ANALİTİK FONKSİYONLARIN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Gülşah SALTIK AYHANÖZ

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ANALİTİK FONKSİYONLARIN İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Gülşah SALTIK AYHANÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

Analitik Fonksiyonların İntegral Operatörlerinin Bazı Özellikleri

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Gülşah Saltık AYHANÖZ tarafından hazırlanan bu çalışma 22/09/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Ahmet IŞIK	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. H. Özlem GÜNEY	*İmza*	:

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

ANALİTİK FONKSİYONLARIN İNTEGRAL OPERATÖLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Gülşah SALTIK AYHANÖZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

Bu tezde, birim diskte analitik fonksiyonların integral operatörlerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu çalışmada analitik fonksiyonların çeşitli alt sınıflarından seçilen fonksiyonlar kullanılarak bu yeni integral operatörleri ile ilgili bazı bağıntılar verilmiştir.

2011, 73 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, univalent fonksiyon, yıldızıl (starlike) fonksiyon, konveks fonksiyon, integral operatörü, kompleks mertebe, $p-$katlı yıldızıl fonksiyon, $p-$katlı konveks fonksiyon.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SOME PROPERTIES OF INTEGRAL OPERATORS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Gülşah SALTIK AYHANÖZ

Atatürk University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

In this thesis, we examine some properties of integral operators of the functions which belong to the class of analytic functions in the open unit disc. Also, by introducing some subclasses of analytic functions, we gave some relations for these new integral operators of the functions in these classes.

2011, 73 pages

Keywords: Analytic function, univalent function, starlike function, convex function, $p-$valently starlike function, $p-$valently convex function, complex order.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Muhammed KAMALİ'ye, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erhan DENİZ'e, Arş. Gör. Yeşim SARAÇ'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca maddi ve manevi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Tezin hazırlanması aşamasında hep yanımda olan, benden hiçbir yardımını esirgemeyen sevgili eşim Harun AYHANÖZ'e

Yaşamım boyunca benden esirgemedikleri sevgi, anlayış ve güvenle kendimi gerçekleştirmeme fırsat veren ve desteklerini her zaman hissettiğim sevgili aileme sonsuz teşekkürler…

Gülşah SALTIK AYHANÖZ

Eylül/2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{A}$	Analitik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{A}_p$	$p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lvert z \rvert < 1$ birim diskinde analitik olan $f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{A}(p,n)$	$p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lvert z \rvert < 1$ birim diskinde analitik olan $f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonlar sınıfı
$B(z_0, \varepsilon)$	z_0 merkezli ε yarıçaplı yuvar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}_p$	$\mathcal{A}_p$ sınıfına ait $p-$katlı konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_p^*(\alpha)$	α mertebeli $p-$katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}_p(\alpha)$	α mertebeli $p-$katlı konveks fonksiyonlar sınıfı
$Df(z)$	Salagean operatörü $(n \in \mathbb{N}_0)$
k	Koebe fonksiyonu
$KD(\mu)$	$\mu-$düzgün konveks fonksiyon
$KD(\beta,\mu)$	β mertebeli $\mu-$düzgün konveks fonksiyon
$MT(\mu)$	$\mu-$düzgün yıldızıl fonksiyon
$MT(\beta,\mu)$	β mertebeli $\mu-$düzgün yıldızıl fonksiyonlar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{P}$	Gerçel kısmı pozitif olan fonksiyonlar sınıfı
$\Re(f)$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\mathcal{S}$	$\mathbb{U}$ ’da univalent ve analitik olan fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{S}^*$	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_p^*$	$p-$katlı yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{U}$	Birim disk
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi

1. GİRİŞ

En basit anlamda geometrik fonksiyonlar teorisinin araştırma konusu kompleks değerli fonksiyonların resim bölgelerine bakarak bu fonksiyonların analitik özelliklerini incelemektir. Görüntü kümeleri önemli özellikler taşıyan fonksiyonlar çeşitli sınıflara ayrılmıştır. Bilim adamlarının birçoğu da bu sınıflara ait bir çok kriter elde etmeye çalışmıştır. Bu sınıflardan en çok üzerinde durulan sınıflardan bazıları univalent, konveks, yıldızıl... vb. fonksiyonlardır. Analitik ve univalent fonksiyonlar, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli ve ilgi çeken konularından birisidir.

Analitik fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar yaklaşık olarak son yüzyılda yoğun bir şekilde yapılmıştır. Bu çalışmalar çok çeşitlilik göstermekle birlikte analitik fonksiyonların alt sınıfları ile ilgilenilmiştir. Bazıları da alt sınıflara ait fonksiyonların çeşitli özelliklerini incelemiştir.

Geometrik fonksiyonlar teorisi içinde ele alınan önemli problemlerden birisi de verilen bir analitik fonksiyonun konveks olup olmadığının araştırılmasıdır. Özellikle ters sınır değer problemlerinin çözümü, akışkanlar mekaniği, elektroteknik, nükleer fizik, univalentlik kriteri ve olasılık-istatistik gibi birçok alanda uygulaması olan konvekslik kriteri, bu alanda çalışmak isteyenler için bir ilham kaynağı olmuştur.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir has altkümesini birim diske konform tasvir eden bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile anlaşılmıştır. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan univalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan univalent fonksiyonlarla çalışmak çok kez kolaylık sağlar. Bu yüzden bu alanda çalışma yapan birçok bilim adamı birim diskte tanımlanan fonksiyonları kullanmıştır.

Univalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \right\}$$

birim diskinde univalent ve $f(0)=0$, $f'(0)\neq 1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, $n=2$ için $\mathcal{S}$ sınıfına ait $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ tipindeki bir fonksiyonun resminin $\left\{ z : |z| < \frac{1}{4} \right\}$ diskini içerdiği sonucuna varmıştır. Bir başka deyişle $\mathbb{U}$ birim diskinin $f \in \mathcal{S}$ altındaki görüntüsü olan kümenin sınırının orijine olan uzaklığının $1/4$ ten küçük olamayacağını ispatlamıştır.

İlerleyen zamanlarda matematikçiler $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun modülünün büyümesiyle ilgili sabitler belirlemek üzerine yoğunlaşmıştır. Yarım yüzyılı aşkın bir süre sonra bulunan sonuçlar “Temel Univalent Fonksiyonlar Kuramı” olarak anılmaya başlanmış ve böylece tüm yalınkat fonksiyonlar sınıfı ile ilgili problemlere odaklanılmıştır. Bu kuramın gelişmesine yardımcı olan Riemann Dönüşüm Teoremi ve daha genel olarak konformal dönüşümler ile ilgili çalışmalar olmuştur. Herhangi bir fonksiyonun yalınkat veya $p-$valent olması durumu, bu fonksiyonun davranışının belirlenmesinde oldukça önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle bu fonksiyonlar için çeşitli kriterler elde edilmeye çalışılmıştır.

1913 yılında Study, “Bir univalent dönüşümün birim disk üzerinde konveks olması” gerçeğini yani bu tür dönüşümlerin orijin merkezli 1 den küçük yarıçaplı her bir diski bir konveks bölge üzerine dönüştürdüğünü ifade etmiştir.

1915 yılında Alexander, bir $f(z)$ fonksiyonunu birim disk içine bire-bir olarak dönüştürmek için sık kullanılan klasik yöntemlerden daha fazla işlerliğe sahip olan bazı gerekli koşullar elde etmeyi amaçladığı bir çalışmasını yayınlamıştır. Ayrıca 1915 de Alexander $f'(z)\in\mathcal{P}$ ise $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da univalent bir fonksiyon olduğunu göstermiştir. Burada $\mathcal{P}$, $\mathbb{U}$ da analitik, $\Re\{f(z)\}>0$ ve $f(0)=1$ şartını sağlayan $f(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların sınıfıdır. Noshiro ve Warshawski bu fonksiyonun daha genel bir hali olan 'Konveks bir $\mathbb{U}$ bölgesinde $\Re\{e^{i\alpha}f'(z)\}>0$ ise $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da univalenttir' teoremini vermiştir.

1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z\in\mathbb{U}$ olmak üzere $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n=2,3,...$ için $|a_n|\le n$ tahmini uzun yıllar matematikçiler tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve 1984 yılına kadar bu tahmin sadece a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 katsayıları için sağlanabilirken 1985 yılında Brange's tarafından tüm a_n değerleri için ispatlanmıştır. Bu aşamalar aşağıdaki gibidir.

$n=2$ için	$\lvert a_2\rvert\le 2$	Bieberbach (1916)
$n=3$ için	$\lvert a_3\rvert\le 3$	Löwner (1923)
$n=4$ için	$\lvert a_4\rvert\le 4$	Garabedian ve Schiffer (1955)
$n=5$ için	$\lvert a_5\rvert\le 5$	Pederson ve Schiffer (1972)
$n=6$ için	$\lvert a_6\rvert\le 6$	Pederson ve Ozawa (1968-1969)
Tüm n'ler için	$\lvert a_n\rvert\le n$	L. De Branges (1985)

1985 yılında elde edilen bu çözüm univalent fonksiyonlar teorisini zenginleştirmiştir ve birçok yeni problemin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Bieberbach tahmininin eşitlik hali, birim diski konformal olarak negatif reel ekseninden $(-\infty,-1/4]$ aralığı çıkarılmış kompleks düzlem üzerine dönüştüren $f(z)=z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonu için sağlanır. Birim diskin Koebe fonksiyonu altındaki resmine univalentliği bozmadan herhangi bir açık küme ekleyemediğimizden bu fonksiyon $\mathcal{S}$ de tanım kümesi en geniş fonksiyondur.

Robertson 1936 yılında α mertebeli konveks ve α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar kavramlarını tanımlamıştır.

Bieberbach tahmininin Branges tarafından çözülmesine kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu altsınıflara ait fonksiyonlarla ilgili çeşitli bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıflardan en çok ilgi gören iki sınıf yıldızıl (starlike) ve konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir. İlerleyen yıllardaki çalışmalara ışık tutan yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilişki ilk kez Alexander tarafından verilmiştir.

$\mathbb{U}$ yu bir z_0 noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmeden bir $f(z)$ fonksiyonuna z_0 a göre yıldızıl bir fonksiyon denir. $z_0 = 0$ ise $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl bir fonksiyon denir. Benzer şekilde $\mathbb{U}$ yu bir konveks bir bölgeye resmeden bir $f(z)$ fonksiyonuna konveks bir fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$, konveks fonksiyonların sınıfı ise $\mathcal{C}$ ile gösterilir. $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $zf' \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır.

Nasr (1985) kompleks mertebeli yıldızıl fonksiyonlar için $\mathcal{S}^*(b)$ sınıfını tanımlamıştır. Frasin and Darus (2001) analitik fonksiyonların $\mathcal{B}(\alpha)$ sınıfını tanımlamış ve bu sınıfın bazı özelliklerini vermiştir. Frasin (2004) daha önce Darus ile çalıştığı $\mathcal{B}(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için yeni özellikler elde etmiştir. Shenan (2004) Salagean diferansiyel operatörüyle negatif katsayılı $p-$valent yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfı olan $\mathcal{S}_{n,r}^{p}(A,B,\alpha)$ sınıfını tanımlamıştır ve bu sınıfın birçok özelliğini incelemiştir. Frasin (2006) $\alpha\left(0 \le \alpha < 1\right)$ tipli b kompleks mertebeli analitik fonksiyonlar için yeni bir sınıf tanımlamıştır. $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ sınıfına ve $\mathcal{C}_p\left(\alpha\right)$ sınıfına ait bu fonksiyonlar için bir çok sonuç elde etmiştir. Frasin (2007) analitik ve univalent fonksiyonlar için $\mathcal{B}(\mu,\alpha)$ sınıfını tanımlamış ve bu sınıflar için bazı özellikler elde etmiştir. Frasin (2008) analitik fonksiyonların yeni $\mathcal{BS}\left(p,m,\mu,\alpha\right)$ sınıfını tanımlamış, analitik ve univalent fonksiyonların önceden bilinen alt sınıflarla ilişkilerini araştırmıştır.

İntegral operatörleri ile ilgili çalışmalar 1915 yılında Alexander tarafından başlatılmış ilerleyen zamanlarda bu operatörler genelleştirilmiş ve bu yeni operatörlerin yıldızıllığı, konveksliği, univalentliği gibi özellikler üzerinde çalışılmıştır. Bu çalışmalarda fonksiyonlar farklı sınıflardan seçilerek integral operatörleri için çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Şu anda genelleştirilerek üzerinde çalışılan integral operatörleri aşağıdaki gibidir;

Alexander (1915) operatörü

$$A[f](z)=\int_0^z \frac{f(t)}{t}dt,$$

Libera (1965) integral operatörü

$$L[f](z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt,$$

Bernardi (1969) integral operatörü

$$L_\gamma[f](z)=\frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt,$$

şeklindedir. Bu operatörlere uygun parametreler eklenerek daha genel halleri elde edilmiş ve bu operatörlerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Libera (1967) $f(z)$ fonksiyonu $|z|<1,\ z\in\mathbb{U}$ olmak üzere orijinde basit bir sıfırı olan ve başka sıfırı olmayan $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik olmak üzere $0<t_2-t_1<2\pi$ şartıyla

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}e^{it}dt\neq 0,\qquad \forall\ r,t_1,t_2$$

için f fonksiyonunun $\mathbb{U}$ açık birim diskinde univalent olduğu sonucunu göstermiştir.

Pfaltzgraff (1975) birim diskte analitik ve univalent $f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonları için $|\tilde{\lambda}|\leq\frac{1}{4}$ şartını sağlayan $\tilde{\lambda}$ kompleks sayısı için

$$f_{\tilde{\lambda}}(z)=\int_0^z f'(w)^{\tilde{\lambda}}dw$$

integral operatörünün birim diskte univalent olduğunu göstermiştir.

Chicra (1975) birim diskte analitik olan ve $|\dot{\alpha}|<\frac{\pi}{2}$ şartını sağlayan bazı $\dot{\alpha}$ ve $0\leq\tilde{\lambda}<1$ şartını sağlayan bazı $\tilde{\lambda}$ değerleri için

$$\Re\left\{e^{i\dot{\alpha}}\frac{1+zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\tilde{\lambda}\cos\dot{\alpha}$$

şartını sağlayan $f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonlarının bir sınıfının univalentlik kriteri üzerine bir çalışma yapmıştır. Burada bu tipteki fonksiyonlar için belli bir şart oluşturarak bu şartı sağlayan fonksiyonların birim diskte univalent olduğunu göstermiştir.

Miller (1978) yıldızıl integral operatörleri üzerine bir çalışma yapmıştır. Miller (1978) $\ddot{\alpha},\ \tilde{\beta},\ \dot{\gamma}$ ve $\dot{\delta}$ sabitlerinin uygun değerleri için $\mathcal{S}^*$ kümesini yine $\mathcal{S}^*$ a dönüştüren $\phi(z)$ ve $\varphi(z)$ analitik fonksiyonları üzerinde uygun sınırlamalarla

$$\mathcal{H}(f) \equiv \left[\frac{\tilde{\beta}+\dot{\gamma}}{z^{\dot{\gamma}}\phi(z)} \int_0^z f^{\ddot{\alpha}}(t)\varphi(t)t^{\dot{\delta}-1}dt \right]^{1/\tilde{\beta}} = z + \ldots$$

tipindeki integral operatörlerini tanımlamıştır. Parametreler üzerinde başka sınırlamalarla Miller (1978) $\mathcal{C},\ \mathcal{S}^* \times \mathcal{C},\ \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ kümelerini $\mathcal{S}^*$ kümesine taşıyan dönüşümleri elde etmiştir.

Breaz (2002) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$F(z) = \int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{f_n(t)}{t} \right)^{\alpha_n} dt$$

$$F_{\alpha\beta}(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^{\alpha} \left(\frac{g(t)}{t} \right)^{\beta} dt$$

$$G(z) = \left(\gamma \int_0^z t^{\gamma-1} \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{f_n(t)}{t} \right)^{\alpha_n} dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

ve

$$F_{\alpha\beta}(z)=\left(\gamma\int_0^z t^{\gamma-1}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{g(t)}{t}\right)^{\beta}dt\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

integral operatörleri için univalentlik kriterleri elde etmiştir.

Breaz (2008) $I_{k,\lambda,n}:\mathcal{A}^n\rightarrow\mathcal{A}$ integral operatörünü $f_1, f_2,..., f_n\in\mathcal{A}$, $\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\right)\in\mathbb{N}_0^n,\ n\in\mathbb{N}$ and $k\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$I_{k,\lambda,n}\left(f_1, f_2,..., f_n\right)=F,\quad D^kF(z)=\int_0^z\left(\frac{D^{\lambda_1}f_1(t)}{t}\right)^{\mu_1}...\left(\frac{D^{\lambda_n}f_n(t)}{t}\right)^{\mu_n}dt$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu operatörün bazı özelliklerini incelemiştir.

Breaz and Owa (2008) $0<\alpha_i<1$ olmak üzere

$$F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}(z)=\int_0^z\left[f_1'(t)\right]^{\alpha_1}...\left[f_n'(t)\right]^{\alpha_n}dt$$

integral operatörünü tanımlamış ve bu operatörün bazı özellikleri üzerinde çalışmıştır.

Pescar (2000), Bulut (2008), Breaz (2009) ve Frasin (2010) bir takım integral operatörleri için yıldızıllık ve konvekslik kriterleri elde etmiştir.

Frasin (2010) $p-$valent fonksiyonların yeni genel integral operatörlerinin konvekslik mertebelerini elde etmiştir.

Bizi bu çalışmayı yapmaya yönlendiren unsurların bazıları;

- $p-$valent fonksiyonları içeren genel integral operatörlerinin konveksliği için yeter şartlara duyulan ihtiyacın ortaya çıkması,

- Mevcut konvekslik kriterlerinin verilen bir $p-$valent fonksiyonun veya integral operatörünün konveksliğini test etmede yetersiz kalması,

- Farklı fonksiyon sınıflarına ve farklı fonksiyon sınıflarına ait fonksiyonların konveksliği için konvekslik kriterlerine ihtiyaç duyulmasıdır.

Sunulan bu tezde, analitik, $p-$valent fonksiyonlar ve genelleştirilmiş integral operatörleri için konvekslik kriterleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Çalışmamızın ilk kısmında $p-$valent fonksiyonlardan oluşan iki tane genel integral operatörü için konvekslik kriterleri araştırıldı. İkinci kısmında da çalışılmış olup daha farklı ve yine $p-$valent fonksiyonları barındıran genel integral operatörleri kullanılıp konvekslik kriteri üzerinde inceleme yapıldı. Üçüncü kısmında hem önceden tanımlanmış iki alt sınıfa ait fonksiyonların bazı özellikleri incelendi hem de içinde integral operatörlerini barındıran çok daha genel iki tane alt sınıf tanımlanıp bu alt sınıfların bazı özellikleri incelendi. Ayrıca negatif katsayılı $p-$valent fonksiyonların tanımlamış olduğumuz yeni sınıfa ait olma şartı incelendi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1 ($\varepsilon -$ komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $B(z_0,\varepsilon)=\{z_0 \in \mathbb{C}: |z-z_0|<\varepsilon\}$ kümesine z_0 noktasının $\varepsilon -$komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in A$ noktası için $B(z_0,\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer A kümesinin her noktası A nın bir iç noktası ise A kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin tümleyeni açık küme ise A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (çevre) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları adı verilir (Marsden 1973).

Tanım 2.1.6 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir eğri olsun. $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir (Ahlfors 1996).

Tanım 2.1.7 (Basit Kapalı Eğri): $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ bir eğri ve $t_1,t_2\in[a,b]$ olsun. $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ oluyorsa γ ya basit eğri ya da Jordan eğrisi denir. Eğer γ basit bir eğri ve $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğri denir. Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ ya diferansiyellenebilir eğri denir. Diferansiyellenebilir bir γ eğrisi ve $\forall t\in[a,b]$ için $\gamma'(t)\neq 0$ ise γ ya düzgün eğri denir.

Tanım 2.1.8 (Bağlantılı Küme): Eğer $A\subset A_1\cup A_2$, $A\cap A_1\neq\varnothing$, $A\cap A_2\neq\varnothing$ ve $A\cap A_1\cap A_2\neq\varnothing$ olacak şekilde A_1 ve A_2 gibi boş olmayan iki açık ve ayrık küme bulunamaz ise $A\subset\mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde A ya bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.9 (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı olan bir kümeye $\mathbb{C}$ de bir bölge denir.

2.2. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Tanım 2.2.1 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0\in\mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda diferansiyellenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir (Duren 1983).

Örneğin $f_1(z)=e^z$, $f_2(z)=\sin z$ ve $f_3(z)=\cos z$ fonksiyonlarının her biri kompleks düzlemdeki her noktada analitiktir.

Tanım 2.2.2 (Univalent Fonksiyon): Kompleks düzlemin açık bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu, kendi $f(D)$ resmi üzerine 1–1 oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde univalenttir denir. Bir başka deyişle $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece ve sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde univalent fonksiyon denir (Nehari 1952). Univalent fonksiyonlara tek katlı, yalınkat veya schlicht fonksiyon da denir.

Tanım 2.2.3 (Normalleştirilmiş Analitik Fonksiyonların Sınıfı): $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartını sağlayan $\mathbb{U}$ üzerindeki herhangi bir f holomorf fonksiyonuna normalize edilmiştir denir. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ formuna sahip ve $\mathbb{U}$ bölgesinde univalent olan normalleştirilmiş $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{S}$ sınıfı olarak adlandırılır (Goodman 1983).

$f(z)$ fonksiyonunun A da univalent olması için gerek ve yeter şart $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun A da univalent olmasıdır. $f(z)$ fonksiyonu univalent ise $f'(z) \neq 0$ ’dır. Fakat tersi doğru değildir.

Örneğin, $f(z) = e^{4\pi z}$ fonksiyonu için $f'(z) = 4\pi e^{4\pi z} \neq 0$ ’dır, oysa $\pm \dfrac{i}{4} \in \mathbb{U}$ için $e^{\pm \pi i} = -1$ olduğundan $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ ’da 1-1 değildir. Yani univalent değildir.

Tanım 2.2.4 ($p-$valent fonksiyon): $\mathbb{U}$ bölgesinde $f(z) = w_0$ denkleminin her w_0 için bu bölgede en fazla p kökü ve bir w_1 içinde $f(z) = w_1$ in tam olarak p kökü varsa $f(z)$ fonksiyonuna $\mathbb{U}$ da $p-$ valent fonksiyon denir.

Tanım 2.2.5 (Yıldızıl (Starlike) Bölge): $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $y \in B$ olsun. Eğer y noktasını B bölgesinin herhangi bir x noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B

bölgesinin içinde kalıyorsa B bölgesine y noktasına göre yıldızıl (starlike) bölge denir (Goodman 1983).

Daha açık bir ifadeyle B bölgesinin her bir noktası y noktasından görülebilir. Biz daha çok orijine göre yıldızıllık ile ilgileneceğiz. Bundan sonra yıldızıl dendiğinde orijine göre olduğunu anlayacağız.

Tanım 2.2.6 (Yıldızıl Fonksiyon): $f(z) \in \mathcal{S}$ olsun. $f(\mathbb{U})$ orijine göre yıldızıl ise, bu $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak, $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir.

Eğer, $f(\mathbb{U})$ w_0 noktasına göre yıldızıl ise o zaman w_0 noktasına bağlı yıldızıl bir fonksiyon olur. Örneğin; $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu olmak üzere $\log k'(z)$ yıldızıl bir fonksiyondur (Duren and McLaughlin 1972).

Tanım 2.2.7 (Yıldızıl Fonksiyonların Sınıfı): $f(z)$, $\mathbb{U}$ birim diskinde univalent bir fonksiyon $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ da

$$\Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha,$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha\left(0 \leq \alpha < 1\right)$ mertebeden yıldızıldır denir. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ olması ile birlikte α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir (Lehankani 1985).

Tanım 2.2.8 (Konveks Bölge): B bir bölge olsun. B deki her nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine B bölgesinde kalıyorsa B ye konveks bölge denir (Goodman 1983).

Bir bölgenin konveks olması için gerek ve yeter şart her noktasına göre yıldızıl olmasıdır.

Tanım 2.2.9 (Konveks Fonksiyon): B bir bölge, $f(z)$ bu bölgede analitik bir fonksiyon olsun. $f(B)$ konveks bir bölge ise, $f(z)$ ye B bölgesinde konveks fonksiyon denir (Goodman 1983). Ayrıca eğer bir f fonksiyonu konveks bir kümeyi, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $\mathcal{S}$ sınıfına ait konveks fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $\mathcal{C}$ ile göstereceğiz.

Örneğin, $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ ve $f(z)=\log\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|$ fonksiyonları konvekstir.

Tanım 2.2.10 (Konveks Fonksiyonların Sınıfı): $f(z)$, $\mathbb{U}$ birim diskinde univalent bir fonksiyon $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ da

$$\Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha\left(0\leq\alpha<1\right)$ mertebeden konvekstir denir. α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}\left(\alpha\right)$ ile gösterilir (Lehankani 1985).

Konveks ve yıldızıl fonksiyonların arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir; ‘‘ $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde konveks olması için gerekli ve yeterli koşul $zf'(z)$ nin $\mathbb{U}$ ’da yıldızıl olmasıdır.’’

$\alpha=0$ için bu fonksiyonlar ilk kez Nevanlinne tarafından ispatlandı (Lehankani 1985). Bu sınıflar arasında $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}^{*}\subset\mathcal{S}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Birim diski orijin noktasına göre yıldızıl bir bölgeye konform olarak dönüştüren fonksiyona yıldızıl fonksiyon, birim diski konveks bir bölgeye konform olarak dönüştüren fonksiyona da konveks fonksiyon denir (Goodman 1983).

Tanım 2.2.11 ($p-$valent Fonksiyon Sınıfı): $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ açık birim diskinde analitik olan

$$f(z)=z^{p}+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_{n}z^{n}\qquad \left(p\in\mathbb{N}=\{1,2,...,\}\right),$$

fonksiyonuna $p-$valent fonksiyon denir ve genel olarak $\mathcal{A}_p$ ile gösterilir.

Bu fonksiyonlar bir başka şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 2.2.12 : $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ açık birim diskinde analitik olan

$$f(z)=z^{p}+\sum_{k=p+n}^{\infty}a_{k}z^{k},\qquad \left(p,n\in\mathbb{N}=\{1,2,...,\}\right),$$

fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{A}(p,n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.13 ($p-$valent Yıldızıl Fonksiyon): $f\in\mathcal{A}_p$ fonksiyonu

$$\Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\qquad \left(z\in\mathcal{U}\right)$$

şartını sağlarsa $\alpha\left(0\le\alpha<p\right)$ mertebeden $p-$valent yıldızıl fonksiyon denir.

$\mathbb{U}$ birim diskinde $\alpha\left(0\leq\alpha<p\right)$ mertebeden $p-$valent yıldızıl olan bütün fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ ile gösterilir. $\mathcal{S}_1^*(\alpha)=\mathcal{S}^*(\alpha)$ olarak alınır.

Tanım 2.2.14 ($p-$valent Konveks Fonksiyon): $f\in\mathcal{A}_p$ fonksiyonu

$$\Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\qquad\left(z\in\mathcal{U}\right)$$

şartını sağlarsa f ye $\alpha\left(0\leq\alpha<p\right)$ mertebeden $p-$valent konveks fonksiyon denir.

$\mathbb{U}$ birim diskinde $\alpha\left(0\leq\alpha<p\right)$ mertebeden $p-$valent konveks olan bütün fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}_p\left(\alpha\right)$ ile gösterilir. $\mathcal{C}_1(\alpha)=\mathcal{C}(\alpha)$ olarak alınır.

Tanım 2.2.15: $\mathcal{A}_p$ sınıfında

$$\Re\left\{\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right\}>\alpha,\quad\left(z\in\mathcal{U}\right),$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $R_p(\alpha),\ \alpha\left(0\leq\alpha<p\right)$ sınıfındandır denir. $R_1(\alpha)=R(\alpha)$ olarak alınır.

Tanım 2.2.16 (b Kompleks Mertebeli $p-$valent Yıldızıl Fonksiyon): $\mathcal{A}_p$ sınıfında

$$\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right)\right\}>\alpha,\qquad\left(z\in\mathcal{U}\right),$$

şartını sağlayan $f\in\mathcal{S}_p(b,\alpha)$ fonksiyonlarına $\alpha\left(0\leq\alpha<p\right)$ tipli $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$

kompleks mertebeli yıldızıl fonksiyon denir.

Tanım 2.2.17 (b Kompleks Mertebeli $p-$valent Konveks Fonksiyonlar): $\mathcal{A}_p$ sınıfında

$$\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-p\right)\right\}>\alpha, \qquad \left(z\in\mathcal{U}\right),$$

şartını sağlayan $f\in\mathcal{C}_p(b,\alpha)$ fonksiyonlarına $\alpha\left(0\le\alpha<p\right)$ tipli $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks mertebeli konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.2.18 ($\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar): $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonunun $0<\beta\le 1,\ 0\le\mu<1,\ z\in\mathbb{U}$ ve

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|<\beta\left|\mu\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right|,$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün yıldızıl fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $MT\left(\beta,\mu\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.19 ($p-$valent $\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar): $f\in\mathcal{A}_p$ fonksiyonu

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-\beta\right)\ge\mu\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right| \quad \left(k\ge 0,\ z\in\mathbb{U}\right)$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $p-$valent $\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün yıldızıl fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $MT\left(p,\beta,\mu\right)$ olarak gösterilir.

Düzgün yıldızıl fonksiyonlar simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfıdır.

Tanım 2.2.20 ($p-$valent $\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün Diferansiyel Operatörünü İçeren Yıldızıl Fonksiyonlar): $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonunun $0 < \beta \le p,\ 0 \le \mu < p,\ z \in \mathbb{U}$ ve her $i = 1,2,...,n$ için $l_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\left| \frac{z\left(D^{l_i} f(z)\right)'}{D^{l_i} f(z)} - p \right| < \beta \left| \mu \frac{z\left(D^{l_i} f(z)\right)'}{D^{l_i} f(z)} + p \right|,$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $p-$valent $\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün diferansiyel operatörlü yıldızıl fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $MT\left(p,\beta,\mu\right)$ olarak gösterilir.

Sonuç 2.2.1. Tanım 2.2.20 de $i = 1,2,...,n$ için $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$ ve $p = 1$ alındığında Breaz (2008) ve Mohammed (2010) tarafından çalışılan sınıf elde edilir.

Tanım 2.2.21 ($p-$valent Düzgün Konveks Fonksiyonlar): $\mathcal{A}_p$ sınıfında

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \ge \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \quad \left(z \in \mathbb{U} \right),$$

şartını sağlayan $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonlarının sınıfına düzgün konveks fonksiyonların sınıfı denir.

Tanım 2.2.22 (β Mertebeli $\mu-$düzgün Konveks Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun eğer $0 \le \beta < 1,\ \mu \ge 0,\ z \in \mathbb{U}$ ve

$$\Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \ge \mu\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| + \beta,$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün konveks fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $KD(\beta,\mu)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.23 ($p-$valent $\beta-$mertebeli $k-$düzgün Konveks Fonksiyonlar): $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu $-1 \le \beta < p$ olmak üzere

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\beta\right) \ge k\left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-p\right| \quad \left(k \ge 0,\ z \in \mathbb{U}\right)$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $p-$valent $\beta-$mertebeli $k-$düzgün konveks fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $KD(p,\beta,k)$ olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.24 ($p-$valent $\beta-$ mertebeli $\mu-$düzgün Salagean Operatörünü İçeren Konveks Fonksiyon): $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonunun eğer $0 \le \beta < p,\ \ \mu \ge 0,\ \ z \in \mathbb{U}$ ve her $i = 1,2,...,n$ için $l_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(D^{l_i} f(z)\right)''}{\left(D^{l_i} f(z)\right)'}\right\} \ge \mu\left|1+\frac{z\left(D^{l_i} f(z)\right)''}{\left(D^{l_i} f(z)\right)'}-p\right| + \beta,$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına $p-$valent $\beta-$mertebeli $\mu-$düzgün Salagean operatörünü içeren konveks fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $KD(p,\beta,\mu)$ olsun.

Tanım 2.2.25: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun

$$\Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}<\gamma, \qquad (z\in\mathbb{U}),\ \gamma>1,$$

şartlarını sağlayan f_i fonksiyonları $\mathcal{N}(\gamma)$ sınıfındadır denir.

Tanım 2.2.26: $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonunun

$$\Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}<\gamma, \qquad (z\in\mathbb{U}),\ \gamma>p,$$

şartlarını sağlayan f_i fonksiyonları $\mathcal{N}_p(\gamma)$ sınıfındadır denir.

Ayrıca $\mathcal{N}_1(\gamma)=\mathcal{N}(\gamma)$ olsun.

Sonuç 2.2.2: Bu sınıfta $p=1$ alınırsa Owa (2003), Breaz (2008), Uralegaddi (1994) ve Mohammed (2010) un çalıştığı sınıf elde edilir.

Daha önce $\mathcal{S}_p^*(b,\alpha)$ sınıfında $p=1$ ve $\alpha=0$ için $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks mertebeli yıldızıl fonksiyonların $\mathcal{S}_p^*(b)$ sınıfı Nasr and Aouf (1985) tarafından ve aynı sıralarda $b\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks mertebeli konveks fonksiyonların $\mathcal{C}_p(b)$ sınıfı Wiatrowski (1985) tarafından çalışıldı.

Tanım 2.2.27: $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = zf'(z)$$

$$\vdots$$

$$D^k f(z) = D\left(D^{k-1} f(z)\right)$$

tipindeki operatöre Salagean türev operatörü denir ve D^k ile gösterilir.

Ayrıca $\mathcal{A}_p$ sınıfına ait fonksiyonlar için $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere bir D^k operatörü

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = \frac{1}{p} zf'(z)$$

$$\vdots$$

$$D^k f(z) = D\left(D^{k-1} f(z)\right) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

D^k diferansiyel operatörü Shenan (2004) tarafından tanımlanmıştır. Bu operatörde $p = 1$ alındığında Salagean (1983) türev operatörü elde edilir.

Eğer $f \in \mathcal{A}_p$ ise

$$D^k f(z) = z^p + \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p} \right)^k a_m z^m, \quad \left(p \in \mathbb{N} = \{1,2,...,\} \right), \ \left(z \in \mathbb{U} \right),$$

$f \in T_p$ ise

$$D^k f(z) = z^p - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p} \right)^k a_m z^m, \quad \left(p \in \mathbb{N} = \{1,2,...,\} \right), \ \left(z \in \mathbb{U} \right),$$

ve $f \in \mathcal{A}\left(p,n \right)$ ise

$$D^k f(z) = z^p + \sum_{j=p+n}^{\infty} \left(\frac{j}{p} \right)^k a_j z^j, \qquad \left(p,n \in \mathbb{N} = \{1,2,...,\} \right), \ \left(z \in \mathbb{U} \right),$$

olur.

Sonuç 2.2.3: Tanım 1.14 de $i = 1,2,...,n$ için $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$ ve $p = 1$ alındığında Shams (2004), Owa (2009), Aghalary et al. (1994) ve Mohammed (2010) tarafından çalışılan sınıf elde edilir.

Tanım 2.2.28: $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu $\alpha \in [0, p)$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\Re\left\{ p + \frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D^k f(z) \right)'}{D^k f(z)} - p \right) \right\} > \alpha, \quad \left(z \in \mathcal{U} \right), \tag{2.2}$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına α tipli b kompleks mertebeli $p-$valent yıldızıl fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}_{p,k}(b,\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.29: $f \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu $\alpha \in [0,p),\ b \in \mathbb{C}-\{0\},\ k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\Re\left\{ p + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{z\left(D^k f(z)\right)''}{\left(D^k f(z)\right)'} - p \right) \right\} > \alpha, \qquad \left(z \in \mathcal{U}\right), \tag{2.3}$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonlarına α tipli b kompleks mertebeli $p-$valent konveks fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{C}_{p,k}(b,\alpha)$ ile gösterilir.

Sonuç 2.2.4:

(1) $\mathcal{S}_{1,0}(b,0) = \mathcal{S}_{\alpha}^{*}(b)$ ve $\mathcal{S}_{1,1}(b,\alpha) = \mathcal{C}_{1,0}(b,0) = \mathcal{C}_{\alpha}(b)$ (Frasin 2006).

(2) $\mathcal{S}_{1,0}(b,\alpha) = \mathcal{S}_{\alpha}^{*}(b)$ ve $\mathcal{S}_{1,1}(b,\alpha) = \mathcal{C}_{1,0}(b,\alpha) = \mathcal{C}_{\alpha}(b)$ (Wiatrowski 1971).

(3) $\mathcal{S}_{1,k}(b,0) = \mathcal{S}_{k}(\alpha)$ (Salagean 1983).

(4) $\mathcal{S}_{1,0}(\cos\lambda e^{-i\lambda},\alpha) = \mathcal{S}_{\alpha}^{\lambda}(|\lambda| < \pi/2,\ 0 \le \alpha < 1)$, α mertebeden $\lambda-$spirallike fonksiyonların sınıfı (Libera 1967).

(5) $\mathcal{C}_{1,0}(\cos\lambda e^{-i\lambda},\alpha) = \mathcal{C}_{\alpha}^{\lambda}(|\lambda| < \pi/2,\ 0 \le \alpha < 1)$, α mertebeden $\lambda-$Robertson fonksiyonların sınıfı (Chicra 1975).

2.3 Analitik Fonksiyonlardan Oluşan Bazı İntegral Operatörleri

Tanım 2.3.1: Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ için $l = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$ $i = 1, 2, ..., n$ için $f_i,\ g_i,\ h_i \in \mathcal{A}_p$ olsun. Aşağıdaki integral operatörlerini $i = 1, 2, ..., n$ ve (2.1) ile tanımlanan D^k operatörleri için $f_i,\ g_i,\ h_i \in \mathcal{A}_p$ olmak üzere

$$\mathcal{I}_{n,p}^{l,\delta}(f_1, f_2, ..., f_n) : \mathcal{A}_p^n \to \mathcal{A}_p$$

$$\mathcal{I}_{n,p}^{l,\delta}(f_1, f_2, ..., f_n) = F_{p,n,l,\delta}(z) = \int_0^z pt^{p-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{D^{l_i} f_i(t)}{t^p} \right)^{\delta_i} dt, \qquad (2.4)$$

ikinci olarak

$$\mathcal{J}_{n,p}^{l,\delta}(g_1, g_2, ..., g_n) : \mathcal{A}_p^n \to \mathcal{A}_p$$

$$\mathcal{J}_{n,p}^{l,\delta}(g_1, g_2, ..., g_n) = \mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z) = \int_0^z pt^{p-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\left(D^{l_i} g_i(t)\right)'}{pt^{p-1}} \right)^{\delta_i} dt, \qquad (2.5)$$

ve son olarak

$$\mathcal{V}_{n,p}^{l,\lambda}(h_1, h_2, ..., h_n) : \mathcal{A}(p,n) \to \mathcal{A}(p,n)$$

$$\mathcal{V}_{n,p}^{l,\lambda}(h_1, h_2, ..., h_n) = \mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z) = \int_0^z pt^{p-1} \prod_{i=1}^{n} \left[e^{D^{l_i} h_i(t)/t^{p-1}} \right]^{\lambda} dt, \qquad (2.6)$$

integral operatörleri tanımlanır.

Sonuç 2.3.1: $F_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü Saltık (2010) tarafından çalışılmıştır. Eğer $i = 1, 2, ..., n$ için $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$ alınırsa $F_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü Frasin (2010) tarafından çalışılan $F_p(z)$ operatörüne dönüşür. (2.4) ile tanımlanan integral operatöründe $p = 1$ alınırsa Breaz (2009) tarafından çalışılan $D^k F(z)$ integral operatörü elde edilir. (2.4) de $p = 1$ ve $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$ alınırsa $F_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü Breaz and Breaz (2002) ve Mohammed (2009) tarafından çalışılan $F_n(z)$ operatörü elde edilir. $p = n = 1$, $l_1 = 0$ ve $\delta_1 = \delta$ alınırsa Pescar et al. (2000), Breaz (2008), Mohammed (2009) tarafından çalışılan $I_\delta(f)(z)$ operatörü elde edilir. $I_\delta(f)(z)$ integral operatörü $\delta_1 = \delta \in [0,1]$ özel durumu Miller et al. (1978) tarafından çalışıldı. (2.4)'de $p = n = 1$, $l_1 = 0$ ve $\delta_1 = 1$ alırsak Alexander (1915) in $I(f)(z)$ integral operatörü elde edilir.

Sonuç 2.3.2: $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü Saltık (2010) tarafından çalışılmıştır. Eğer $i = 1, 2, ..., n$ için $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$ alınırsa $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü Frasin (2010) tarafından çalışılan $\mathcal{G}_p(z)$ fonksiyonuna dönüşür. (2.5) integral operatöründe $p = 1$ ve $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$ alınırsa $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü Breaz (2008) ve Mohammed (2009) tarafından çalışılan $\mathcal{G}_{\mu_1,\mu_2,...,\mu_n}(z)$ operatörüne dönüşür. Eğer (2.5) de $p = n = 1$, $l_1 = 0$ ve $\mu_1 = \mu$ alırsak Pfaltzgraff (1975), Breaz (2008), Mohammed (2009) ve Kim et al. (1972) tarafından çalışılan $G(z)$ integral operatörü elde edilir.

Sonuç 2.3.3: Eğer $i = 1, 2, ..., n$ için $p = 1$ ve $l_1 = l_2 = ... = l_n = 0$ alınırsa $\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)$ integral operatörü Frasin (2010) tarafından çalışılan $F_p(z)$ operatörüne dönüşür.

Lemma 2.3.1 (Genelleştirilmiş Schwarz Lemma):

f, $\mathbb{U}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ diskinde analitik ve M sabit olmak üzere $|f(z)| < M$ olsun.

Eğer f, $z=0$ için fonksiyonu m 'den daha büyük mertebeden (katlılıkları dahil) bir tek sıfıra sahipse bu durumda

$$\left|f(z)\right| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m, \quad z \in \mathbb{U}_R \tag{1.7}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}\dfrac{M}{R^m}|z|^m$ fonksiyonu sağlanır (Ponussamy and Silverman 2006).

Tanım 2.3.2: Eğer $F_n(z)$ integral operatörü $0 \leq \beta < 1,\ \mu \geq 0,\ z \in \mathbb{U}$ ve her $i=1,2,...,n$ için

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(F_n(z)\right)''}{\left(F_n(z)\right)'}\right\} \geq \mu\left|\frac{z\left(F_n(z)\right)''}{\left(F_n(z)\right)'}\right|+\beta,$$

şartlarını sağlayan f_i fonksiyonları $KDF_n\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ sınıfındadır denir.

A. Mohammed (2.4) ün özel hali olan $F_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(z)=\int\limits_0^z\prod\limits_{i=1}^n\left(f_i'(t)\right)^{\delta_i}dt$ operatörünü kullanarak aşağıdaki sınıfı tanımlamıştır.

Tanım 2.3.3: Eğer $F_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(z)$ integral operatörü $0 \leq \beta < 1,\ \mu \geq 0,\ z \in \mathbb{U}$ ve

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(F_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(z)\right)''}{\left(F_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(z)\right)'}\right\} \geq \mu\left|\frac{z\left(F_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(z)\right)''}{\left(F_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(z)\right)'}\right|+\beta,$$

şartlarını sağlayan her $i=1,2,...,n$ için f_i fonksiyonları $KDF_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$

sınıfındadır denir.

(2.4), (2.5) eşitlikleri ve Tanım 2.2.24 kullanılarak $KD(p,\beta,\mu)$ nün yeni iki sınıfını aşağıdaki gibi tanımladık.

Tanım 2.3.4: Eğer (2.4) ile tanımlanan $F_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörünün $0 \leq \beta < p$, $\mu \geq 0$, $z \in \mathbb{U}$ ve her $i = 1,2,...,n$ için $l_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\Re\left\{1 + \frac{z\left(D^{l_i} F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(D^{l_i} F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\} \geq \mu\left|1 + \frac{z\left(D^{l_i} F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(D^{l_i} F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p\right| + \beta,$$

şartlarını sağlayan her $i = 1,2,...,n$ için f_i fonksiyonları $KDF_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ sınıfındadır denir.

Tanım 2.3.5: Eğer (2.5) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörünün $0 \leq \beta < p$, $\mu \geq 0$, $z \in \mathbb{U}$ ve her $i = 1,2,...,n$ için $l_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\Re\left\{1 + \frac{z\left(D^{l_i} \mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(D^{l_i} \mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\} \geq \mu\left|1 + \frac{z\left(D^{l_i} \mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(D^{l_i} \mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p\right| + \beta,$$

şartlarını sağlayan her $i = 1,2,...,n$ için f_i fonksiyonları $KD\mathcal{G}_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ sınıfındadır denir.

Çalışmamızda $F_{p,n,l,\delta}(z)$, $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ ve $\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)$ integral operatörlerinin farklı sınıflar üzerindeki konvekslik mertebeleri verilmiştir ve $F_{p,n,l,\delta}(z)$ ile $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ operatörlerini içeren yeni iki sınıf tanımlanmıştır. Ayrıca negatif katsayılı fonksiyonlar için bir kısım kriterler elde edilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Bazı İntegral Operatörleri İçin Konvekslik Şartları

Teorem 3.1.1: Kabul edelim ki $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,...,n\}$ ve $\alpha_i > 0$ olsun. Her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}$ olduğunu varsayalım. Buradan $F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}$ integral operatörü konvekstir (Breaz and Owa 2008).

Teorem 3.1.2: Kabul edelim ki $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,...,n\}$ ve $\alpha_i > 0$ olsun. Her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}(\beta_i),\ 0 \le \beta_i < 1$ olduğunu varsayalım. Bu şartlar altında $F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}$ integral operatörü $0 \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\beta_i - 1) + 1 < 1$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\beta_i - 1) + 1$ mertebeden konvekstir (Breaz and Owa 2008).

Teorem 3.1.3: Kabul edelim ki $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,...,n\}$ ve $\alpha_i > 0$ olsun. Her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in KD(\alpha)$ olduğunu varsayalım. Bu şartlar altında $F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}$ integral operatörü $1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ge 0$ olmak üzere $1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ mertebeden konvekstir (Breaz and Owa 2008).

Breaz (2008) $\mathcal{C}_\alpha(b)$ sınıfına ait fonksiyonları içeren integral operatörü için bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmaları $\alpha_i > 0$ için

$$F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}(z) = \int_0^z \left[f_1'(t) \right]^{\alpha_1} ... \left[f_n'(t) \right]^{\alpha_n} dt \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlamıştır.

Teorem 3.1.4: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}_\alpha(b)$, $\alpha_i > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve

$$0 \le (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 < 1$$

olsun. Buradan

$$\tilde{\sigma} = (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1$$

için $F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n} \in \mathcal{C}_{\tilde{\sigma}}(b)$ olur (Breaz 2008).

Bulut (2008) her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{A}$ ve $\alpha_i > 0$ şartıyla (3.2) integral operatörleri üzerinde çalışma yapmıştır ve bu çalışmalarında Breaz (2008) in makalesindeki Teorem 2.1 ve Teorem 2.3 ü genelleştirmiştir. Bu teoremler aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.5: Kabul edelim ki her $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}_{\beta_i}(b)$, $0 \le \beta_i < 1$, $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $1 \le i \le n$ için $\alpha_i > 0$ olsun. Eğer

$$0 \le 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\beta_i - 1) < 1$$

olursa $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\beta_i - 1)$ şartıyla $F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n} \in \mathcal{C}_{\lambda}(b)$ olur (Bulut 2008).

Breaz (2009) (3.1) integral operatörü $\breve{\delta} \in [0,1)$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere Salagean (1983) tarafından tanımlanan

$$\mathcal{S}_k(\breve{\delta}) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left\{ \frac{D^{k+1} f(z)}{D^k f(z)} \right\} > \breve{\delta},\ z \in \mathbb{U} \right\}$$

$\breve{\delta}$ mertebeden $k-$yıldızıl fonksiyonların sınıfı üzerinde bazı çalışmalar yapmıştır. Breaz (2009) bu sınıfı daha da genişleterek bazı analitik fonksiyonlar için yeni bir integral operatörü tanımlamıştır ve bu sınıftan seçtiği fonksiyonlara bir takım şartlar yükleyerek (3.1) integral operatörünün $\mathcal{S}_k(\breve{\delta})$ sınıfında olmasını garanti eden bazı şartlar araştırmıştır.

Breaz (2009) Kompleks mertebeli analitik fonksiyonları kapsayan (3.2) integral operatörleri için bazı özellikleri elde etmiştir. Bu çalışmalar aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.6: Kabul edelim ki $i \in \{1,...,n\}$ için $\alpha_i > 0$ ve

$$0 \le 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$$

olsun. Ayrıca $i = 1,...,n$ için $f_i \in \mathcal{S}(1-b)$ ve $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Buradan $\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ olmak üzere $F_n \in \mathcal{C}_\gamma(b)$ olur (Breaz 2009).

Teorem 3.1.7: Kabul edelim ki $i \in \{1,...,n\}$ için $f_i \in \mathcal{C}(b)$ ve $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun. Buradan $\eta = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ ve $0 \le 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$ olmak üzere $F_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n} \in \mathcal{C}_\eta(b)$ olur (Breaz 2009).

Frasin (2010) $p-$valent fonksiyonların yeni genel integral operatörlerinin konvekslik mertebelerini elde etmiştir. Frasin (2010) $\alpha_i > 0,\ -1 \le \beta_i < p$ olmak üzere

$$F_p(z)=\int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{f_1(t)}{t^p}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{f_n(t)}{t^p}\right)^{\alpha_n}dt$$

ve

$$G_p(z)=\int_0^z pt^{p-1}\left(\frac{f_1'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{f_n'(t)}{pt^{p-1}}\right)^{\alpha_n}dt$$

integral operatörleri üzerinde çalışmıştır. İlk çalışmasında F_p operatörü için $p-$valent konvekslik şartı elde etmiştir.

Teorem 3.1.8: Kabul edelim ki $i\in\{1,...,n\}$ için $\alpha_i>0,\ \ -1\le\beta_i<p,\ \ k_i>0$ ve $f_i\in MT(p,\beta_i,k_i)$ olsun. Eğer $0\le p+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\beta_i-p\right)<p$ olursa buradan F_p integral operatörü $p+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\beta_i-p\right)$ mertebeden $p-$valent konvekstir (Frasin 2010).

Teorem 3.1.9: Kabul edelim ki $i\in\{1,...,n\}$ için $\alpha_i>0,\ \ -1\le\beta_i<p,\ \ k_i>0$ ve $f_i\in KD(p,\beta_i,k_i)$ olsun. Eğer $0\le p+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\beta_i-p\right)<p$ olursa buradan G_p integral operatörü $p+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\beta_i-p\right)$ mertebeden $p-$valent konvekstir (Frasin 2010).

Lupaş (2009) $f\in\mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonunu içeren yeni bir sınıf olan Salagean türev operatörünü içeren $\mathcal{BS}\left(p,m,\mu,\alpha\right)$ sınıfını tanımlamıştır.

Tanım 3.1.10: Eğer $p,n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \mu\ge 0,\ \alpha\in[0,1)$ için

$$\left| \frac{D^{m+1} f(z)}{z^p} \left(\frac{z^p}{D^m f(z)} \right)^{\mu} - p \right| < p - \alpha \tag{1.8}$$

şartları sağlanırsa $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{BS}(p,m,\mu,\alpha)$ sınıfına aittir denir.

Sonuç 3.1.1:

$\mathcal{BS}(p,m,\mu,\alpha)$ ailesi bazı iyi bilinen sınıfları da içeren analitik ve univalent olan sınıfları kapsayan analitik fonksiyonların yeni bir sınıfıdır. Örneğin $\mathcal{BS}(1,0,1,\alpha) \equiv \mathcal{S}^*(\alpha)$, $\mathcal{BS}(1,1,1,\alpha) \equiv \mathcal{C}(\alpha)$, $\mathcal{BS}(p,0,0,\alpha) \equiv R_p(\alpha)$, $\mathcal{BS}(1,0,0,\alpha) \equiv R(\alpha)$. Bir diğer altsınıf Frasin and Darus (2001) tarafından tanımlanan $\mathcal{BS}(1,0,2,\alpha) \equiv \mathcal{B}(\alpha)$ ve Frasin and Jahangiri (2008) tarafından tanımlanan $\mathcal{BS}(1,0,\mu,\alpha) \equiv \mathcal{B}(\mu,\alpha)$ özel sınıflarıdır.

Frasin (2010) $\left| f'(z) \left(\frac{z}{f(z)} \right)^{\mu} - 1 \right| < 1-\alpha$ şartını sağlayan $i = 1,2,...,n$ için sırasıyla f_i ve f fonksiyonları için $\int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\frac{1}{\beta_i}} dt$ ve $\int_0^z \left(te^{f(t)} \right)^{\gamma} dt$ integral operatörlerinin konvekslik mertebelerini elde etmiştir. Bu sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.11: Kabul edelim ki her $i = 1,2,...,n$ için $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 1$ ve $f_i \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\mathcal{B}(\mu,\alpha)$ sınıfına ait olsun. Eğer $|f_i(z)| < M$, $(M \geq 1 \,;\, z \in \mathbb{U})$ olursa $\int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(t)}{t} \right)^{\frac{1}{\beta_i}} dt$ integral operatörü her $i = 1,2,...,n$ için $\beta_i \in \mathbb{C} - \{0\}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\beta_i|} \left((2-\alpha) M^{\mu-1} + 1 \right) < 1$$

ve

$$\delta = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\beta_i|}\left(\left(2-\alpha\right)M^{\mu-1}+1\right)$$

olmak üzere $\mathcal{C}(\delta)$ sınıfına aittir (Frasin 2010).

Teorem 3.1.12: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $0<\alpha<1$, $\mu\geq 1$ ve $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $\mathcal{B}(\mu,\alpha)$ sınıfına ait olsun. Eğer $|f_i(z)|<M$, $(M\geq 1\,;\ z\in\mathbb{U})$ olursa $\int_0^z \left(te^{f(t)}\right)^{\gamma} dt$ integral operatörü $\gamma\in\mathbb{C}$, $|\gamma|<\frac{1}{\left(2-\alpha\right)M^{\mu}+1}$ ve

$$\delta = 1 - |\gamma|\left(\left(2-\alpha\right)M^{\mu}+1\right)$$

olmak üzere $\mathcal{C}(\delta)$ sınıfına aittir (Frasin 2010).

3.2. İntegral Operatörlerinin Bazı Sınıflara Ait Olma Şartları

Breaz (2008) $\mathcal{S}_{\alpha}^{*}(b)$ sınıfına ait aşağıdaki integral operatörü için bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmalarda $F_n(z)$ operatörünü $\alpha_i>0$ olmak üzere

$$F_n(z)=\int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t}\right)^{\alpha_1}...\left(\frac{f_n(t)}{t}\right)^{\alpha_n} dt \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlamıştır.

Teorem 3.2.1: Kabul edelim ki her $i\in\{1,...,n\}$ için $\alpha_i>0$, $0\leq\alpha<1$ şartıyla α bir reel sayı ve

$$0 \le (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 < 1$$

olsun. Eğer her $i \in \{1, ..., n\}$ için $f_i \in \mathcal{S}^*_\alpha(b),\ b \in \mathbb{C} - \{0\}$ alınırsa

$$\sigma = (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1$$

için $F_n \in \mathcal{S}_\sigma(b)$ olur (Breaz 2008).

Bulut (2008) her $i \in \{1, ..., n\}$ için $f_i \in \mathcal{A}$ ve $\tilde{\alpha}_i > 0$ alırsak (3.1) integral operatörleri üzerinde çalışma yapmıştır ve bu çalışmalarında Breaz (2008) in makalesindeki Teorem 2.1 genelleştirmiştir. Bu teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.2: Kabul edelim ki her $i \in \{1, ..., n\}$ için $f_i \in \mathcal{S}^*_{\beta_i}(b),\ 0 \le \beta_i < 1,\ b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $1 \le i \le n$ için $\alpha_i > 0$ olsun. Eğer

$$0 \le 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\beta_i - 1) < 1$$

olursa $\Omega = 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\beta_i - 1)$ şartıyla $F_n \in \mathcal{S}_\Omega(b)$ olur (Bulut 2008).

Teorem 3.2.3: Kabul edelim ki her $i = \{1, 2, ..., n\}$ için $\delta_i \in \mathbb{R},\ \delta_i > 0,\ f_i \in \mathcal{A}$ ve $\left|\frac{f_i'(z)}{f_i(z)}\right| < M_i$ olsun. Eğer $f_i \in MT(\mu_i, \beta_i)$ ise $\rho = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \beta_i (\mu_i M_i + 1) + 1$ olmak üzere $F_n \in \mathcal{N}(\rho)$ olur (Mohammed 2010).

Teorem 3.2.4: Kabul edelim ki her $i=\{1,2,...,n\}$ için $\delta_i>0,\ \ \beta_i>0$ özelliği ile $0\le\beta_i<1$ ve $\mu_i\ge 0$ olmak üzere $f_i\in KD(\mu_i,\beta_i)$ olsun. Eğer $0<\sum_{i=1}^{n}\delta_i(1-\beta_i)\le 1$ ise $F_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(z)$ integral operatörü $\rho=1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i(1-\beta_i)$ mertebeden konvekstir (Mohammed 2010).

3.3. Negatif Katsayılı Fonksiyonları İçeren İntegral Operatörleri İçin Bazı Şartlar

Teorem 3.3.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $f_i\in T$ olsun. Buradan $f_i\in KDF_n(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum_{m=2}^{\infty}\delta_i(m-1)(\mu+1)a_{m,i}}{1-\sum_{m=2}^{\infty}a_{m,i}}\right]\le 1-\beta$$

olmasıdır (Mohammed 2010).

Teorem 3.3.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $f_i\in T$ olsun. Buradan $f_i\in KDF_{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n}(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum_{m=2}^{\infty}\delta_i m(m-1)(\mu+1)a_{m,i}}{1-\sum_{m=2}^{\infty}ma_{m,i}}\right]\le 1-\beta$$

olmasıdır (Mohammed 2010).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve UYGULAMALAR

4.1. $F_{p,n,l,\delta}(z)$ Operatörünün $\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ Konveks Olmasının Yeterli Şartları

Teorem 4.1.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\leq\alpha_i<p$, $b\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $f_i\in\mathcal{S}_{p,l_i}^*(b,\alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)+p<p$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)+p$$

olmak üzere (2.4) ile tanımlanan $F_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü $\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ sınıfındadır.

İspat: (2.4) tanımından $F_{p,n,l,\delta}(z)\in\mathcal{A}_p$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'=pz^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D^{l_i}f_i(z)}{z^p}\right)^{\delta_i} \tag{4.1}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.1) in her iki tarafının logaritmasını alıp z ile çarparsak

$$1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\frac{z\left(D^{l_i}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right) \tag{4.2}$$

olur. Buradan (4.2) nin her iki tarafını $\frac{1}{b}$ ile çarparsak

$$\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D^{l_i}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right)\right)-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i$$

elde edilir. Aynı zamanda her iki tarafa p ilave edersek

$$p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D^{l_i}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right)\right)-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i+p \qquad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak (4.3) eşitliğinin reel kısmı

$$\begin{aligned}&\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right)\right\}\\&=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(\frac{z\left(D^{l_i}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right)\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i+p\end{aligned} \qquad (4.4)$$

olarak bulunur. (2.2) ve (4.4) ten $i=1,2,...,n$ için $f_i\in\mathcal{S}_{p,l_i}(b,\alpha_i)$ olduğundan

$$\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right)\right\}>\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)+p$$

yazılır. Buna göre $F_{p,n,l,\delta}(z)$ fonksiyonu, $\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)+p$ tipte ve $b\in\mathbb{C}-\{0\}$

kompleks mertebeden $p-$valent konvekstir. Yani $F_{p,n,l,\delta}(z)$ operatörü $\mathcal{C}_p(b,\gamma)$ sınıfındadır. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 4.1.1:

(1) Teorem 4.1.1 de $i=1,2,...,n$ için $p=1$ ve $l_i=0$ alırsak, Bulut (2008) deki Teorem 1 elde edilir.

(2) Teorem 4.1.1 de $i=1,2,...,n$ için $p=1,\ \alpha_i=\delta$ ve $l_i=0$ alırsak, Breaz (2008) deki Teorem 1 elde edilir.

(3) Teorem 4.1.1 de $i=1,2,...,n$ için $p=1,\ \alpha_i=\delta$ ve $l_i=0$ alırsak, Breaz (2009) daki Teorem 1 elde edilir.

Teorem 4.1.1 de $p=n=1,\ l_1=0,\ \delta_1=\delta$ ve $f_1=f$ alırsak Sonuç 4.1.2 elde edilir.

Sonuç 4.1.2: Kabul edelim ki $\delta>0,\ \ 0\le\alpha<1$ olmak üzere α bir reel sayı ve $f\in\mathcal{S}_\alpha^*(b)$ olsun. Eğer $0\le\delta(\alpha-1)+1<1$ ise $\int_0^z\left(\frac{f(t)}{t}\right)^\delta$ integral operatörü birim diskte $\delta(\alpha-1)+1$ tipte $b\in\mathbb{C}-\{0\}$ kompleks mertebeden konvekstir.

Teorem 4.1.1 de $p=1,\ b=\cos\lambda e^{i\lambda}$ ve $i=1,2,...,n$ için $l_i=0$ alırsak Sonuç 4.1.3 elde edilir.

Sonuç 4.1.3: Kabul edelim ki $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ \ b\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $i=1,2,...,n$ için $f_i\in\mathcal{S}_{\alpha_i,\lambda}^*\ \left(|\lambda|<\pi/2,\ 0\le\alpha_i<1\right)$ olsun. Ayrıca

$$0\le\sum_{i=1}^{n}\delta_i(\alpha_i-1)+1<1$$

olsun. Bu durumda $F_n(z)$ integral operatörü

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - 1\right) + 1$$

olmak üzere $\mathcal{C}_{\gamma}^{\lambda} \ \left(|\lambda| < \pi/2,\ 0 \le \alpha_i < 1\right)$ sınıfındadır.

4.2. $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ Operatörünün $\mathcal{C}_p(b,\eta)$ Sınıfı Üzerinde Konveks Olmasının Yeterli Şartları

Teorem 4.2.1: Kabul edelim ki $i = 1,2,...,n,$ $l = \left(l_1, l_2, ..., l_n\right) \in \mathbb{N}_0^n,$ $\delta = \left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \in \mathbb{R}_+^n,$ $0 \le \alpha_i < p,$ $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ ve $g_i \in \mathcal{C}_{p,l_i}(b, \alpha_i)$ olsun. Ayrıca

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - p\right) + p < p$$

eşitsizliği sağlansın. Buradan

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left(\alpha_i - p\right) + p$$

olmak üzere (2.5) ile tanımlanan $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörünün $\mathcal{C}_p(b,\eta)$ sınıfında olduğu görülür.

İspat: (2.5) den $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z) \in \mathcal{A}_p$ olur. Diğer taraftan

$$\mathcal{G}'_{p,n,l,\delta}(z) = pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(D^{l_i}g_i(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^{\delta_i} \tag{4.5}$$

olur. (4.5) in her iki tarafının logaritmasını alıp Teorem 4.1.1 in ispatındaki işlemlerin benzerlerini yaparsak

$$1+\frac{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(1+\frac{z\left(D^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D^{l_i}g_i\right)'(z)} - p\right) \tag{4.6}$$

olur. (4.6) nın her iki tarafını $\frac{1}{b}$ ile çarparsak

$$p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p\right) = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D^{l_i}g_i\right)'(z)} - p\right)\right\} - p\sum_{i=1}^{n}\delta_i + p$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının reel kısmını alırsak

$$\begin{aligned}&\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p\right)\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\delta_i\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{\left(D^{l_i}g_i\right)''(z)}{\left(D^{l_i}g_i\right)'(z)} - p\right)\right\} - p\sum_{i=1}^{n}\delta_i + p\end{aligned} \tag{4.7}$$

$i = 1,2,...,n$ olmak üzere $g_i \in \mathcal{C}_{p,l_i}(b,\alpha_i)$ olduğu için (2.3) ve (4.7) den

$$\Re\left\{p+\frac{1}{b}\left(1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right)\right\}>\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)+p$$

olur. Buradan $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\alpha_i-p\right)+p$$

tipli b $\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks mertebeden $p-$valent konvekstir.

Sonuç 4.2.1:

(1) Teorem 4.2.1 de $i=1,2,...,n$ için $p=1$ ve $l_i=0$ alırsak Bulut (2008) deki Teorem 3 elde edilir.

(2) Teorem 4.2.1 de $i=1,2,...,n$ için $p=1,$ $\alpha_i=\delta$ ve $l_i=0$ alırsak Breaz (2008) deki Teorem 3 elde edilir.

(3) Teorem 4.2.1 de $i=1,2,...,n$ için $p=1,$ $\alpha_i=0$ ve $l_i=0$ alırsak Breaz (2009) deki Teorem 2 elde edilir.

Teorem 4.2.1 de $p=n=1,$ $l_i=0,$ $\delta_1=\delta$ ve $g_1=g$ alırsak Sonuç 4.2.2 elde edilir. Buna göre;

Sonuç 4.2.2: Kabul edelim ki $\delta>0,$ $0\le\alpha<1$ olmak üzere α bir reel sayı ve $g\in\mathcal{C}_\alpha(b)$ olsun. Eğer $0\le\delta\left(\alpha-1\right)+1<1$ ise $\int_0^z\left(g'(t)\right)^\delta dt$ integral operatörü birim diskte $\delta\left(\alpha-1\right)+1$ tipli ve b $\left(b\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$ kompleks mertebeden konvekstir.

Teorem 4.2.1 de $i=1,2,...,n$ için $p=1,$ $b=\cos\lambda e^{i\lambda}$ ve $l_i=0$ alalım. Buna göre;

Sonuç 4.2.3: Kabul edelim ki $b\in\mathbb{C}-\{0\}$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$ ve $i=1,2,...,n$ için $g_i\in\mathcal{C}_{\alpha_i}^{\lambda}$ $\left(|\lambda|<\pi/2,\ 0\le\alpha_i<1\right)$ olsun. Bu durumda $0\le\sum_{i=1}^{n}\delta_i(\alpha_i-1)+1<1$ eşitsizliği elde edilir.

Buna göre $\mathcal{G}_{1,n,0,\delta}(z)$ integral operatörü

$$\eta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i(\alpha_i-1)+1$$

olmak üzere $\mathcal{C}_{\eta}^{\lambda}$ $\left(|\lambda|<\pi/2,\ 0\le\alpha_i<1\right)$ sınıfındadır.

4.3. $F_{p,n,l,\delta}(z)$ Operatörünün $\mathcal{BS}(p,m,\mu,\alpha)$ Sınıfı Üzerinde Konveks Olmasının Yeterli Şartları

Teorem 4.3.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=(l_1,l_2,...,l_n)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha<p,$ $\mu\ge0$ ve $f_i\in\mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{BS}(p,l_i,\mu,\alpha)$ sınıfına ait olsun. Eğer $\left|D^{l_i}f_i(z)\right|\le M$, $(M\ge1\ ;\ z\in\mathbb{U})$ için

$$F_{p,n,l,\delta}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D^{l_i}f_i(t)}{t^p}\right)^{\delta_i}dt$$

integral operatörü

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\left(2p-\alpha\right)M^{\mu-1}+1\right]\leq 1$$

ve

$$\beta = p\left[1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\left(2p-\alpha\right)M^{\mu-1}+1\right)\right]$$

olmak üzere $\mathcal{C}_p(\beta)$ sınıfındadır.

İspat: $f_i(z)\in\mathcal{BS}\left(p,l_i,\mu,\alpha\right)$ olmak üzere

$$F_{p,n,l,\delta}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D^{l_i}f_i(t)}{t^p}\right)^{\delta_i}dt$$

olmak üzere $F_{p,n,l,\delta}(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Diğer taraftan

$$\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)' = pz^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D^{l_i}f_i(z)}{z^p}\right)^{\delta_i} \tag{4.8}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.8) eşitliğinin her iki tarafının logaritmasını alıp z ile çarparsak

$$1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\frac{z\left(D^{l_i}f_i\right)'(z)}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right) \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir. Buradan (4.9) ve $p\left(D^{l_i+1}f_i(z)\right)=z\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'$ eşitliklerinden

$$\left|1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right| \le p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\left|\frac{D^{l_i+1}f_i(z)}{D^{l_i}f_i(z)}\right|+1\right)$$

$$\le p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\left|\frac{D^{l_i+1}f_i(z)}{z^p}\left(\frac{z^p}{D^{l_i}f_i(z)}\right)^{\mu}\right|\left|\frac{D^{l_i}f_i(z)}{z^p}\right|^{\mu-1}+1\right) \tag{4.10}$$

olur. Her $i=1,2,...,n$ için $\left|D^{l_i}f_i(z)\right|\le M$, $(M\ge 1\ ,\ z\in\mathbb{U})$ olmak üzere Genelleştirilmiş Schwarz Lemma yardımıyla

$$\left|D^{l_i}f_i(z)\right|\le M\left|z\right|^p$$

elde edilir. Buradan (4.10) dan

$$\left|1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right| \le p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\left|\frac{D^{l_i+1}f_i(z)}{z^p}\left(\frac{z^p}{D^{l_i}f_i(z)}\right)^{\mu}\right|M^{\mu-1}+1\right) \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) ve (1.8) den

$$\left|1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|$$
$$\le p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\left(\left|\frac{D^{l_i+1}f_i(z)}{z^p}\left(\frac{z^p}{D^{l_i}f_i(z)}\right)^{\mu}-p\right|+p\right)M^{\mu-1}+1\right)$$

$$\le p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\left(2p-\alpha\right)M^{\mu-1}+1\right)$$

$$= p-\beta$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=(l_1,l_2,...,l_n)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\alpha<p$, $\mu\ge 0$ ve $f_i\in\mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{BS}(p,l_i,\mu,\alpha)$ sınıfına ait olsun. Eğer $\left|D^{l_i}f_i(z)\right|\le M$, $(M\ge 1\ ;\ z\in\mathbb{U})$, $F_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörü

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\frac{1}{\left[(2p-\alpha)M^{\mu-1}+1\right]}$$

olmak üzere birim diskte konvekstir.

Her $i=1,2,...,n$ için Teorem 4.3.1 de $p=1,\ l_i=0$ alınırsa Sonuç 4.3.2 elde edilir.

Sonuç 4.3.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $\mu\ge 0$, $0\le\alpha<1$ ve $\mathcal{BS}(\mu,\alpha)$ sınıfına ait $f\in\mathcal{A}(n)$ olsun. Eğer $\left|f_i(z)\right|\le M$, $(M\ge 1;\ z\in\mathbb{U})$ ise her $i=1,2,...,n$ için $\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[(2-\alpha)M^{\mu-1}+1\right]\le 1$ olmak üzere

$$\beta=1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[(2-\alpha)M^{\mu-1}+1\right]$$

ise birim diskte $F_{1,n,0,\delta}(z)\in\mathcal{C}(\beta)$ olur.

Sonuç 4.3.2 de $n=1$ alınırsa Sonuç 4.3.3 elde edilir.

Sonuç 4.3.3: Kabul edelim ki $\delta \in \mathbb{R}^{+}$, $\mu \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $\mathcal{BS}(\mu,\alpha)$ sınıfına ait $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $|f(z)| \leq M$, $(M \geq 1 \; ; \; z \in \mathbb{U})$ ise $\delta\left[(2-\alpha)M^{\mu-1}+1\right] \leq 1$ olmak üzere

$$\beta = 1-\delta\left[(2-\alpha)M^{\mu-1}+1\right]$$

ise birim diskte $F_{1,1,0,\delta}(z) \in \mathcal{C}(\beta)$ olur.

Her $i=1,2,...,n$ için Teorem 4.3.1 de $p=1$, $l_i=0$, $\mu=1$ alınırsa Sonuç 4.3.4 elde edilir.

Sonuç 4.3.4: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n) \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $\mathcal{S}^{*}(\alpha)$ sınıfına ait $f_i \in \mathcal{A}(n)$ olsun. Her $i=1,2,...,n$ için $\sum_{i=1}^{n}\delta_i(3-\alpha) \leq 1$ olmak üzere

$$\beta = 1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i(3-\alpha)$$

ise birim diskte $F_{1,n,0,\delta}(z) \in \mathcal{C}(\beta)$ olur.

Sonuç 4.3.4 de $n=1$, $\delta=\dfrac{1}{3}$ ve $\alpha=0$ alınırsa Sonuç 4.3.5 elde edilir.

Sonuç 4.3.5: Kabul edelim ki $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu birim diskte yıldızıl olsun. Eğer $|f(z)| \leq M$, $(M \geq 1 \; ; \; z \in \mathbb{U})$ ise $F_{1,1,0,1/3}(z)$ integral operatörü birim diskte konvekstir.

Sonuç 4.3.1: Her $i=1,2,...,n$ için Teorem 3.1.1 de $p=1,\ l_i=0,\ \delta_i$ yerine $\dfrac{1}{\beta_i}$ alınırsa Frasin (2010) da Teorem 2.1 elde edilir.

4.4. $\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)$ Operatörünün $\mathcal{BS}(p,m,\mu,\alpha)$ Sınıfı Üzerinde Konveks Olmasının Yeterli Şartları

Teorem 4.4.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=(l_1,l_2,...,l_n)\in\mathbb{N}_0^n,\ \lambda\in\mathbb{R}_+^n,$ $0\le\alpha<p,\ \ \mu\ge 0$ ve $h_i\in\mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{BS}(p,l_i,\mu,\alpha)$ sınıfına ait olsun. Eğer $\left|D^{l_i}h_i(z)\right|\le M,\ (M\ge 1\ ;\ z\in\mathbb{U})$ ise $\lambda\le\dfrac{p}{n\left((p^2+(1-\alpha)p)M^{\mu}+(p-1)M\right)}$ olmak üzere

$$\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left[e^{D^{l_i}h_i(t)/t^{p-1}}\right]^{\lambda}dt,$$

integral operatörü $\beta=p-\lambda n\left\{(p^2+(1-\alpha)p)M^{\mu}+(p-1)M\right\}$ için $\mathcal{C}_p(\beta)$ sınıfındadır.

İspat: $h_i\in\mathcal{BS}(p,l_i,\mu,\alpha)$ için (2.6) integral operatörünü tanımlayalım. Buradan

$$1+\frac{z\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)''}{\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)'}-p=\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{z\left(D^{l_i}h_i(z)\right)'}{z^{p-1}}-(p-1)z\frac{D^{l_i}h_i(z)}{z^{p}}\right]\right) \tag{4.12}$$

olur. $p\left(D^{l_i+1}h_i\right)(z)=z\left(D^{l_i}h_i(z)\right)'$ ve (4.12) den

$$
\begin{aligned}
&\left|1+\frac{z\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)''}{\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)'}-p\right| \\
&\leq \lambda\sum_{i=1}^{n}\left[p\left|\frac{D^{l_i+1}h_i(z)}{z^p}\right|+(p-1)\left|\frac{D^{l_i}h_i(z)}{z^p}\right|\right]|z| \\
&\leq \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\left[p\left|\frac{D^{l_i+1}h_i(z)}{z^p}\left(\frac{z^p}{D^{l_i}h_i(z)}\right)^{\mu}\right|\left|\frac{D^{l_i}h_i(z)}{z^p}\right|^{\mu}+(p-1)\left|\frac{D^{l_i}h_i(z)}{z^p}\right|\right]\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Genelleştirilmiş Schwarz Lemmasından

$$
\left|\frac{D^{l_i}h_i(z)}{z^p}\right|\leq M \qquad \left(z\in\mathbb{U}\right)
$$

ve sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
&\left|1+\frac{z\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)''}{\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)'}-p\right| \\
&\leq \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\left[p\left|\frac{D^{l_i+1}h_i(z)}{z^p}\left(\frac{z^p}{D^{l_i}h_i(z)}\right)^{\mu}\right|M^{\mu}+(p-1)M\right]\right)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

olur. (4.13) den

$$\begin{aligned}
&\left|1+\frac{z\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)''}{\left(\mathcal{H}_{p,n,l,\lambda}(z)\right)'}-p\right| \\
&\le \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\left[p\left(\left|\frac{D^{l_i+1}h_i(z)}{z^p}\left(\frac{z^p}{D^{l_i}h_i(z)}\right)^{\mu}-p\right|+p\right)M^{\mu}+\left(p-1\right)M\right]\right) \\
&\le \lambda n\left\{(p^2+(1-\alpha)p)M^{\mu}+(p-1)M\right\} \\
&= p-\beta
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Her $i=1,2,...,n$ için Teorem 4.4.1 de $l_i=0,\ \ \mu=0$ alınırsa Sonuç 4.4.1 elde edilir.

Sonuç 4.4.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $\lambda\in\mathbb{R}_+^n,\ \ 0\le\alpha<p$ ve $h_i\in\mathcal{A}\left(p,n\right)$ fonksiyonu $R_p\left(\alpha\right)$ sınıfına ait olsun. Eğer $\left|h_i(z)\right|\le M,\ \ \left(M\ge 1\ ;\ z\in\mathbb{U}\right)$ ise $\lambda n\left(p^2+(1-\alpha)p+(p-1)M\right)\le p$ olmak üzere

$$\beta=p-\lambda n\left(p^2+(1-\alpha)p+(p-1)M\right)$$

için $\mathcal{H}_{p,n,0,\lambda}(z)\in\mathcal{C}_p(\beta)$'dır.

Teorem 4.4.1 de $n=1,\ \ l_1=l=0,\ \ p=1$ alınırsa Sonuç 4.4.2 elde edilir.

Sonuç 4.4.2: Kabul edelim ki $\lambda\in\mathbb{R}^+,\ \ \mu\ge 0,\ \ 0\le\alpha<1$ ve $h\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $\mathcal{B}\left(\mu,\alpha\right)$ sınıfına ait olsun. Eğer $\left|h(z)\right|\le M,\ \left(M\ge 1\ ;\ z\in\mathbb{U}\right)$ ise $\lambda\left(2-\alpha\right)M^{\mu}\le 1$ olmak üzere

$$\beta = 1 - \lambda\left(2-\alpha\right)M^{\mu}$$

için $\mathcal{H}_{1,1,0,\lambda}(z) = \int_0^z \left(e^{h(t)}\right)^{\lambda} dt$ integral operatörü birim diskte $\mathcal{C}(\beta)$ sınıfına aittir.

Her $i = 1, 2, ..., n$ için Teorem 4.4.1 de $p = 1,\ l_i = 0,\ \mu = 1$ alınırsa Sonuç 4.4.3 elde edilir.

Sonuç 4.4.3: Kabul edelim ki her $i = 1, 2, ..., n$ için $\lambda \in \mathbb{R}_+^n,\ 0 \le \alpha < 1$ ve $h_i \in \mathcal{A}\left(n\right)$ fonksiyonu $\mathcal{S}^*\left(\alpha\right)$ sınıfına ait olsun. Eğer $\left|h_i(z)\right| \le M$, $\left(M \ge 1\ ;\ z \in \mathbb{U}\right)$ ise $\lambda \le \dfrac{1}{n\left(2-\alpha\right)M}$ olmak üzere

$$\beta = 1 - \lambda n\left(2-\alpha\right)M$$

için $\mathcal{H}_{1,n,0,\lambda}(z) \in \mathcal{C}(\beta)$ 'dir.

Sonuç 4.4.3 de $\alpha = 0,\ M = n = 1$ ve $\lambda = 1/2$ alınırsa Sonuç 4.4.4 elde edilir.

Sonuç 4.4.4: Kabul edelim ki $h \in \mathcal{A}$ birim diskte yıldızıl olsun. Eğer $\left|h(z)\right| \le 1$, $\left(z \in \mathbb{U}\right)$ ise $\mathcal{H}_{1,1,0,1/2}(z)$ integral operatörü birim diskte konvekstir.

4.5. $F_{p,n,l,\delta}(z)$ İntegral Operatörü İçin Bazı Yeterli Şartlar

Teorem 4.5.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=(l_1,l_2,...,l_n)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $0\le\mu_i<p$, $0<\beta_i\le p$ ve $f_i\in\mathcal{A}_p$ olsun. Eğer $\left|\frac{\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'}{D^{l_i}f_i(z)}\right|<M_i$ ve $f_i\in MT(p,\beta_i,\mu_i)$ olursa

$$F_{p,n,l,\delta}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^n\left(\frac{D^{l_i}f_i(t)}{t^p}\right)^{\delta_i}dt,$$

integral operatörü

$$\eta=\sum_{i=1}^n\delta_i\beta_i\left(p+\mu_iM_i\right)+p,$$

olmak üzere $\mathcal{N}_p(\eta)$ sınıfındadır.

İspat: (2.4) eşitliğinden $F_{p,n,l,\delta}(z)\in\mathcal{A}_p$ olduğunu görüyoruz. Diğer taraftan

$$\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'=pz^{p-1}\prod_{i=1}^n\left(\frac{D^{l_i}f_i(z)}{z^p}\right)^{\delta_i},\tag{4.14}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.14) ün her iki tarafının logaritmasını alıp z ile çarparsak

$$1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}=\sum_{i=1}^n\delta_i\left(\frac{z\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right)+p,$$

elde edilir. Her iki tarafın reel kısmını alırsak

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\Re\left\{\frac{z\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right\}+p,$$

elde edilir. Buradan $\Re w\leq|w|$ olduğu için

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left|\frac{z\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'}{D^{l_i}f_i(z)}-p\right|+p,$$

olur. Ayrıca her $i=1,2,...,n$ için $f_i\in MT(p,\beta_i,\mu_i)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Re\left\{1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}&\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i\beta_i\left|\mu_i\frac{z\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'}{D^{l_i}f_i(z)}+p\right|+p,\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i\beta_i\mu_i\left|\frac{z\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'}{D^{l_i}f_i(z)}\right|+p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\beta_i+p,\end{aligned}\tag{4.15}$$

elde edilir. Ayrıca $\left|\frac{\left(D^{l_i}f_i(z)\right)'}{D^{l_i}f_i(z)}\right|<M_i$ ve (4.15) eşitsizliklerinden

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}<\sum_{i=1}^{n}\delta_i\beta_i\mu_iM_i+p\sum_{i=1}^{n}\delta_i\beta_i+p=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\beta_i\left(p+\mu_iM_i\right)+p,$$

elde edilir. Buradan $F_{p,n,l,\delta}(z) \in \mathcal{N}_p(\eta),\ \eta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \beta_i \left(p + \mu_i M_i \right) + p$ olur.

Sonuç 4.5.1: Teorem 4.5.1 de her $i = 1,2,...,n$ için $p = 1$ ve $l_i = 0$ alırsak Mohammed (2010) daki Teorem 1 elde edilir.

Teorem 4.5.1 de $p = 1$ alırsak Sonuç 4.5.2 elde edilir.

Sonuç 4.5.2: Kabul edelim ki her $i = 1,2,...,n$ için $l = \left(l_1, l_2, ..., l_n\right) \in \mathbb{N}_0^n$, $\delta = \left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \in \mathbb{R}_+^n,\ 0 \le \mu_i < 1,\ 0 < \beta_i \le 1$ ve $f_i \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $\left| \frac{\left(D^{l_i} f_i(z)\right)'}{D^{l_i} f_i(z)} \right| < M_i$ ve $f_i \in MT(1, \beta_i, \mu_i)$ olursa

$$F_{1,n,l,\delta}(z) = \int_0^z \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{D^{l_i} f_i(t)}{t} \right)^{\delta_i} dt,$$

integral operatörü

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \beta_i \left(1 + \mu_i M_i\right) + 1,$$

olmak üzere $\mathcal{N}(\eta)$ sınıfındadır.

Teorem 4.5.1 de $p = n = 1,\ l_1 = 0,\ \delta_1 = \delta,\ \mu_1 = \mu,\ \beta_1 = \beta,\ M_1 = M$ ve $f_1 = f$ alırsak Sonuç 4.5.3 elde edilir.

Sonuç 4.5.3: Kabul edelim ki $\delta \in \mathbb{R}^+,\ 0 \le \mu < 1,\ 0 < \beta \le 1$ ve $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < M$ ve $f \in MT(1,\beta,\mu)$ olursa $\int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\delta} dt$ integral operatörü $\eta = \delta\beta\left(1+\mu M\right)+1$ olmak üzere $\mathcal{N}(\eta)$ sınıfındadır.

4.6. $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ İntegral Operatörü İçin Bazı Yeterli Şartlar

Teorem 4.6.1: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...,l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n$, $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n$, $\mu_i\geq 0$, $\beta_i\geq 0$ özelliği ile birlikte $0\leq\beta_i<p$ ve $g_i\in KD(p,\beta_i,\mu_i)$ olsun. Ayrıca $0<\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\beta_i\right)\leq p$ olursa

$$\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)=\int_0^z pt^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(D^{l_i}g_i(t)\right)'}{pt^{p-1}}\right)^{\delta_i}dt,$$

integral operatörü

$$\sigma=p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\beta_i\right),$$

mertebeden konvekstir.

İspat: (2.5) eşitliğinden $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\in\mathcal{A}_p$ olduğunu görüyoruz. Diğer taraftan

$$\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'=pz^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(D^{l_i}g_i(z)\right)'}{pz^{p-1}}\right)^{\delta_i}, \tag{4.16}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.16) nın her iki tarafının logaritmasını alıp z ile çarparsak

$$1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(1+\frac{z\left(D^{l_i}g_i(z)\right)''}{\left(D^{l_i}g_i(z)\right)'}-p\right)+p,$$

elde edilir. Her iki tarafın reel kısmını alırsak

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\Re\left\{1+\frac{z\left(D^{l_i}g_i(z)\right)''}{\left(D^{l_i}g_i(z)\right)'}\right\}-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i+p,$$

olur. Buradan her $i=1,2,...,n$ için $g_i\in KD(p,\beta_i,\mu_i)$ olduğu için

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}>\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\mu_i\left|1+\frac{z\left(D^{l_i}g_i(z)\right)''}{\left(D^{l_i}g_i(z)\right)'}-p\right|+\beta_i\right)-p\sum_{i=1}^{n}\delta_i+p,$$

bulunur. Ayrıca $\delta_i\mu_i\left|1+\frac{z\left(D^{l_i}g_i(z)\right)''}{\left(D^{l_i}g_i(z)\right)'}-p\right|>0$ olduğundan

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}>p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\beta_i\right),$$

olur. Buradan $\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)$ integral operatörünün $\sigma=p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(p-\beta_i\right)$ mertebeden

$p-$valent konvekstir.

Sonuç 4.6.1: Teorem 4.6.1 de her $i=1,2,...,n$ için $p=1,$ $l_i=0$ ve $g_i=f_i$ alınırsa Mohammed (2010) daki Teorem 2 elde edilir.

Teorem 4.6.1 de $p=1$ alırsak Sonuç 4.6.1 elde edilir.

Sonuç 4.6.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $l=\left(l_1,l_2,...,l_n\right)\in\mathbb{N}_0^n,$ $\delta=\left(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)\in\mathbb{R}_+^n,$ $\mu_i\geq 0,$ $0\leq\beta_i<1$ özelliği ile birlikte $\beta_i\geq 0$ ve $g_i\in KD(1,\beta_i,\mu_i)$ olsun. Ayrıca $0<\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(1-\beta_i\right)\leq 1$ olmak üzere $\mathcal{G}_{1,n,l,\delta}(z)=\int_0^z\prod_{i=1}^{n}\left(\left(D^{l_i}g_i(t)\right)'\right)^{\delta_i}dt$ integral operatörü $\sigma=1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(1-\beta_i\right)$ mertebeden konvekstir.

Teorem 4.6.1 de $p=n=1,$ $l_1=0,$ $\delta_1=\delta,$ $\mu_1=\mu,$ $\beta_1=\beta$ ve $g_1=g$ alırsak Sonuç 4.6.3 elde edilir.

Sonuç 4.6.3: Kabul edelim ki $\mu\geq 0,$ $\beta\geq 0$ özelliği ile birlikte $0\leq\beta<1$ ve $g\in KD(1,\beta,\mu)$ olsun. Ayrıca $0<\delta\left(1-\beta\right)\leq 1$ olmak üzere $\mathcal{G}_{1,1,0,\delta}(z)=\int_0^z\left(g'(t)\right)^{\delta}dt$ integral operatörü $\sigma=1-\delta\left(1-\beta\right)$ mertebeden konvekstir.

4.7. $f_i\in KDF_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ Analitik Fonksiyonlarının Ailesi İçin Gerekli ve Yeterli Şartlar

Bu bölümde $f_i\in KDF_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ fonksiyonlarının ailesi için bazı şartlar verilecektir. İstediğimiz sonucun ispatını vermeden önce ispatımız için gerekli olan

$\dfrac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}$ ifadesini hesaplayacağız.

(2.4) eşitliğinden

$$\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)' = pz^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{D^{l_i} f_i(z)}{z^p}\right)^{\delta_i}, \tag{4.17}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.17) nin her iki tarafının logaritmasını alıp z ile çarparsak

$$1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\frac{z\left(D^{l_i} f_i(z)\right)'}{D^{l_i} f_i(z)} - p\right),$$

elde edilir. Ayrıca $D^{l_i} f_i(z) = z^p - \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\dfrac{m}{p}\right)^{l_i} a_{m,i}z^m$ olduğundan $\left(D^{l_i} f_i(z)\right)' = pz^{p-1} - \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\dfrac{m}{p}\right)^{l_i} m a_{m,i}z^{m-1}$ ve

$$\begin{aligned}
1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p &= \sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{pz^p - \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m a_{m,i}z^m}{pz^p - \sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} a_{m,i}z^m} - p\right], \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} a_{m,i}z^{m-p}}\right],
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.7.1: Kabul edelim ki her $i = 1, 2, ..., n$ için $f_i \in T_p$ olsun. Buradan $f_i \in KDF_{p,n,l}(\beta, \mu, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\sum_{m=p+1}^{\infty} \delta_i \left(\frac{m}{p} \right)^{l_i} (\mu + 1)(m - p) a_{m,i}}{1 - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p} \right)^{l_i} a_{m,i}} \right] \leq p - \beta \tag{4.18}$$

olmasıdır.

İspat: İlk olarak

$$\mu \left| 1 + \frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p \right| - \Re \left\{ 1 + \frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} \right\} \leq (\mu + 1) \left| 1 + \frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p \right|,$$

olduğunu biliyoruz. (4.17) den

$$\left(\mu+1\right)\left|1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|=\left(\mu+1\right)\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}\left(m-p\right)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}z^{m-p}}\right]\right|,$$

$$\leq\left(\mu+1\right)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}\left(m-p\right)\left|a_{m,i}\right|\left|z\right|^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}\left|a_{m,i}\right|\left|z\right|^{m-p}}\right],$$

$$\leq\left(\mu+1\right)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}\left(m-p\right)a_{m,i}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}}\right],$$

elde edilir. Eğer (4.18) eşitliği sağlanırsa yukarıdaki ifade $p-\beta$ ile sınırlanır ve dolayısıyla

$$\mu\left|1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|-\Re\left\{1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}<-\beta,$$

olur. Bu eşitsizlik

$$\Re\left(1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right)\geq\mu\left|1+\frac{z\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(F_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|+\beta,$$

ifadesine eşittir. Buradan her $i=1,2,...,n$ için $f_i\in KDF_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ olduğu görülür.

Tersine her $i=1,2,...,n$ için $f_i\in KDF_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ olsun ve (4.18) ifadesini ispatlayalım. Eğer her $i=1,2,...,n$ için $f_i \in KDF_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ ve z bir reel sayı ise (2.4) ve (4.17) den

$$p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}z^{m-p}}\right]\geq\mu\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}z^{m-p}}\right]\right|+\beta,$$

$$\geq\mu\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}z^{m-p}}\right]+\beta,$$

elde edilir. Bu ifade

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\mu\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}z^{m-p}}\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}z^{m-p}}\right]\leq p-\beta,$$

eşitsizliğine eşittir. Yukarıdaki eşitsizlik

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(\mu+1)(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{1-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}z^{m-p}}\right]\leq p-\beta,$$

ifadesine dönüştürülür ve reel eksen boyunca $z\to 1^-$ alırsak bizim için gerekli sonuç olan

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(\mu+1)(m-p)a_{m,i}}{1-\sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}a_{m,i}}\right]\leq p-\beta,$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.7.1: Teorem 4.7.1 de her $i=1,2,...,n$ için $p=1$ ve $l_i=0$ alırsak Mohammed 2010 daki Teorem 3 elde edilir.

Teorem 4.7.1 de $p=1$ alırsak Sonuç 4.7.2 elde edilir.

Sonuç 4.7.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $f_i\in T$ olsun. Buradan $f_i\in KDF_{1,n,l}(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum_{m=2}^{\infty}\delta_i(m)^{l_i}(m-1)(\mu+1)a_{m,i}}{1-\sum_{m=2}^{\infty}(m)^{l_i}a_{m,i}}\right]\leq 1-\beta$$

olmasıdır.

Teorem 4.7.1 de $p=n=1,\ l_i=0,\ f_1=f$ ve $\delta_1=\delta$ alırsak Sonuç 4.7.3 elde edilir.

Sonuç 4.7.3: Kabul edelim ki $f\in T$ olsun. Buradan $f\in KDF_{1,1,0}(\beta,\mu,\delta)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty}\delta(m-1)(\mu+1)a_{m,1}}{1-\sum_{m=2}^{\infty}a_{m,1}}\leq 1-\beta$$

olmasıdır.

4.8. $g_i\in KD\mathcal{G}_{p,n,l}(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ Analitik Fonksiyonlarının Ailesi İçin Gerekli ve Yeterli Şartlar

Bu bölümde $g_i\in KD\mathcal{G}_{p,n,l}(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)$ fonksiyonlarının ailesi için bazı şartlar verilecektir. İstediğimiz sonucun ispatını vermeden önce ispatımız için gerekli olan

$\dfrac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}$ ifadesini hesaplayacağız.

(2.5) eşitliğinden

$$\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'=pz^{p-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(D^{l_i}g_i(z)\right)'}{pz^{p-1}}\right)^{\delta_i}, \tag{4.19}$$

olduğunu görmek kolaydır. (4.19) un her iki tarafının logaritmasını alıp z ile çarparsak

$$1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(\frac{z\left(D^{l_i}g_i(z)\right)''}{\left(D^{l_i}g_i(z)\right)'}-p+1\right),$$

elde edilir. Ayrıca $D^{l_i} g_i(z) = z^p - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} a_{m,i} z^m$ olduğundan

$$\left(D^{l_i} g_i\right)'(z) = pz^{p-1} - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m a_{m,i} z^{m-1},$$

$$\left(D^{l_i} g_i\right)''(z) = p(p-1)z^{p-2} - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m(m-1) a_{m,i} z^{m-2} \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'} - p &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i \left[\frac{p(p-1)z^{p-1} - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m(m-1) a_{m,i} z^{m-1}}{pz^{p-1} - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m a_{m,i} z^{m-1}} - p + 1 \right], \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \delta_i \left[\frac{\sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m(m-p) a_{m,i} z^{m-p}}{p - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m a_{m,i} z^{m-p}} \right], \end{aligned} \tag{4.20}$$

olur.

Teorem 4.8.1: Kabul edelim ki her $i = 1, 2, ..., n$ için $g_i \in T_p$ olsun. Buradan $g_i \in KD\mathcal{G}_{p,n,l}\left(\beta, \mu, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\sum_{m=p+1}^{\infty} \delta_i \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m(m-p)(\mu+1) a_{m,i}}{p - \sum_{m=p+1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)^{l_i} m a_{m,i}} \right] \le p - \beta \tag{4.21}$$

olmasıdır.

İspat: İlk olarak

$$\mu\left|1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|-\Re\left\{1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}\leq(\mu+1)\left|1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|,$$

olduğunu biliyoruz. (4.20) den

$$\begin{aligned}(\mu+1)\left|1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right| &= (\mu+1)\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}z^{m-p}}\right]\right|,\\ &\leq (\mu+1)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m(m-p)\left|a_{m,i}\right|\left|z\right|^{m-p}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m\left|a_{m,i}\right|\left|z\right|^{m-p}}\right],\\ &\leq (\mu+1)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m(m-p)a_{m,i}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}}\right],\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (4.21) eşitliği sağlanırsa yukarıdaki ifade $p-\beta$ ile sınırlanır ve dolayısıyla

$$\mu\left|1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|-\Re\left\{1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}<-\beta,$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$\Re\left\{1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}\right\}\geq\mu\left|1+\frac{z\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)''}{\left(\mathcal{G}_{p,n,l,\delta}(z)\right)'}-p\right|+\beta,$$

bulunur. Buradan her $i=1,2,...,n$ için $g_i\in KD\mathcal{G}_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ olduğu görülür.

Tersine her $i=1,2,...,n$ için $g_i\in KD\mathcal{G}_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ olsun ve (4.11) ifadesini ispatlayalım. Eğer her $i=1,2,...,n$ için $g_i\in KD\mathcal{G}_{p,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ ve z bir reel sayı ise (2.5) ve (4.20) den

$$p-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m\left(m-p\right)a_{m,i}z^{m-p}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}z^{m-p}}\right]\geq\mu\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m\left(m-p\right)a_{m,i}z^{m-p}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}z^{m-p}}\right]\right|+\beta,$$

$$\geq\mu\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m\left(m-p\right)a_{m,i}z^{m-p}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}z^{m-p}}\right]+\beta,$$

elde edilir. Bu ifade

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\mu\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m\left(m-p\right)a_{m,i}z^{m-p}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}z^{m-p}}\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}m\left(m-p\right)a_{m,i}z^{m-p}}{p-\sum\limits_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}z^{m-p}}\right]\leq p-\beta,$$

eşitsizliğine eşittir. Yukarıdaki eşitsizlik

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(\mu+1)m(m-p)a_{m,i}z^{m-p}}{p-\sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}z^{m-p}}\right]\leq p-\beta,$$

ifadesine dönüştürülür ve reel eksen boyunca $z\to 1^{-}$ alırsak bizim için gerekli sonuç olan

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum_{m=p+1}^{\infty}\delta_i\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}(\mu+1)m(m-p)a_{m,i}}{p-\sum_{m=p+1}^{\infty}\left(\frac{m}{p}\right)^{l_i}ma_{m,i}}\right]\leq p-\beta,$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.8.1: Teorem 3.4.1 de her $i=1,2,...,n$ için $p=1$ ve $l_i=0$ alırsak Mohammed 2010 daki Teorem 3 elde edilir.

Teorem 4.8.1 de $p=1$ alırsak Sonuç 4.8.2 elde edilir.

Sonuç 4.8.2: Kabul edelim ki her $i=1,2,...,n$ için $g_i\in T$ olsun. Buradan $g_i\in KD\mathcal{G}_{1,n,l}\left(\beta,\mu,\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\sum_{m=2}^{\infty}\delta_i(m)^{l_i}(\mu+1)m(m-1)a_{m,i}}{1-\sum_{m=2}^{\infty}(m)^{l_i}ma_{m,i}}\right]\leq 1-\beta$$

olmasıdır.

Teorem 4.8.1 de $p = n = 1,\ l_1 = 0,\ \delta_1 = \delta$ ve $g_1 = g$ alırsak Sonuç 4.8.3 elde edilir.

Sonuç 4.8.3: Kabul edelim ki $g \in T$ olsun. Buradan $g \in KD\mathcal{G}_{1,1,0}(\beta, \mu, \delta)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} \delta(\mu+1) m(m-1) a_{m,1}}{1 - \sum_{m=2}^{\infty} m a_{m,1}} \leq 1 - \beta$$

olmasıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Univalent fonksiyonlar kavramı verilerek $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, univalent ve normalize edilmiş fonksiyonların $\mathcal{S}$ ile gösterilen sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili bazı özellikler incelendi. Analitik fonksiyonların çeşitli alt sınıflarına ait $p-$valent fonksiyonlardan oluşan integral operatörleri için bazı konvekslik şartları elde edildi ve bu şartlar elde edilirken iki teoremin ispatında $p-$valent fonksiyonlar için elde edilmiş bazı eşitsizlikler kullanıldı. $p-$valent fonksiyonlar için yeni sınıflar tanımlandı. Üzerinde çalışmış olduğumuz integral operatörlerinin bu sınıflarda olma kriterleri elde edildi.

KAYNAKLAR

Alexander, J. W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. Annals of Mathematics, 17 (1), 12-22.

Aghalary, R., Azadi Ch., 2005. The Dziok-Srivastava operator and $k-$uniformly starlike functions. J. Inequ Pure Appl. Math., 6, 1-7.

Lupaş, A. A., 2009. A subclass of analytic functions defined by differential Salagean operator. Acta Universitatis Apulensis, 20, 259-263.

Ahlfors, L. V., 1996. Complex Analysis. Mc Graw-Hill Book Company, p. 1-50.

Bernardi, S. D., 1969. Convex and starlike univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc. 135, 429-446.

Bieberbach, L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenz reihen, welcheeine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. pp. 940-955.

Breaz, D., Breaz N., 2002. Two integral operators. Studia Universitatis Babes-Bolyai. Mathematica, 47 (3), 13-19.

Breaz, D., Owa S., Breaz N., 2008. A new integral univalent operator. Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 16, 11-16.

Breaz, D., Güney, H. Ö., 2008. The integral operator on the classes $\mathcal{S}_{\alpha}^{*}(b)$ and $\mathcal{C}_{\alpha}(b)$. J. Math. Ineq., 2 (1), 97-100.

Breaz, D., 2008. Certain integral operators on the classes $\mathcal{M}(\beta_i)$ and $\mathcal{N}(\beta_i)$. Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications, ID 719354, 4 pages doi: 10.1155/2008/719354.

Breaz, D., Güney, H. Ö., Sãlãgean G. S., 2009. A new general integral operator. Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 25 (4), 407-414.

Breaz, D., Aouf, M. K., Breaz, N., 2009. Some properties for integral operators on some analytic functions with complex order. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 25, 39-43.

Breaz, D., Owa S., 2009. A convexity property for an integral operator on the class $\mathcal{UST}(k,\gamma)$. Acta Universitatis Apulensis, No 19/2009, pp. 108-110.

Breaz, D., Owa S., Breaz N., 2008. A new integral univalent operator. Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 16, 11-16.

Bulut, S., 2008. A note on the paper of Breaz and Güney. J. Math. Ineq., 2 (4), 549-553.

Chicra, P. N., 1975. Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is $\alpha-$spirallike. Proc. Amer. Math. Soc., 49, 151-160.

Duren, P.L. 1983. Univalent Functions. Springer-Verlag, New York.

Duren, P. L., McLaughlin R., 1972. Two-slit mappings and the Marx conjecture. Michigan Math. J., 19, 267-273.

Goodman, A.W., 1983. Univalent Functions-I. Mariner Publishing Company, 245 p, Tapma, Florida.

Goodman, A.W., 1983. Univalent Functions-II. Mariner Publishing Company, 311 p, Tapma, Florida.

Frasin, B. A., Darus, M., 2001. On certain analytic univalent functions. Internat. J. Math. and Math. Sci., 25 (5), 305-310.

Frasin, B. A., 2004. A note on certain analytic and univalent functions. Southeast Asian J. Math., 28, 829-836.

Frasin, B. A., 2006. Family of analytic functions of complex order. Acta. Math. Acad. Paedagog. Nyhazi, (N.S.), 22 (2), 179-191.

Frasin, B. A., 2007. Some properties of certain analytic and univalent functions. Tamsui Oxford J. Math. Sci., 23 (1), 67-77.

Frasin, B. A., Jahangiri J., 2008. A new and comprehensive class of analytic functions. Anal. Univ. Ordea Fasc. Math., XV, 59-62.

Frasin, B. A., Ahmad A., 2010. The order of convexity of two integral operators. Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, Volume LV, Number 2, (6).

Frasin, B. A., 2010. Convexity of integral operators of $p-$valent functions. Math. Comput. Model., 51, 601-605.

Kim, Y. J., Merkes, E. P., 1972. On an integral of powers of a spirallike function. Kyungpook Mathematical Journal, vol. 12, 249-252.

Koebe, P., 1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven. Nach. Ges. Wiss. Gottingen, 191-210.

Lahenkani, J., 1985. Coefficients of power of some subclasses of univalent functions and convolutions of some classes of polynomials and analytic functions. Ph. D. Thesis. Graduate School of Natural and Applied Sciences, London.

Libera, R. J., 1967. Univalent $\alpha-$spiral functions. Canad. J. Math. 19, 449-456.

Libera, R. J., 1965. Some classes of regular univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 16, 755-758.

Marsden, J. E., 1973. Basic complex analysis. W.H.F and Company, p. 20-78.

Mohammed, A., Darus, M., Breaz, D., 2009. On close to convex for certain integral operators. Acta Universitatis Apulensis, No 19/2009, pp. 209-116.

Mohammed, A., Darus, M., Breaz, D., 2009. Fractional calculus for certain integral operator involving logarithmic coefficients. Journal of Mathematics and Statics, 5: 2 (2009), 118-122.

Mohammed, A., Darus, M., Breaz, D., 2010. Some properties for certain integral operators. Acta Universitatis Apulensis, 23, pp. 79-89.

Miller, S. S., Mocanu, P. T., Reade, M. O., 1978. Starlike integral operators, Pacific Journal of Mathematics, 79 (1), 157-168.

Nasr, M. A., Aouf, M. K., 1985. Starlike function of complex order. J. Natur. Sci. Math., 25 (1), 1-12.

Noshiro, K., 1934-1935. On the theory of schlicht functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 2, 129-155.

Owa, S., Srivastava, H. M., 2003. Some generalized convolution properties associated with certain subclasses of analytic functions. JIPAM, 3 (3) (2003), 42: 1-13.

Pescar, V., Owa, S., 2000. Sufficient conditions for univalence of certain integral operators. Indian Journal of Mathematics, 42 (3), 347-351.

Pfaltzgraff, J. A., 1975. Univalence of the integral of $\left(f'(z)\right)^{\lambda}$. Bull. London Math. Soc., 7 (3), 254-256.

Ponnusamy, S. and Silverman, H., 2006. Complex variables with Applications, Birkhäuser. Boston.

Robertson, M. S., 1936. On the theory of univalent functions. Ann. of Math., 37, 374–408.

Salagean, G. St., 1983. Subclasses of univalent functions. Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 362-372.

Shenan, G. M., Salim, T. O., Marouf, M. S., 2004. A certain class of multivalent prestarlike functions involving the Srivastava-Saigo-Owa fractional integral operator. Kyungpook Math., J. 44, 353-362.

Saltık, G., Deniz, E., Kadıoğlu, E., 2010. Two new general $p-$valent integral operators. Mathematical and Computer Modelling, 52, 1605-1609.

Saltık, G., Kadıoğlu, E., 2010. Convexity of integral operators of $p-$valent integral functions, Ankara Matematik Günleri, Ankara.

Shams, S., Kulkarni, S. R., Jahangiri, J. M., 2004. Classes of uniformly starlike and convex functions. Internat. J. Math. Sci., 55, 2959-2961.

Uralegaddi, B. A., Ganigi, M. D., Sarangi, S. M., 1994. Univalent functions with positive coefficients. Tamkang Journal of Mathematics, 25 (3), 225-230.

Warschawski, S. E., 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc., 38, 310-340.

Wiatrowski, P., 1971. The coefficients of a certain family of holomorphic functions. Zeszyty Nauk. Uniw. Lodz. Nauki Mat. Pryrod. Ser., (39 Mat.), 75-85.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Mersin'de dünyaya gelen Gülşah SALTIK AYHANÖZ ilk, orta ve lise öğrenimini Mersin'de tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenimine başladı ve 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora öğrenimine başladı. Bir yıl İngilizce hazırlık eğitimi aldıktan sonra ders aşamasına geçti. 2008 yılında M.E.B'na bağlı bir ortaöğretim okulunda Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen M.E.B. deki görevine devam etmektedir.