WALLMAN TİP KOMPAKTLAŞTIRMALAR ÜZERİNE

Ceren Sultan ELMALI

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Tamer UĞUR
2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

WALLMAN TİP KOMPAKTLAŞTIRMALAR ÜZERİNE

Ceren Sultan ELMALI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

Wallman Tip Kompaktlaştırmalar Üzerine

Doç. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Ceren Sultan ELMALI tarafından hazırlanan bu çalışma 21/10/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Cemil YILDIZ	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Tamer UĞUR	*İmza*	:

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

ÖZET

Doktora Tezi

WALLMAN TİP KOMPAKTLAŞTIRMALAR ÜZERİNE

Ceren Sultan ELMALI

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada bir Wallman tip kompaktlaştırma olan Fan-Gottesman kompaktlaştırması incelendi ve bu kompaktlaştırma metodunun submaximal ve spectral uzaylarla ilişkisi araştırıldı. Ayrıca bu kompaktlaştırma Kategori ve Approximating Teorisine uygulanarak çeşitli sonuçlar elde edildi.

2011, 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: kompaktlaştırma, submaximal uzay, spectral uzay, kategori teori, approximating teori

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON THE WALLMAN TYPE COMPACTIFICATIONS

Ceren Sultan ELMALI

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tamer UĞUR

In this study, it is investigated Fan-Gottesman compactification being a Wallman-type compactification and it is examinated the relation of this compactification method with the submaximal space and the spectral space. Also it is obtain some results by applying this compactification to category theory and approximating theory.

2011, 48 pages

Keywords: compactification, submaximal space, spectral space, category theory, approximating theory

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU'a, tez izleme komitemde yer alan Sayın Doç. Dr. Abdullah KAPLAN'a ve matematik bölümünün tüm öğretim elemanlarına,

Doktora öğrenimim boyunca 2211 yurtiçi doktora burs programı çerçevesinde destek aldığım TÜBİTAK'a

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ceren Sultan ELMALI
Ekim 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER 4
2.1. Genel Kavramlar 4
2.2. Kompaktlaştırma 9
2.2.1. Wallman Kompaktlaştırması 13
2.2.2. Fan-Gottesman Kompaktlaştırması 17
2.2.3. T_0 Kompaktlaştırması 18
3. MATERYAL ve YÖNTEM 20
3.1. Submaximal ve Spectral Uzaylar 20
3.2. Kategori Teori 24
3.3. Approximating Teori 29
4. ARAŞTIRMA BULGULARI 33
4.1.Fan-Gottesman Kompaktlaştırmasının Ultrafiltreler Yardımıyla Elde Edilişi 33
4.2. Fan-Gottesman Kompaktlaştırması ile Submaximal Uzaylar Arasındaki İlişki 35
4.3. Fan-Gottesman Kompaktlaştırması ile Spectral Uzaylar Arasındaki İlişki 35
4.4. Fan-Gottesman Kompaktlaştırmasının Kategori Teorisine Uygulaması 37
4.5. Fan-Gottesman Kompaktlaştırmasının Approximating Teorisine Uygulaması 43
5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR 45
KAYNAKLAR 46
ÖZGEÇMİŞ ....

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{A}(F)$	F nin Boolean kombinasyonlarının oluşturduğu kümenin minimal elemanları
A_w^*	T_0 - kompaktlaştırmasının tabanı
$B(F)$	F nin elemanlarının Boolean kombinasyonu
$\beta_w X$	X in T_0 - kompaktlaştırması
FX	X in Fan-Gottesman kompaktlaştırması
$\mathbb{F}$	Approximating ailesi
$\mathbf{T}_i(X)$	X uzayının objeleri T_i uzaylar olan kategorisi
$\boldsymbol{T_i}$	$X \to \mathbf{T}_i(X)$ dönüşümü
$w(X,\mathcal{S})$	$\mathcal{S}$ nin tüm maximal centered sistemlerinin kümesi
$w(X,\beta)$	X in Wallman kompaktlaştırması

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Düzlemin Alexandroff kompaktlaştırması.. 11

Şekil 3.1 T_3 refleksiyonunun inşaası..28

Şekil 4.1 FG-genişlemeye sahip olan FG-morfizmler 39

Şekil 4.2 FG -morfizmlerin değişmeli diyagramı.. 41

Şekil 4.3 $q(X)$' in Y 'nin bir sFG -gereni olduğunu gösteren diyagram………..........41

Şekil 4.4 FG -morfizmlerinin değişmeli diyagramlarının birlikte düşünülmesi 41

Şekil 4.5 $F(f)$ için değişmeli bir diyagram... 42

1. GİRİŞ

Topolojik uzayların genişlemesi olarak da adlandırılan kompaktlaştırma kavramı ilk olarak 1924 yılında Tietze'nin makalesinde kullandığı tek nokta kompaktlaştırması tanımı ile literatüre girmiştir. Aynı yıllarda Alexandroff ve Urysohn kompaktlaştırmayı, sayılabilir kompakt uzayların genişlemesi olarak düşünmüşler, fakat daha sonraki yıllarda bu düşünce de değişmiştir.

1930'da Tychonoff'un tam regüler uzayları karakterize eden "Tam regüler uzaylar kapalı birim aralık olan $[0,1]$'nın kopyalarının çarpımına gömülebilir" teoremi kompaktlaştırma metodlarının özelliklede Stone-Cech kompaktlaştırmasının ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Bu teoremden hareketle 1937'de E. Cech ve M.H. Stone topolojik ve cebirsel olarak önemli yayınlar yaparak Stone-Cech kompaktlaştırmasının temelini attılar. Stone çalışmalarında Boolean cebiri ve özellikle de Boolean halkalarının uygulamalarını kullanıyordu. Aynı yıllarda Henri Cartan filtre ve ultrafiltreler kavramlarının literatüre girmesini sağlayarak farklı kompaktlaştırma türlerinin ortaya çıkmasına sebep oldu.

Wallman (1938), T_1 uzaylarının kapalı kümeleri için bir taban elde ederek bu taban yardımıyla kendi adını taşıyan kompaktlaştırmayı geliştirdi. Burada bahsedilen tabanın elemanları birer ultrafiltre olarak da göz önüne alınabilir.

Hewitt (1948) idealler ve filtreler arasında bir bağ kurarak (Hewitt genişlemeside denilen) Hewitt realkompaktlaştırmasını geliştirdi. Aynı yıllarda Nachbin'de benzer çalışmalar yaptı ancak Hewitt'ten sonra yayınlandığı için bazı kaynaklarda bu kompaktlaştırmaya Hewitt-Nachbin kompaktlaştırması adı verilir.

Samuel (1948) uniform uzayların özel olarak da topolojik grupların kompaktlaştırılması üzerine çalışmalar yaptı.

Freudenthal (1952) yine topolojik grupların kompaktlaştırılmasında kullanılan geometrik ve cebirsel bir başka metot ortaya koydu. Aynı yıl Ky Fan ve Noel Gottesman (1952) yeni bir kompaktlaştırma metodu geliştirdiler. Onların metodu Wallman'nın kullandığı metoda benziyordu ancak çalıştıkları uzay regülerdi ve taban elemanları da açık kümelerdi. Daha sonraları bu kompaktlaştırma Fan-Gottesman kompaktlaştırması olarak adlandırıldı.

Frink (1964) tam regüler uzayların normal tabanla karakterize edilebileceğini göstererek yeni kompaktlaştırma metotlarının önünü açtı.

Ayrıca kompaktlaştırma konusu ile ilgili olarak Myskis (1949), Kelley (1955), Wagner (1957) ve Kowalsky (1961) da çeşitli çalışmalar yapmıştır. Daha sonraları bu konu Loeb (1969), Biles (1970), Ul'janov (1977) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Wu ve Wang-Hong (2004) tarafından filtreler ve ağlar vasıtasıyla bir kompaktlaştırma elde edilmiş ve bu kompaktlaştırmanın Stone-Cech ve Wallman kompaktlaştırmaları arasındaki ilişki incelenmiştir.

Günümüzde kompaktlaştırmanın çeşitli konularla ilişkisi çalışılmaktadır. 2004 ve 2006 yılları arasında Belaid ve Echi tarafından farklı kompaktlaştırma türleri ile spectral uzaylar arasındaki ilişki incelendi. Alexandroff kompaktlaştırması, T_0 kompaktlaştırması ve Wallman kompaktlaştırmaların spectral olmasına bağlı olarak A-spectral, H-spectral ve W-spectral tanımları verilerek bu uzaylar karakterize edildi.

Yine aynı yıllarda Belaid ve Echi kategoriler vasıtasıyla tanım ve değer kümesinin Wallman kompaktlaştırması olduğu dönüşümlerle ilgilendiler. Bu dönüşümlerin hangi şartlar altında homeomorfizmlere genişleyebileceğini araştırdılar.

Ralph Kopperman ve Richard Wilson (2008) tarafından T_1 uzayın Wallman kompaktlaştırmasının sonlu T_0 uzaylarının ve sürekli dönüşümlerin invers limitlerinin kapalı noktalarının kümesi olduğu gösterildi.

Bu çalışmanın ilk kısmında kompaktlaştırma, spectral uzaylar, submaximal uzaylar, kategori teorisi ve approximating teori ile ilgili bazı tanımlar ve ön bilgiler sunuluyor. İkinci kısmında konuyla ilgili kullanılan teoremler, önermeler ve lemmalardan bahsediliyor. Son kısmında da Wallman tipli kompaktlaştırmalardan olan Fan-Gottesman kompaktlaştırmasının spectral uzaylar, submaximal uzaylarla ilişkisi incelenmiş ve bu kompaktlaştırma metodu kategori teori ve approximating teoriye uygulanarak yeni tanımlar ve teoremler elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Bu bölüm genel kavramlar ve kompaktlaştırma başlıkları altında iki alt bölüme ayrılmıştır. Birinci bölümde bu çalışmada yer alan genel topolojinin bazı temel tanım ve kavramlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise kompaktlaştırma tanımı verilerek bu çalışmada yer alan kompaktlaştırma türlerine değinilmiştir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Filtre): X bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $F \subset P(X)$ alt ailesine X üzerinde bir filtre denir.

1-) $\varnothing \notin F$

2-) $T_1, T_2 \in F$ için $T_1 \cap T_2 \in F$

3-) $T_1 \in F$ ve $T_1 \subset T'$ ise $T' \in F$ 'dir (Willard 1970).

Tanım 2.1.2 (Zayıf-Kuvvetli Filtre): X üzerinde F_1, F_2 filtreleri verilsin. Eğer $F_1 \subset F_2$ ise F_1, F_2 'den daha kaba ya da F_2, F_1 'den daha incedir denir (Willard 1970).

Tanım 2.1.3 (Ultra filtre): F , X üzerinde bir filtre olsun. Eğer X üzerinde kesin olarak F 'den daha kuvvetli başka bir filtre yoksa F 'ye ultra filtre denir (Willard 1970).

Tanım 2.1.4 (Yönlendirilmiş küme): Bir Λ kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir '$\preceq$' bağıntısına yönlendirme bağıntısı ve üzerinde böyle bir bağıntı tanımlanmış kümeye de yönlendirilmiş küme denir.

1-) $\forall \lambda \in \Lambda$ için $\lambda \preceq \lambda$

2-) $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ için $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$ ise $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ tür.

3-) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ ve $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$ olacak şekilde en az bir $\lambda_3 \in \Lambda$ vardır (Willard 1970).

Lemma 2.1.5 (Alexandre Alt Taban Lemması): (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$ ailesi de, τ topolojisinin herhangi bir alt tabanı olsun. Bu takdirde (X, τ) uzayının bir kompakt uzay olması için gerek ve yeter şart X kümesinin, $\mathcal{S}$ alt tabanının bazı elemanlarından oluşan, her örtüsünden sonlu bir alt örtünün seçilebilmesidir (Yüksel 2006).

Tanım 2.1.6 (Zincir): $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi tam sıralı ise A kümesine X kümesi içinde bir zincir denir (Ergun 2006).

Lemma 2.1.7 (Zorn Lemması): Boş olmayan ve her zinciri bir üst sınıra sahip olan kısmi sıralı bir kümenin bir maximal elemanı vardır (Ergun 2006).

Tanım 2.1.8 (Sonlu Karaktere Sahip Aile): Aşağıdaki özellikleri sağlayan kümeler ailesi $\Im$'ye sonlu karaktere sahip aile denir.

1-) Her $A \in \Im$ için, A'nın her sonlu alt kümesi $\Im$'ye ait olmalıdır.

2-) Verilen bir A kümesinin her sonlu alt kümesi $\Im$'ye aitse A'da $\Im$'ye aittir.

Sonlu karaktere sahip bir kümeler ailesi $\Im$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

1-) Her $A \in \Im$ için, A'nın her sonlu veya sonsuz alt kümesi $\Im$'ye aittir.

2-) İçerme ile kısmi sıralı olan $\Im$ nin elemanlarının her zincirinin birleşimi de $\Im$'ye aittir. Böylece Zorn Lemmasından $\Im$ en az bir maximal eleman içerir (Ergun 2006).

Lemma 2.1.9 (Teichmuller-Tukey Lemması): Sonlu karaktere sahip kümelerin her boş olmayan sınıfı bir maximal elemana sahiptir (Ergun 2006).

Tanım 2.1.10 (Nearly Closed-Neredeyse Kapalı): Bir X uzayının N alt kümesini göz önüne alalım. N nin her δ açık örtüsü ve X in her x noktası için $\left(V_x \cap N\right) \subseteq \bigcup_{\delta_{x_i} \in \delta_x} \delta_{x_i}$ olacak şekilde δ nın sonlu bir kümesi δ_x ve x in V_x komşuluğu varsa, N ye neredeyse kapalı (nearly closed) denir (Herrlich 1993).

Tanım 2.1.11 (**Specialization Order-Özel Sıralama):** Bir $\left(X,\tau\right)$ topolojik uzayının specialization orderı, ‘ $x \leq_\tau y$ olması için gerek ve yeter şart $x \in cl\left(\{y\}\right)$ olmasıdır’ şeklinde tanımlanan yansıma ve geçişme özelliklerini sağlayan bağıntıdır. Bu çalışmada $x \leq_\tau y \Leftrightarrow x \in cl\left(\{y\}\right)$ ifadesi kısaca $\left(\downarrow x\right) = \{y \in X : y \leq_\tau x\}$ ile, $y \leq_\tau x \Leftrightarrow y \in cl\left(\{x\}\right)$ ifadesi de $\left(x \uparrow\right) = \{y \in X : x \leq_\tau y\}$ ile gösterilecektir (Kopperman and Wilson 1997).

Tanım 2.1.12 (İrreducible-Sadeleştirilemez): $\left(X,\tau\right)$ bir topolojik uzay ve $C \subset X$ kapalı bir alt kümesi olsun. C iki kapalı kümenin birleşimi olarak yazılamıyor veya buna denk olarak her boş olmayan açık kümesi yoğun küme oluyorsa C ye irreducible (sadeleştirilemez) küme denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.13 (Generic-Genelleyici Nokta): $\left(X,\tau\right)$ bir topolojik uzay ve p de bu uzayda bir nokta olsun. p nin kapanışı uzayın tamamına eşitse, diğer bir deyişle p, X de yoğunsa p ’ye generic nokta denir (Mumford 1999).

Tanım 2.1.14 (Sober Uzay): Her boş olmayan irreducible kapalı küme bir tek noktanın kapanışı ise bu uzaya sober uzay denir (Vickers 1989).

Tanım 2.1.15 (Lokal Kapalı Küme): X bir topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. $V_x \cap S$, V_x ’in kapalı bir alt kümesi olacak şekilde S ’nin her x noktası bir V_x komşuluğuna sahipse S ’ye lokal kapalı denir.

Diğer bir deyişle S'nin lokal kapalı olması için gerek ve yeter şart X'in O açık kümesi ve F kapalı kümesi için $S = O \cap F$ olmasıdır (Belaid and Echi 2004a).

Tanım 2.1.16 (Güçlü Olarak Yoğun Küme): X bir topolojik uzay ve $S \subset X$ olsun. Eğer S, X in lokal kapalı her alt kümesi ile kesişiyorsa S'ye X'de güçlü olarak yoğundur denir (Belaid and Echi 2004b).

Tanım 2.1.17 (İnceltilmiş): (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ de X in iki örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$ nun her U elemanı için $U \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa, bu $\mathcal{U}$ örtüsüne $\mathcal{V}$ nin bir inceltilmişi denir ve $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$ şeklinde yazılır (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.18 (Star İnceltilmiş): (X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ de X in iki örtüsü olsun. Her $V \in \mathcal{V}$ için $St(V, \mathcal{V}) \subseteq U_V$ olacak şekilde $U_V \in \mathcal{U}$ varsa $\mathcal{V}$ ye $\mathcal{U}$ nun star inceltilmişi denir. Burada

$$St(V, \mathcal{V}) = \bigcup \{W \in \mathcal{V} : W \cap V \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır (Hart *et al.* 2004).

Tanım 2.1.19 (Normal Örtü): (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ da X in açık bir örtüsü olsun. $\mathcal{V}_0 = \mathcal{U}$ ve her bir $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_{n-1}$ in star inceltilmişi olacak şekilde X in açık örtülerinin $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \ldots$ dizisi varsa $\mathcal{U}$ ya X in normal örtüsü denir (Hart *et al.* 2004).

Tanım 2.1.20 (Boolean Kombinasyonu): Bir kümenin kümelerdeki arakesit, birleşim ve tümleyen işlemleri uygulanarak elde edilen kümeler ailesine Boolean kombinasyonu denir (Huntington 2008).

Tanım 2.1.21 (Bir Halkanın Spectrumu veya Prime Spectrumu): $\Re$ birimli değişmeli bir halka olsun. $\Re$ nin asal ideallerinin kümesine $\Re$ nin spectrumu veya prime specturumu denir ve $Spec(\Re)$ ile gösterilir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.22 (Zariski Topolojisi): $\Re$ nin bir I ideali için, $Spec(\Re)$ üzerindeki topoloji

$$Z(I) = \{C \in Spec(\Re) : I \subseteq C\}$$

kapalı kümeleriyle tanımlanır ve $Spec(\Re)$ üzerindeki Zariski topolojisi diye adlandırılır.

Tanımdan $Spec(\Re)$ deki bir tek nokta kümesi olan $\{P\}$ nin kapanışı P yi içeren $\Re$ nin tüm asal ideallerinden oluşur. Özellikle $Spec(\Re)$ deki bir P noktasının Zariski topolojide kapalı olması için gerek ve yeter şart bir asal ideal olan P nin $\Re$ nin başka hiçbir asal idealinde bulunmamasıdır. Yani; P nin maximal ideal olmasıdır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.23 (Quasihomeomorfizm): $q : Y \to Z$ bir sürekli dönüşümü, $O(Z)$ den $O(Y)$ ye (burada $O(Y), Y$ nin tüm açıklarının kümesidir) $U \to q^{-1}(U)$ şeklindeki dönüşüm bir bijeksiyon ise q ’ya quasihomeomorfizm denir (Belaid and Echi 2004a)

Tanım 2.1.24 (Quasi-Hausdorff): X bir topolojik uzay ve $(\downarrow x) \cap (\downarrow y) = \varnothing$ olacak şekilde X in birbirinden farklı her x, y elemanları için $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde X in ayrık ve açık U ve V kümeleri varsa X e quasi-Hausdorff uzay denir (Hochster 1969).

Tanım 2.1.25 (Normal uzay): (X,τ) bir topolojik uzay ve F_1, F_2 'de X in kapalı alt kümeleri olsun. $F_1 \subset U$ ve $F_2 \subset V, U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa bu uzaya normal uzay adı verilir (Lipschut 1965).

Tanım 2.1.26 (ICO, ICC, ICOC, Co-P): X bir topolojik uzay ve U 'da X ' in bir alt kümesi olsun.

(1) Eğer X in her kompakt açık alt kümesi O için, $O \cap U$ kompaktsa, U 'ya arakesit kompakt açık (intersection compact open) veya *ICO* denir.

(2) Eğer X in her kompakt kapalı alt kümesi O için, $O \cap U$ kompaktsa, U 'ya arakesit kompakt kapalı (intersection compact closed) veya *ICC* denir.

(3) U, *ICO* ve *ICC* ise U 'ya arakesit kompakt açık kapalı (intersection compact open closed) veya *ICOC* denir.

(4) P bir özellik olsun. Eğer $X - U$ bu özelliği sağlarsa, U 'ya *co-P* denir (Belaid *et al.* 2004).

2.2. Kompaktlaştırma

Kompaktlaştırma kavramının altında yatan temel düşünce uzayın genişlemesidir.

Tanım 2.2.1 (Uzayın Genişlemesi): (X,τ), (Y,τ') topolojik uzaylar ve $A \subset Y$ alt kümesi Y de yoğun olsun. Eğer (X,τ) dan (A,τ'_A)'ya bir homeomorfizm varsa, (Y,τ') uzayına (X,τ) uzayının bir genişlemesi denir. (Y,τ') genişlemeye

$$T_\alpha \text{ - genişlemesi denir} \Leftrightarrow (Y,\tau')\ T_\alpha \text{ -uzayı ise}$$

Burada T_α ayırma aksiyomlarından herhangi birisini göstermektedir.

Verilen bir topolojik uzay bazı hallerde kompakt olmayabilir. Bu takdirde verilen uzay, kompakt bir uzayın yoğun bir alt uzayına homeomorf kılınabilir (Yıldız 2005).

Tanım 2.2.2 (Kompaktlaştırma): (X,τ) topolojik uzayı ve bir (Y,τ') kompakt uzayı verilsin. Eğer X uzayı, Y kompakt uzayının yoğun bir alt uzayına homeomorf ise Y uzayına X uzayının bir kompaktlaştırması veya kompaktlaması denir (Yıldız 2005).

Bir X kompakt uzayının kompaktlaştırması X, Y de kapalı ve yoğun olduğu için kendisidir.

Örnek 2.2.3: (R,U) alışılmış topolojik uzayında $X=(0,1)$ alt uzayı kompakt değildir. Fakat $Y=[0,1]$ uzayı kompakttır. Ayrıca $X\subset Y$ ve $clX=Y$ olduğundan X uzayı kendisine homeomorftur. Bu durumda Y uzayı X 'in bir kompaktlaştırmasıdır (Yıldız 2005).

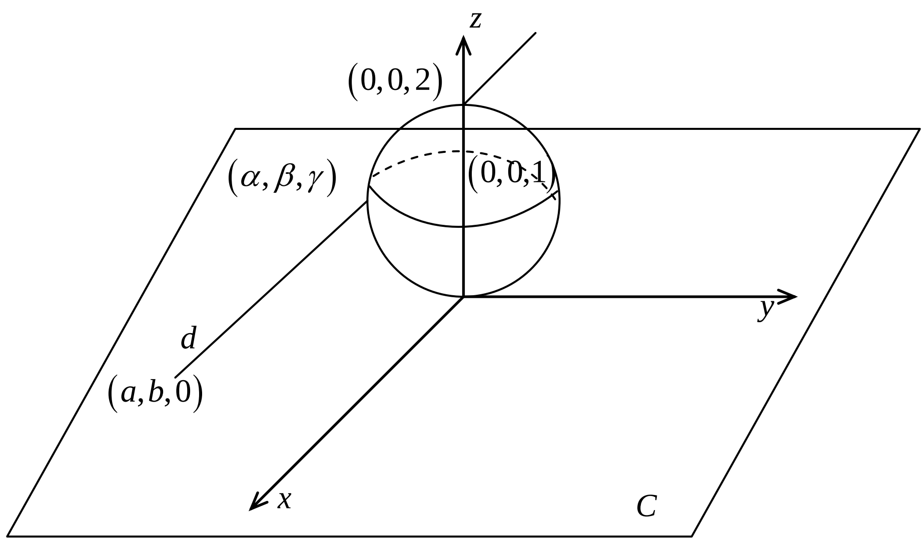
Örnek 2.2.4: $\mathbb{R}^3$ uzayındaki xy-düzlemine $(0,0,0)$ noktasında teğet olan $(0,0,1)$ merkezli 1 yarıçaplı

$$S^2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2=1\right\}$$

küresi göz önüne alınsın. Bu kürenin kuzey kutbu $z=(0,0,2)$ noktasıdır. C düzleminin her bir $P(a,b,0)$ noktasını S^2 küresinin kuzey kutbuna birleştiren d doğrusunu düşünelim. Bu doğrunun denklemi

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{2-z}{2}$$

olur ve aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi S^2 küresini bir $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ noktasında keser.



Şekil 2.1 Düzlemin Alexandroff kompaktlaştırması

Şu halde

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{2-\gamma}{2}$$

eşitlikleri doğrudur. Buradan $a=\dfrac{2\alpha}{2-\gamma}$ ve $b=\dfrac{2\beta}{2-\gamma}$ bulunur.

Buradan da eğer $u=a+ib$ denirse,

$$u^2=\frac{4\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\left(2-\gamma\right)^2}$$

elde edilir. Öte yandan $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ noktasının

$$x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=0$$

küre denklemini de sağladığı hesaba katılırsa

$$|u|^2 = \frac{4\gamma}{2-\gamma}$$

ya da

$$2-\gamma = \frac{8}{4+|u|^2}$$

olur. Bunlardan sonuncusu kullanılarak

$$\alpha = \frac{4a}{4+a^2+b^2}, \beta = \frac{4b}{4+a^2+b^2} \text{ ve } \gamma = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{4+a^2+b^2}$$

bulunur.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ düzleminden S^2 küresi içine, her $P(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$f\left(P(x,y)\right) = Q\left(\frac{4x}{4+x^2+y^2}, \frac{4y}{4+x^2+y^2}, \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{4+x^2+y^2}\right)$$

şeklinde $f:\mathbb{R}^2 \to S^2 - \left\{(0,0,2)\right\}$ tanımlı bir f fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğu kolayca elde edilebileceği gibi yukarıdaki şekilden de açıkça görülebilir. Şu halde fonksiyonun tersi vardır ve o da

$$f^{-1}: S - \left\{(0,0,2)\right\} \to \mathbb{R}^2 \quad f^{-1}\left(Q(x,y,z)\right) = P\left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}\right)$$

olur. f fonksiyonu ile tersinin sürekli olduğunu görebilmek için önce $\mathbb{R}^2$ düzleminden $\mathbb{R}$ uzayına

$$f_1(x,y)=\frac{4x}{4+x^2+y^2},\ f_2(x,y)=\frac{4y}{4+x^2+y^2},\ f_3(x,y)=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{4+x^2+y^2}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlar süreklidirler. Sürekli fonksiyonların bileşkesi sürekli olduğundan f fonksiyonu süreklidir. Benzer şekilde tersi de sürekli olur ve dolayısıyla f fonksiyonu bir topolojik eş yapı dönüşümüdür (Kılıç 2002).

Görüldüğü gibi küre, düzlemin bir kompaktlaştırmasıdır. Özel olarak bu kompaktlaştırmaya Aleksandroff veya tek nokta kompaktlaştırması adı verilir. Ayrıca $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin Aleksandroff kompaktlaştırması Riemann küresi veya genişletilmiş kompleks düzlem diye adlandırılır. Benzer olarak $\mathbb{R}$ 'nin tek nokta kompaktlaştırması çemberdir. Ayrıca $\mathbb{R}^3$'ün tek nokta kompaktlaştırması da $S^3=\mathbb{R}^3\cup\{\infty\}$ yani;

$$S^3=\left\{(x,y,z,t): x^2+y^2+z^2+t^2=1\right\}$$

denklemiyle verilen uzaydır (Kauffman 1986).

2.2.1. Wallman Kompaktlaştırması

Wallman kompaktlaştırması yukarıda belirtilen özelliklere sahip X in kompaktlaştırmasını elde etmek için kullanılabilen bir metoddur. 1960 larda bilinen tüm kompaktlaştırmaların aynı zamanda Wallman kompaktlaştırması yardımıyla da elde edilebileceği gösterilmiştir. Ancak 1977'de Uljanov Wallman kompaktlaştırması olmayan bir uzay ve bu uzayın Wallman kompaktlaştırmasıyla elde edilmeyen Hausdorff bir kompaktlaştırmasının örneğini vermiştir.

Wallman kompaktlaştırmasının tarifinde bir topolojik uzayın kapalı kümeleri için alttaban kavramı kullanılır.

Tanım 2.2.5 (Taban): X bir topolojik uzay ve β, X in kapalı alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere eğer X in her bir kapalı alt kümesi, β nın bazı alt ailelerinin arakesiti ise veya buna denk olarak X in her bir G kapalı alt kümesi ve $X-G$ nin herbir x noktası için $x \notin B$ ve $G \subseteq B$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ varsa β ailesine kapalı kümeler için bir taban denir (Hart *et al.*2004).

Tanım 2.2.6 (Alt taban): Bir X topolojik uzayının kapalı alt kümelerinin $\mathcal{S}$ ailesini göz önüne alalım. Eğer $\mathcal{S}$ nin sonlu alt ailelerinin herhangi birleşimlerinin oluşturduğu aile X in kapalı kümeleri için bir taban teşkil ediyorsa $\mathcal{S}$ ye X in kapalı alt kümeleri için bir alt tabandır denir (Hart *et al.*2004).

Tanım 2.2.7 (Centered Sistem): $\mathcal{S}$ nin X in kapalı alt kümeleri için bir alt taban olduğunu farz edelim. $\wp$, $\mathcal{S}$ nin bir alt ailesi olmak üzere $\wp$ nun her sonlu $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ alt ailesi için;

$$S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \neq \varnothing$$

ise $\wp$ ya $\mathcal{S}$ nin centered sistemi denir (Hart *et al.*2004).

Bu durumda Alexandre alt taban Lemmasından X in kompakt olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}$ nin her bir centered sisteminin boş olmayan arakesite sahip olması gerektiği görülür.

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$, X in kapalı alt kümeleri için bir alt taban olsun. Wallman kompaktlaştırmasının temel fikri, $\mathcal{S}$ nin her bir centered sisteminin arakesitinin boş olmamasını sağlamaktır. Ne zaman $\mathcal{S}$ nin bir centered sistemi boş arakesite sahip olur o zaman X uzayına yeni bir nokta eklenerek bu önlenir. Daha doğru bir tanım şöyledir: Teichmuller-Tukey Lemmasından $\mathcal{S}$ nin her bir centered sistemi bir maximal centered sistemde bulunur. $\mathcal{S}$ nin tüm maximal centered sistemlerinin kümesi $w(X,\mathcal{S})$ ile gösterilsin. $w(X,\mathcal{S})$ Wallman kompaktlaştırmasını oluşturan kümedir. Bu kümenin elemanları $\xi,\eta,\omega,\ldots$ gibi küçük Yunan harfleriyle gösterilecektir. $\mathcal{S}$ de ki her bir S için, $w(X,\mathcal{S})$ nin S^* alt kümesi

$$S^* = \{\xi \in w(X,\mathcal{S}) : S \in \xi\}$$

olarak tanımlanır. $w(X,\mathcal{S})$ de bir topoloji, kapalı kümeler için bir alt taban olarak

$$\mathcal{S}^* = \{S^* : S \in \mathcal{S}\}$$

tanımlanır.

Böylece $w(X,\mathcal{S})$ nin bir G alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\xi \notin G$ olacak şekilde $w(X,\mathcal{S})$ de bulunan her bir ξ için, $G \subseteq S_1^* \cup S_2^* \cup \ldots \cup S_n^*$ ve ($i = 1,2,\ldots,n$ için) $\xi \notin S_i^*$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ de $S_1, S_2, \ldots S_n$ nin var olmasıdır. $\mathcal{S}$ deki tüm $S_1, S_2, \ldots S_n$ ler için $S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \neq \varnothing$ olması için gerek ve yeter şartın $S_1^* \cap S_2^* \cap \ldots \cap S_n^* \neq \varnothing$ olması $w(X,\mathcal{S})$ nin en önemli özelliğidir.

$w(X,\mathcal{S})$ nin kompaktlığı Alexander alt taban Lemması yardımıyla gösterilebilir. $\wp^*$ ın $\mathcal{S}^*$ ın bir centered sistemi olduğunu farz edelim. $\wp^*$ ın maximal olduğunu kabul edebiliriz. $w(X,\mathcal{S})$ nin yukarıda bahsedilen özelliğinden $\wp = \{S : S^* \in \wp^*\}$ ailesinin $\mathcal{S}$ nin maximal centered sistemi olduğu görülür. Sonuç olarak $\wp$, $\wp^*$ daki her bir kümeye ait olan $w(X,\mathcal{S})$ nin bir noktasıdır. Buradan $\bigcap \wp^* \neq \varnothing$ dır. Böylece $w(X,\mathcal{S})$ kompakttır.

$e: X \to w(X, \mathcal{S})$ ye topolojik embedding (gömülme)

$e(x) = \{S \in \mathcal{S} : x \in S\}$

olarak tanımlansın. Burada $\mathcal{S}$ nin üzerinde herhangi bir kısıtlamaya gerek yoktur. Herhangi bir $x \in X$ için $e(x)$ ailesinin maximal centered system olması gerekmez. e bir dönüşüm bile olsa embedding olması gerekmez.

Tanım 2.2.8 (Disjunctive): Eğer $\mathcal{S}$ nin her bir S elemanı ve $x \notin S$ olacak şekilde X in herbir x noktası için $x \in T \subseteq X - S$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ de bir T varsa $\mathcal{S}$ alt tabanına disjunctive denir (Frink 1964).

X in $\mathcal{S}$ alt tabanı disjunctive ise X uzayı $w(X, \mathcal{S})$ gibi T_1 dir ve e bir gömülmedir. Böylece bir disjunctive alt taban $\mathcal{S}$ için $w(X, \mathcal{S})$ X in bir kompatlaştırmasıdır. Üstelik, $\mathcal{S}^*$ ın $\mathcal{S}$ nin $w(X, \mathcal{S})$ deki kapanışıyla uyumlu olduğu gösterilebilir.

Genel olarak $w(X, \mathcal{S})$ kompaktlaştırmasının Hausdorff olması gerekmez. Şimdi $w(X, \mathcal{S})$ nin Hausdorff olması için gerekli şartlar şu şekilde verilebilir.

Tanım 2.2.9 (Ring): Bir X kümesinin alt kümelerinin $\mathfrak{A}$ ailesinin her sonlu $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ alt ailesi sonlu arakesit ve birleşim altında kapalıysa $\mathfrak{A}$ ya ring adı verilir (Frink 1964).

X topolojik uzayının kapalı alt kümelerinin $\mathcal{S}$ alt tabanının bir ring olduğu kabul edilsin. $\mathcal{S}$ nin ring özelliğinden dolayı kapalı kümeler için bir taban olduğu açıktır.

Tanım 2.2.10 (Normal Taban): $\mathcal{S}$ nin her ayrık A, B elemanı için $A \cap D = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ ve $C \cup D = X$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ nin C ve D elemanları varsa $\mathcal{S}$ ailesine normaldir denir (Hart *et al.* 2004).

Tanım 2.2.11 (Wallman tabanı): X topolojik uzayının kapalı alt kümelerinin β tabanı (1) ring, (2) disjunctive ve (3) normal ise β ya Wallman tabanı denir. β, Wallman tabanı ise, $w(X,\beta)$ da Wallman kompaktlaştırması olarak adlandırılır.

(1), (2) ve (3) ile verilen özellikler $w(X,\beta)$ uzayının kompakt ve Hausdorff bir uzay olduğunu belirtir. Aynı zamanda β nın ring özelliği β nın maximal centered sistemlerinin ultra filtreler olduğunu gösterir (Hart *et al.* 2004).

2.2.2. Fan –Gottesman Kompaktlaştırması

X bir regüler uzay ve β da X deki açık kümelerin bir sınıfı olsun. β nın aşağıdaki üç özelliği sağlasın;

1-) $A, B \in \beta$ ise $A \cap B \in \beta$

2-) $A \in \beta$ ise $X - clA \in \beta$

3-) X in herhangi bir U açığı ve $clA \subset U$ olacak şekilde her $A \in \beta$ için $clA \subset B \subset clB \subset U$ olan bir $B \in \beta$ vardır.

Ky Fan ve Noel Gottesman bu özellikleri sağlayan β yı normal taban olarak adlandırıyorlar. Normal tabana sahip, regüler X uzayı göz önüne alınsın. β da bir zincir (chain) ailesi sonlu sayıda A_i kümesi için;

$$clA_1 \cap clA_2 \cap clA_3 \cap ... \cap clA_n \neq \emptyset$$

olacak şekilde β nin boş olmayan kümeler ailesidir. Zorn Lemmasından β daki her zincir ailesi en az bir maksimal zincir ailesinde bulunur. Maksimal zincir ailelerini $x^*, y^*, ...$ harfleriyle ve β daki tüm maksimal zincir ailelerinin oluşturduğu küme $(X,\beta)^*$ ile gösterilsin. $\forall A \in \beta$ için

$$\tau(A)=\left\{x^{*}\in(X,\beta)^{*}:B\in x^{*} \text{ ve } clB\subset A\right\}$$

olsun. $\beta^{*}=\{\tau(A):A\in\beta\}$ kümesi açık kümelerin bir tabanı olarak alınarak $(X,\beta)^{*}$ ın topolojisi tanımlanır. $(X,\beta)^{*}$ kompakt ve Hausdorff bir uzaydır. Bu uzaya X in Fan-Gottesman kompaktlaştırması denir (Fan and Gottesman 1952).

Uzayın bir taban yardımıyla kompaktlaştırmasının elde edildiği kompaktlaştırma türüne Wallman tip kompaktlaştırma denir. Fan-Gottesman kompaktlaştırmasıda bir taban yardımıyla elde edildiği için bu kompaktlaştırmanın bir Wallman tip kompaktlaştırma olduğu bilinir (Njastad 1965).

2.2.3. T_0-Kompaktlaştırması

1969 yılında Herrlich aşağıdaki inşayı gerçekleştirmiştir.

X bir T_0 uzay olsun. $\Gamma(X)$, X üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan tüm F filtrelerinin kümesi olsun.

1-) F filtresi X 'de yakınsak değildir.

2-) X 'in her sonlu açık örtüsü F filtresinin bazı elemanlarını içersin.

$\Omega(X)$, $\Gamma(X)$ in minimal elemanlarının kümesi olsun ve aşağıdaki tanımlar verilsin.

1-) $X_w^{*}=X\cup\Omega(X)$

2-) $A_w^{*}=A\cup\{F:F\in\Omega(X) \text{ ve } A\in F\}$

$\beta_w=\{A_w^{*}:A,\ X \text{ in açık bir alt kümesi}\}$ ailesi X_w^{*} üzerindeki τ_w^{*} topolojisi için bir tabandır. (X_w^{*},τ_w^{*}) bu tabanla birlikte kompakt bir uzaydır ve bu uzaya X 'in T_0 kompaktlaştırması adı verilir. Özel olarak $\beta_w X$ ile gösterilir (Herrlich 1969).

Herrlich yaptığı inşa ile uzay için bir taban elde etip bu taban yardımıyla uzayın kompaktlaştırmasını elde ettiğinden T_0 kompaktlaştırmasıda bir Wallman tip kompaktlaştırmadır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde submaximal uzaylar, spectral uzaylar, kategori teorisi ve approximating teori ile ilgili önbilgiler ve bu konularla ilgili bu çalışmada da kullanılan bazı sonuçlardan bahsedilecektir.

3.1. Submaximal ve Spectral Uzaylar

Tanım 3.1.1 (Submaksimal Uzay): (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X ‘in her yoğun alt kümesi açıksa, X uzayına submaksimal uzay denir (Bourbaki 1966).

Submaximal uzaylar için en basit örnek alışılmış topolojiyle $X=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ uzayıdır.

Önerme 3.1.2: X bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) X bir submaximal uzaydır.
(ii) Her $S\subseteq X$ için, $cl_X S-S$ kapalıdır.
(iii) Her $S\subseteq X$ için, $cl_X S-S$ kapalı ve diskrettir (Bezhanishvili *et al*. 2005).

Önerme 3.1.3: (X,τ) kompakt submaximal bir uzay olsun. Bu durumda $cl_X S-S$, X in her alt kümesi için sonludur.

İspat: Önerme 3.1.2 den, $cl_X S-S$ diskret rölatif topolojiyle kapalı küme olduğu için, kompakttır ve böylece sonludur (Adams *et al*. 2008).

Önerme 3.1.4: (X,τ) sonlu sayıda yığılma noktasına sahip olan bir topolojik uzay olsun. X kümesinin her bir yığılma noktasının kümesi kapalıysa, bu durumda (X,τ) bir submaximal uzaydır.

İspat: S, X 'in bir alt kümesi Y 'de X in yığılma noktalarının kümesi olsun. Bu durumda kapalı tek nokta kümelerinin sonlu birleşimi olan $cl_X S - S \subseteq Y$ dir ve Önerme 3.1.2 den X bir submaximal uzaydır (Adams *et al*. 2008).

Tanım 3.1.5 (Spectral Uzay): Üzerindeki Zariski topolojisiyle bir halkaya veya halkanın prime specturumuna homeomorf olan topolojik uzaya spectral uzay denir (Dummit and Foote 2004).

M. Hochster spectral uzayları aşağıdaki gibi karakterize etmiştir.
X topolojik uzayının spectral olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki aksiyomları sağlamasıdır.
(i) X in her boş olmayan irreducible her kapalı altkümesi bir tek noktanın kapanışıdır. Yani; X generic noktaya sahiptir. Diğer bir deyişle soberdir.
(ii) X kompakttır.
(iii) Kompakt açık kümeler X in bir tabanını oluşturur.
(iv) X in kompakt açık kümelerinin ailesi sonlu arakesit altında kapalıdır (Hochster 1969).

Belaid ve Echi, Hochster'in karakterizasyonundan faydalanarak up-spectral ve down-spectral tanımlarını aşağıdaki gibi verdiler.

Tanım 3.1.6 (Up-Spectral Uzay): Spectral uzayın kompaktlık ((ii) aksiyomu) hariç diğer aksiyomlarını sağlayan uzaya up-spectral uzay denir.

Tanım 3.1.7 (Down-Spectral Uzay):: Spectral uzayın (i) aksiyomu hariç diğer aksiyomlarını sağlayan uzaya down-spectral uzay denir (Belaid and Echi 2004b)

Uzayın kompaktlaştırmasının spectral olmasına bağlı olarak aşağıdaki tanımlar verilmiştir.

Tanım 3.1.8 (A-spectral Uzay): (X,τ) topolojik uzayının Alexandroff (tek-nokta) kompaktlaştırması spectral ise, bu uzaya A-spectral uzay denir (Belaid *et al.* 2004).

Tanım 3.1.9. (H-spectral): (X,τ) topolojik uzayının T_0- kompaktlaştırması spectral ise, bu uzaya H-spectral uzay denir (Belaid 2006).

Tanım 3.1.10 (W-spectral Uzay): (X,τ) topolojik uzayının Wallman kompaktlaştırması spectral ise bu uzaya W-spectral uzay denir (Belaid 2006).

Önerme 3.1.11: X, her $x \in X$ ve her $F \notin (x\uparrow) \cap \Omega(X)$ için $(\downarrow x) \cap (\downarrow F) = \varnothing$ olacak şekilde bir T_0 uzay olsun. X, H-spectral ise, bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) Eğer C, $\beta_w X$ in kompakt açık kümesi ise, $C \cap X$, X in nearly-closed kümesidir.

2) Nearly-closed ve açık kümeler X in bir tabanını oluşturur.

3) U,V $U \cup V = X$ olacak şekilde X in iki açık alt kümesi olsun. Bu durumda, $N \subseteq U$ ve $N \cup V = X$ olacak şekilde X in açık bir nearly-closed kümesi vardır.

İspat: 1) C, $\beta_w X$ in kompakt açık kümesi olsun. U ve V, X in iki açık kümesi olmak üzere $C = U_w^* \cup V_w^*$ olduğu farz edilsin. $\aleph$, $U \cup V$ nin bir açık örtüsü ve $x \in X - (U \cup V)$ olsun. $\beta_w X$ spectral olduğu için quasi-Hausdorff tur. Her bir $F \in \Omega(X) \cap (U_w^* \cup V_w^*)$ için $F \notin (x\uparrow)$ dur. Böylece $(\downarrow x) \cap (\downarrow F) = \varnothing$ olur. Buradan $x \in W_{(x,F)w}^*$ ve $F \in W_{Fw}^*$ olacak şekilde $W_{(x,F)w}^*$ ve W_{Fw}^* ayrık ve açık kümeleri vardır. Bu durumda $\aleph \cup \{W_{Fw}^* : F \in \Omega(X) \cap (U_w^* \cup V_w^*)\}$, $U_w^* \cup V_w^*$ ın açık bir örtüsüdür.

$U_w^* \cup V_w^*$ kompakt olduğu için bu örtünün $\aleph' \cup \left\{W_{F_1 w}^*, W_{F_2 w}^*, W_{F_3 w}^*, \ldots, W_{F_n w}^*\right\}$ olacak şekilde $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \Omega(X) \cap \left(U_w^* \cup V_w^*\right)$ ve $\aleph' \subseteq \aleph$ sonlu alt örtüsü vardır. Buradan $C_x \cap (U \cup V) \subseteq \bigcup_{C \in \aleph'} C$ olacak şekilde $C_x = \bigcap_{i=1}^{n} \left(W_{(x,F)w}^* \cap X\right)$, x in açık bir komşuluğudur. Böylece $C \cap X = U \cup V$ nearly-closed bir kümedir.

2) W, X in bir açığı W_w^* da $\beta_w X$ in bir açığı olsun. Kompakt açık kümeler $\beta_w X$ in bir tabanını oluşturduğu için $W_w^* = \bigcup_{i \in I} C_i$, $\beta_w X$ in kompakt bir kümesidir. Böylece $W = W_w^* \cap X = \bigcup_{i \in I} (C_i \cap X)$ dir. (1) den $(C_i \cap X)$ nearly-closeddır. O halde nearly-closed ve açık kümeler X in bir tabanını oluşturur.

3) $U \cup V = X$, $U_w^* \cup V_w^* = \beta_w X$ olduğu için $\beta_w X - V_w^* \subseteq U_w^*$ olur. $\beta_w X - V_w^*$ kompakttır. Diğer taraftan $\beta_w X$ spectraldir. Bu durumda $\beta_w X - V_w^* \subseteq \bigcup_{C \in \vartheta} C \subseteq U_w^*$ olacak şekilde $\beta_w X$ in kompakt açık kümelerinin ϑ sonlu kümesi vardır. Böylece $\bigcup_{C \in \vartheta} C \cup V_w^* = \beta_w X$ olur. $N = X \cap \bigcup_{C \in \vartheta} C$ olsun. $N \cup V = X$ olur ve (1) den N nin açık nearly-closed bir küme olduğu anlaşılır (Belaid 2006).

Uyarı 3.1.12: X bir T_1 uzayı ise, her $x \in X$ ve her $F \not\in (x \uparrow)$ için, $(\downarrow x) \cap (\downarrow F) = \varnothing$ dur (Belaid 2006).

Tanım 3.1.13: İki kompakt açık kümenin arakesiti kompakt ise, bu uzaya semi-spectral uzay denir.

Bir uzay semi-spectral ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) X in kapalı *co-ICO* alt kümelerinin herhangi sonlu birleşimi *co-ICO* dur.

b) X in kapalı, kompakt ve *co-ICO* alt kümelerinin herhangi sonlu birleşimi kapalı, kompakt ve *co-ICO* alt kümedir.

c) X in kompakt açık kümesinin tümleyeni *co-ICO* dur.

d) X in kompakt açık kümesinin tümleyeni ile *co-ICO* kümesinin birleşimi *co-ICO* dur (Hoschter 1969).

Önerme 3.1.14: X kompakt açık kümelerin bir tabanına sahip bir semi-spectral uzay ve C 'de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1. C , X in kapalı kompakt *co-ICOC* alt kümesidir.
2. C , X in kapalı kompakt ve *co-ICO* alt kümesidir.
3. C , X de kapalıdır ve $C = U \cap (X - V)$ olacak şekilde X in kompakt açık iki alt kümesi olan U ve V vardır (Echi and Gargouri 2004).

3.2. Kategori Teori

Kategori teori ikili işlem, grup, topolojik uzaylar gibi matematiksel objeler arasındaki dönüşümlerin koleksiyonunun cebirsel özelliklerini formülize eden matematiğin bir branşıdır.

Tanım 3.2.1 (Kategori): K bir sınıf olsun. K 'nın bir kategori olması için K 'daki tüm nesnelerin (obje) sınıfı $Ob(K)$, herhangi iki nesne arasındaki dönüşümlerin (morfizm) kümesi, tüm morfizmlerin sınıfı $Mor(K)$ verilmeli ve ayrıca verilen iki dönüşüm için bunların bileşkesi tanımlanmalıdır. Bu bileşke aynı zamanda aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

1. K 'daki her A nesnesi için $I_A : A \to A$ birim dönüşümü var ve her $f : A \to B$ dönüşümü için $f \circ I_A = f$ ve her $g : B \to A$ dönüşümü için $I_A \circ g = g$ olmalıdır.
2. $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ olmak üzere bileşke "$\circ$" işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır. Yani; $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ olmalıdır.

K 'daki herhangi iki nesne arasındaki morfizmlerin kümesi

$$K(A,B)=Hom(A,B)=\{f : f : A\to B \text{ dönüşüm}\}$$

bileşkeside

$$\circ : K(A,B)\times K(B,C)\to K(A,C)$$
$$(f,g)\to\circ(f,g)=g\circ f$$

Şeklindedir (Maclane 1986).

Örnek 3.2.2: K nın objeleri $A,B,C,...$ kümeler, morfizmleri fonksiyonlar ve bileşke işlemi olarak da fonksiyonların bileşkesini alınsın.

1. $\forall A\in K$ için $I_A : A\to A$ birim fonksiyonu vardır. Ayrıca $\forall f : A\to B$ ve $g : B\to A$ fonksiyonları için $I_A\circ f = f,\ g\circ I_A = g$ şeklindedir.
2. $f : A\to B,\ g : B\to C,\ h : C\to D$ olmak üzere fonksiyonlarda

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

birleşme özelliği vardır. Dolayısıyla K bir kategoridir. $K = SET$ olarak gösterilir.

Örnek 3.2.3: K nın objeleri $(X,\tau),(Y,\delta),(Z,\sigma),...$ topolojik uzaylar, morfizmleri $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ sürekli fonksiyonlar ve bileşke işlemi olarak da fonksiyonların bileşkesi olsun.

1. $I_X :(X,\tau)\to(X,\tau)$ olacak şekilde birim fonksiyonu vardır ve bu birim fonksiyon süreklidir. Ayrıca her $f:(X,\tau)\to(Y,\delta)$ için $f\circ I_X = f$ ve her sürekli $g:(Y,\delta)\to(X,\tau)$ fonksiyonu için $I_X\circ g = g$ dir.
2. $f:(X,\tau)\to(Y,\delta), g:(Y,\delta)\to(Z,\sigma)$ ve $h:(Z,\sigma)\to(W,\mu)$ olmak üzere f,g,h fonksiyonları sürekli olup bunların bileşkesi olan $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ da sürekli ve eşittir.

Dolayısıyla K bir kategoridir. Bu kategoriye bütün topolojik uzayların kategorisi denir ve $K = TOP$ şeklinde gösterilir.

Objeleri objelere ve morfizmleri morfizmlere dönüştüren kategoriler arasındaki fonksiyonlar fanktor (functor) diye adlandırılır kovaryant ve kontravaryant olmak üzere iki çeşittir.

Tanım 3.2.4 (Kovaryant Fanktor-Functor): K, K' iki kategori olsun. K daki her A objesi, K' nün her $F(A)$ objesi ve K'nın her $f: A \to B$ morfizmi için, $F(f) = F(A) \to F(B)$, K' nün bir morfizmi oluyorsa ve

1. $\forall A \in Ob(K)$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$

2. $f: A \to B$ ve $g: B \to C$, K nın iki morfizmi ise $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

şartlarını sağlıyorsa $F: K \to K'$ ne bir kovaryant fanktor denir (Mıtchell 1965).

Örnek 3.2.5: $U: TOP \to SET$, $U(X,\tau) = X$ şeklinde tanımlanan U bir fanktordür. Gerçekten $U: TOP \to SET$, $U(X,\tau) = X$ ve $f:(X,\tau) \to (Y,\delta)$ morfizmi için $U(f) = f: X \to Y$ olarak tanımlandığını göz önüne alırsak;

1) $U\left(I_{(X,\tau)}\right) = I_{U(X,\tau)} = I_X$

2) $U(g \circ f) = U_{(g)} \circ U_{(f)} = g \circ f$ dir.

Böylece U bir fanktordur. Bu fanktora forgetful (unutkan) fanktor denir.

Diğer matematiksel yapılar gibi, kategoriler arasındaki yapıyı koruyan dönüşümler de vardır.

Tanım 3.2.6. (Kontravaryant Fanktor): K, K' iki kategori olsun. K daki her A objesini, K' de $F(A)$ objesine dönüştüren ve K nın her $f: A \to B$ morfizmi için, aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $F: K \to K'$ dönüşümüne kontravaryant fanktor denir.

1. $\forall A \in Ob(K)$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$

2. $f:A\to B$ ve $g:B\to C$, K nın iki morfizmi ise $F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$ olacak şekilde $F(f):F(B)\to F(A)$ morfizmi vardır (Mıtchell 1965).

Tanım 3.2.7 (Doğal Dönüşüm): K, K' iki kategori, F ve G de K dan K' ne iki fanktor olsunlar. Eğer her $A\in Ob(K)$ için $\alpha_A:F(A)\to G(A)$ ve her $f:A\to B$ dönüşümü için $G(f)\circ\alpha_A=\alpha_B\circ F(f)$ oluyorsa $\alpha:F\to G$ dönüşümüne doğal dönüşüm denir (Maclane 1986).

Tanım 3.2.8 (Alt Kategori): Bir K kategorisinin C alt kategorisi, K'nın bazı morfizmlerini, bu morfizmlerin tanım ve değer kümelerinin bazı objelerini içeren ve içerdiği her bir obje için özdeşlik morfizmini içeren ve içerdiği her morfizm için bileşkelerini de içeren bir koleksiyondur (Mıtchell 1965).

Tanım 3.2.9 (Refleksiyon): C alt kategorisinde K kategorisinin X objesinin refleksiyonu, $f:X\to Z$, K nın Z objesi içine herhangi bir morfizmi, $f=g\circ r$ olan K nın bir tek g morfizmini sağlayacak şekilde $r:X\to Y$ morfizmiyle birlikte K nın Y objesidir.

F, C'den X'e bir dönüşüm olsun. K daki refleksiyonu $Y=F(X)$, F yi bir fanktor yapan "reflektör" denilen morfizmlere genişleyebilir (Maclane 1986).

Objeleri T_i uzaylar olan tüm topolojik uzaylar ailesinin alt kategorisi de TOP_i ile gösterilir. Tüm TOP_i kategoriler TOP un reflektif alt kategorileridir. Her X topolojik uzayı için evrensel bir T_i uzayı vardır. Bunu $\boldsymbol{T_i}(\boldsymbol{X})$ ile gösteriyoruz. $X\to\boldsymbol{T_i}(\boldsymbol{X})$ eşlemesi TOP dan TOP_i ye bir fanktordür. Bu fanktor $\boldsymbol{T_i}$ ile gösterilir.

X bir topolojik uzay ve $\sim$ da X üzerinde $x \sim y \Leftrightarrow cl_X\{x\} = cl_X\{y\}$ şeklinde tanımlanan bir denklik bağıntısı olsun. Burada $cl_X\{x\}$ ile $\{x\}$ kümesinin X deki kapanışı kastedilmektedir. $X/\sim$ bölüm uzayı bir T_0 uzaydır. Bu denklik bağıntısı yardımıyla bölüm uzayı elde etme işlemi özel olarak X in T_0 özdeşlemesi olarak da adlandırılır. $\mathbf{T}_0(X) = X/\sim$ olduğu açıktır. $\mathbf{T}_0(X)$, T_0 refleksiyon olarak adlandırılır. X den, T_0 refleksiyon olan $\mathbf{T}_0(X)$ e kanonik olarak üzerine dönüşümü μ_X ile gösterelim. μ_X in üzerine bir quasihomeomorfizm olduğu açıktır. $q : X \to Y$ dönüşümü sürekli ise, aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mu_X"'] & Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\ \mathbf{T}_3(X) \arrow[r, "\mathbf{T}_3(q)"] & \mathbf{T}_3(Y) \end{tikzcd}$$

Şekil 3.1 T_3 refleksiyonunun inşaası

$\mathbf{T}_0$, TOP dan kendisi üzerine bir kovaryant fanktor tanımlar. Böylece regüler ve T_0 olan bir uzay elde ederiz, aynı zamanda regüler ve T_1 dir. İki refleksiyonun birleşimi de bir T_3 refleksiyondur.

Tanım 3.2.10 (Epimorfizm): $\alpha : A \to B$ bir morfizm olmak üzere değer kümesi A olan f, g morfizmlerinin tüm çiftleri için $f\alpha = g\alpha$ iken $f = g$ oluyorsa α ya epimorfizm denir.

Eğer r morfizmi C de epimorfizm ise K ya C de epireflektif ve F ye de epirefleksiyon denir (Maclane 1986).

Tanım 3.2.11 (Monomorfizm): $\alpha : A \to B$ bir morfizm olmak üzere değer kümesi A olan f, g morfizmlerinin tüm çiftleri için $\alpha f = \alpha g$ iken $f = g$ oluyorsa α ya monomorfizm denir.

Eğer r morfizmi C de monomorfizm ise, K ya C de monoreflektif ve F ye de monorefleksiyon denir.

Eğer K hem epireflektif hem de monoreflektif ise, K ya bireflektif ve F ye de birefleksiyon denir (Maclane 1986).

3.3. Approximating Teori

Tanım 3.3.1 (İnvers-Ters Sistem): Topolojik uzayların X_λ ailesi ve Λ yönlendirilmiş kümesini göz önüne alalım. $\lambda,\ \lambda',\ \lambda'' \in \Lambda$ için $\lambda \prec \lambda' \prec \lambda''$ olmak üzere

1. $\lambda \in \Lambda$ için $p_{\lambda\lambda} = I_\lambda$
2. $\lambda \prec \lambda' \prec \lambda''$ için $p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$

Şartlarını sağlayan $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$ sürekli dönüşümleri ile Λ yönlendirilmiş kümesi bu topolojik uzayların invers sistemini oluşturur. $\left(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right)$ şeklinde gösterilir (Hart *et al.* 2004).

Tanım 3.3.2 (İnvers Limit): $\left(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\right)$ invers sisteminin invers limiti $\lambda \prec \lambda'$ için $p_{\lambda\lambda'}\left(x_{\lambda'}\right) = x_\lambda$ olacak şekilde $x = x_\lambda$ noktalarından oluşan $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ çarpım uzayının alt uzayıdır. Yani;

$$\lim_{\leftarrow}\left(X_i\right) = \left\{\left(x_i\right)_{i \in \Lambda} : i \prec j \Rightarrow x_i = p_{ji}\left(x_j\right)\right\}$$

dir. Bu durumda $\lambda \in \Lambda$ için $p_\lambda : X \to X_\lambda$ iz düşümü $p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'} = p_\lambda$ 'nü sağlar (Hart *et al.* 2004).

Tanım 3.3.3 (Approximate Limit): Bir approximate invers sistemi aşağıdaki şartları sağlayan maximal elemanı olmayan yönlendirilmiş sıralı kümesi $(\Lambda,\prec)$, bir topolojik uzay $X_\lambda, \forall\lambda\in\Lambda$ için $\mathfrak{A}_\lambda\in \mathrm{N}(X_\lambda)$ ve her bir $\lambda\le\lambda'$ için $p_{\lambda\lambda'}: X_{\lambda'}\to X_\lambda$ sürekli dönüşümlerinden oluşur. $\mathrm{X}=\{X_\lambda,\mathfrak{A}_\lambda, p_{\lambda\lambda'},\Lambda\}$ ile gösterilir.

1. $\forall\lambda\in\Lambda$ için $p_{\lambda\lambda}=I_\lambda$
2. $\forall\lambda,\lambda',\lambda''\in\Lambda$ için $\lambda\le\lambda'\le\lambda''\Rightarrow(p_{\lambda\lambda'}, p_{\lambda'\lambda''}, p_{\lambda\lambda''})\le\mathfrak{A}_\lambda$
3. $\forall\lambda,\ \lambda',\ \lambda''\in\Lambda$, $\forall\wp\in\mathrm{N}(X_\lambda)$ ve $\exists\lambda_0\ge\lambda$ için $\lambda_0\le\lambda'\le\lambda''\Rightarrow(p_{\lambda\lambda'}, p_{\lambda'\lambda''}, p_{\lambda\lambda''})\le\wp$
4. $\forall\lambda\in\Lambda$, $\forall\wp\in\mathrm{N}(X_\lambda)$, $\exists\lambda_0\ge\lambda$ ve $\forall\lambda'\ge\lambda_0$ için $\mathfrak{A}_\lambda, \{p_{\lambda\lambda'}{}^{-1}(U):U\in\wp\}$ nin bir inceltilmişidir.

Burada $\wp_0=\mathfrak{A}$ ve her bir $\wp_n$, $\wp_{n-1}$ in star inceltilmişi olacak şekilde X in açık örtülerinin bir $\wp_0,\wp_1,\ldots$ dizisi varsa X in $\mathfrak{A}$ açık örtüsü bir normal örtüdür denir. $\mathrm{N}(X)$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\mathrm{N}(X_\lambda)$, X_λ nın normal örtülerinin kümesidir.

Ayrıca $f,g: X\to Y$ iki dönüşüm ve $\mathfrak{A}\in\mathrm{N}(Y)$ olsun. $(f,g)\le\mathfrak{A}$ gösterimi her $x\in X$ için $\{f(x),g(x)\}\subseteq U$ olacak şekilde $U\in\mathfrak{A}$ vardır anlamında kullanılacaktır (Hart *et al.* 2004).

Tanım 3.3.4 (Approximating-Yaklaşım Ailesi): (X,τ) topolojik uzayı verilsin. X için bir approximating ailesi aşağıdaki şartları sağlayan τ nun sonlu alt kümelerinin bir $\mathbb{F}$ koleksiyonudur.

1. $\mathbb{F}$, $\subseteq$ bağıntısıyla yönlendirilmiştir.
2. $\bigcup\mathbb{F}$, (X,τ) için bir tabandır.

Bir invers sistem tanımlamak için $\mathbb{F}$ kullanılacaktır. $F\in\mathbb{F}$ için, X üzerinde $x\sim_F y\Leftrightarrow(\forall T\in F)(x\in T\Leftrightarrow y\in T)$ şeklinde bir $\sim_F$ bağıntısı tanımlansın. Bu durumda $\sim_F$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntının oluşturduğu denklik sınıfları $\mathbb{F}$ nin elemanlarının minimal boş olmayan Boolean kombinasyonlarıdır.

X_F ve X_F^{ξ} kümeleri F nin elemanlarının tüm Boolean kombinasyonları olan $B(F)$ kümesinin minimal elemanlarının oluşturduğu $\mathcal{A}(F)$ kümesidir. F ile oluşturulmuş kümelerin halkası olan $\Re(F)$ göz önüne alınsın. Yani; F yi içeren, sonlu arakesit ve birleşme işlemine göre kapalı olan X in altkümelerinin en küçük kolleksiyonudur. F sonlu olduğundan $\Re(F)$, X üzerinde bir topolojidir ve $\Re(F) \subseteq B(F) \cap \tau$ dur. Genellikle $\{\pi_F^{-1}[U] : U \in \xi_F\} = \Re(F)$ iken $\{\pi_F^{-1}[U] : U \in \tau_F\} = B(F) \cap \tau$ dur (Kopperman and Wilson 2009).

Tanım 3.3.5 (T_1-taban ve Normalleşmiş Taban): Bir topoloji için C tabanı

(1) Her $C \in B(C)$ kapalı ve $x \notin C$ olmak üzere $C \subseteq \bigcup F$ ve $x \notin \bigcup F$ olacak şekilde sonlu boş olmayan $F \subseteq C$ varsa, T_1-tabandır.

(2) $C,\ D \in B\left(\bigcup F\right)$ kapalı ve ayrık olmak üzere $G, H \subseteq F,\ C \subseteq \bigcup G,\ D \subseteq \bigcup H$ için $\bigcup H$ ve $\bigcup G$ kümeleri ayrık olacak şekilde $F \in \mathbb{F}$ varsa, normalleşmiş tabandır (Kopperman and Wilson 2009).

Tanım 3.3.6 (T_1 ve T_4 Approximating Ailesi): Bir approximating ailesi $\mathbb{F}$

(1) $\bigcup \mathbb{F}$ T_1-tabansa, T_1-approximating ailesidir.

(2) $\bigcup \mathbb{F}$ normalleşmiş ve T_1-tabansa, T_4- approximating ailesidir (Kopperman and Wilson 2009).

Lemma 3.3.7: Bir X uzayı için $\mathbb{F}$, T_4- approximating ailesi ise $\pi : X \to \mathbb{F}(X)$ dönüşümü X i, $\mu(\mathbb{F}(X))$e dönüştürür ve $\mu(\mathbb{F}(X))$, X in T_2 kompaktlaştırmasıdır (Kopperman and Wilson 2009).

Lemma 3.3.8: Bir τ topolojisinin tabanı T_1 olması için gerek ve yeter şart (X,τ) topolojik uzayının T_1 olmasıdır (Kopperman and Wilson 2009).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Fan-Gottesman Kompaktlaştırmasının Ultrafiltreler Yardımıyla Elde Edilişi

Tanım 4.1.1: X bir T_3 uzay ve FX, X deki tüm kapalı ultrafiltrelerin ailesi olsun. Her $O \subset X$ açık alt kümesi için

$$O^* = \left\{\hat{G} \in FX : clO \in \hat{G}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. $\Phi = \left\{O^* : O, X \text{ in açık altkümesi}\right\}$ olsun. Φ, FX üzerindeki topolojinin bir tabanıdır. FX, X in Fan-Gottesman kompaktlaştırmasıdır.

Diğer taraftan her $D \subset X$ kapalı alt kümesi için $D^* \subset FX$

$$D^* = \left\{\hat{G} \in FX : D \in \hat{G}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki özellikler bizim için oldukça faydalıdır.

(1) $U \subset X$ açık bir altküme ise, bu durumda $FX - U^* = \left(FX - U\right)^*$ olur.

(2) $D \subset X$ kapalı bir altküme ise, bu durumda $FX - D^* = \left(FX - D\right)^*$ olur.

(3) U_1 ve U_2, X de açık altkümeler olmak üzere

$$\left(U_1 \cap U_2\right)^* = U_1^* \cap U_2^*$$
$$\left(U_1 \cup U_2\right)^* = U_1^* \cup U_2^*$$

eşitlikleri vardır.

G_x, x e yakınsak bir kapalı ultra filtre olmak üzere $f_X\left(x\right) = G_x$ ile tanımlanan $f_X : X \to FX$ dönüşümü göz önüne alınsın. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $U \subset X$ açık bir altküme ise, $\overline{f_X\left(U\right)} = U^*$ dır. Özellikle $f_X\left(X\right)$, FX de yoğundur.

(2) f_X süreklidir ve X in FX 'de bir gömülmesi olması için gerek ve yeter şart X in T_3 uzay olmasıdır.

(3) U_1 ve U_2, X de açık altkümeler olmak üzere $\overline{f_X\left(U_1 \cap U_2\right)} = \overline{f_X\left(U_1\right)} \cap \overline{f_X\left(U_2\right)}$ dir.

(4) FX kompakt T_2 uzaydır.

T_3 uzaylar için $F_X = f_X \circ \mu_X$ olarak tanımlansın. μ_X üzerine bir quasihomeomorfizm olduğundan T_3 uzaylar için FGX, FX olarak tanımlanabilir. **T_3** uzaylar için de aşağıdaki özellikler doğrudur.

Önerme 4.1.2: X bir T_3 uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) Her $U \subset X$ açık altkümesi için $F_X\left(U\right) \subseteq U^*$ elde edilir.

(2) Her $C \subset X$ kapalı altkümesi için $F_X\left(C\right) \subseteq C^*$ elde edilir.

(3) U açık ve C kapalı bir küme olmak üzere $U \cap C \neq \varnothing$ olması için gerek ve yeter şart $U^* \cap C^* \neq \varnothing$ olmasıdır.

Teorem 4.1.3: X bir T_3 uzay olsun.

(1) $U \subset X$ açık bir altkümesi olsun. U kompakt ise, bu durumda $U^* = F_X\left(U\right)$ dur.

(2) $V \subset X$ kapalı bir altkümesi olsun. V kompakt ise, bu durumda $V^* = F_X\left(V\right)$ dir.

İspat: $V \subset X$ kapalı bir altküme olsun Önerme 4.1.2 den $F_X\left(V\right) \subseteq V^*$ elde edilir. $\hat{G} \in V^*$ olsun. Bu durumda $G \subseteq V$ olacak şekilde $G \in \hat{G}$ vardır. V nin kompaktlığından $V - G$ kompakttır. Böylece $\bigcap\left\{H \cap \left(V - G\right) : H \in \hat{G}\right\} \neq \varnothing$ olur. $x \in \bigcap\left\{H \cap \left(V - G\right) : H \in \hat{G}\right\}$ olsun, bu durumda $\hat{G} = F_X\left(x\right)$ dir. Buradan $\hat{G} \in F_X\left(V\right)$ elde edilir. $V^* \subseteq F_X\left(V\right)$ olduğundan $V^* = F_X\left(V\right)$ dir.

Şimdi $U \subset X$ in açık bir altküme olduğu farz edilsin. $\hat{G} \in U^*$ olsun. $\bigcap\left\{H : H \in \hat{G}\right\} \neq \varnothing$ olduğundan dolayı $x \in \bigcap\left\{H : H \in \hat{G}\right\}$ olur. Buradan $\hat{G} = F_X\left(x\right)$ olduğu görülür Önerme 4.1.2 den $U^* = F_X\left(U\right)$ dur.

4.2. Fan-Gottesman Kompaktlaştırması ile Submaximal Uzaylar Arasındaki İlişki

Teorem 4.2.1: (X,τ) topolojik uzayının Fan-Gottesman kompaktlaştırması FX olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) FX submaximal uzaydır.
(ii) FX sonlu sayıda yığılma noktasına sahiptir.

İspat: $(ii)\Rightarrow(i)$ FX ın sonlu sayıda yığılma noktasına sahip olduğu farz edilsin. FX Hausdorff olduğu için her bir tek nokta kümesi kapalıdır. Önerme 3.1.2 den FX submaximaldir.

$(i)\Rightarrow(ii)$ FX ın sonsuz sayıda yığılma noktasına sahip olduğu farz edilsin. FX Hausdorff olduğu için, yığılma noktalarının kümesinin sonsuz bir diskret alt kümesi D göz önüne alınsın. Bu durumda $FX-D$, FX da yoğundur. Ancak $FX-D$ açık değildir. FX kompakt ve D diskret olduğu için D, $FX-D$ de bir yığılma noktasına sahiptir. Bu da FX ın submaximal olmasıyla çelişir. O halde FX sonlu sayıda yığılma noktasına sahiptir (Elmalı ve Uğur 2010).

4.3. Fan-Gottesman Kompaktlaştırması ile Spectral Uzaylar Arasındaki İlişki

Tanım 4.3.1: X bir T_3 uzay olsun. Bu uzayın Fan-Gottesman kompaktlaştırması spectral uzay ise, bu uzaya F-spectral denir (Elmalı ve Uğur 2010).

Teorem 4.3.2: X bir T_3 uzay olsun. Bu durumda X in F-spectral olması için gerek ve yeter şart X in her bir ayrık ve açık G, H kümeleri için $G\subset U$ ve $H\cap U=\varnothing$ olacak şekilde bir U (clopen) açık-kapalı kümesi vardır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Eğer $G \cap H = \varnothing$ ise, bu durumda $(X-G)\cup(X-H)=X$ dir. Önerme 3.1.11 ve Uyarı 3.1.12 den $K \subseteq (X-G)$ ve $K \cup (X-G)=X$ olacak şekilde bir açık nearly-closed kümesi vardır. Böylece $G \subseteq (X-K)$ ve $G \cap (X-K)=\varnothing$ olur. Diğer taraftan X^* ve X Hausdorff olduğundan, $(X-K)$ açık-kapalı kümesi elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\gamma = \{U^* : U, X \text{ in açık-kapalı kümesi}\}$ kümesini göz önüne alınsın. V, X in açık kümesi ve $x \in V^*$ olsun. $x \in V$ ise, bu durumda $\{x\}$ kapalıdır. X bir T_3 uzay olduğundan T_1 ve regülerdir. Bu durumda $\{x\} \subseteq U \subseteq V$ olacak şekilde U clopen kümesi vardır. Böylece $U^* \subseteq V^*$ olacak şekilde x in U^* açık-kapalı komşuluğu vardır. $\Omega(X)$, FX in minimal elemanlarının sınıfı olmak üzere $x = \Re \in V^* \cap \Omega(X)$ olsun. $\rho \in FX - U^*$ için $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde $G \in \Re$ ve $H \in \rho$ vardır. Böylece $G \subseteq U$ ve $G \in (X - U_\rho)$ olacak şekilde X in U_ρ clopen kümesi vardır. Bu durumda $\{(X-U_\rho)^* : \rho \in FX - V^*\}$, $FX - V^*$ ın bir açık örtüsüdür. $FX - V^*$ kompakt olduğundan $FX - V^* = \bigcup\{FX - U_\rho^* : \rho \in I\}$ olacak şekilde $\{(X-U_\rho)^* : \rho \in FX - V^*\}$ nin sonlu bir koleksiyonu vardır. $U_\Re = \bigcap\{U_\rho : \rho \in I\}$ olsun. $U_\Re^* \subseteq V^*$ olacak şekilde $\Re$ nin $U_\Re$ clopen komşuluğu vardır. Böylece γ, FX ın bir tabanıdır. γ nın her bir elemanı clopen olduğu için γ, sonlu arakesit altında kapalı olan kompakt kümelerin tabanıdır. FX soberdir ve buradan da spectral olduğu söylenir (Elmalı ve Uğur 2010).

Teorem 4.3.3: X bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. X **,** F-spectraldir.
2. X aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. X up-spectraldir.

ii. X in kompakt kapalı her alt kümesi C için $C \subseteq D$ olacak şekilde X in kompakt kapalı ve *co-ICO* bir D alt kümesi vardır.

İspat: $(1)\Rightarrow(2)$ X bir spectral uzay olduğundan aşağıdaki şartları sağladığı açıktır.

a) X sonlu arakesit altında kapalı olan kompakt açık kümelerin bir tabanına sahiptir.

b) X soberdir.

F-spectral olma özelliği up spectral olma özelliklerinden birini gerektirir. Şimdi diğer şart gösterilsin. C, X 'in kompakt kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $O \subseteq X - C$ olacak şekilde X in co-kompakt *ICOC* açık alt kümesi O vardır. $D = X - O$ X 'in kompakt kapalı ve *co-ICO* alt kümesidir ve $C \subseteq D$ dir.

$(2)\Rightarrow(1)$ C, X 'in kompakt kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $C \subseteq D$ olacak şekilde X 'in kompakt kapalı ve *co-ICO* bir D alt kümesi vardır. Önerme 3.1.14 den $O = X - D$ *ICOC* dur. Böylece $X - D, O \subseteq X - C$ şartını sağlayan X 'in açık co-kompakt *ICOC* alt kümesidir. Böylece X , F-spectraldir (Elmalı ve Uğur 2010).

4.4. Fan-Gottesman Kompaktlaştırmasının Kategori Teorisine Uygulaması

Tanım 4.4.1: X bir topolojik uzay ve $C \subset X$ olsun. C, X in her bir açık alt kümesiyle kesişiyorsa, C ye açık olarak yoğundur denir.

Tanım 4.4.2: $q : X \to Y$ sürekli dönüşümü göz önüne alınsın. $q(X)$, Y de açık olarak yoğun ise, q ya Fan-Gottesman morphism, kısaca FG-morphism denir. Burada X in topolojisi q nun ters görüntüsü vasıtasıyla doğrulmuş topolojidir.

Teorem 4.4.3:

(1) İki FG-morphisminin bileşkesi yine bir FG-morphismdir.

(2) $q : X \to Y$ bir FG-morfizm ve X T_0 , ise q injektiftir.

(3) $q : X \to Y$ bir FG-morfizm ve Y T_0 , ise q üzerinedir.

(4) $q : X \to Y$ bir FG-morfizm ve X T_0 , Y T_1 , ise q bir homeomorfizmdir.

İspat: Öncelikle (1) gösterilsin. $p: X \to Y,\ q: Y \to Z$ iki FG-morfizm olsun. X in topolojisinin Z'nin açıklarının $q \circ p$ vasıtasıyla ters görüntülerinin alınarak oluşturulduğu açıktır.

A, Z nin bir açık kümesi olsun. $q^{-1}(A),\ Y$ de açık olduğu için, $p(x) \cap q^{-1}(A) \neq \varnothing$ dur. Böylece $A \cap q(p(X)) \neq \varnothing$ dur. Buradan $q \circ p$ nun FG-morfizm olduğu görülür.

(2) x_1 ve x_2, $q(x_1) = q(x_2)$ olacak şekilde X in iki noktası olsun. $x_1 \neq x_2$ olduğu farz edilsin. Bu durumda X, T_0 olduğundan, $x_1 \in U, x_2 \notin U$ olacak şekilde X'in bir U açık alt kümesi vardır. $q^{-1}(H) = U$ olacak şekilde Y nin bir H açık alt kümesi olduğundan, $q(x_1) \in H$ ve $q(x_2) \notin H$ şeklinde bir ifade elde edilir ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla q injektiftir.

(3) $y \in Y$ olsun. Bu durumda $\{y\}$, Y nin lokal kapalı alt kümesidir. $q(X)$, Y de güçlü bir şekilde (strongly) yoğun olduğundan $\{y\} \cap q(X) \neq \varnothing$ olur. Bu durumda $y \in q(X)$ dir ve böylece q üzerine bir dönüşümdür.

(4) q nun bir homeomorfizm olduğu (2) ve (3) ten kolayca görülür.

Bu teoremden hareketle aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.4.4: $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ iki sürekli dönüşüm olsun.

1. $g \circ f$ ve g dönüşümleri FG-morfizm ise, f de bir FG-morfizmdir.
2. $g \circ f$ dönüşümü bir FG-morfizm ve f de bir quasihomeomorfizm ise, g bir homeomorfizmdir.

Tanım 4.4.5: $f_Y \circ q = F(q) \circ f_X$ olacak şekilde $F(q): FX \to FY$ sürekli bir dönüşümü varsa, T_3 uzayları arasındaki $q: X \to Y$ sürekli dönüşümüne FG-genişleme denir.

Teorem 4.4.6: X, Y iki T_3 uzay ve $q: X \to Y$ bir FG-morfizm olsun. Bu durumda q bir homeomorfizm olan FG-genişlemeye sahiptir.

İspat: $\mathbf{T}_3(q) \circ \mu_x = \mu_y \circ q$ olduğundan, $\mathbf{T}_3(q) \circ \mu_x$ bir FG-morfizmdir. μ_x quasihomeomorfizm olduğundan Önerme 4.4.4 den $\mathbf{T}_3(q)$ bir FG-morfizmdir. Böylece Teorem 4.4.3 den $\mathbf{T}_3(q)$ bir homeomorfizmdir. Buradan $\mathbf{T}_3(q)$, $F(\mathbf{T}_3(q))$ homeomorfizm olan kanonik bir FG-genişlemeye sahiptir. Böylece aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T}_3(X) \arrow[r, "\mathbf{T}_3(q)"] \arrow[d, "f_{\mathbf{T}_3(X)}"'] & \mathbf{T}_3(Y) \arrow[d, "f_{\mathbf{T}_3(Y)}"] \\
F(\mathbf{T}_3(X)) = FGX \arrow[r, "F(\mathbf{T}_3(q))"] & F(\mathbf{T}_3(Y)) = FGY
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.1 FG-genişlemeye sahip olan FG-morfizmler

$FG(q) = F(\mathbf{T}_3(q))$ gösterilsin, diyagramdan $FG(q)$ nun q nun homeomorfizm olan bir FG-genişlemesi olduğu açıktır.

Tanım 4.4.7: X bir T_3 uzay ve Y ’de X ’in alt kümesi olsun. $F(\mathbf{T}_3(X)) = FGX$ ve $F(\mathbf{T}_3(Y)) = FGY$ olmak üzere eğer FGY, FGX ’e homeomorf ise, Y ’ye X ’in Fan-Gottesman gereni denir. (FG -geren)

Eğer $i: Y \to X$ kanonik gömülmesi, $FG(i)$ homeomorfizm olacak şekilde bir , FG genişlemeye sahipse , Y ’ye X ’ in güçlü Fan-Gottesman gereni denir (sFG -geren).
Bir sFG-gerenin FG -geren olduğu açıktır.

Teorem 4.4.8: X ,Y iki T_3 uzay ve $q:X\to Y$ bir sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i. q bir homeomorfizm olan FG -genişlemeye sahiptir.

ii. $q(X)$, Y 'nin bir sFG -gerenidir ve X 'in topolojisi Y 'nin açıklarının q altındaki ters görüntüleridir.

İspat: $(i)\Rightarrow(ii)$ Öncelikle X 'in topolojisinin Y 'nin açıklarının q altındaki ters görüntüleri olduğu gösterilsin. U, X 'in açık bir alt kümesi olsun. $FG(q)$ bir homeomorfizm olduğundan $FG(q)\left[U^*\right]=V$, FY 'nin kapalı bir alt kümesidir.

$G=F_Y^{-1}(V)$ olsun. $U=q^{-1}(G)$ olduğu ispatlansın.

a) $x\in U$ olsun. Bu durumda $F_X(x)\in F_X(U)\subseteq U^*$ dır. Böylece $F_Y(q(x))\in V$ olacak şekilde $FG(q)\left[F_X(x)\right]\in FG(q)\left[U^*\right]=V$ elde edilir. Buradan $q(x)\in F_Y^{-1}(V)=G$ elde edilir. O halde $x\in q^{-1}(G)$ dir.

b) Tersine $x\in q^{-1}(G)$ olsun. Bu durumda $q(x)\in F_Y^{-1}(V)$ olur. Bu $(F_Y\circ q)(x)\in V$ olduğu anlamındadır. Böylece $FG(q)\left[F_X(x)\right]\in V=FG(q)\left[U^*\right]$ olur. $FG(q)$ bir bijeksiyon olduğu için $F_X(x)\in U^*$ dır. O halde $x\in F_X^{-1}(U^*)=U$ dur. Böylece $U=q^{-1}(G)$ olduğu, bir başka deyişle X 'in topolojisinin Y 'nin açıklarının q altındaki ters görüntüleri olduğu ispatlanır.

İkinci olarak $q(X)$'in Y 'nin bir sFG -gereni olduğunu gösterilsin. (i) ye göre q ile oluşturulan $q_1:X\to q(X)$ dönüşümü bir FG -morfizmdir. Böylece q_1, homeomorfizm olan $F(q_1)$ FG -genişlemesine sahiptir. Buradan aşağıdaki diyagramların değişmeli olduğu görülür.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "F_X"'] & q(X) \arrow[d, "F_{q(X)}"] \\ FGX \arrow[r, "FG(q_1)"] & FGq(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "F_X"'] & q(X) \arrow[d, "F_Y"] \\ FGX \arrow[r, "FG(q)"] & FGY \end{tikzcd}$$

Şekil 4.2 FG -morfizmlerin değişmeli diyagramları

$j:q(X)\to Y$ bir kanonik gömülme olsun. Aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğu açıktır.

$$\begin{tikzcd} q(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "F_X"'] & Y \arrow[d, "F_Y"] \\ Fq(X) \arrow[r, "FG(q)\circ(FG(q))^{-1}=I_d"] & FGY \end{tikzcd}$$

Şekil 4.3 $q(X)$' in Y ‘nin bir sFG -gereni olduğunu gösteren diyagram

Böylece j bir FG -genişlemesi olarak bir homeomorfizm olan $FG(q)\circ(FG(q))^{-1}=I_d$ ye sahiptir. Bu $q(X)$' in Y nin bir sFG -gereni olduğu anlamındadır.

$(ii)\Rightarrow(i)$ q ile oluşturulan $q_1:X\to q(X)$ dönüşümü bir FG -morfizmdir. Böylece q_1, homeomorfizm olan $F(q_1)$, FG -genişlemesine sahiptir. Diğer taraftan $j:q(X)\to Y$ homeomorfizm olan bir FG -genişlemeye sahiptir. Bu durumda aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğu açıktır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "F_X"'] & q(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "F_{q(X)}"] & Y \arrow[d, "F_Y"] \\ FGX \arrow[r, "F(q_1)"] & FGq(X) \arrow[r, "F(j)"] & FGY \end{tikzcd}$$

Şekil 4.4 FG -morfizmlerinin değişmeli diyagramlarının birlikte düşünülmesi

Böylece $F(j)\circ F(q_1)$, bir homeomorfizm olan $q:X\to Y$ 'nin bir FG-genişlemesidir.

Teorem 4.4.9: X ve Y, Tychonoff uzaylar olmak üzere $f:X\to Y$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $F(f)[FX-X]$, $FY-Y$ de bulunur.

(2) Aşağıdaki diyagram sağlanır.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_X} & FX \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ Y & \xrightarrow[f_Y]{} & FY \end{array}$$

Şekil 4.5 $F(f)$ için değişmeli bir diyagram

İspat: $(1)\Rightarrow(2)$ $F(f)\circ h=f_Y\circ g$ olacak şekilde $h:Z\to FX$ ve $g:Z\to Y$ dönüşümleri göz önüne alınsın. $f_Y\circ g[Z]$, FY de bulunduğu ve $F(f)$ de $FX-X$ 'i $FY-Y$ gönderdiği için $h[Z]$, X de bulunur. Bu durumda $I(z)=h(z)$ olarak tanımlanan $I:Z\to X$ dönüşümü diyagramın sağlandığını gösterir.

$(2)\Rightarrow(1)$ FX den bir p elemanı seçilsin ve $F(f)(p)=y$ 'nin Y 'nin bir elemanı olduğu farz edilsin. h, $\{p\}$ yi FX 'e gömen ve g 'de, p 'yi $F(f)(p)$ 'ye götüren $\{p\}$ alt uzayından bir dönüşüm olsun. Böylece $h=f_x\circ I$ olacak şekilde $I:\{p\}\to X$ dönüşümü vardır. Bu durumda $F(f)\circ h=f_Y\circ g$ dir. Böylece p, X 'e aittir.

4.5. Fan-Gottesman Kompaktlaştırmasının Approximating Teoriye Uygulaması

Teorem 4.5.1: $\Im$, $C=\bigcup\Im$ sonlu arakesit ve birleşim altında kapalı olacak şekilde X uzayı için bir T_4-approximating ailesi olsun. FX, C ile eşlenen Fan-Gottesman kompaktlaştırması olsun. Bu durumda $\mu\left(\Im^{\xi}\left(X\right)\right)$, FX ‘e homeomorftur.

İspat: İnverse limit olarak, $\Im^{\xi}\left(X\right)$, $F\in\Im$ ve $V\in F$ olmak üzere $p_F^{-1}\left[\pi_F\left[V\right]\right]$ şeklindeki tüm kümelerin oluşturduğu ilk topoloji için bir tabana sahiptir. Aynı zamanda herhangi bir $z\in\Im^{\xi}\left(X\right)$, $B(C)$‘de M_z ile gösterilen bir filtre tanımlar. Burada $\exists F\in\Im$ için $M_z=\left\{A\in B(C):A\supseteq\pi_F^{-1}\left[\{z\}\right]\right\}$ şeklindedir. $M_C\left(X\right)$, $B(C)$ üzerindeki filtrelerin kümesini göstersin. M_z ‘nin $B(C)$ üzerinde bir ultrafiltre olduğunu görmek kolaydır ve $\Im^{\xi}\left(X\right)$ den $M_C\left(X\right)$’e tanımlı olan $z\to M_z$ dönüşümü injektiftir. Ayrıca bu dönüşüm her $F\in\Im$ için her ultrafiltre $B(F)$ nin bir minimal elemanını içermek zorunda olduğundan surjektiftir. $M_C\left(X\right)=\left\{M_z : z\in\Im^{\xi}\left(X\right)\right\}$ uzayı üzerinde aşağıdaki gibi bir topoloji tanımlansın. $M_C\left(X\right)$ uzayı $H^{\alpha}=\left\{M_z : H\in M_z\cap C\right\}$ şeklindeki kümeleri taban kabul etsin. Böylece $\Im$ tabanı ile uyan Fan-Gottesman kompaktlaştırması tüm kapalı ultrafiltrelerin oluşturduğu $M_C\left(X\right)$ uzayının alt kümesidir.

Böylece H^{α} şeklindeki kümeler Fan-Gottesman kompaktlaştırması için bir taban teşkil ederler. $H\in F$ olmak üzere $p_F^{-1}\left[\pi_F\left[H\right]\right]$ şeklindeki kümeler de $\Im^{\xi}\left(X\right)$ için bir taban oluşturur. $M_z\in H^{*}$ olması için gerek ve yeter şart $H\in M_z$ olmasıdır. Bu da ancak $H\supseteq\pi_F^{-1}\left[p_F\left(z\right)\right]$olması veya buna denk olarak $z\in p_F^{-1}\left[\pi_F\left[H\right]\right]$ olması ile mümkündür. Böylece $\Im^{\xi}\left(X\right)$’den FX ’e, $x\to M_x$ dönüşümü bir homeomorfizm belirtir.

Geriye $\Im^{\xi}\left(X\right)$nın kapalı noktalarının, kapalı kümelerin tabanına sahip $M_C\left(X\right)$ deki ultra filtrelerle eşlendiğini göstermek kalır.

$U \in M_C\left(X\right)$ kapalı kümelerin bir tabanına sahip ise, $M_C\left(X\right)$ in kapalı bir noktası olduğu ve $\Im^{\xi}\left(X\right)$ in invers limiti olduğu açıktır. Tersine $\ell \in M_C\left(X\right)$ kapalı bir nokta olsun. ℓ nin X de kapalı kümelerin bir tabanına sahip olduğu gösterilmelidir. $\ell, M_C\left(X\right)$ de kapalı bir nokta olduğu için ve topolojinin tanımından $\ell \neq \kappa$ olacak şekilde her $\kappa \in M_C\left(X\right)$ için $\ell \in V^*$ ve $\kappa \notin V^*$ olacak şekilde $V^* \subseteq M_C\left(X\right)$ açık alt kümesi vardır. Böylece her $\ell \neq \kappa$ için $C_\ell \notin \kappa$ olacak şekilde $C_\ell \in \ell$ kapalı kümesi vardır. Böylece $\{D : D \in \ell \text{ ve } D \text{ kapalı}\} \not\subset \kappa$ kümesiyle oluşturulan $\hbar$ filtresi elde edilir. $\hbar$ tek bir ultra filtrede bulunur. Şimdi $\hbar = U$ olduğu iddia edilsin ve ℓ nin kapalı kümelerin bir tabanına sahip olduğu gösterilsin. Tersini farz edilsin. $H \not\subset V$ olacak şekilde her $H \in \hbar$ için $V \in \ell$ vardır. Bu durumda $\{H - V : H \in \hbar\}$ sonlu arakesit özelliğine sahip Boolean kombinasyonlarının ailesidir ve böylece bir $\ell \in M_C\left(X\right)$ de bulunur ve $\ell \neq \kappa$ dir. Bu durumda $\hbar \subseteq \kappa$ bir çelişkidir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu bölümde bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

Sonuç 5.1: (X,τ) topolojik uzayının Fan-Gottesman kompaktlaştırması sonlu sayıda yığılma noktasına sahipse submaximal olduğu Teorem 4.2.1 den görülür.

Sonuç 5.2: Tanım 4.3.1 de verilen F-spectral uzaylar Teorem 4.3.2 ile karakterize edilebilir.

Sonuç 5.3: F-spectral uzaylar ile up-spectral uzaylar arasındaki ilişki Teorem 4.3.3 ile verilebilir.

Sonuç 5.4: Açık olarak yoğun olma tanımından faydalanılarak Tanım 4.4.2 de verilen FG-morfizm dediğimiz dönüşümler tanımlanarak, bu dönüşümlerin Teorem 4.4.3 ve Önerme 4.4.4 deki özellikleri elde edilebilir.

Sonuç 5.5: Kategori teorisi yardımıyla tanım ve değer kümesinin Fan-Gottesman kompaktlaştırmaları olduğu dönüşümlerle ilgilenildi. Ayrıca bu dönüşümlerin hangi şartlar altında homeomorfizmlere genişleyebileceği araştırılarak Teorem 4.4.6 ve Teorem 4.4.8 elde edildi.

Sonuç 5.6: Bir X topolojik uzayının T_4-approximating ailesi yardımı ile elde ettiğimiz inverse limitin Fan-Gottesman kompaktlaştırmasına denk olduğu Teorem 4.5.1 de elde edildi.

KAYNAKLAR

Adams, M., Belaid, K., Dridi, L., Echi, O., 2008. Submaximal and spectral spaces. Math.Proc.Ir.Acad. 108A(2), 137-147

Alas, O. T., Sanchis, M., Tkacenko, M.G., Thachuk, V.V., and Wilson, R. G., 2000. Irresolvable and submaximal space: homogeneity versus σ-discreteness and new ZFC examples. Topology and its Application (17), 259-273.

Arhangel'skii, A.V., and Collins, P.J., 1995. On submaximal spaces. Topology and Its Applications (64), 219-241.

Artın, E., 1969.Introductıon to Algebraic Topology,Charles E.Merrıll Publıshıng Company, Ohio

Aslım, G., 1998. Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İzmir

Baran, M.,1992. Separation Properties, Indian J. Pure and Appl. Math. (23), 333-342.

Baran, M., and Altındiş, H., 1996. T_2-objects in topological categories, Acta Math.Hungarica (71) 41-48.

Bayramov, S. ve Yıldız, Ç., 2004. Genel Topoloji, Seçkin Yayıncılık, Ankara

Belaid, K., and Echi, O., 2004a. T_{(α,β)}-Space and the Wallman Compactification, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Vol.2004, Issue 68, 3717-3735

Belaid, K., Echi, O., and Gargouri, R., 2004. A-spectral space. Topology and Its Applications (138), 315-322.

Belaid, K., and Echi, O., 2004b. On a conjecture about spectral sets. Topology and Its Applications (139), 1-15

Belaid, K., 2006. H-spectral space. Topolgy and Its Applications (153), 3019-3023

Bezhanishvili, G., Esakıa, L., and Gabelaia, D., 2005. Some results on modal aximatization and definability for topological space. Studia Logica (81), 325-355

Biles, C., 1970. Wallman-type Compactifications. Proc. Amer. Math. Society, (25), 363– 368.

Borges, C., 1999. Elementary Topology And Applications,World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.,London

Bourbaki, N., 1966. General Topology, Addison-Wesley Pub. Company, London

Bülbül, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, Trabzon

Dobbs, D.E., Fontana, M., and Papick, I.J., 1981. On certain distinguished spectral sets. Ann. Mat. Pura. Appl. (128), 227-240

Dontchev, J., 1995. On submaximal spaces, Tamkang Journal of Mathematics (26), 243-250

Dummit, D., and Foote, R. M., 2004. Abstract Algebra, John Wiley & Sons Inc., USA.

Echi, O., and Gargouri, R., 2004. An up-spectral space need not be A-spectral. New York Journal of Mathematics (10), 271-277

Echi, O., and Naimi, M., 2008. Primitive words and spectral space. New York Journal of Mathematics (14), 719-731

Elmalı, C., Ugur, T., 2009 Fan-Gottesman compactification of some specific spaces is Wallman-type compactification. Chaos, Solitons and Fractals. Vol. 42, no.1, 17-19

Elmalı, C. and Uğur, T., 2010 Some Results Concerning Compactifications, Submaximal Spaces,Spectral Spaces and Primitive Words. Far East Journal of Mathematical Sciences . Vol. 42, no.1, 93-107

Engelking, R., 1989. General Topology. Translated from the Polish Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Berlin: Heldermann Verlag.

Ergun, N., 2006.Kümeler Teorisine Giriş. Nobel Yayınları, Ankara

Fan, K., and Gottesman, N., 1952. On Compactifications of Freudenthal and Wallman. İndag.Math., (14), 504-510.

Frink, O., 1963. Compactifications and Semi-normal Spaces. Amer. Journal Math., (86), 602-605.

Gemıgnanı, M.C., 1972. Elemantary Topology, Dover Publication, Inc., NewYork

Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. W., and Scott, D. S., 2003. Continuous Lattice and Domains, Cambridge University Press, Cambridge, England.

Grothendieck, A., and Dieudonné, J., 1971. Élements de Géometrie Algébrique, Die Grundlehren der mathematischen Wissenchaften, vol.166, Springer-Verlag, New York.

Harris, D., 1972. The Wallman compactification is an epireflection, Proc. Amer. Math. Soc. (31) 265-267.

Hart, K.P.,Nagata, J. and Vaughan, J.E., 2004, Encyclopedia of General Topology, Elsevier Press, North-Holland.

Herrlich, H., 1969. On the concept of reflections in general topology, Contributions to Extension Theory of Topological Structures (Proc. Sympos., Berlin, 1967), Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 105-114.

Herrlich, H., 1993 Compact T_0-space and T_0-compactifications, Applied Categ. Structures (I) 111-132.

Huntington, G., 2008. Towards an efficient decision procedure for the existential theory of the reals. Ph. D. Thesis, Logic and Methodology of Science in the Graduate Division of the University of California, Berkeley

Joshi, K.D., 1992. Introduction to General Topology, Wiley Eastern Limited, NewDelphi

Khalimsky, E., Kopperman, R. D., and Meyer, P. R., 1990. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. Topology Appl. (36), 1-17.

Kılıç, S.A., 2002. Genel Topoloji, Vipaş A.Ş Yayınları, Yayın No:66, Balıkesir

Kopperman, R.D., 1995. Asymmetry and duality in topology. Topology and Its Appl. (66), no.1, 1-39.

Kopperman, R.D., and Wilson, R.G., 1997. Finite approximation of compact Hausdorff spaces. Topology Proc. (22), Summer, 175-200.

Kopperman, R.D., and Wilson, R.G, 2004. On the role of finite,hereditarily normal spaces and maps in the genesis of compact Hausdorff space. Topology Appl. (135) no:1-3 265-275

Kopperman, R.D., and Wilson, R.G, 2007. Separation and connectedness in spectral compactifications. Houston J. Math. (33), no. 2, 483--497

Kopperman, R.D., and Wilson, R.G, 2009. Continuous maps on spectral systems and Wallman-type compactifications. Topology Proceedings (34), 203-221

Lıpschutz, S., 1965. General Topology, Temple University, New York

Loeb, P., 1969. Compactifications of Hausdorff Spaces. Proc. Amer. Math. Soc., (22), 627-634.

Maclane, S., 1971. Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York.

Maclane, S., and Eilenberg, S., 1986. Eilenberg-Maclane:collected works, Academic Press Inc.,Orlando,FL.

Massey, W. S., 1967. Algebraic Topology:An Introduction, Harcout, Brace & World Inc.,USA

Moise E., 1977. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Springer-Verlag, Newyork

Moller, J.M., 2003. General Topology,Matematisk Instıtut, Universitetsparken 5, Kobenhav

Morita, K., 1962. Category-isomorphism and endomorphism rings of modules, Trans. Amer. Math. Soc. (103), 451-469.

Morita, K., 1970. Localization in categories of modules I. Math. Z. (114), 121-144

Morita, K., 1970. Localization in categories of modules II. J. Reine Angew. Math. (242), 163-169.

Morita, K., 1971. Localization in categories of modules III. Math. Z. (119), 313-320

Munkres, J.R., 1975. Topology A First Course ,Prentice-Hall,Inc.Englewood Ciffs, NewJersey

Mumford, D., 1999. The Red Book of Varieties and Schemes, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Njastad, O., 1965. On Wallman-type Compactifications.Math. Zeitschr., (91), 267-276.

Rahimov, A., 2006. Topolojik Uzaylar, Çağlayan Kitabevi, İstanbul

Sımmons, G., 1963. Topology and Modern Analysis, W. H. Freeman and Company, London

Stone, M.H., 1997. Applications of Boolean algebras to general topology, Bull. Amer. Math. Soc. (41), 375-481.

Sutherland, W. A., 1975. Introduction to Metric and Topological Spaces, Clarendon Press, Oxford

Ul'janov, V., 1977. Solution of a Basic Problem on Compactifications of Wallman Type. Soviet Math. Dokl., (18), 567-571.

Vickers, S., 1989. Topology via logic, Cambridge University Press, Cambridge.

Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji,Gazi Basımevi, Ankara.

Yüksel, Ş., 1998. Genel Topoloji, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya

Wallman, H., 1938. Lattices and Topologıcal Spaces. Annals of Mathematics, (39), 112–126.

Walker, R. C., 1974. The Stone-Cech Compactification,Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Newyork

Willard, S.,1970. General Topology, Addison-Wesley Publishing Company,Inc.London

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2007 yılında yüksek lisansı bitirip doktora eğitimine başladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.