T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PRECAUCHY UZAYLARIN KATEGORİSİ

Tezi Hazırlayan
Emine KILIÇ

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2009

KAYSERİ

Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Emine KILIÇ** tarafından hazırlanan **"Precauchy Uzayların Kategorisi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

23/01/2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. A. Cabbar SÖNMEZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 28/01/2009 tarih ve 2009/04-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28/01/2009

28/01/2009

N. Ayyıldız

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Precauchy Uzayların Kategorisi" isimli yüksek lisans tezi çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen ve yönlendiren saygı değer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

PRECAUCHY UZAYLARIN KATEGORİSİ

Emine KILIÇ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2009
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, Precauchy uzayının tanımını, Precauchy uzayı ile ilgili temel kavramları, Precauchy uzayının yapısını incelemektir. Daha sonra Precauchy uzayı kategorisinin (sabit yakınsak süzgeç uzayı kategorisi) bir topolojik kategori olduğunu göstermek, topolojik kategoriler için geçerli olan temel özellikleri bu kategori içinde incelemek ve sabit yakınsak süzgeç uzayı kategorisi için ayırma aksiyomlarından bazılarını incelemektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kısaca Precauchy uzayın tarihçesi üzerinde durulmuş olup, literatür taraması mahiyetindedir.

İkinci bölümde, amaca yönelik kategori, fanktor, topolojik fanktor, diskre ve indiskre objeler, süzgeçler ve topolojik kategori gibi temel tanımlara ve bunlarla ilgili teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Precauchy uzayı tanımı, p_c ve q_c yapılarının tanımları ve ilgili kavramları, Precauchy Uzayı Kategorisi, ilk objesi, son objesi, topolojik fanktor olduğu, diskre ve indiskre yapıları karakterize edildi. Ayrıca $T_1,\ q-T_1,\ T_2$ *ve* $q-T_2$ tanımları ve ilgili kavramlar verildi.

Dördüncü bölümde, Sabit Yakınsak Süzgeç Uzayı Kategorisi verildi ve p noktasında $\overline{T}_0$, T_0' ve T_1 ayrılma aksiyomları karakterize edildi.

Anahtar Kelimeler: Precauchy Uzayı, Sabit Yakınsak Süzgeç Uzaylar, Cauchy Sürekli Dönüşümü.

PRECAUCHY SPACES CATEGORY

Emine KILIÇ
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, January 2009
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Muammer KULA

ABSTRACT

The purpose of this study is to examine the definition of precauchy space, the basic concepts related to precauchy space and the structure of precauchy space. We also show that the category of precauchy space (the category of constant filter space) is a topological category and to focus on the main features valid for this topological category and to examine some of seperation axsioms for constant convergent filter space category.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the historical development of the precauchy space is given.

In the second chapter, the basic definitions and related theorems such as a category related to the aim, fanctor, topological fanctor, discre and indiscre objects, filters and topological category were studied.

In the third chapter, the definition of precauchy space, p_c and q_c structures and related concepts, the category of precauchy space, the first object, the last object, discre and indiscre objects are characterised. In addition, T_1, $q-T_1$, T_2 and $q-T_2$ definitions and the related concepts are explained.

In the fourth chapter, the category of constant filter convergent spaces is studied and the separation axioms $\overline{T}_0$, T_0' and T_1 at a point p in this topological category are characterized.

Keywords: Precauchy Space, Constant Fitler Convergent Spaces, Cauchy Continuous Transformation.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER

SET Cümleler Kategorisi

TOP Topolojik Uzaylar Kategorisi

PCHY Precauchy Uzaylar Kategorisi

CHY Cauchy Uzaylar Kategorisi

FCO Yakınsak Süzgeç Uzayların Kategorisi

ConFCO Sabit Yakınsak Süzgeç Uzaylar Kategorisi

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Süzgeçler

F(X) X üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi

[x] Tek nokta $\{x\}$ cümlesi tarafından üretilen süzgeç

$\mathcal{F} \sim_A \mathcal{G}$ $\mathcal{A} \subset$ F(X) bir alt cümlesi, $\mathcal{F},\mathcal{G} \in F(X)$ iki süzgeç olmak üzere eğer sonlu sayıda $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ süzgeçleri için $\mathcal{F} \vee \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \vee \mathcal{H}_2 \ldots \mathcal{H}_n \vee \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$'ye $\mathcal{A}$- linked (bağlı) denir. $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{G}$ ile gösterilir. Açıkça "$\sim_A$" $\mathcal{A}$' da bir denklik bağıntısıdır.

p_c $F \xrightarrow{p_c} x \Leftrightarrow F \sim_c [x]$

q_c $F \xrightarrow{q_c} x \Leftrightarrow F \cap [x] \in C$

T_1 (X,C) T_1dir $\Leftrightarrow$ $[x] \sim_c [y] \Rightarrow x = y$

T_2 (X,C) T_2 dir $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F} \sim_c [x]$, $\mathcal{F} \sim_c [y] \Rightarrow x = y$

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde kısaca problemin tarihçesi üzerinde durulmuş olup, literatür taraması mahiyetindedir.

"Cauchy" terimi Fransız matematikçi Augustin Cauchy'in isminden ortaya çıkmasına karşın, yaygın olarak küçük harfle başlayan şekliyle kullanıla gelmiştir. Cauchy isim olarak, reel analizdeki cauchy dizileri kavramına dayanmaktadır. Süzgeçlerin varolması ve düzgün uzayların ortaya çıkması neticesinde, cauchy süzgeçleri topolojik teoride cauchy dizilerine genelleştirilmiştir. Yakınsak teoride ise, cauchy yakınsaklık anlamında kullanılmıştır. Weil [1] şu ifadeyi ispatladı: Düzgün uzay içerisindeki bir süzgeç "cauchy" dir ancak ve ancak düzgün uzay tamlaması içerisinde bir nokta mevcuttur öyle ki süzgeç bu noktaya yakınsaktır. Kowalsky [2] cauchy süzgeci kavramını temel kavram olarak kullanarak nerdeyse aynı neticeye ulaşmıştır. Cook ve Fischer [3] ün düzgün yakınsak uzayları ortaya koyması ve böyle uzaylar içerisinde cauchy uzayının tanımını vermesi cauchy uzaylarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Ancak cauchy uzaylarının aksiyomatik tanımı 1968 tarihinde Keller [4] tarafından yapılmıştır. Daha sonra cauchy uzayları çeşitli uzayların tamlamalarını oluşturmada yaygın olarak kullanılan bir araç olmuştur. Reed [5] cauchy uzayları tamlamalarının bir tam sınıfını geliştirmiştir. Cauchy uzayları düzgün uzaylar gibi kompatifikasyon ve tamlama için kullanılmıştır. Bu arada tamlık ve düzgün süreklilik gibi kavramlar tanımlanmıştır ki, bunlar topolojik ve yakınsak uzaylarda mümkün değildi.

Keller'in cauchy yapısındaki ilk iki aksiyomu sağlayan X üzerindeki süzgeçlerin C cümlesine X üzerinde precauchy yapı denir. Precauchy yapının ortaya çıkması cauchy uzayı kadar doğal görülmektedir. Gerçekte sırasıyla Bentley, Herrlich ve Colebunders [6] precauchy uzayları kategorisini ve onların doğal dönüşümlerinin süzgeçmerotopic uzayların FIL kategorisine göre isomorphic olduğunu göstermişlerdir ki , bu ilk olarak 1965 yılında Katetov [7] tarafından dile getirilmiştir.

Matematik bilim dalının farklı branşlarındaki ayrışma (farklılaşma) ve uzmanlaşmanın (specialization) artması matematikçileri, bu çok sayıdaki farklı branşların ortak bir alan üzerinde düşünmelerini zorunlu kılmıştır. İşte kategori teorisi bu ortak alanlardan bir tanesidir ki, farklı alanlardaki araştırmacıların daha kolay bir iletişim kurmaları için ortak bir dil sağlamaktadır. Genel topoloji matematiğinin cebir, analiz, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi, lattice teorisi gibi pek çok teoride uygulamalara sahip olduğundan, topologlar topolojik fikirleri (ideas) kategori diline çevirmeyi tercih ederler.

Precauchy uzayları cauchy uzayların bir genelleştirilmesidir. Precauchy uzayların kategorisi süzgeçmeretopik (filtermeratopic spaces) uzayların kategorisine izomorfiktir. Aynı zamanda cauchy uzayların kategorisi precauchy uzayların kategorisinin yoğun alt kategorisidir. Buradan precauchy uzayları cauchy uzayları kadar doğal ve önemlidir.

Bu çalışmanın amacı, ilerideki topolojik ve kategorik araştırmalarına temel teşkil eden precauchy uzaylarını incelemektir.

(X,C) precauchy uzayı, Keller [4] tarafından 1968 yılında verilen cauchy uzayı tanımının ilk iki şartını sağlar. Dolayısıyla cauchy uzayı precauchy uzayının özel bir halidir.

Precauchy uzayının tanımını, Precauchy uzayı ile ilgili temel kavramları, Precauchy uzayının yapısını [8,9] kaynaklarından incelemektir. Daha sonra Precauchy uzayı kategorisinin (sabit yakınsak süzgec uzayı kategorisi) bir topolojik fanktor (kategori) olduğunu göstermek, topolojik kategoriler için geçerli olan temel özellikleri bu kategori içinde incelemek ve sabit yakınsak süzgec uzayı kategorisi için ayırma aksiyomlarından bazılarını [10,11] kaynaklarından incelemektir.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan genel tanımlar ve bunlarla ilgili bazı teoremler ifade edildi.

2.1. Kategori

Tanım 2.1.1. $\mathcal{U}$ bir sınıf olsun. $\mathcal{U}$ daki tüm nesnelerin (objelerin) sınıfı, herhangi iki nesne arasındaki dönüşümlerin (morfizimlerin) cümlesi ve verilen iki dönüşüm için bunların bileşkesi verilsin. Bu bileşke aynı zamanda aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{U}$ ya bir Kategori denir.

1. $\mathcal{U}$ da ki her A nesnesi için $1_A : A \to A$ birim dönüşümü vardır öyle ki her $f : A \to B$ dönüşümü için $f \circ 1_A = f$ ve her $g : B \to A$ dönüşümü için $1_A \circ g = g$ olmalıdır.

2. $f : A \to B$ **,** $g : B \to C$ **,** $h : C \to D$ olmak üzere bileşke "$\circ$" işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır. Yani, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ sağlanmalıdır.

$\mathcal{U}$ da ki tüm nesnelerin (objelerin) sınıfı kısaca $Ob(\mathcal{U})$ (veya $\mathbf{O}_K$) şeklinde, herhangi iki nesne arasındaki dönüşümlerin (morfizimlerin) cümlesi;

$\mathcal{U}(A,B) = Hom(A,B) = \{ f \mid f : A \to B \text{ dönüşüm} \}$ şeklinde verilen iki dönüşümün bileşkesi de

$$\circ : \mathcal{U}(A,B) \times \mathcal{U}(B,C) \to \mathcal{U}(A,C)$$

$$(f, g) \to \circ(f,g) = g \circ f$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek 2.1.2. $\mathcal{U}$ nun objeleri $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\delta),\ldots$ topolojik uzaylar, dönüşümleri $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ sürekli fonksiyonlar ve bileşkede fonksiyonların bileşkesi olsun.
$\mathcal{U}$ nun kategori olduğunu gösterelim.

1. $(X,\tau)\to(X,\tau)$ olacak şekilde $1_X:X\to X$ birim fonksiyonu vardır ve bu birim fonksiyonu süreklidir. Ayrıca her $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ için $f\circ 1_X=f$ ve her $f:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$ için $1_X\circ g=g$ dir.
2. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, $g:(Y,\sigma)\to(Z,\delta)$ ve $h:(Z,\delta)\to(W,\mu)$ olmak üzere f,g,h fonksiyonları sürekli olduklarından bunların bileşkeleri olan $h\circ(g\circ f)$, $(h\circ g)\circ f$ de sürekli ve eşittirler.

Dolayısıyla $\mathcal{U}$ bir kategoridir. Bu kategoriye bütün *topolojik uzayların kategorisi* denir ve $\mathcal{U}$ =**TOP** şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.3. $\mathcal{U}$ nun objeleri $A,B,C,\ldots$ cümleleri, dönüşümleri fonksiyonlar ve bileşke işlemi olarak da fonksiyonların bileşkesini alalım.
$\mathcal{U}$ nun kategori olduğunu gösterelim.

1. Her A cümlesi için $1_A:A\to A$ birim fonksiyonu vardır. Ayrıca her $f:A\to B$ fonksiyonu için $1_A\circ f=f$ ve her $g:B\to A$ fonksiyonu için $g\circ 1_A=g$ dır.
2. $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$ olmak üzere fonksiyonlarda $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ birleşme özelliği sağlanır.

Dolayısıyla $\mathcal{U}$ bir kategoridir. Bu kategoriye bütün *cümlelerin kategorisi* denir ve $\mathcal{U}$ =**SET** şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.4. $\mathcal{U}$ bir kategori ve T, $\mathcal{U}$ nun bir objesi olsun. Eğer $\mathcal{U}$ nun herhangi bir objesi A olmak üzere $\mathcal{U}(\mathrm{A},\mathrm{T})=\{\, f \mid f:\mathrm{A}\to\mathrm{T}$ dönüşüm $\}$ tek elemanlı ise T ye $\mathcal{U}$ nun *son (terminal) objesi* denir [12].

Tanım 2.1.5. $\mathcal{U}$ bir kategori ve i , $\mathcal{U}$ nun bir objesi olsun . Eğer $\mathcal{U}$ nun herhangi bir A objesi için $\mathcal{U}(i,\mathrm{A})=\{\, f \mid f:i\to\mathrm{A}$ dönüşüm $\}$ tek elemanlı ise i ye $\mathcal{U}$ nun *ilk (initial) objesi* denir [12].

Tanım 2.1.6. $\mathcal{U}$ bir kategori ve $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ nun bir objesi olsun . Eğer $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ nun hem ilk hem de son objesi ise $\mathcal{Z}$ ye $\mathcal{U}$ nun *sıfır (zero) objesi* denir [12].

Örnek 2.1.7. $\mathcal{U}$ = SET olsun. $\mathcal{U}$ nun varsa ilk, son ve sıfır objelerini bulalım. $i = \varnothing$ ilk objedir ; çünkü

Herhangi bir A objesi için $\mathcal{U}(\varnothing, \mathrm{A}) = \{ f \mid f : \varnothing \to \mathrm{A} \text{ fonksiyon} \} = \{ \textit{boş} \text{ fonksiyon} \}$ tek elemanlı cümledir.

T=$\{x\}$ tek elemanlı cümle, son objedir ; çünkü

$\mathcal{U}(\mathrm{A}, \{x\}) = \{ f \mid f : \mathrm{A} \to \{\mathrm{x}\} \text{fonksiyon} \} = \{ \textit{sabit} \text{ fonksiyon} \}$ tek elemanlı cümledir.

Sıfır objesi yoktur ; çünkü $i = \varnothing \neq \{x\}$=T dir.

2.2. Fanktor

Tanım 2.2.1. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ iki kategori olsun. Eğer $\mathcal{U}$ da ki her A nesnesi için $F(A)$, $\mathcal{U}'$ nün nesnesi ve $\mathcal{U}$ nın her $f : A \to B$ dönüşümü için $F(f) : F(A) \to F(B)$, $\mathcal{U}'$ nün bir dönüşümü oluyorsa ve;

1. $F(1_A) = 1_{F(A)}$ (Her $A \in Ob(\mathcal{U})$ için)

2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

şartları sağlanıyorsa $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ ye $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ne bir *fanktor* denir [12].

Örnek 2.2.2. $U : \mathbf{TOP} \to \mathbf{SET}$, $U(X, \mu) = X$ şeklinde tanımlanan U nun bir fanktor olduğunu gösterelim.

$U : \mathbf{TOP} \to \mathbf{SET}$ de $U(X, \mu) = X$ ve $f : (X, \mu) \to (Y, \sigma)$ için $U(f) = f : X \to Y$ olarak tanımlansın. Bu taktirde kolayca görülür ki U bir fanktordur.

a) $U\left(1_{(X,\mu)}\right) = 1_{U(X,\mu)} = 1_X$

b) $U(g \circ f)$ yine $U(g) = g$ ve $U(f) = f$ olduklarından $U(g) \circ U(f) = g \circ f$ tir.

Dolayısıyla U bir fanktordur. Bu fanktora *unutkan (forgetful) fanktor* denir.

Tanım 2.2.3. $F:\mathcal{U}\to\mathcal{U}'$ fanktor olsun.

1. Her $A,B\in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ve her $f:F(A)\to F(B)$ için en az bir $g:A\to B$ ye $F(g)=f$ olacak şekilde bir dönüşümü varsa F ye *dolgun (full) fanktor* denir.

2. Eğer her $A,B\in$ Ob($\mathcal{U}$) ve $f,g:A\to B$ dönüşümleri için $F(f)=F(g)$ olduğunda $f=g$ ise F ye *düzenli (faithful) fanktor* denir.

3. F ye *amnestik* denir ancak ve ancak $f:A\to A$ izomorfizmi için eğer $F(f)=\mathrm{I}d=1_{F(A)}$ ise $f=\mathrm{I}d_A=1_A$ olmalıdır.

4. F hem *düzenli fanktor* hem de *amnestik* ise F ye *belirli (concrete) fanktor* denir [12].

Örnek 2.2.4. U : **SET** $\to$ **TOP** dönüşümü dolgun(full) fanktor, düzenli (faitfull), amnestik ve belirli (concrete) dir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & U(X)=(X,P(X)) \arrow[d, "\substack{U(f)=f \\ \text{sürekli}}"] \\ Y \arrow[r] & U(Y)=(Y.P(Y)) \end{tikzcd}$$

i) $\forall$X, Y $\in$SET ve $\forall$h: U(X) $\to$U(Y) için en az bir g: X$\to$Ydönüşümü var ve U(g) =h ise U ye dolgun (full) fanktor denir.

g: X$\to$Y ise U(g) : U(X) $\to$U(Y) olur. U(g) = h olduğundan U dolgun (full) fanktor dur.

ii) $\forall$X, Y $\in$ SET olmak üzere f, g : X$\to$Y dönüşümleri için U(f) = U(g) olduğunda f =g ise U ‘ ya düzenli (faitfull) denir.

U(f)= f, U(g) =g olmak üzere U(g) =U(f) ise f=g olduğundan düzenli (faitfull) dir.

iii) U amnestiktir ancak ve ancak f: A$\to$A için U(f) = $1_{U(A)}$ ve f izomorfizm ise f$=1_A$ olmalıdır.

f: A$\to$A 1: 1 fonksiyon ve U(f) = U(A)=(A,P(A)) $\to$U(A) = (A,P(A)) sürekli ve

U(f) = $1_{(A,P(A))} = 1_{U(A)}$ dır. Buradan f: A $\rightarrow$A ya $f = 1_A$ birim fonksiyondur.

iiii) U dönüşümü hem düzenli, hemde amnestik olduğundan belirli (concrete) fanktor dur.

Tanım 2.2.5. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ iki kategori olsun. $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ fanktoru düzenli, dolgun ve her A$\in$ Ob($\mathcal{U}'$) için en az bir B$\in$ Ob($\mathcal{U}$) vardır öyleki $F(\mathrm{B}) \cong \mathrm{A}$ oluyorsa $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ kategorilerine denktir denir [13].

2.3. Topolojik Fanktor

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [14], Kent [15], Wyler [16], Schwartz [17] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, Herrlich [14] de belli kaynakların başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategoriyi tanımlamıştır. Wyler [16] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fanktora dayandırarak tanımlamıştır.

Tanım 2.3.1. $\mathcal{K}$ ve $\boldsymbol{L}$ kategorileri verilsin. Eğer $U : \mathcal{K} \to \boldsymbol{L}$ fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa U ya *topolojik fanktor* ya da $\mathcal{K}$ ya $\boldsymbol{L}$ kategorisi üzerinde *topolojik kategori* denir.

1. U belirli (concrete) olmalıdır.

2. U küçük demetlere sahiptir. Yani, her $B \in Ob(L)$ için $U^{-1}(B)$ bir cümledir. Burada $U^{-1}(B) = \{ X \in \mathrm{Ob(K)} \mid U(X) = B \}$ şeklinde tanımlanır ve B üzerindeki demet olarak adlandırılır.

3. Her U - kaynağı için yani $\boldsymbol{L}$ ‘de $g_i : \mathrm{B} \to U(X_i)$ ailesi için $\mathcal{K}$ ‘da $f_i : X \to X_i$ ailesi vardır öyle ki $U(f_i) = g_i$ dır ve eğer $U(h_i : Y \to X_i) = g_i \circ k : U(Y) \to \mathrm{B} = U(X) \to U(X_i)$ ise bu taktirde $k : U(Y) \to U(X) = \mathrm{B}$ nin en az bir $\bar{k} : Y \to X$ kaldırması vardır, yani $U(\bar{k}) = k$ dır ve $f_i \circ \bar{k} = h_i$ dir. Bunu diağramla gösterelim.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{K} & & & \boldsymbol{L} & \\
X \arrow[r, "f_i"] & X_i & & B \arrow[r, "g_i"] & U(X_i) \\
Y \arrow[u, dashed, "\bar{k}"] \arrow[ur, "h_i"'] & \arrow[rr, "U"] & & U(Y) \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "U(h_i)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Bu son şartın anlamı, her U - kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahiptir. Keyfi bir U - kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi U -kavşağı (U -sink) için bitiş kaldırmasına (final lift) denktir (Bitiş kaldırma, başlangıç kaldırmanın dualidir) [14].

Tanım 2.3.2 $U : \mathcal{K} \to \boldsymbol{Z}$ topolojik fanktorunda her $Z \in$ Ob(***Z***) sabiti için $U^{-1}(Z)$ tek bir yapıya sahipse bu takdirde U ya normalleştirilmiş fanktor denir.

Burada son nesnenin alt nesneleri sabit olarak adlandırılır (Z sabittir ancak ve ancak $Z \subset 1 =$ son eleman olmalıdır).

Teorem 2.3.3 $f_i : (A,\mu) \to (A_i,\mu_i)$ sürekli fonksiyonlar ailesi olsun. $\mu = \mu_*$ olması için gerek ve yeter şart her (B,c) topolojik uzayı ve her $g_i : (B,\sigma) \to (A_i,\mu_i)$ sürekli fonksiyonları için eğer $g_i = f_i \circ h$ olacak şekilde en az bir $h : B \to A$ fonksiyonu varsa, h süreklidir [12].

Burada μ_*, f_i ler tarafından doğrulan topolojidir. Yani, $S = \bigcup_{i\in I} \{ f_i^{-1}(H) : H \in \mu_i \}$ alt bazı tarafından üretilen topolojidir. Buna *doğrulan (induced) topoloji* denir ve μ_* ile gösterilir. Bu topoloji $f_i : (A,\mu) \to (A_i,\mu_i)$ fonksiyonlarını sürekli kılan en küçük topolojidir [12].

Teorem 2.3.4. $f_i : (A_i,\mu_i) \to (A,\mu)$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. $\mu = \mu^*$ olması için gerek ve yeter şart her (B,c) topolojik uzayı ve her $g_i : (A_i,\mu_i) \to (B,\sigma)$ sürekli fonksiyonları için $g_i = h \circ f_i$ ise h fonksiyonu da süreklidir. $(h : A \to B$ bir fonksiyon) [12].

Burada $\mu^* = \{ U \subset A \mid$ her $i \in \mathrm{I}$ için $f_i^{-1}(U) \in \mu_i \}$ A üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *zayıf (coinduced) topoloji* denir. Bu topoloji f_i leri sürekli kılan en büyük topolojidir [12].

Teorem 2.3.5. $U : \mathbf{TOP} \to \mathbf{SET}$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

İspat: 1. U nun belirli olduğunu gösterelim. $f, g : (A, \mu) \to (B, \mu')$ sürekli iki fonksiyon ve $U(f) = U(g)$ olsun. $U : \mathbf{TOP} \to \mathbf{SET}$ de $U(X, \mu) = X$ ve $f : (X, \mu) \to (Y, \sigma)$ için $U(f) = f : X - Y$ olarak tanımlansın. Böylece U unutkan (forgetful) fanktor olur.

Bundan dolayı $U(f) = f$ ve $U(g) = g$ dir. Böylece $f = g$ olur. Dolayısıyla U faithfuldur.

$f : (A, \mu) \to (B, \mu')$ sürekli, $U(f) = 1_A$ ve f homeomorfizm olsun. $U(f) = f = 1_A$ olduğundan $A = B$ dir. Dolayısıyla $f : (A, \mu) \to (A, \mu')$ olur. Bu durumda $\mu = \mu'$ olduğunu göstermeliyiz.

f sürekli olduğundan $f^{-1}(\mu') \subset \mu$ dur. $f \circ f^{-1}(\mu') \subset f(\mu)$ dan $\mu' \subset f(\mu)$ olur. $f = \mathrm{I}$ olduğundan $\mu' \subset \mu$ dur.

$g : (A, \mu') \to (A, \mu)$ olsun. g sürekli olduğundan $g^{-1}(\mu) \subset \mu'$ dür. $g \circ g^{-1}(\mu) \subset g(\mu')$ den $\mu \subset g(\mu')$ olur. $f^{-1} = g = \mathrm{I}$ idi. Öyleyse $\mu \subset \mu'$ olur.

Yani U amnestiktir.

O halde U hem faithful, hem de amnestik olduğundan, belirli (concrete) dir.

2. $U^{-1}(A) = \{ (A, \mu) \mid U(A, \mu) = A,\ \mu \subset P(A)$ ve $f : (A, \mu) \to (A, \mu_1)$ sürekli ve $U(f) = 1_A : A - A \}$ ise her $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{SET})$ için $U^{-1}(A)$ nın bir cümle olduğunu göstereceğiz.

$U^{-1}(A)$, **TOP** un alt kategorisidir. Öte yandan; $\phi = \{ \mu \mid \mu,\ A$ üzerinde bir topoloji $\}$ olsun. $\theta : U^{-1}(A) \to \phi$ alalım. $\theta(A, \mu) = \mu$ şeklinde tanımlanırsa kolayca görülür ki

θ, bire bir ve örtendir.

Dolayısıyla, $U^{-1}(A) \approx \phi \subset P^2(A)$ dır, yani $U^{-1}(A)$ bir cümledir.

3. Eğer $\{ \; f_i : A \to U(A_i, \mu_i) = A_i \,,\; i \in \mathrm{I} \; \}$ **SET** de herhangi bir U - kaynağı ve μ_* üretilen (induced) topoloji olsun.

Teorem 2.3.3 den $f_i : (A, \mu_*) \to (A_i, \mu_i)$ verilen kaynağın başlangıç kaldırmasıdır.

Yine; $\{ \; f_i : U(A_i, \mu_i) = A_i \to A \,,\; i \in \mathrm{I} \; \}$, **SET** de herhangi bir U -kavşağı (U -sink) ve μ^* zayıf (coinduced) topoloji olsun.

Teorem 2.3.4 den $f_i : (A_i, \mu_i) \to (A, \mu^*)$ verilen kaynağın bitiş kaldırmasıdır.

Dolayısıyla U :**TOP**$\to$**SET** topolojik fanktordur.

Son olarak U nun normalleştirilmiş olup olmadığına bakalım.

$1 = \{ \mathrm{x} \}$ tek nokta cümlesi son nesne olduğundan bunun alt nesneleri

$\mathrm{Z} = \varnothing$ ve $\mathrm{Z} = \{ \mathrm{x} \}$ dir.

$U^{-1}(\varnothing) = (\varnothing, \{\varnothing\})$ ve $U^{-1}(\{\mathrm{x}\}) = (\{\mathrm{x}\}, \{\varnothing, \{\mathrm{x}\}\})$ dir.

Böylece tek nokta ve boş cümle üzerinde sadece bir tek topoloji olduğundan U :**TOP**$\to$**SET** normalleştirilmiştir.

O halde U :**TOP**$\to$**SET** normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

2.4. Diskre Ve İndiskre Yapılar

Tanım 2.4.1. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}'$ birer kategori, F ve G de $\mathcal{K}$ dan $\mathcal{K}'$ ne iki fanktor olsunlar. Eğer her $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ ve her $\mathrm{f} : A - B$ dönüşümü için α_A: $\mathrm{F(A)} \to \mathrm{G(A)}$ $\mathcal{K}'$ de bir dönüşüm ve $G(\mathrm{f}) \, o \, \alpha_A = \alpha_B \, o \, F(\mathrm{f})$ oluyorsa $\alpha : \mathrm{F} - \mathrm{G}$ ya bir *doğal dönüşüm* **(natural transformation)** denir. Buda aşağıdaki diyagramın değişmeli olmasına karşılık gelir.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[rr] & & \mathcal{K}' \\
\mathrm{A} \arrow[d, "\mathrm{f}"'] & \mathrm{F(A)} \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathrm{F(f)}"'] & \mathrm{G(A)} \arrow[d, "\mathrm{G(f)}"] \\
\mathrm{B} & \mathrm{F(B)} \arrow[r] & \mathrm{G(B)}
\end{tikzcd}$$

α_B

Yani $G(f)\, o\, \alpha_A = \alpha_B\, o\, F(f)$ olmasıdır.

Tanım 2.4.2. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{A}$ birer kategori, R ve L de fanktor olmak üzere; $U \underset{L}{\overset{R}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}$ fonksiyonları için aşağıdaki şartlar sağlanırsa L ye R nin sol adjointi veya R ye L nin sağ adjonti denir. $L \dashv R$ şeklinde gösterilir. Bu şartlar;

(1) $\eta : I \to R\, o\, L$ ve $\varepsilon : L\, o\, R \to I$ doğal dönüşümler olmalıdır.

(2) $L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon L} L$ de $(\varepsilon L)\, o(L\eta) = I$ ve

$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R$ ve $(R\varepsilon)\, o\, (\eta R) = I$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

Tanım 2.4.3. 1) U:$\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ topolojik fanktoru bir D: $\mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ sol adjointine sahiptir ki bu sol adjointe diskre fanktoru denir. Yani K = D (U (K)) nesnesi, $\mathcal{K}$ da diskre nesne olarak adlandırılır.

2) U:$\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ topolojik fanktoru bir D^*:$\mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ sağ adjointine sahiptir ki bu sağ adjointe indiskre fanktoru denir. Yani X= D^*(U(X)) nesnesi $\mathcal{K}$ da indiskre nesne olarak adlandırılır [14].

Teorem 2.4.4. 1) E topolojik kategori olsun. $e \in E$ nesnesi diskredir. Yani $e = DUe$ olması için gerek ve yeter şart her $c \in E$ için her $Ue \to Uc$ dönüşümünün, $e \to c$ dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.

2) $d \in E$ indiskre, yani $d = D^* Ud$ olması için gerek ve yeter şart her $c \in E$ için her $Uc \to Ud$ dönüşümünün, $c \to d$ dönüşümüne kaldırılabilir olmasıdır.

İspat:1 $(\Rightarrow)$ e diskre her $c \in E$ için $f : U(e) \to U(c)$ olsun. En az bir $\bar{k} : e \to c$ dönüşümünün var olduğunu ve $U(\bar{k}) = f$ olduğunu göstereceğiz.

U topolojik fanktor olduğundan $\bar{f} : \bar{e} \to c$, f nin başlangıç kaldırması olsun. Burada $U(\bar{e}) = U(e)$ ve e diskre olduğu için tanım gereği $e \leq \bar{e}$ dır, yani $h : e \to \bar{e}$ bir dönüşüm vardır öyleki $U(h) = \dot{I}d : U(e) \to U(\bar{e}) = U(e)$ dır. $\bar{k} = \bar{f}\, oh$ olsun. $U(\bar{k}) = U(\bar{f}\, oh) = U(\bar{f})\, o\, U(h) = foI = f$ olur.

$\Leftarrow$ Her $c \in E$ için her $U(e) \rightarrow U(c)$ dönüşümü $e \rightarrow c$ dönüşümüne kaldırılabilsin, e'nin diskre olduğunu gösterelim. Özel olarak $U(e) \rightarrow U(c)$ ve id: $U(e) \rightarrow U(c)$ alalım, hipotezden $\overline{k} = e - c$ ye bir dönüşüm vardır öyle ki $U(\overline{k}) = \dot{I}d$ dır. Bu demet üzerinde alınan her c nesnesi için geçerli olduğundan, e bu demet de en küçük nesnedir. Bu da e'nin diskre olduğunu gösterir.

2 ($\Rightarrow$) d indiskre ve her $c \in E$ *için* $f : U(c) \rightarrow U(d)$ olsun. U topolojik fanktor olduğundan $\overline{f} : c \rightarrow \overline{d}$ f'nin bitiş kaldırması olsun.

Burada $U(d) = U(\overline{d})$ ve d indiskre olduğu için $\overline{d} \leq d$ dır. Yani $h : \overline{d} - d$ ye bir dönüşüm vardır, öyle ki $U(h) = \dot{I}d : U(\overline{d}) = U(d) \rightarrow U(d)$ dır.

$\overline{k} = h \circ \overline{f}$ olsun, $U(\overline{k}) = U(h \circ \overline{f}) = U(h) \circ U(\overline{f}) = I \circ f = f$ dolayısıyla $U(\overline{k}) = f$ dır.

($\Leftarrow$) Her $c \in E$ için her $U(c) \rightarrow U(d)$ dönüşümü, $c - d$ dönüşümüne kaldırılabilsin. d'nin indiskre olduğunu gösterelim.

Özel olarak $U(d) = U(c)$ *ve* $\dot{I}d : U(c) \rightarrow U(d)$ alalım. Hipotezden $\overline{k} : c - d$ dönüşümü vardır, öyle ki $U(\overline{k}) = \dot{I}d$ dır. Bu dönüşüm her c için geçerli olduğundan d bu demette en büyük nesnedir. Bu da d'nin en büyük olduğunu gösterir, yani d indiskre nesnedir.

Görülür ki $e \in E$ diskre nesne kavramı, topolojik uzayların kategorisi Top'daki e diskre topolojik uzayı kavramının genelleştirilmesidir. Çünkü tanım cümlesi diskre uzayı olan her fonksiyon süreklidir.

Örnek 2.4.5. i) $(A, K) \in Ob(Con\, FCO)$ olsun. (A,K) nın diskre uzay olması için gerek ve yeter şart $a \in A$ için K=$\{[a], P(A) = [\emptyset] \mid a \in A\}$ olmalıdır.

ii) (A,K) nın indiskre uzayı olması için gerek ve yeter şart K = F(A) olmasıdır.

İspat: Teorem 2.4.4 den yararlanarak;

i) $e=(A,K)\in Ob(Con\,FCO)$, $c=(B,L)\in Ob(Con\,FCO)$ olsun. Eğer $f:A-B$ bir fonksiyon ise bu takdirde f ConFCO'da (A, K) →(B,L) dönüşümüne kaldırılabilir. Yani $\in K$ ise $f(\mathcal{F})\in L$ olduğu gösterilmelidir.

$\mathcal{F}\in K$ olsun. $\mathcal{F}=[a]$ veya $[\phi]$, buradan $f(\mathcal{F})=[f(a)]$ veya $[\phi]$ dur.

Dolayısıyla $f(\mathcal{F})\in L$, yani f süreklidir.

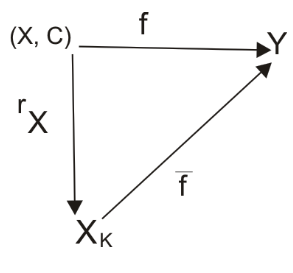
ii) $d=(A,K)\in Ob(Con\,FCO)$, $c=(B,L)\in Ob(Con\,FCO)$ olsun. Eğer $f:B-A$ bir fonksiyon ise f kaldırılabilir.

$\mathcal{F}\in L$ ise $f(\mathcal{F})\in K$ olduğunu gösetermeliyiz. Hipotezden K=F(A) idi.

$\mathcal{F}\in L$ olsun. Bu durumda $f(\mathcal{F})\in F(A)$ olur. O halde $f(\mathcal{F})\in K$ dır.

Tanım 2.4.6. K, C nin alt kategorisi ve $F_C:K\to C$ inclusion (içine) fanktor olsun. Bu takdirde K'nın C'nin reflective (yansıyan) alt kategorisi olması için gerek ve yeter şart F_C nin bir R sol adjointe sahip olmasıdır veya aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

Her bir $X\in|C|$, en az bir $X_K\in|K|$ objesi ve $r_X:X\to X_K$ bir C morfizmi için, ayrıca herhangi bir $Y\in|K|$ objesi ve her bir $f:X-Y$ morfizmi için, aşağıdaki diagram komutatif olacak şekilde bir tek $\bar{f}:X_K\to Y$, K morfizmi mevcut olmalıdır.



r_X morfizmine K ya göre $X\in|C|$ nin reflection (yansıması) ve R ye de reflector (yansıtıcı) denir.

2.5. Süzgeçler

Tanım 2.5.1. (X,μ) bir topolojik uzay ve $x\in X$ olsun.

1. Bir $U \subset X$ alt cümlesine x noktasının bir komşuluğudur denir $\Leftrightarrow$ en az bir $G \in \mu$ vardır öyleki $x \in G \subset U$ dur.

x noktasının μ topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan ailesi $U_{\mu}(x)$ veya topolojinin belirtmenin gerekmediği yerlerde kısaca $U(x)$ ile göstereceğiz ve buna "x in komşuluklar sistemi" diyeceğiz.

2. $M \subset X$ alt cümle ise bir $U \subset X$ alt cümlesine M nin bir komşuluğudur denir $\Leftrightarrow$ en az bir $G \in \mu$ vardır öyleki $M \subset G \subset U$ dur [18].

Tanım 2.5.2. X boş olmayan bir cümle ve $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$, X'in kuvvet cümlesini göstersin. $\mathcal{F}$, $P(X)$in bir altsınıfı aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa X üzerinde bir (öz) süzgeçtir.

f1) $\phi \notin \mathcal{F}$ dır,

f2) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$ dır,

f3) $\forall A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{F}$ dır [19].

(f1) ve (f2) aksiyomundan $\mathcal{F}$ süzgecine ait sonlu sayıda kümelerin kesişiminin boş olamayacağı ve (f3) aksiyomundan $\mathcal{F}$ süzgecine ait her sayıda kümelerin birleşiminin $\mathcal{F}$ süzgecine ait olduğu anlaşılır. Ayrıca (f1) aksiyomundan $P(X)$ kümesinin kendisi bir süzgeç değildir. (f3) aksiyomu ise süzgeçlerin artan bir yapıda olduğunu gösterir. Eğer $\phi \in \mathcal{F}$ ve (f2) , (f3) şartları sağlanırsa $\mathcal{F}$ = P(X) dir. Bu durum da $\mathcal{F}$ e öz olmayan süzgeç denir.

X kümesi üzerinde bir $\mathcal{F}$ süzgeci var ise bu küme üzerinde bir yapı tanımlanmış demektir ve X kümesi de $\mathcal{F}$ ile süzülmüş kümedir.

Örnek 2.5.3. X herhangi bir küme ve X in boş olmayan bir alt kümesi Y olsun. X'in alt kümesi olan Y' yi kapsayan kümelerin sınıfı olan

$$\mathcal{F} = \{A \mid Y \subset A \subset X\}$$

kümesi X üzerinde bir süzgeçtir. Gerçekten,

1) $Y \neq \phi \Rightarrow Y \subset A$ olduğundan Y 'nin üst kümesi olan A 'larda boştan farklıdır. O halde $\phi \notin \mathcal{F}$ dir.

2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow Y \subset A \subset X$ ve $Y \subset B \subset X$

$$\Rightarrow Y \subset A \cap B \subset X$$

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

3) $A \in \mathcal{F}$ ise $Y \subset A \subset X$ ve $A \subset B$ ise $Y \subset A \subset B \subset X$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{F}$$

Bu tür süzgeçlere temel süzgeç denir.

Tanım 2.5.4. X üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı $F(X)$ ile gösterilir. Eğer $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ iki süzgeç ve $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ise, $\mathcal{G}$'ye $\mathcal{F}$'den daha incedir veya $\mathcal{F}$'ye $\mathcal{G}$'den daha kabadır denir, $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ veya $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ şeklinde gösterilir. $\mathcal{F}$ süzgeci için $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ olduğunda $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ oluyorsa $\mathcal{F}$'e ultrasüzgeç denir. Bu da $\mathcal{F}$ den daha ince süzgecin var olmadığı anlamına gelir. X üzerinde ultrasüzgeçlerin sınıfı $U(X)$ ile gösterilir.

$\mathcal{F}$ süzgeç ve $\cap\{\mathcal{H} : \mathcal{H} \in \mathcal{F}\} \neq \phi$ ise $\mathcal{F}$'e sabit süzgeç denir. Ayrıca $\cap\{\mathcal{H} : \mathcal{H} \in \mathcal{F}\} = \phi$ ise $\mathcal{F}$'e free süzgeç denir.

Tanım 2.5.5. $\mathcal{F}$, (X, μ) uzayındaki bir süzgeç ve $x \in X$ olsun.

1) $N_X = \{U \subset X : \exists V \ni x$ *açığı* vardır öyleki $x \in V \subset U\}$ cümlesine x noktasının komşuluklar ailesi denir.

2) $\mathcal{F}$, x noktasında yakınsaktır ancak ve ancak $N_X \subset \mathcal{F}$ dır.

Tanım 2.5.6. $\mathcal{F}$, (X, τ) uzayındaki bir süzgeç ve $x \in X$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$ süzgeci x

noktasının $\mathcal{N}(x)$ komşuluklar süzgecinden daha ince ise, yani $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor denilir ve $\mathcal{F} \to x$ veya $\lim \mathcal{F} = x$ şeklinde gösterilir.

Eğer X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor ise, X üzerinde $\mathcal{F}$ den ince olan tüm süzgeçlerin de x noktasına yakınsayacağı tanımdan aşikardır. Ayrıca X kümesi üzerinde x noktasına yakınsayan tüm süzgeçlerin arakesiti de $\mathcal{N}(x)$ komşuluklar süzgecidir.

Teorem 2.5.7. X uzayının Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki yakınsak bir süzgecin tek bir noktaya yakınsamasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: X uzayı Hausdorff uzayı olsun. Bu uzaydaki yakınsak bir $\mathcal{F}$ süzgecinin tek bir noktaya yakınsadığını göstereceğiz. $\mathcal{F}$ süzgecinin x ve y gibi farklı iki noktaya yakınsadığını kabul edelim. X uzayı H-uzayı olduğundan $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ ve $\exists M \in \mathcal{N}(y)$ vardır ki $N \cap M = \emptyset$ dir. Oysa $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsadığından $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ dir ve dolayısı ile $N \in \mathcal{F}$ dir. Benzer şekilde $M \in \mathcal{F}$ dir. (f_2) süzgeç aksiyomundan $N \cap M = \emptyset \in \mathcal{F}$ elde edilir ki, bu da (f_1) ile çelişir. O halde x=y dir, yani $\mathcal{F}$ tek noktaya yakınsar.

$(\Leftarrow)$: Yakınsak bir süzgeç tek noktaya yakınsasın. X uzayının H-uzayı olmadığını kabul edelim. O halde $\exists x, y \in X$ vardır ki $\forall N \in \mathcal{N}(x), \forall M \in \mathcal{N}(y)$ için $N \cap M \neq \emptyset$ dir. Buradan $N \not\subset M^c$ elde edilir ve $\forall M \in \mathcal{N}(y)$ için $M \in \mathcal{N}(x)$ dir. O halde $\mathcal{N}(y) \subset \mathcal{N}(x)$ elde edilir ki bu da hipoteze aykırıdır. Çünkü X uzayındaki $\mathcal{N}(x)$ süzgeci hem x hem de y noktasına yakınsar.

Tanım 2.5.8. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in F(A)$, $\mathcal{H} \in F(B)$ ve $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun.

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{ U \mid U \in \mathcal{F}$ ve $U \in \mathcal{G} \}$

$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{ U \subset A \mid U \supset V \cap W$, $V \in \mathcal{F}$ ve $W \in \mathcal{G} \}$ ve

$f^{-1}(\mathcal{H}) = \{ U \mid U \supset f^{-1}(C)$ olacak şekilde en az bir $C \in \mathcal{H}$ mevcuttur $\}$ şeklinde tanımlanırlar. Görülür ki bunların her biri birer süzgeçtirler [20].

2.6. Topolojik Kategori Örnekleri

A bir cümle ve $\mathcal{F} \subset P(A)$ olsun. $[\mathcal{F}] = \{ B \subset A \mid$ en az bir $C \in \mathcal{F}$ vardır öyle ki $C \subset B \}$ şeklinde tanımlansın [21].

Tanım 2.6.1. Eğer $[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F} \subset \mathrm{P}(\mathrm{A})$ ya A üstünde bir *yığın (stack)* denir. Yani $\mathcal{F}$ süper cümle altında kapalıdır [17].

$\mathcal{F}$, A üzerinde boş olmayan bir yığın olsun. Eğer $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{F}$ iken $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} \in \mathcal{F}$ oluyorsa $\mathcal{F}$ ya A üzerinde *süzgeç (filter)* denir [17].

$\mathcal{F}$ yığınının (süzgeç), *öz yığın (süzgeç) (proper)*olması için gerek ve yeter şart $\phi \notin \mathcal{F}$, yani $\mathcal{F} \neq [\mathrm{P}(\mathrm{A})]$ olmasıdır. Aksi durumda $\mathcal{F}$ ya *öz olmayan yığın (süzgeç) (improper)* denir. A üzerinde yığın ve süzgeçlerin cümlesi sırasıyla $\mathrm{S}(\mathrm{A})$ ve $\mathrm{F}(\mathrm{A})$ ile gösterilir. Eğer $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G} \in$ F(A)ise bu taktirde $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\mathrm{B} \subset A \mid \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ ve $\mathrm{B} \in \mathcal{G}\}$da bir süzgeçtir. Yani $[\mathcal{F} \cap \mathcal{G}] = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ dır. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subset [\mathcal{F} \cap \mathcal{G}]$ süzgecin tanımından dolayı açıktır.

Şimdi $[\mathcal{F} \cap \mathcal{G}] \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ olduğunu gösterelim. $\mathrm{B} \in [\mathcal{F} \cap \mathcal{G}]$ alalım. En az bir $\mathrm{G} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ vardır öyle ki $\mathrm{G} \subset \mathrm{B}$ dir. $\mathrm{G} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ olduğundan $\mathrm{G} \in \mathcal{F}$ ve $\mathrm{G} \in \mathcal{G}$ dır. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ süzgeç olduğundan $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ ve $\mathrm{B} \in \mathcal{G}$ dır.

A bir cümle ve $\mathrm{K} : \mathrm{A} \to \mathrm{P}(\mathrm{S}(\mathrm{A}))$ her bir $a \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{K}(\mathrm{a})$, A nın a noktasına 'yakınsayan' boş olmayan tüm süzgeçlerin cümlesi olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.6.2. Eğer $\mathcal{F}$, A üzerinde en büyük öz süzgeç ise $\mathcal{F}$ ya **maksimum süzgeç (ultrafilter)** denir ve $\mathcal{F}$ aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

A nın her B alt cümlesi için ya $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ ya da $B^c \in \mathcal{F}$ dır.

A bir cümle ve $K : A \to P(S(A))$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Her bir $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ için K (a), A nın a noktasına "yakınsayan" boş olmayan tüm yığınların cümlesidir.

A bir cümle ve $\mathcal{F} \subset [\mathcal{F}] = \{ \mathrm{B} \mid \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, en az bir $\mathrm{C} \in \mathcal{F}$ vardır, öyle ki $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}\}$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.6.3. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$ F (A) *ve* $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

(1) $f\ (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = f\ (\mathcal{F}) \cap f\ (\mathcal{G})$

(2) $f\ (\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \supset f\ (\mathcal{F}) \cup f\ (\mathcal{G})$

(3) $f^{-1} f\ (\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ dır [23].

Tanım 2.6.4. A bir cümle ve K:A→P(F(A)) her bir $a \in A$ için K(a), A nın a noktasına "yakınsayan" boş olmayan tüm süzgeçlerin cümlesi olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer K aşağıdaki şartları sağlıyorsa (A,K) çiftine yakınsak süzgeç uzayı (filter convergence space) denir.

1. Her $a \in A$ için $[a] \in K(a)$, burada $[a] = \{B \subset A \mid a \in B\}$ dir.

2. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$, A üstünde süzgeçler ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ olsun. Eğer $\mathcal{F} \in K(a)$ ise $\mathcal{G} \in K(a)$ dır. (A, K) dan (B,L) ye bir f dönüşümü, f:A→B fonksiyondur öyleki eğer $\mathcal{F} \in K(a)$ ise $f(\mathcal{F}) \in L(f(a))$ Yani f süreklidir.

Burada $[f(\mathcal{F})] = \{\ U \mid U \subset B$ ve en az bir $C \in \mathcal{F}$ için $U \supset f\ (C)\ \}$şeklinde tanımlanır.

Nesneleri yakınsak süzgeç uzaylar ve dönüşümleri yukarıda tanımlanan sınıfa yakınsak süzgeç uzaylar kategorisi denir ve FCO ile gösterilir [17].

Tanım 2.6.5. (A, K) yakınsak süzgeç uzay olsun. Eğer K sabit fonksiyon ise (A, K) ya sabit yakınsak süzgeç uzayı denir. Nesneleri sabit yakınsak süzgeç uzaylar ve dönüşümleri Tanım 2.6.4 deki gibi tanımlanan sınıfa sabit yakınsak süzgeç uzayların kategorisi denir ve ConFCO ile gösterilir. ConFCO, FCO nun dolgun alt kategorisidir.

Teorem 2.6.6 U: ConFCO →SET topolojik fanktordur.

İspat: Önce fanktor olduğunu gösterelim. (A,K), (B,L) ConFCO uzaylarında obje olmak üzere;

U(A,K) = A∈ Ob(SET) ve f : (A,K) →(B,L) için

U(f) = f:A→B tanımlasın.

1) $U\ (1_{(A,K)}) = 1_{U(A,K)}$ olduğunu gösterelim

$1_{(A,K)}$: (A,K)→(A,K) ConFCO ‘da birim morfizm olmak üzere

$U(1_{(A,K)}) : U(A,K)=A \to U(A,K)=A$ olan 1_A birim fonksiyon ve

$U(1_{(A,K)}) = 1_A = 1_{U(A,K)} \Rightarrow U(1_{(A,K)}) = 1_{U(A,K)}$ olur.

2) $(A,K) \xrightarrow{f} (B,L) \xrightarrow{g} (C,T)$ tanımlasın.

$U(gof)=gof=U(g)oU(f) \Rightarrow U(gof)=U(g)oU(f)$ olur. Böylece bu bir fanktordur.

Şimdi düzenli olduğunu gösterelim.

1) (A,K) , $(B,L) \in Ob(ConFCO)$, $f,g:(A,K) \to (B,L)$ ve $U(f) = U(g)$ olsun.

Tanımdan $U(f) = f$ ve $U(g) = g$ olduğundan $f=g$ dir. Böylece U düzenlidir.

$f:(A,K) \to (A,L)$ olacak şekilde $U(f)=f=1_A:A \to A$ ve f izomorfizm olsun. K=L olduğunu gösterelim:

$\mathcal{F} \in K$ olsun. f sürekli olduğundan $f(\mathcal{F}) = 1_A(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \in L$ olur ki $K \subset L$ dır.

Benzer şekilde f^{-1} sürekli olduğundan, $\mathcal{F} \in L$ olmak üzere $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \in K$ dır. $\mathcal{F} \in K$ olduğundan $L \subset K$ dır. Böylece K=L elde edilir. $f=1_{(A,K)}$ yani amnestik olduğunu gösterir. O halde belirlidir.

2) $U^{-1}(A) = \{(A,K) \mid U(A,K) = A\}$ ve $\phi = \{K \mid K \subset (A,P(F(A)))\}$ olsun.

$\theta : U^{-1}(A) \to \phi$ de $\theta(A,K) = K$ şeklinde tanımlanır.

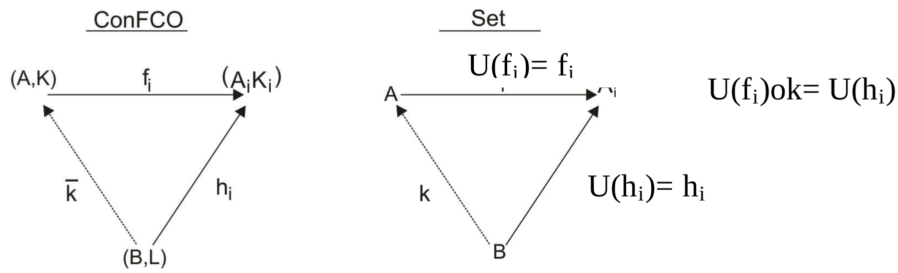
θ nın birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla $U^{-1}(A) \approx \phi$ ve ϕ cümle olduğundan $U^{-1}(A)$ bir cümledir.

3) (A_i, K_i), ConFCO nun nesneleri ve $f_i : A \to U(A_i, K_i) = A_i$ $(i \in I)$ Set de U kaynağı olsun. $K = \{\mathcal{F} \mid f_i(\mathcal{F}) \in K_i, i \in I\}$ şeklinde tanımlansın; $(A,K) \in Ob(ConFCO)$ olduğunu gösterelim. $\forall a \in A$ için $f_i[a] = [f_i(a)] \in K_i$ dir. Çünkü $(A_i, K_i) \in Ob(ConFCO)$ dur. K nın tanımından $[a] \in K$ olur. Yine $\mathcal{F} \in K$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ olsun. $f_i(\mathcal{F}) \in K_i$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

olduğundan $f_i(\mathcal{F}) \subset f_i(\mathcal{G})$ dır. $(A_i,K_i) \in Ob(ConFCO)$ olduğundan $f_i\ (\mathcal{G}) \in K$, K nın tanımından $\mathcal{G} \in K$ dır.

Şimdi $f_i:(A,K) \to (A_i,K_i)$ nin $f_i:A \to A_i$ kaynağının başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim.

Her $(B,L) \in Ob(ConFCO)$, $(A_i,K_i) \in Ob(ConFCO)$ ve ConFCO da herhangi $h_i :(B,L) \to (A_i,K_i)$ dönüşümlerin ailesi için en az bir $k:B \to A$ vardır ve $U(f_i)\ ok=U(h_i)$ dir.



Göstereceğizki en az bir $\overline{k}:(B,L) \to (A,K)$ vardır, öyle ki $U(\overline{k})=k$ dır. yani $\forall \mathcal{F} \in L$ için $\overline{k}(\mathcal{F}) \in L$ olduğunu göstermeliyiz. $U(h_i) = h_i$, $U(f_i) = f_i$

$\mathcal{F} \in L$ olsun. h_i sürekli olduklarından $h_i\ (\mathcal{F}) \in K_i$ dir.

Diğer taraftan $U(f_i)ok= U(h_i)$ olduğundan

$h_i(\mathcal{F}) = (U(f_i)oU(k))(\mathcal{F}) = U(f_i(\overline{k}(\mathcal{F}))) = f_i\ (\overline{k}(\mathcal{F})) \in K_i$ olur. K nın tanımından

$\overline{k}(\mathcal{F}) \in K$ dır.

3.BÖLÜM

PRECAUCHY UZAYLAR

Bu bölümde precauchy uzayın tanımı , precauchy uzayının kategori olması, ilk , son objeleri , precauchy uzayının topolojik kategori olduğu, discre ve indiscre objeleri karakterize edildi. Ayrıca p_c , q_c yapıları ve ilgili kavramları T_1, $(q-T_1)$, T_2 , q- Hausdorff olma koşullarına değinildi. Son olarak başlangıç precauchy yapısı , ilgili tanımlar ve önermeler verildi.

3.1. Precauchy Uzayı

Tanım 3.1.1. X bir cümle olsun. F(X) de X üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesini göstersin. $\mathcal{F},\mathcal{G}\in$ F(X) tüm F$\in \mathcal{F}$, G$\in \mathcal{G}$ için F$\cap$G $\neq \phi$ ise F$\vee$G ile X üzerinde {F$\cap$G: F$\in \mathcal{F}$, G$\in \mathcal{G}$}tarafından üretilen süzgeçler gösterilsin. Eğer F$\cap$G = ϕ olacak şekilde F$\in \mathcal{F}$ ve G$\in \mathcal{G}$ mevcut ise FVG mevcut değildir denir. Buna göre F(X) in aşağıdaki şartları sağlayan bir C alt cümlesine X cümlesi üzerinde PreCauchy yapısı ve (X, C) ikilisine de Precauchy uzayı denir.

(1) $\forall$ x $\in$ X için [x]$\in$ C

(2) $\mathcal{F}\in$ C ve $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ ise $\mathcal{G}\in$ C

Eğer (X, C) ikilisi aşağıdaki C(3) şartını sağlıyorsa (X, C) ikilisine Cauchy uzayı denir.

(3) $\mathcal{F}\in$ C, $\mathcal{G}\in$ C ve $\mathcal{F} \geq \mathcal{G}$ mevcut ise, bu takdirde $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\in$ C dir. Yani, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ proper ise**,** $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\in C$ dir [22].

Örnek 3.1.2. A={1,2,3} ve K={[1], [2], [3], [ϕ], [{1,2}]} verilsin. (A,K) nın Precauchy uzayı olduğunu gösterelim.

1) $\forall$ a$\in$A için [a]$\in$K dır. Yani [1], [2], [3]$\in$K dır.

2) $\forall$ $\mathcal{F}\in$K ve $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$ ise $\mathcal{G}\in$K dır. Yani;

[1]$\in$K ve [1] $\subset$[ϕ] ise [ϕ] $\in$K

[2]$\in$K ve [2] $\subset$[ϕ] ise [ϕ] $\in$K

[3]$\in$K ve [3] $\subset$[ϕ] ise [ϕ] $\in$K

[{1,2}]$\in$K ve [{1,2}]$\subset$[1], [{1,2}]$\subset$[2], [{1,2}]$\subset$[ϕ] ise [1], [2], [ϕ]$\in$K dır.

(X,C) ikilisi aşağıda C(3) şartını da sağladığından aynı zamanda Cauchy uzayıdır.

3) $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}\in$K ve $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ proper ise $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\in$K dır.

[1]$\in$K ve [{1,2}]$\in$K ise [1]$\cup$[{1,2}] = [1] $\neq$ [ϕ] olduğundan properdir. O halde [1]$\cap$ [{1,2}] = [{1,2}]$\in$K dır. Benzer olarak [2] $\cup$ [$\{1,2\}$] = [2] $\neq$[ϕ] olduğundan proper dır. Bundan [2] $\cap$[$\{1,2\}$]$\in$K dır.

Örnek 3.1.3. B = {x,y,z} ve K = { [x], [y], [z], [{x,y}], [{y,z}], [ϕ] } verilsin . (B, K) nın precauchy uzayı olduğunu ancak cauchy uzayı olmadığını gösterelim.

Örnek 3.1.2 deki gibi (B,K) nın precauchy uzayı olduğu açıktır. Şimdi cauchy uzayı olmadığının gösterelim

[{x,y}] $\cup$[{y,z}] = [$\mathcal{F}$: $\mathcal{F}\supset[\{x,y\}]\cap[\{y,z\}]=[y]$] = [y]

[y] $\neq$[ϕ] proper dır. Fakat

[{x,y}] $\cap$[{y,z}] = [{x,y,z}] $\notin K$ dır . Bu durumda (B,K) cauchy uzayı değildir.

C'nin elemanları cauchy süzgeçleri olarak adlandırılır.Yukarıdaki tanımdan Precauchy uzayının Cauchy uzayından daha genel olduğu sonucuna varılabilir.

C ve D, X üzerinde iki precauchy yapısı ve C $\subseteq$ D ise C nin D den daha ince olduğu söylenir ve D $\leq$ C şeklinde gösterilir. Buradan precauchy yapılarının sınıfları üzerinde düzenli bir ilişki olduğuna ulaşılabilir.

Eğer (X,C) precauchy uzayı ise cauchy uzayında olduğu gibi precauchy uzayını da tamamiyle yakınsak bir yapıyla ilişkilendirebiliriz. Gerçekte X üzerinde tanımlanan q_c yakınsak bir yapıdır.

$$\forall\, \mathcal{F} \in F(X),\ x \in X \text{ için } \quad \mathcal{F} \xrightarrow{q_c} x \quad \text{ancak ve ancak } \mathcal{F} \cap [x] \in C \quad \text{olmalıdır.}$$

Fakat cauchy yapısı üzerinde tanımlanılan eşitlik ilişkisi precauchy üzerinde şart değildir. Çünkü geçişme özelliği olmayabilir. Aşağıdaki örnekte bu gerçekten bahsedilmektedir.

Örnek 3.1.4. X=R Reel sayıların cümlesi ve

$C=\{[x] \mid x \in X\} \cup \{\mathcal{H} \in F(X) \mid \mathcal{H} \geq \mathcal{F} \text{ veya } \mathcal{H} \geq \mathcal{G}\}$ olsun.

$\mathcal{F}=\left[\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right) \| \ n \in N\right\}\right]$ ve $\mathcal{G}=\{ R \setminus C \mid C$, R nin sayılabilir bir alt cümlesidir$\}$.

C nin X üzerinde bir precauchy yapısı olduğu açıktır. Eğer $S \cap T \in C$ ise C üzerinde '~' bağıntısı S ~T ile tanımlanır. $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ mevcut ve böylece $[0] \geq \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \cap [0] \in C$. Fakat $\mathcal{G} \cap [0] \notin C$ dir. Bu durumda $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ ve $\mathcal{F} \sim [0]$ olduğu halde $\mathcal{G} \sim [0]$ olmayabilir.

Tanım 3.1.5. $\mathcal{A} \subseteq F(X)$ bir alt cümlesi verilsin. Eğer $\mathcal{A}$ da $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n$ sonlu süzgeçler olmak üzere $\mathcal{F} \vee \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \vee \mathcal{H}_2 \ \ldots \ \mathcal{H}_n \vee \mathcal{G}$ hepsi mevcut ise $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in F(X)$ *$\mathcal{A}$- bağlantılı* dır denir [22].

Eğer $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *$\mathcal{A}$- bağlantılı* ise $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{G}$ şeklinde gösterilir [22].

$\sim_A$ nın, $\mathcal{A}$ üzerinde denklik bağıntısı olduğu açıktır. Özel olarak C, X üzerinde precauchy yapısı ise $\sim_c$ C üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\mathcal{F} \in$ C için $[\mathcal{F}]_c$ denklik sınıf bağıntısını $\sim_c$ ile ifade edebiliriz.

Şimdi (X,C) precauchy uzayı için ilave bir axiom tanımlayalım.

C(4) $\forall x \in X$, $\mathcal{F} \in C$ ve $\mathcal{F} \sim_c [x]$ ise $\mathcal{F} \cap [x] \in C$

Şartını sağlayan C precauchy yapısı X üzerinde c-precauchy yapısı olarak adlandırılır

$\sim_c$, X üzerindeki her bir C precauchy yapısı ile ilişkilendirilir ve denklik bağıntısına karşılık gelir. Buradan p_c yi şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\forall \mathcal{F} \in F(X),\ x \in X \text{ için } \mathcal{F} \xrightarrow{p_c} x \quad \text{ancak ve ancak } \mathcal{F} \in C,\ \ \mathcal{F} \sim_c [x] \text{ dir.}$$

Tanım 3.1.6. İki precauchy uzayı arasındaki f: (X,C)$\to$(Y,D) dönüşümü $\mathcal{F} \in C$ olmak üzere, $\forall \mathcal{F} \in C$ için f($\mathcal{F}$)$\in$ D ise cauchy dönüşümü olarak adlandırılır [22].

Önerme 3.1.7. f: (X,C)$\to$(Y,K) cauchy dönüşümü ise f:(X, p_c)$\to$(Y, p_k) süreklidir.

İspat : $\mathcal{F} \xrightarrow{p_c} x$ olsun. C deki sonlu sayıdaki süzgeçler $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, …, $\mathcal{F}_n$ olmak üzere $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_1$, … , $\mathcal{F}_n \vee [x]$ hepsi mevcut olsun. Böylece f($\mathcal{F}$), f($\mathcal{F}_1$), … , f($\mathcal{F}_n$) K da ve f($\mathcal{F}$)$\vee$ f($\mathcal{F}_1$) , … , f($\mathcal{F}_n$) $\vee$ f([x]) hepsi mevcut olacak şekilde f bir cauchy dönüşümüdür.

Bu f($\mathcal{F}$) $\sim_k$ f([x]) içerir. Buradan f($\mathcal{F}$) $\xrightarrow{p_k}$ f(x) dır. Bu ise f:(X, p_c)$\to$(Y, p_k) sürekliliğini ispatlar.

Biz bu bölümde daha önceden tanımladığımız q_c yakınsak yapısını kullanacağız.

Şuna dikkat etmeliyiz ki $p_c \leq q_c$ dir.

Çünkü, $\mathcal{F} \xrightarrow{q_c} x \Rightarrow \mathcal{F} \cap [x] \in C \Rightarrow \mathcal{F} \in C$ ve $\mathcal{F} \sim_c [x]$ dir. Buda $\mathcal{F} \xrightarrow{p_c} \boldsymbol{x}$

olduğunu gösterir. Fakat genelde $p_c \neq q_c$ dir. Bunu aşağıdaki örnekte gösterelim.

Örnek 3.1.8. X=R olsun. $\mathcal{G}= \left[\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right) \middle| n\in N\right\}\right]$, ve

C={[x] | x∈ X } ∪ { $\mathcal{F}$ | $\mathcal{F} \geq \mathcal{G}$ } ∪ { bütün serbest süzgeçler }

C nin X üzerinde bir precauchy yapısı olduğu açıktır.

$\mathcal{H}$ = { R \ F | F , R nin sonlu alt cümlesidir } süzgecini dikkate alalım.

$\mathcal{H}$ serbest bir süzgeç olduğundan C dedir. $\mathcal{H}\vee \mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}\vee$ [0] mevcut olduğundan $\mathcal{H} \xrightarrow{p_c}$ [0] içerir. Fakat $\mathcal{H} \cap [0] \notin$ C. Çünkü C deki üç tip elemandan herhangi biri değildir.

Tanım 3.1.9. (X,K) , (Y,L) precauchy uzayı olsun. (X,K) dan (Y, L) ye bir f dönüşümü, f : X →Y ye bir fonksiyondur, öyle ki eğer $\mathcal{F}\in$ K ise f($\mathcal{F}$) ∈ L dir. Yani f süreklidir. Burada f($\mathcal{F}$) = { U | U ⊂ Y ve en az bir C ∈ $\mathcal{F}$ için U⊃ f(C) } şeklinde tanımlanır.

Nesneleri precauchy uzayı, dönüşümleri yukarıda tanımlanan sürekli fonksiyonlar ve bileşkesi de fonksiyonların bileşke işlemi olan sınıfa precauchy uzayı kategorisi denir ve PCHY ile gösterilir.

Örnek 3.1.10. $\mathcal{U}$ = PCHY kategoridir.

f : (X,K) →(Y,L) ve g : (Y,L) →(Z,M) fonksiyonları olsun. gof un sürekli olduğunu gösterelim.

$\mathcal{F}\in$ K olsun. f sürekli olduğundan f($\mathcal{F}$)∈ L dir. g sürekli olduğundan g(f($\mathcal{F}$))∈ M olur ki buda gof un sürekli olmasıdır.

i) $1_{(X,K)}$: (X,K)→(X,K) birim dönüşüm olsun. $1_{(X,K)}$nın sürekli olduğunu gösterelim.

$\mathcal{F}\in$ K olsun. $1_{(X,K)}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\in$ K olduğundan $1_{(X,K)}$ süreklidir. f (X,K)→(Y,L) sürekli olsun. $fo1_{(X,K)}$ = f olduğunu gösterelim.

$\mathcal{F} \in$ K olsun. $(fo1_{(X,K)})(\mathcal{F}) = f(1_{(X,K)}(\mathcal{F})) = f(\mathcal{F})$ olduğundan $fo1_{(X,K)}$ = f dir.

Benzer şekilde g: (Y,L)→(X,K) için $1_{(X,K)}$ o g = g dir.

ii) ho(gof)= (hog)of eşit olduğunu ve sürekli olduğunu gösterelim . Buradaki bileşke işlemi fonksiyonlardaki bileşke işlemi olduğundan ho(gof)= (hog)of dir.

Yukarıda gof un sürekli olduğu gösterildi. Buradan ho(gof) sürekli olur.

Örnek 3.1.11. $\mathcal{U}$=PCHY nin ilk ve son objelerini bulalım.

(X, C) , C $\subset$ F(X) = { $\mathcal{F}$| $\mathcal{F} \subset$ P(X) süzgeç } olmak üzere PCHY nin bir objesi ve (Y,L), PCHY nin herhangi bir objesi olsun. $\mathcal{U}$((X,C) ,(Y,L))={ f | f: (X,C) →(Y,L) dönüşümü}tek elamanlı olmalıdır. Dönüşüm ise, $\mathcal{F} \in$ C ⇒f($\mathcal{F}$)= { $\mathcal{V} \subset$ Y | ∃ $\mathcal{F} \in$ V, f(V) $\subset$ $\mathcal{V}$ }$\in$ L dır.

X=∅ ise P(X)={∅} dur. F(X)=F(∅)= { $\mathcal{F}$| $\mathcal{F} \subset$ P(X)=P(∅)={∅}}= {{∅}} olur ki P(F(X))={ ∅, {{∅}}} dır. i =(∅, C) olmak üzere,

C : X→P(F(X)\∅) olduğundan C={{∅}} olur. Buradan i =(∅, {{∅}}) ilk obje olur mu araştıralım. f :∅→Y boş fonksiyon olmak üzere f: {∅, {{∅}}} →(Y,L) dönüşüm olduğunu gösterelim.

$\mathcal{F}$={∅}⇒f($\mathcal{F}$) ={U $\subseteq$ Y |en az bir V$\in$ $\mathcal{F}$ vardır öyleki f(V)$\subseteq$U}

f({∅})={ U $\subseteq$ Y | V $\in$ { ∅ }öyleki V$\subset$ U }

f({∅})={ U $\subseteq$ Y | V=∅$\subset$ U }= P(Y) $\in$ L.

Buradan f($\mathcal{F}$)$\in$ L olur ki bu da f nin dönüşüm olduğunu gösterir. Yani i=(∅,{{∅}}) olur.

Şimdi son objeyi bulalım.

(X, C) , C$\subset$ F(X) = { $\mathcal{F}$| $\mathcal{F} \subset$ P(X) süzgeç } olmak üzere PCHY nin bir objesi ve (Y,L), PCHY nin herhangi bir objesi olsun. $\mathcal{U}$ ((Y,L) ,(X,C))={ f | f: (Y,L) →(X,C) dönüşümü}tek elamanlı olmalıdır.

X={a} alırsak yukarıdaki ilk objenin gösterimine benzer olarak C={[a],[∅]} olur.

f:Y→X={a} sabit fonksiyon olmak üzere f: (Y,L) →(X,C) dönüşümü olduğunu yani $\mathcal{F}$ $\in$ L için f($\mathcal{F}$)$\in$ C olduğunu göstermeliyiz. Her b$\in$ Y için f(b) =a olduğundan,

f($\mathcal{F}$)= { U⊆{a} | ∃ V∈ $\mathcal{F}$ vardır , öyle ki f(V) ⊆ U}={U⊆{a} | {a}⊆U}={{a}}∈ C

∅∈ $\mathcal{F}$ ise f($\mathcal{F}$) = P(X) ∈ C dir. Dolayısıyla f dönüşümdür. O halde T=({a},{[a],[∅]}) son (terminal) objedir.

T≠ i olduğundan zero (sıfır) obje yoktur.

Teorem 3.1.12. $\mathcal{U}$ =PCHY olsun. U: PCHY → SET topolojik fanktordur.

İspat: Önce fanktor olduğunu gösterelim. (X,K), (Y,L) precauchy uzaylarında objeler olmak üzere;

U(X,K) = X ∈ Ob(SET) ve f:(X,K)→(Y,L) için

U(f) = f:X→Y tanımlansın.

1) $U(1_{(X,K)})=1_{U(X,K)}$ olduğunu gösterelim.

$1_{(X,K)}$:(X,K)→(X,K) birim morfizm olmak üzere

$U(1_{(X,K)})$=U(X,K)= X → U(X,K) =X olmak üzere

$U(1_{(X,K)})=1_X$ dir. $1_X = 1_{U(X,K)}$ olur.

2) $(X,K) \xrightarrow{f} (Y,L) \xrightarrow{g} (Z,T)$ tanımlansın.

U(gof) = gof = U(g)oU(f)⇒U(gof) = U(g)oU(f) olur. Böylece bu bir fanktordür.

U(gof) = gof = U(g)oU(f)⇒U(gof) = U(g)oU(f) olur. Böylece bu bir fanktordür.

Şimdi düzenli olduğunu gösterelim.

1) (X,K), (Y,L)∈ $\mathcal{U}$, f, g:(X,K)→(Y,L) ve U(f) = U(g) olsun. Tanımdan U(f)=f ve U(g)=g olduğundan f=g dir. Böylece U düzenlidir.

f:(X,K)→(X,L) morfizmi için $U(f)=f=1_X$:X→X ve f izomorfizm olsun. K=L olduğunu gösterelim.

$\mathcal{F}$ ∈ K olsun. f morfizm olduğundan f($\mathcal{F}$)=$1_X(\mathcal{F})=\mathcal{F}$ ∈ L ise $1_X(\mathcal{F})$∈ L olur ki K⊂ L dır.

Benzer şekilde f^{-1} morfizm olduğundan

$\mathcal{F} \in L$ ise $f^{-1}(\mathcal{F}) \in K$ dır. $\mathcal{F} \in K$ olduğundan

$L \subset K$ dır. Böylece $K = L$ elde edilir.

$f = 1_{(X,K)}$ yani amnestik olduğunu gösterir. O halde U belirlidir.

2) $U^{-1}(X)=\{(X,K) \mid U(X,K) = X\}$ ve $\phi = \{K \mid K \subset (X,P(F(X))\}$ olsun. $\theta:U^{-1}(X) \to \phi$ de $\theta(X,K)=K$ şeklinde tanımlanır.

θ nın birebir ve örten olduğu açıktır. Dolayısıyla $U^{-1}(X) \approx \phi$ ve ϕ cümle olduğundan $X \subset Ob(Set)$ için $U^{-1}(X)$ bir cümledir.

3) (X_i,K_i), $\mathcal{U}$ nun nesneleri ve $f_i:X \to U(X_i,K_i) = X_i$, $i \in I$ SET de U kaynağı olsun.

$K=\{ \mathcal{F} \mid f_i(\mathcal{F}) \in K_i, i \in I\}$ şeklinde tanımlansın;

$(X,K) \in Ob(\mathcal{U})$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in X$ için $f_i[x] = [f_i(x)] \in K_i$ dır. Çünkü $(X_i,K_i) \in Ob(\mathcal{U})$ dir. K nın tanımından $[x] \in K$ olur. Yine $\mathcal{F} \in K$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ olsun. $f_i(\mathcal{F}) \in K_i$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ olduğundan $f_i(\mathcal{F}) \subset f_i(\mathcal{G})$ dır. $(X_i,K_i) \in Ob(\mathcal{U})$ olduğundan $f_i(\mathcal{G}) \in K$, K nın tanımından $\mathcal{G} \in K$ dır. Buradan PCHY dir.

Şimdi $f_i:(X,K) \to (X_i,K_i)$ nin $f_i:X \to X_i$ nin başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim. $K=\{ \mathcal{F} \mid f_i(\mathcal{F}) \in K_i, i \in I\}$ şeklinde tanımlanan K nın $f_i:X \to U(X_i,K_i) = X_i$ ile verilsin.

Her $(Y,L) \in \mathcal{U}$, $(X_i,K_i) \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$ de herhangi $h_i:(Y,L) \to (X_i,K_i)$ dönüşümlerin ailesi için en az bir $k:Y \to X$ vardır ve $U(f_i)ok=U(h_i)$ dir.

$\mathcal{U}$=PCHY

$$\begin{tikzcd}
(X,K) \arrow[rr, "f_i"] & & (X_i,K_i) \\
& (Y,L) \arrow[ul, dashed, "\overline{k}"] \arrow[ur, "h_i"'] &
\end{tikzcd}$$

SET

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f_i"] & & X_i \\
& Y \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "h_i"'] &
\end{tikzcd}$$

$f_i o k = h_i$

Göstereceğiz ki en az bir $\overline{k}:(Y,L)\rightarrow(X,K)$ vardır. Öyle ki $U(\overline{k})=k$ dır.

Yani $\forall \mathcal{F}\in L$ için $\overline{k}(\mathcal{F})\in K$ olduğunu göstermeliyiz.

$\mathcal{F}\in L$ olsun, h_i sürekli olduklarından $h_i(\mathcal{F})\in K_i$ dir.

Diğer taraftan $f_i o\overline{k}=h_i$ olduğundan

$h_i(\mathcal{F})=f_i(\overline{k}(\mathcal{F}))=(U(f_i))(U(k)(\mathcal{F}))=U(h_i)(\mathcal{F})=h_i(\mathcal{F})\in K_i$ olur. Böylece $f_i(k(\mathcal{F}))\in K_i$ ve K nın tanımından $k(\mathcal{F})\in K$ dır.

Dolayısıyla $U:\mathcal{U}\rightarrow$ Set bir topolojik fanktordur.

Şimdi de bu kategorinin bitiş kaldırmalarını karakterize edelim. $\mathcal{F}\in K$ ancak ve ancak K da sonlu sayıda $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, …, $\mathcal{F}_n$ ler mevcut olacak öyle ki tüm i<n ler için $\mathcal{F}_i$ nin her elemanı ilk $\mathcal{F}_{i+1}$ in her elemanının kesişimi mevcut olacak (Yani boştan farklı olacak) ve $\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i\subset\mathcal{F}$ olacak.

Teorem 3.1.13. 1- $(X,K)\in Ob(PCHY)$ olsun. (X,K) nın diskre uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x\in X$ için $K=\{[x], PX=[\emptyset]\,|\, x\in X\}$ olmalıdır.

2- (X,K) nın indiskre uzayı olması için gerek ve yeter şart K=F(X) olmasıdır.

İspat: Teorem 2.4.4. den yararlanarak:

1. e=(X,K)$\in$Ob(PCHY), c=(Y,L)$\in$Ob(PCHY) olsun. Eğer f:X→Y bir fonksiyon ise bu takdirde f, PCHY'de (X,K)→(Y,L) dönüşümüne kaldırılabilir. Yani $\mathcal{F} \in$K ise f($\mathcal{F}$)$\in$L olduğu gösterilmelidir. $\mathcal{F}\in$K olsun. $\mathcal{F}$=[x] veya [ϕ], buradan f($\mathcal{F}$)=[f(x)] veya [ϕ] dur. Dolayısıyla f($\mathcal{F}$)$\in$L, yani f süreklidir.

2. d=(X,K)$\in$Ob(PCHY), c=(Y,L)$\in$Ob(PCHY) olsun. Eğer f:Y→X bir fonksiyon ise f kaldırılabilir. $\mathcal{F} \in$L ise f($\mathcal{F}$)$\in$K olduğunu göstermeliyiz. Hipotezden K=F(A) idi. $\mathcal{F} \in$L olsun. Bu durumda f($\mathcal{F}$)$\in$F(X) olur. O halde f($\mathcal{F}$)$\in$K dır.

Tanım 3.1.14. (X,C) precauchy uzayı olsun.

1) Her x,y $\in$X için (X,C) nin T_1, (q- T_1) olması için gerek ve yeter şart

[x] $\sim_c$ [y] $\Rightarrow$ x = y ([x] $\cap$ [y] $\in$ C $\Rightarrow$x = y) dir.

2) Her x,y $\in$X, $\mathcal{F}\in$ F(X) için (X,C) nin T_2, (q-Hausdorff) olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{F} \sim_c$ [x], $\mathcal{F} \sim_c$ [y] $\Rightarrow$x = y ($\mathcal{F} \cap$ [x] ve $\mathcal{F} \cap$[y] C de $\Rightarrow$x = y) dir [22].

Önerme 3.1.15. (X,C) precauchy uzayı için aşağıdaki özellikler doğrudur :

I) Her x,y $\in$X için (X,C) nin T_1, (q-T_1) olması için gerek ve yeter şart (X, p_c) nin T_1 olmasıdır.

I I) Her x,y $\in$X, $\mathcal{F}\in$ F(X) için (X,C) nin T_2, (q-Hausdorff) olması için gerek ve yeter şart (X, p_c) nin T_2 olmasıdır.

Önerme 3.1.16. (X,C) precauchy uzayı T_2 dir ancak ve ancak T_1 olmasıdır.

İspat: (X,C) T_2 ise T_1 olduğu açıktır. Şimdi (X,C) T_1 uzayı olsun ve $\mathcal{F} \sim_c$ [x] ve $\mathcal{F} \sim_c$ [y] olsun. Böylece '$\sim_c$', C üzerinde bir eşitlik bağıntısı olduğundan [x] $\sim_c$ [y] , x = y içerir . Buradan (X, C) T_2 dir.

q-T_1 ve q-Hausdorff özellikleri için benzer sonuçlar genelde doğru değildir. Aşağıdaki örnekte (X ,C) nin , q-T_1 olduğu halde q-Hausdorff olmayabileceği gösterilmiştir.

Örnek 3.1.17. X sonsuz bir cümle ve a ,b$\in$ X için a $\neq$ b olsun.

C = {[x] $|$x$\in$ X } $\cup$ { $\mathcal{G} \geq \mathcal{H}$ veya $\mathcal{H} \cap$ [a] veya $\mathcal{H} \cap$ [b] } olsun. $\mathcal{H}$, X üzerinde free süzgeç dir. Açıkcası C, X üzerinde precauchy yapıdadır. Herhangi bir x , y $\in$ X için [x] $\cap$ [y] $\in$ C ise [x] $\cap$ [y] bir tek elemanla sabit süzgeç üretir. Bu yüzden [x] = [y] ise x = y dir. Bu (X,C) nin q-T_1 olduğunu ifade eder. Fakat q-Hausdorff değildir çünkü $\mathcal{H} \cap$ [a] $\in$ C ve $\mathcal{H} \cap$ [b] $\in$ C fakat a $\neq$ b dir.

3.2. Başlangıç (Initial) Precauchy Yapı

Bentley, Herrlich ve Robertson gibi topologlar PCHY kategorisinin başlangıç yapısı

oluşumu altında kapalı olduğunu gösterdiler. X bir cümle (Y_α, K_α) precauchy uzayı ve { f_α } , f_α: X $\to (Y_\alpha, K_\alpha)$ cauchy dönüşümlerinin bir ailesi olsun ve I cümlesi ile gösterilsin. X üzerindeki başlangıç (initial) precauchy yapısı her bir f_α cauchy dönüşümüne göre X üzerindeki precauchy yapısının enkabasıdır. C nin

Γ={ f_α :X $\to (Y_\alpha, K_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ ailesine göre başlangıç olduğu söylenebilir. Aşağıdaki önerme başlangıç precauchy yapısının belli özelliklerini vermektedir.

Önerme 3.2.1. X bir cümle, (Y,K) precauchy uzayı ve f: X $\to$(Y,K) cauchy dönüşümü olsun. Aşağıdaki şart sağlanırsa C, X üzerinde bir başlangıç precauchy yapısıdır [22].

$$\forall \mathcal{F} \in \text{F(X) için } \mathcal{F} \in \text{C ancak ve ancak } f(\mathcal{F}) \in \text{K olmasıdır.}$$

İspat: Yukarda ki şartın sağlandığını kabul edelim. C'nin, X üzerinde precauchy yapıda olduğu ve f in cauchy dönüşümü olduğu açıktır. C$'$, X üzerinde bir diğer precauchy yapısıysa yukarıdaki şartı sağlayacağından f : (X,C$'$) $\to$(Y,K) cauchy dönüşümü $\mathcal{F} \in$ C$'$ ise $f(\mathcal{F}) \in$ K, $\mathcal{F} \in$ C dir. Buda gösteriyor ki f cauchy dönüşümü için C, X üzerinde en kaba precauchy yapıdır. Aksine C, { f }'e göre başlangıç olsun. Böylece $\mathcal{F} \in$C olduğunda $f(\mathcal{F}) \in$D dir. C$''$ ={ $\mathcal{F} | f(\mathcal{F}) \in$ K} olsun. C$''$ nin X üzerinde precauchy yapısında olduğu ve f : (X,C$''$) $\to$(Y,K) cauchy dönüşümü olduğu ispat edilebilir. Fakat C, C$\leq$ C$'$ başlangıcıdır. Böylece $f(\mathcal{F}) \in$ K ise $\mathcal{F} \in$C$''$, $\mathcal{F} \in$C dir.

Sonuç 3.2.2. X, (Y_α, K_α) , f_α Önerme 3.2.1 deki gibi olsun. C = $\cap_{\alpha\in I} C_\alpha$, C_α'nın her bir $\alpha\in$ I için { f_α:X→(Y_α, K_α)}'ya göre başlangıç olması durumunda { f_α : X→ (Y_α, K_α)} $_{\alpha\in I}$ 'ya göre başlangıç precauchy yapısındadır.

Açıklama. Önerme 3.2.1 ve sonuç 3.2.2 den dolayı aşağıdaki gibi C başlangıç (initial) precauchy yapısını karakterize edebiliriz

$$\forall \mathcal{F}\in \text{F(X) için } \mathcal{F}\in \text{C ancak ve ancak } \forall\alpha\in \text{I için } f_\alpha(\mathcal{F}) \in K_\alpha \text{ dır.}$$

(X,C) ρ özelliğini sağladığında her bir (Y_α, K_α) ρ özelliğine sahiptir ve ρ başlangıç özelliği olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.3. c-precauchy ve cauchy olma özellikleri başlangıç (initial) özellikleridir.

İspat: (1) C, her bir (Y_α, K_α) nın c- precauchy uzayı olduğu yerde { f_α f_α: X→ (Y_α, K_α)} $_{\alpha\in I}$ ya göre başlangıç (initial) olsun. Bazı x∈X için $\mathcal{F}\in$ C ve $\mathcal{F} \sim_c$ [x] olsun. Her bir α∈I için C ≥C$_\alpha$ olduğundan $\mathcal{F} \sim_{c\alpha}$ [x] ve herbir f_α, $f_\alpha(\mathcal{F}) \sim_{K_\alpha} f_\alpha$([x]) cauchy dönüşümüdür. Bu $f_\alpha(\mathcal{F}\cap$ [x])∈ K_α ve ∀α∈ I için $\mathcal{F}\cap$ [x]∈C$_\alpha$ yı belirtir, bu da $\mathcal{F}\cap$ [x]∈ C olduğunu gösterir. Böylece (X,C) c- precauchy dir.

(2) Benzer olarak her bir (Y_α, K_α) nın cauchy uzayı olduğu her yerde (X,C) nın cauchy uzayı olduğu gösterilebilir.

Önerme3.2.4. X de C, Γ ayrılma noktalarının olduğu her yerde Γ={ f_α| f_α:X→ (Y_α, K_α)} $_{\alpha\in I}$ ya göre başlangıç ise T_1 başlangıç özelliğidir.

İspat: Çelişkiye düşme yoluyla ispat edelim. [x] $\sim_c$ [y] olsun ve x ≠ y olduğunu kabul edelim. c$_\alpha$ nın her bir α∈I için Γ={ f_α| f_α:X→(Y, K_α)} ya göre başlangıç olduğu yerde [x] $\sim_{c_\alpha}$ [y] olduğu anlaşılır. x ≠ y ve Γ, X de ayrılma noktası olduğundan ∃ β∈ I vardır öyleki $f_\beta(x) \neq f_\beta(y)$ dir. [x] $\sim_{c_\beta}$ [y] olduğundan $f_\beta([x]) \sim_{pk_\beta} f_\beta([y])$

dır. Fakat (Y_β,K_β) f_β(x)=$f_\beta(y)$ olduğundan T_1 dir. Bu bir çelişkidir. Böylece (X,C) T_1 dir. Buda önerme 3.2.4 ün ispatıdır.

Yukarıdaki önermede p_c ve q_c yer değiştirirse sonuç değişmez. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.5. Γ önerme 3.2.4 deki gibi ise $q-T_1$ ve q –Hausdorff özellikleri başlangıç özelliğidir.

Önerme 3.2.6. C, $\{ f_\alpha | \, f_\alpha$:X→ $(Y_\alpha, K_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ ya göre başlangıç ise q_c, $\{ f_\alpha | \, f_\alpha$:X→$(Y_\alpha, q_{k_\alpha})\}_{\alpha\in I}$ ya göre X üzerinde başlangıç (initial) yakınsak yapıdadır.
İspat : $\mathcal{F} \in$ F (X) , x∈X ve C_α, her bir $\{ f_\alpha | \, f_\alpha$:X→$(Y_\alpha, K_\alpha)\}$ ya göre başlangıç (initial) olsun.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \xrightarrow{q_c} x \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \cap [x] \in C \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \cap [x] \in C_\alpha \qquad ,\forall\alpha \in I \\
&\Leftrightarrow \quad f_\alpha(\mathcal{F} \cap [x]) \in K_\alpha \quad ,\forall\alpha \in I \\
&\Leftrightarrow \quad f_\alpha(\mathcal{F}) \xrightarrow{q_{k_\alpha}} f_\alpha(x) \qquad ,\forall\alpha \in I
\end{aligned}$$

Bu q_c nin X üzerinde bir başlangıç (initial) yakınsak yapısı olduğunu ispatlar.
Örnek 3.2.7. $X_1 = X_2 = R$, $\mathcal{H} = \left[\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) \middle| n \in N\right\}\right]$ ve $\mathcal{G} = \left[\left\{\left(-\frac{1}{n}, 0\right) \middle| n \in N\right\}\right]$ olsun.

$C_1 = K_1 = \{[0] \cap \mathcal{H}, \mathcal{F}\} \cup \{ [x] | \, x \in R \}$ ve $C_2 = K_2 = \{[0] \cap \mathcal{G}, \mathcal{F}\} \cup \{ [x] | \, x \in R \}$,

$\mathcal{F}$ süzgeç olsun. $\mathcal{F} \vee$ ([0] $\cap\mathcal{H}$), ([0] $\cap\mathcal{H}$) $\vee$ [0] mevcut ise $\mathcal{F} \xrightarrow{p_{c_1}} 0$ ve $\mathcal{F} \vee$ ([0] $\cap\mathcal{G}$) , ([0] $\cap\mathcal{G}$) $\vee$ [0] mevcut ise $\mathcal{F} \xrightarrow{p_{c_2}} 0$ dır. Fakat ([0], $\mathcal{H}$) $\vee$ ([0] $\cap\mathcal{G}$) mevcut ve [0] eşit değildir. Şimdi C = $C_1 \cap C_2$ ise C bütün sabit ultra süzgeçlerden ve $\mathcal{F}$ den meydana gelmektedir. Böylece p_c, R üzerinde başlangıç (initial) preyakınsak bir yapı olmadığından $\mathcal{F} \overset{p_c}{\not\to}$ 0 dir.

Fakat özel olarak cümle tek elemandan meydana gelirse aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Önerme3.2.8. C, $\{ f \mid f : X \to (Y,K) \}$ile başlangıç (initial) ise p_c ,$\{ f \mid f : X \to (Y, p_k)\}$ ya göre X üzerinde başlangıç preyakınsak bir yapıdadır.

İspat: $\mathcal{F} \xrightarrow{p_c} x \Leftrightarrow \mathcal{F} \in C$, $\mathcal{F} \sim_c [x] \Leftrightarrow f(\mathcal{F}) \in K$, $f(\mathcal{F}) \sim_k f([x]) \Leftrightarrow f(\mathcal{F}) \xrightarrow{p_k} f(x)$. Bu p_c nin X üzerinde başlangıç preyakınsak bir yapı olduğunu göstermektedir.

Tanım 3.2.9. (Y,K) precauchy uzayı ve $X \subseteq Y$ olsun. $i : X \to Y$ dönüşümü ne göre X üzerinde C başlangıç (initial) yapısı X üzerinde *altuzay yapısı* olarak adlandırılır ve (X,C) ye, (Y,K) nın *altuzayı* denir.

Aşağıdaki önerme altuzay yapısının belli özelliklerini vermektedir.

Önerme 3.2.10. (Y,K) precauchy uzayı ve $X \subseteq Y$ olsun. C, X üzerinde bir altuzay yapısıdır gerek ve yeter şart $C = \{ \mathcal{G} \in F(X) \mid \exists\ \mathcal{F} \in K$ öyle ki $\mathcal{F}$, X üzerinde izi (trace) ve $\mathcal{G} \geq \mathcal{F}_X \}$, $\mathcal{F}_X = \{ F \cap X \mid F \in \mathcal{F} \}$.

İspat: C yukarda ki gibi tanımlanmış olsun. C nin X üzerinde preyakınsak bir yapı olduğu açıktır. Ayrıca $i : (X,C) \to (Y,K)$ cauchy dönüşümüdür. Çünkü $\mathcal{G} \in C \Rightarrow \exists\ \mathcal{F} \in K$ öyle ki $i(\mathcal{G}) \geq i(\mathcal{F}) \geq \mathcal{F}$ olması i nin cauchy dönüşümü olduğunu gösterir. C' , i cauchy dönüşümü ne göre X üzerinde bir diğer precauchy yapıdadır. Fakat X üzerindeki iz ile $\mathcal{G} \in C' \Rightarrow i(\mathcal{G}) \in K$ dır. $\mathcal{G} \geq (i(\mathcal{G}))_X$ dolayı $C \leq C'$ dir. Böylece C' , X üzerinde altuzay yapıdadır.

4. BÖLÜM

SABİT YAKINSAK SÜZGEÇ UZAYI KATEGORİSİ

Bu bölümde sabit yakınsak süzgeç uzayı kategorisinin (**Con FCO**) nun topolojik kategori olduğu gösterildi. Ayrıca p noktasında $\overline{T}_0$, T_0' ve T_1 ayrılma aksiyomları karakterize edildi.

4.1. Con FCO Topolojik Kategorisi

Teorem 4.1.1. $\mathcal{U}$ = Con FCO olsun. U : Con FCO $\rightarrow$SET topolojik fanktordur.

İspat : Teorem 3.1.12 den ispat açıktır.

Teorem 4.1.2. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$, A üzerinde süzgeçler olsun. Eğer f : A $\rightarrow$B fanktor ise f ($\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$) = f ($\mathcal{F}$) $\cap$ f($\mathcal{G}$) [23].

Tanım 4.1.3. (A,K)$\in$ Ob(ConFCO), (A,K) diskre ise K = { [a], [$\emptyset$]: a$\in$ A}yapıdadır.

4.2. Noktada ayrılma aksiyomları

X bir cümle ve p$\in$ X , X V_P X de X in p wedge çarpımı olsun.

Tanım 4.2.1. *p* de Temel Eksen Dönüsümü (Principle p Axis Map):

$A_p : X\, V_p X \rightarrow X^2$, $A_p(x_1)=(x, p)$, $A_p(x_2)=(p, x)$,

***p* de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed *p* Axis Map):**

$S_p : X\, V_p X \rightarrow X^2$, $x_1 \rightarrow S_p(x_1)=(x, x)$ ve $x_2 \rightarrow S_p(x_2)=(p, x)$

***p* de Katlama Dönüsümü (The Fold Map):**

$\nabla_p : X\ V_p X \to X,\ \ \nabla_p(x_1) = x,\ i$=1,2 olarak tanımlanır [23] ve [20].

Örnek 4.2.2. *X* cümlesi yerine *IR* reel sayılar cümlesini ve $p = 0$ olarak alırsak *p* de Temel Eksen Dönüsümünün görüntüsü *x* ve *y* eksenlerinin birleşimi, Skewed Eksen Dönüşümünün görüntüsü $y = x$ doğrusu ve *y* ekseninin birleşimidir.

Tanım 4.2.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $p\in X$ olsun.

(1) (X,τ) uzayının *p* de T_0 olması için gerek ve yeter şart her $q \neq p$ için p nin q yu ihtiva etmeyen en az bir N_p komsuluğu veya *q* nun *p* yi ihtiva etmeyen en az bir N_q komşuluğunun olmasıdır.

(2) (X,τ) uzayının *p* de T_1 olması için gerek ve yeter şart her $q \neq p$ için p nin ve q nun N_p ve N_q komşulukları vardır, öyle ki $q \notin N_p$ ve $p \notin N_q$ dur [19].

Teorem 4.2.4. (X,τ) bir topolojik uzay ve $p\in X$ olsun.

(1) (X,τ) uzayının *p* noktasında T_0 olması için gerek ve yeter sart *X Vp X* üzerinde $\{ A_p : X\ V_p X \to X^2,\ \ \nabla_p : X\ V_p X \to (X,P(X)) \}$ fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır.

(2) (X,τ) uzayının *p* noktasında T_1 olması için gerek ve yeter sart *X Vp X* üzerinde $\{ S_p : X\ V_p X \to X^2,\ \ \nabla_p : X\ V_p X \to (X,P(X)) \}$ fonksiyonları tarafından doğrulan topolojinin diskre olmasıdır [19].

U: $\mathcal{U} \to$ SET topolojik fanktor X de $\mathcal{U}$ nın bir nesnesi ve *p* de U(X) = B nin bir elemanı olsun.

Tanım 4.2.5. (1) X in *p* de $\overline{T}_0$ uzayı olması için gerek ve yeter şart $\{ A_p : B\ V_p B \to U(X^2) = B^2$ ve $\nabla_p : B\ V_p B \to UDB = B \}$ U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada *D* diskre fanktordur [23] ve [20].

(2) X in *p* de T_0' uzayı olması için gerek ve yeter şart

$\{$ Id : B V_pB $\rightarrow$ U(X V_pX) = BV_pB ve ∇_p: B V_pB $\rightarrow$ UDB = B $\}$U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada X V_pX wedge çarpımıdır. Yani $\{$ i_1, i_2 : B $\rightarrow$ B V_pB $\}$U-kavşağının bitiş kaldırmasıdır. Burada i_1, i_2 kanonik dönüşümleri göstermektedir [23] ve [20].

(3) X in *p* de T_1 uzayı olması için gerek ve yeter şart

$\{$ S_p : B V_pB $\rightarrow U(X^2) = B^2$ ve ∇_p: B V_pB $\rightarrow$ UDB = B $\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [23] ve [20]. Burada X V_p X, $\mathcal{U}$ nın wedge çarpımıdır.

Uyarı 4.2.6. $\{ f_i : (A,K) \rightarrow (A_i,K_i)$ $i \in I$ $\}$ kaynağı başlangıç kaldırmadır ancak ve ancak $\mathcal{F} \in K$ olduğunda tüm $i \in I$ için $f_i(\mathcal{F}) \in K$ dır [23].

Uyarı 4.2.7. p_1, p_2, ∇p, π_{ij} sırasıyla 1+p, p+1, 1+1: B V_pB $\rightarrow$ B $\pi_i + \pi_j : B^2$ $V_p B^2 \rightarrow B$ ile gösterilir. Burada 1: B $\rightarrow$ B birim dönüşüm, p: B $\rightarrow$ B p noktası sabit dönüşüm ve $\pi_i : B^2 \rightarrow B$ *i*. izdüşüm fonksiyonlardır (i=1,2). $\pi_1 A_p = p_1 = \pi_1 S_p$, $\pi_2 A_p = p_2$, $\pi_2 S_p = \nabla$, olduğu kolayca gösterilebilir.A_p ve S_p nin başlangıç kaldırmalarını göstermekle sırasıyla (p_1, p_2) ve (p_1, ∇) nın başlangıç kaldırmalarını göstermek aynıdır [23].

Teorem 4.2.8. $X = (B,K)$ ConFCO nun bir objesi olsun.(B,K) p de $\overline{T}_0$ dır $\Leftrightarrow$ B deki her farklı x ve p noktaları için $[x] \notin K$ veya $[p] \notin K$ dır.

İspat: Kabul edelim ki X, p de $\overline{T}_0$ olsun. Yani 4.2.6, 4.2.7, 4.1.2, ve tanım 4.2.5 den, Wedge çarpımındaki her $\mathcal{F}$ süzgeci ve Wedge çarpımındaki herhangi z noktası için $p_1(\mathcal{F}) \in K$, $p_2(\mathcal{F}) \in K$ ve $\nabla(\mathcal{F})$=[x] veya $[\phi]$tur $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$= [$\emptyset$] veya $[z]$ dır. Göstereceğiz ki B deki her $x \neq p$ farklı x ve p noktası için $[x] \in K$ ise $[p]$, K da değildir.

Eğer $[p] \in K$ ise bu durumda $\mathcal{F}$ = [(p,x)] alalım.

$p_1(\mathcal{F})$ = [p] $\in$ K, dir ve $\nabla(\mathcal{F}) = [(x,p)]$ tır. X , p de $\overline{T}_0$ olduğundan

$p_1($ dir ve $\nabla(\mathcal{F}) = [(x,p)]$ tır. X , p de $\overline{T}_0$ olduğundan

$\mathcal{F}$ = [z] = [(x,p)]dir . Bu ise $x \neq p$ olduğundan çelişkidir. [p] $\notin$ K dır.

Benzer olarak gösterilebilir ki herhangi $x \neq p$ için [p] $\in$ K ise [x] $\notin$ K dır.

Tersine olarak, şartların sağlandığını kabul edelim. X, p de $\overline{T}_0$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $\mathcal{F}$, $p_1(\mathcal{F}) \in K$, $p_2(\mathcal{F}) \in K$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = [x]$ veya $[\phi]$ ise bu durumda, $\mathcal{F}$ = [(x,p)], [(p,x)], $[\phi]$ ya da $\mathcal{F} \supset [(x,p) \cup (p,x)]$, olduğunu görmek kolaydır. Biz $\mathcal{F}$ = [(x,p)] veya $[\phi]$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $\mathcal{F}$ = [(p,x)] ise bu durumda $p_1(\mathcal{F}) = [p] \in K$, $p_2(\mathcal{F}) = [x] \in K$ olur ki buda kabulümüzle çelişir. Buradan $\mathcal{F}$ $\neq$ [(p,x)] dir. Eğer $\mathcal{F} = [(x,p) \cup (p,x)]$ ise bu taktirde $p_1(\mathcal{F}) = [x \cup p] = [\{x,p\}] \subset [p]$ ve $p_2(\mathcal{F}) = [p \cup x] \subset [x]$ ve sonuç olarak $[x] \in K$ ve $[p] \in K$ olur ki buda çelişkidir. Buradan $\mathcal{F} \neq [(x,p) \cup (p,x)]$ dir.

Şimdi gösterelim ki $\mathcal{F} \neq [(x,p) \cup (p,x)]$ ve $\mathcal{F} \neq [\phi]$ olmak üzere $\mathcal{F} \supset [(x,p) \cup (p,x)]$ dir. Eğer $[\phi] \neq \mathcal{F} \neq [(x,p) \cup (p,x)]$ ise $\mathcal{F} \supset [(x,p) \cup (p,x)]$ olması için $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ = [(x,p)] veya $[(p,x)]$ olmasıdır. Açıkça eğer $\mathcal{F}$ = [(x,p)] veya $[(p,x)]$ ise $\mathcal{F} \supset [(x,p) \cup (p,x)]$ dir.

Tersine olarak eğer $\mathcal{F} \supset [(x,p) \cup (p,x)]$ ve $[\phi] \neq \mathcal{F} \neq [(x,p) \cup (p,x)]$ ise bu durumda $U = \{(x,p),(p,x)\}$ ve $U \neq \phi$ olacak şekilde $U \in \mathcal{F}$ vardır. {(x,p), (p,x)} $\in$ $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}$ süzgeç olduğundan $U \cap \{(x,p),(p,x)\} = (x,p)$ veya (p,x) olur ki bunlarda $\mathcal{F}$ dadır. Bu yüzden $\mathcal{F}$ = [(x,p)] veya $[(p,x)]$ dir. Yukarda $\mathcal{F} \neq [(p,x)]$ olduğu gösterildi. Bu sebepten $\mathcal{F} = [\phi]$ veya $\mathcal{F} = [(x,p)]$ dir. Benzer olarak gösterilebilir ki $p_1(\mathcal{F}) \in K$, $p_2(\mathcal{F}) \in K$ $\nabla(\mathcal{F}) = [x]$ veya $[\phi]$ şartı sağlanırsa $\mathcal{F} = [(p,x)]$ veya $[\phi]$ dır. Eğer $\mathcal{F}$, $p_1(\mathcal{F}) \in K$, $p_2(\mathcal{F}) \in K$, $\nabla(\mathcal{F}) = [p]$ veya $[\phi]$ şartı sağlanırsa $\mathcal{F}$= [(p, p)] veya $[\phi]$ dır. Sonuç olarak $\nabla^{-1}(p) = (p,p)$ olduğunda $\mathcal{F}$= [(p, p)] = [z] dir.

Bu yüzden X p de $\overline{T}_0$ dır.

Teorem 4.2.9. ConFCO da ki tüm $X=(B,K)$ objeleri p de T_0' dır.

İspat: Kabul edelim ki X, p de, T_0' olsun. $X=(B,K)$ nın p de T_0' olması için Wedge çarpımındaki herhangi $\mathcal{F}$ süzgeci ve Wedge çarpımındaki herhangi z noktası için $\exists \mathcal{F}_1 \in K \ni \mathcal{F} \supset i_k \mathcal{F}_1$, $k=1,2$ için $i_k = z$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = [x]$ veya $[\phi]$ $\Leftrightarrow \mathcal{F} = [z]$ veya $[\phi]$ olmasıdır. $\exists \mathcal{F}_1 \in K$ için eğer $\mathcal{F} \supset \dot{I}_1 \mathcal{F}_1$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = [x]$ veya $[\phi]$ ise bu taktirde kolayca gösterilebilir ki $\mathcal{F} = [(x,p)],[(p,x)],[\varnothing]$ veya $\mathcal{F} \supset [(x,p) \cup (p,x)]$ dir. $\mathcal{F}_1 \in K$, $\mathcal{F} \supset \dot{I}_1 \mathcal{F}_1$ olduğundan $\mathcal{F} = [(x,p)]$ veya $[\phi]$ olmalıdır.

Benzer olarak, $\mathcal{F}_1 \in K$ için $\mathcal{F} \supset \dot{I}_2 \mathcal{F}_1$ ise bu durumda $i_2(x) = (p,x)$ olduğundan $\mathcal{F} = [(p,x)]$ veya $[\phi]$ dur. $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 \in K$, K= (p,p) k=1 veya 2 için eğer $\mathcal{F} \supset i_k \mathcal{F}_1$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = [p]$ veya $[\phi]$ ise bu durumda $\nabla^{-1}(p) = (p,p)$ olduğundan $\mathcal{F} = [(p,p)]$ veya $[\phi]$ dur. Bu da ispatı tamamlar. X , p de T_0' dır.

Teorem 4.2.10. $X=(B,K)$ ConFCO nun bir objesi olsun (B,K) p de T_1 dır $\Leftrightarrow$ B deki her farklı x ve p noktaları için $[x] \notin K$ veya $[p] \notin K$ dır.

İspat: Kabul edelim ki X, p de T_1 olsun. Yani 4.2.6, 4.2.8, 4.2.7 ve tanım 4.2.5 den ve Wedge çarpımındaki herhangi σ süzgeci ve wedge çarpımındaki herhangi z noktası için, $p_1(\mathcal{F}) \in K, \nabla(\mathcal{F}) = K$, $\nabla(\mathcal{F}) = [\nabla(z)]$ veya $[\phi]$ dır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F} = [z]$ veya $[\phi]$ dur. Biz $x \neq p$ ise $[x] \in K$ olduğunu göstereceğiz. $[x] \in K$ ise $\mathcal{F} = [(p,x)]$ dir. Dikkat edelim ki $p_1(\mathcal{F}) = [x] \in K$, $\nabla(\mathcal{F}) = [x] \in K$ dır. X, T_1 olduğundan $\mathcal{F} = [(p,x)]$ olup, buda çelişkidir. Buradan $[x] \notin K$ dir.

$x \neq p$ olmak üzere eğer $[p] \in K$ ise $\mathcal{F} = [(p,x)]$ dir. Açıkça $p_1(\mathcal{F}) = [p] \in K$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = [x] \in K$ olur ki bu X in p de T_1 olduğuyla çelişir. Buradan $[p] \notin K$ dir.Tersine olarak, kabul edelim ki edelim ki şart sağlansın $\mathcal{F}$, $p_1(\mathcal{F}) \in K$, $\nabla(\mathcal{F}) \in K$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = [x]$ veya $[\phi]$ bu taktirde kolayca gösterilebilir ki $\mathcal{F} = [(x,p)],[(p,x)],[\varnothing]$ veya $\mathcal{F} \supset [(x,p) \cup (p,x)]$ dır.

Şimdi $\mathcal{F} = \left[\left(x,p\right)\right]$ veya $\left[\phi\right]$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{F} = \left[(p,x)\right]$ bu taktirde $p_1(\mathcal{F}) = [p] \in K$ olur ki buda çelişkidir. Eğer $\mathcal{F} = \left[\left(x,p\right) \cup \left(p,x\right)\right]$ alırsak $p_1(\mathcal{F}) = \left[x \cup p\right] \subset \left[p\right]$ ve buradan $[p] \in K$ dir, yine çelişkidir. $\left[\phi\right] \neq \mathcal{F} \neq \left[\left(x,p\right) \cup \left(p,x\right)\right]$ olacak şekilde eğer $\mathcal{F} \supset \left[\left(x,p\right) \cup \left(p,x\right)\right]$ ise, bu durumda Teorem 4.2.8 in ispatında kullanılan aynı yaklaşımla, ve kabulden $\mathcal{F} = \left[\left(x,p\right)\right]$ veya $\left[\left(p,x\right)\right]$ dir. Buradan $\mathcal{F} \neq \left[(p,x)\right]$ olduğundan $\mathcal{F} = \left[\left(x,p\right)\right]$ veya $\left[\phi\right]$ elde ederiz. Benzer olarak eğer $\mathcal{F} = p_1(\mathcal{F}) \in K$, $\nabla(\mathcal{F}) \in K$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = \left[x\right]$ veya $\left[\phi\right]$ şartları sağlansın bu taktirde $\mathcal{F} = \left[(p,x)\right]$ veya $\left[\phi\right]$ dur. Eğer $\mathcal{F} = p_1(\mathcal{F}) \in K$, $\nabla(\mathcal{F}) \in K$ ve $\nabla(\mathcal{F}) = [p]$ veya $\left[\phi\right]$ şartları sağlanıyorsa $\mathcal{F} = [(p,p)]$ veya $\left[\phi\right]$ dur. $\nabla^{-1}\left(p\right) = \left(p,p\right)$ dir. Bu yüzden X, p de T_1 dir.

KAYNAKLAR

1. Weil, A., Surles Espaces a Structure Uniforme et Sur la Topologie Generale, Act. Scient. Et ınd., 551, 1937.

2. Kowalsky, H.J., Limesarume und Komplettierung, Math. Nachr., 12, 301-340, 1954.

3. Cook, C.H., FISCHER, H.R., Uniform Convergence Structures, Math. Ann., 290-306, 173, (1967).

4. Keller, H.H., Die Limes-Uniformisierbarkeit der Limesraume, Math. Ann., 176, 334-341,1968.

5. Reed, E.E., Completion of Uniform Convergence Spaces, Math. Ann. 194, 83-108, 1971.

6. Bentley, H.L., Herrlich, H. , Lowen-Colebunders, E., Convergence, J.Pure Appl. Algebra, 68, 27-45, 1990.

7. Katetov, M., On Continuity Structures and Spaces of Mappings, Comment, Math. Univ. Carolinae, 6, 257-265, 1965.

8. Kent, D.C., Regularity Series for Cauchy Spaces, Internat. J. Math. Sci., 7, 1-13, 1984.

9. Kent, D.C., Richardson, G.D., Cauchy Spaces with Regular Completions, Pacific J, Math., Vol. 3, No.1, 105-116, 1984.

10. Baran, M., Separation Properties, Indian J. Pure and Appl. Math., 23(5), 333-341, 1992.

11. Baran, M., Seperation Properties in Categories of Constant Convergence Spaces, Turkish J.Math., 18, 238-248, 1994.

12. Munkres, J.R., Topology: A First Course, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1975.

13. Maclane, S., Categories For Working Mathematician Springer-Verlag, New York, 1971.

14. Herrlich, H., Topological Funktors, Gen. Top. Appl., 4,125-142, 1975.

15. Kent, D.C., Convergence Quotient Maps, Fund, Math., 165, 197-205, 1969.

16. Wyler, O., Top Categories and Categorical Topology, Gen. Top. Appl, 11, 17-28, 1971.

17. Schwartz, F., Connections Beetween Convergence and Nearness, Lecture Notes in Math. No. 719, Springer-Verlag, 345-354, 1978.

18. Bourbaki, N., Elements of Mathematics General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

19. Baran, M., The Notion of closedness in Topological Categories, Comment. Math.Univ. Carolinae, 34, 383-395, 1993.

20. Baran, M., Seperation Properties, Indian J. Pure and Appl. Math. 23(5), 333-341, 1992.

21. Mielke, M.V., Geometric Topological Competions with Universal Final Lifts, Top. and Appl., 9, 277-293, 1985.

22. Rath, Nandita, Precauchy Space, Ph. D., Washington State University, 136 Pages, 1994.

23. Baran, M., Seperation Properties in Topological Categories, A Dissertation, University of Miami, 154 pages, 1990.

ÖZGEÇMİŞ

Emine KILIÇ , 1981 yılında Kayseri'de doğdu . İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2000 yılında kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2004 yılında mezun oldu. Halen Erciyes Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik ana bilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

İletişim Bilgileri

Adres : Yunus Emre M. Karlıtepe S.
Polat Sit. C Blok No: 23
38080 Kocasinan / KAYSERİ

e- posta : em_klc@hotmail.com