r=\langle r\rangle=\{zr : z\in\mathbb{C}\}$ dır.

d) $[HL_r]=L_r$ dir.

(c) özelliğinde $r\in H$ olarak yorumlanır. Bunun yerine çoğunlukla

$$h_r = \frac{2r}{\langle r,r\rangle}$$

ifadesiyle tanımlı r nin bir skaler katı olan h_r yi almak daha uygundur.

$$[h_r,e_s]=\frac{2\langle r,s\rangle}{\langle r,r\rangle}e_s = A_{rs}e_s$$

olduğundan açıktır ki $ad\,h_r$, e_s yi e_s in bir tam katına dönüştürür. Yine yukarıdaki (c) özelliğinden dolayı, her bir $0\neq e_r\in L_r$ için, $[e_r,e_{-r}]=h_r$ olacak şekilde bir $e_{-r}\in L_{-r}$ elemanı bulabiliriz.

Şimdi basit Lie cebirleri için *izomorfizm teoremi*ni ifade edebiliriz.

Teorem.5.7. (İzomorfizm Teoremi). *L ve L' ; aynı n boyutlu H, H' Cartan alt cebirlerine sahip, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı iki basit Lie cebiri olsun. L ve L'*

basit cebirleri için basit sistemler sırasıyla $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ *ve* $\{p_1', p_2', ..., p_n'\}$ *ve ayrıca*

$$A_{ij} = 2\frac{\langle p_i, p_j\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} \quad , \quad A_{ij}' = 2\frac{\langle p_i', p_j'\rangle}{\langle p_i', p_i'\rangle} \quad , \quad h_{p_i} = \frac{2p_i}{\langle p_i, p_i\rangle}$$

olsun. Bununla birlikte ,

$$\left[e_{p_i} e_{-p_i}\right] = h_{p_i}$$

olacak şekilde $e_{p_i} \in L_{p_i}$ *ve* $e_{-p_i} \in L_{-p_i}$ *elemanları seçilsin. Benzer şekilde* $L^{'}$ *cebirinde* $h_{p_i'}$, $e_{p_i'}$ *ve* $e_{-p_i'}$ *elemanları tanımlansın.*

Ayrıca her i, j *için,* $A_{ij} = A_{ij}'$ *olduğunu kabul edelim. Bu şartlar altında*

$$\theta(h_{p_i}) = h_{p_i'}$$

$$\theta(e_{p_i}) = e_{p_i'}$$

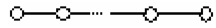
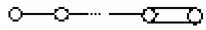
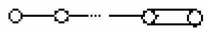
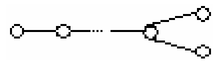
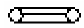
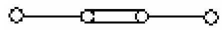
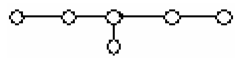
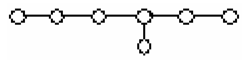
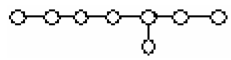
$$\theta(e_{-p_i}) = e_{-p_i'}$$

olacak şekilde bir tek $\theta : L \to L'$ *izomorfizmi vardır. Özel olarak, denk kök sistemlere sahip* $\mathbb{C}$ *cismi üzerinde tanımlı herhangi iki basit Lie cebiri izomorfiktir. Yani L ve* $L^{'}$ *sırasıyla* Φ *ve* Φ' *kök sistemlerine sahip ve* $\Phi \equiv \Phi'$ *ise* $L \cong L'$ *dır* [16].

İzomorfizm Teoreminin bir ispatı Jacobson'ın çalışmasında [16] bulunabilir.

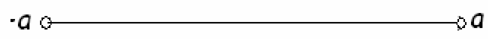
$\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanan basit Lie cebirlerinin bir tasviri aşağıda verilen standart listede sergilenmiştir.

Burada her bir basit Lie cebiri için ; boyut , rank , pozitif köklerin sayısı N , Weyl grubun mertebesi ve Dynkin diagramı verilmektedir.

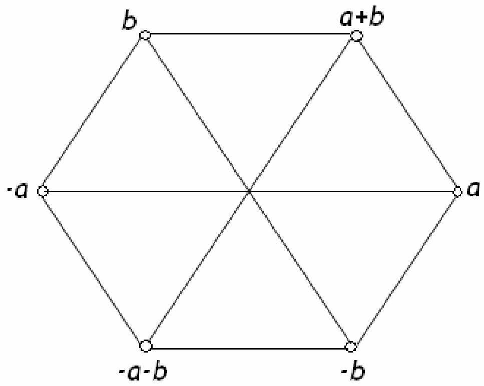
L	*boyL*	*rankL*	N	$\lvert W\rvert$	*Dynkin diagramı*
$A_n\,(n\geq 1)$	$n(n+2)$	n	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$(n+1)!$	
$B_n\,(n\geq 2)$	$n(2n+1)$	n	n^2	$2^n.n!$	
$C_n\,(n\geq 3)$	$n(2n+1)$	n	n^2	$2^n.n!$	
$D_n\,(n\geq 4)$	$n(2n\text{-}1)$	n	$n(n\text{-}1)$	$2^{n-1}.n!$	
G_2	14	2	6	12	
F_4	52	4	24	$2^7.3^2$	
E_6	78	6	36	$2^7.3^4.5$	
E_7	133	7	63	$2^{10}.3^4.5.7$	
E_8	248	8	120	$2^{14}.3^5.5^2.7$	

Şimdi ayrıştırılamaz kök sistemlerin bir tasvirini vermek istiyoruz. İlk olarak rankları 1 ve 2 olan A_1, A_2, B_2, G_2 tipindeki kök sistemleri tasvir ederek işe başlayalım. Bu kök sistemleri tasvir eden aşağıdaki konfigürasyonlarda kökler basit köklerin bir lineer birleşimi olarak ifade edilmektedir:

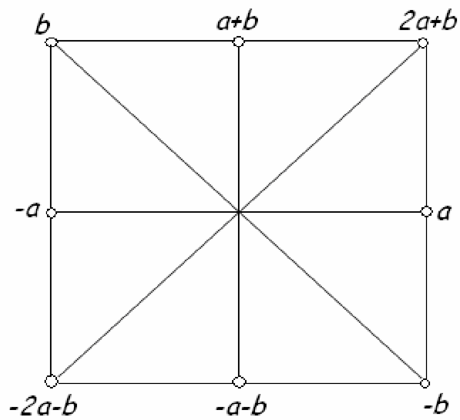
A_1

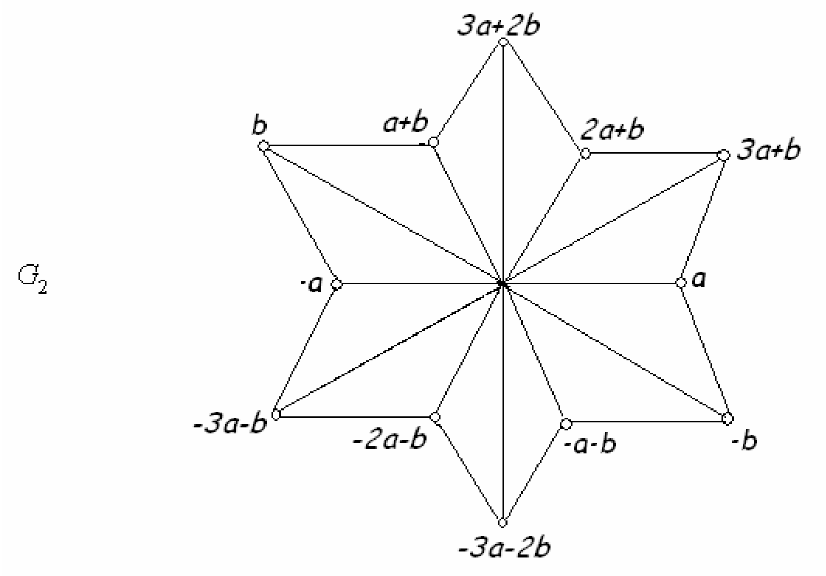


A_2



B_2





Yüksek ranklı kök sistemleri tanımlamak için , kökleri içeren vektör uzayının bir ortonormal bazını kullanmak uygun olacaktır $[1,2,4,5,6,12,14]$:

(i) A_n *Tipi* . $n+1$ boyutlu bir Euclid uzayının ortonormal bir bazı $\{ e_0, e_1, ..., e_n \}$ ve *V*, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ olacak şekilde $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$ vektörlerinin belirlediği bir alt uzay olsun. Yani

V alt uzayı $V = \langle \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \rangle$ olarak tanımlansın.

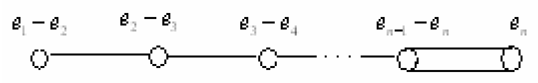
Bu taktirde , V deki aşağıdaki vektörler A_n tipinin bir basit sistemini oluşturur:

Yukarıda basit sistemle birlikte A_n tipindeki kök sistem

$$\Phi_{A_n} = \{ e_i - e_j : i \neq j, \; i, j = 0, 1, ..., n \}$$

dır.

(ii) B_n *Tipi* . V Euclid uzayının ortonormal bir bazı $\{ e_1, e_2, ..., e_n \}$ olsun. Aşağıdaki vektörler B_n tipinin bir basit sistemini meydana getirir:

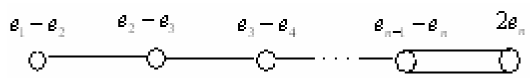


Yukarıda basit sistemle birlikte B_n tipindeki kök sistem

$$\Phi_{B_n} = \begin{Bmatrix} \pm e_i \pm e_j : \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, ..., n \\ \pm e_i : \ i = 1, 2, ..., n \end{Bmatrix}$$

ile verilir.

(iii) C_n *Tipi*. V Euclid uzayının ortonormal bir bazı $\{ e_1, e_2, ..., e_n \}$ olsun. V deki aşağıdaki vektörler C_n tipinde bir basit sistemdir:

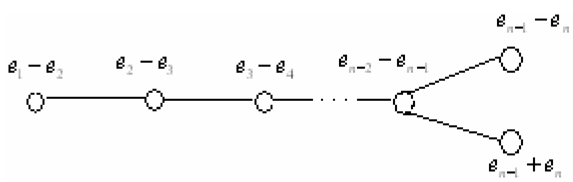


Bu basit sistemle birlikte C_n tipindeki kök sistem

$$\Phi_{C_n} = \begin{Bmatrix} \pm e_i \pm e_j : i \neq j, i, j = 1, 2, ..., n \\ \pm 2e_i : i = 1, 2, ..., n \end{Bmatrix}$$

olur.

(iv) D_n *Tipi*. V Euclid uzayı için ortonormal bir baz $\{ e_1, e_2, ..., e_n \}$ olsun. Bu taktirde V deki aşağıdaki vektörler D_n tipinin bir basit sistemini teşkil eder:



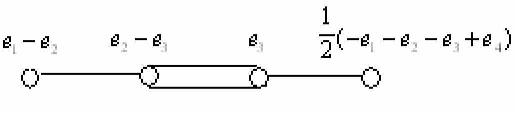
Bu basit sistemle birlikte D_n tipindeki kök sistem

$$\Phi_{D_n} = \{ \pm e_i \pm e_j : \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, ..., n \}$$

olacaktır.

(v) G_2 *Tipi*. Bu tipi az önce konfigürasyon olarak tanımladık.

(vi) F_4 *Tipi*. V Euclid uzayının ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. V deki aşağıdaki vektörler F_4 tipinde bir basit sistemi temsil eder:

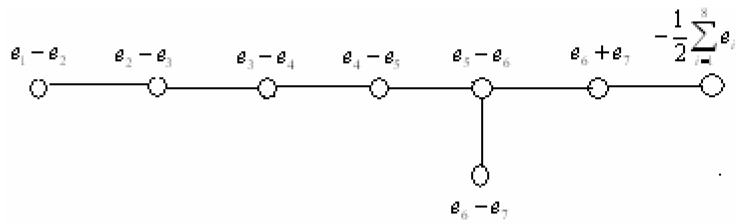


Bu taktirde F_4 tipindeki kök sistem

$$\Phi_{F_4} = \left\{ \begin{array}{l} \pm e_i \pm e_j : \; i \neq j, \; i, j = 1,2,3,4 \\ \pm e_i : \; i = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \end{array} \right\}$$

olur.

(vii) Şimdi E_8 tipindeki kök sistemi tanımlamak daha uygun olacaktır. Çünkü E_7, E_6 sistemleri E_8 in alt sistemleri olarak daha kolay elde edilebilir. O halde, V Euclid uzayının ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ olsun. V deki aşağıdaki vektörler E_8 tipinin bir basit sistemini oluşturur:

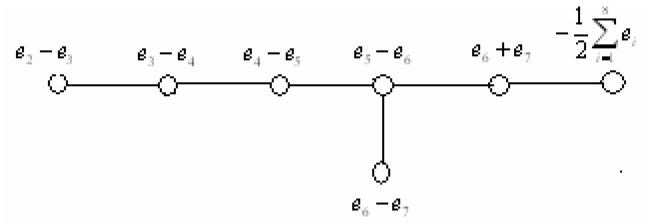


Bu basit sistem vasıtasıyla elde edilen E_8 tipindeki kök sistem

$$\Phi_{E_8} = \left\{ \begin{array}{l} \pm e_i \pm e_j : \; i \neq j, \; i, j = 1,2,3,4,5,6,7,8 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i : \; \varepsilon_i = \pm 1, \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1 \end{array} \right\}$$

dır.

(viii) $e_i \;\; (i = 1, 2, ..., 8)$ vektörleri *(vii)* deki gibi olsun. Bu taktirde, E_7 tipindeki bir basit sistem



diagramı ile verilir.

Bu vektörler $\lambda_1=\lambda_8$ şartını sağlayan

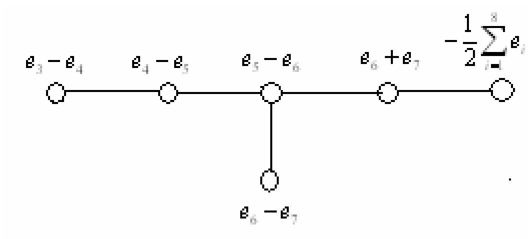
$$\sum_{i=1}^{8}\lambda_i e_i$$

vektörlerinin ürettiği alt uzaya aittir. Böylece bu basit sistemin ürettiği E_7 tipindeki kök sistem

$$\Phi_{E_7}=\left\{\begin{array}{l} \pm e_i\pm e_j:\ i\neq j,\ i,j=2,3,4,5,6,7 \\ \pm(e_1+e_8) \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i e_i:\ \varepsilon_i=\pm1,\ \varepsilon_1=\varepsilon_8=1,\ \prod_{i=1}^{8}\varepsilon_i=1 \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\varepsilon_i e_i:\ \varepsilon_i=\pm1,\ \varepsilon_1=\varepsilon_8=1,\ \prod_{i=1}^{8}\varepsilon_i=1 \end{array}\right\}$$

ile verilir.

(ix) Yine e_i $(i=1,2,...,8)$ vektörleri *(vii)* deki gibi olsun. Bu taktirde E_6 tipindeki bir basit sisteme



şeklinde sahip oluruz. Burada bu vektörler $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_8$ eşitliğini sağlayan

$$\sum_{i=1}^{8}\lambda_i e_i$$

elemanlarının doğurduğu 6-boyutlu bir alt uzayda yatar. Bu verilen basit sisteme karşılık gelen E_6 tipindeki kök sistem

$$\Phi_{E_6} = \left\{ \begin{array}{l} \pm e_i \pm e_j : \ i \neq j, \ i, j = 3,4,5,6,7 \\ \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i : \ \varepsilon_i = \pm 1, \ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_8 = 1, \ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1 \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i : \ \varepsilon_i = \pm 1, \ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_8 = 1, \ \prod_{i=1}^{8} \varepsilon_i = 1 \end{array} \right\}$$

dır.

Son söz olarak, diyebiliriz ki yukarıda tasviri verilen her bir kök sisteme bir Weyl grubu karşılık gelmektedir. Yani bir Φ kök sistemine $W = W(\Phi) = \langle w_r : \mathrm{r} \in \Phi \rangle$ olarak tanımlanan bir Weyl grubu karşılık gelir.

KAYNAKLAR

1. Carter, R. W., Finite groups of Lie type, John Wiley and sons, New York, 1985.
2. Carter, R. W., Simple groups of Lie type, John Wiley and sons, London, 1989.
3. Benson, C. T., Grove, L.C., Finite reflection groups, Graduate texts in Math., no: 99, Springer-Verlag, 1983.
4. Humphreys, J, E., Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Studies in Advenced Math., vol. 29, Cambridge University Press, 1990.
5. Serre, J., P., Linear representations of finite groups, Graduate texts in Math., no. 42, Springer- Verlag, 1977.
6. Bourbaki, N., Groupes et algebres de lie, IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.
7. Steinberg, R., Invariants of finite reflection groups, Canad. J. Math., 12, 616-618, 1960.
8. Springer, T., A., Regular elements of finite reflection groups, Invent. Math., 25, 159-198, 1974.
9. Carter, R. W., Conjugacy classes in the Weyl groups, Compositio Math., 25, 1-59, 1972.
10. Deodhar, V. V., On the root system of a Coxeter group, Comm. Algebra, 10, 611-630, 1982.
11. Flatto, L., Invariants of finite reflection groups, Enseign. Math., 2(24), 237-292, 1978.
12. Kane, R., Reflection groups and invariant theory, CMS Books in Math., Springer-Verlag, New York, 2001.
13. Orlik, P., Solomon, L., Unitary reflection groups and cohomology, Invent. Math., 59(1), 77-94, 1980.
14. Shephard, G. C., Todd, J. A., Finite unitary reflection groups, Canad. J. Math., 6,

274- 304, 1954.

15. Howlett, R. B., Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups, J. London Math. Soc., (2) 21, 62-80, 1980.

16. Jacobson, N., Lie Algebras, İnterscience Publishers, New York, 1962.

17. Tits, J., Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, *I.H.E.S. Publ. Math.*, 31, 1966.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tülay YAĞMUR

Baba Adı : Faruk

Ana Adı : Ayten

Doğum Yeri : Nevşehir

Doğum Tarihi : 24.09.1981

İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden lisans diploması alarak 2004 yılında birincilikle mezun oldu. 2006 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. 19 Eylül 2007 tarihinde Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri :

Erciyes Üniversitesi

Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

Talas / Kayseri

e-posta : tyagmur@erciyes.edu.tr