MULTİVALENT FONKSİYONLARIN
BAZI ALT SINIFLARI

Fatma SAĞSÖZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Muhammet KAMALİ

2011

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MULTİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Fatma SAĞSÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

MULTİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Prof. Dr. Muhammet KAMALİ danışmanlığında, Fatma SAĞSÖZ tarafından hazırlanan bu çalışma 05/12/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Muhammet KAMALİ	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Hatun Özlem GÜNEY	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

ÖZET

Doktora Tezi

MULTİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Fatma SAĞSÖZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Muhammet KAMALİ

Bu çalışmada, normalize edilmiş p-valent analitik fonksiyonlar sınıfını koruyan bir dönüşüm tanımlanarak, p-valent analitik fonksiyonların yeni alt sınıfları tanıtılmıştır. Ayrıca, bu sınıflara ait fonksiyonların katsayı sınırları, distorsiyon eşitsizlikleri ile içerme bağıntıları ve kısmi toplamlarını da içeren diğer bazı özellikleri belirlenmiştir. Son olarak, multivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı için yeni komşuluk kavramları verilmiştir ve bu kavramlardan yararlanılarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

2011, 88 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyon, Multivalent Fonksiyon, Starlike ve Konveks Fonksiyon, Katsayı Sınırları, Distorsiyon Eşitsizlikleri, Komşuluk

ABSTRACT

PhD. Thesis

SOME SUBCLASSES OF MULTIVALENT FUNCTIONS

Fatma SAĞSÖZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Muhammet KAMALİ

In this study, new subclasses of p-valent analytic functions were introduced by defining a mapping which preserve the class of normalized p-valent analytic functions. Furthermore, coefficient bounds, distortion inequalities of functions belonging to these classes and some other properties including partial sums and inclusion relationships were determined.

Finally, new concepts concerned with neighborhoods of a certain class of multivalent functions were given and by making use of these concepts, various results were obtained.

2011, 88 pages

Keywords: Analytic Function, Multivalent Function, Starlike and Convex Function, Coefficient Bounds, Distortion Inequalities, Neighborhood

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tamamlanmasında desteğini ve yardımını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Muhammet KAMALİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam süresince gösterdiği ilgi ve alakası dolayısı ile Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a, Sayın Doç. Dr. Abdullah KAPLAN'a, güvenini ve içten desteğini her zaman hissettiğim Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e ve başta Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU olmak üzere birlikte çalışma imkânı bulduğum anabilim dalımızın tüm değerli öğretim üyelerine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa Tolga YURTCAN'a, Sayın Arş. Gör. Semra KAYA'ya şükranlarımı sunarım.

Sağladığı maddi imkânlar dolayısı ile Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Yurt İçi Doktora Burs Programına teşekkür ederim.

Ayrıca bana duydukları sevgi, anlayış ve güvenle bu günlere gelmemi sağlayan başta annem ve babam olmak üzere tüm aile bireylerine, varlıklarıyla bana mutluluk ve yaşama sevinci veren eşime ve oğluma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Fatma SAĞSÖZ

Aralık 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{A}$	U birim diskinde analitik olan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{A}_n$	U birim diskinde analitik olan $f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{A}(p)$	U birim diskinde analitik ve p-valent olan $f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{A}(p,n)$	U birim diskinde analitik ve p-valent olan $f(z) = z^p + \sum_{k=n}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$(a)_v$	Pochhammer Sembolü
B	Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\tilde{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathcal{C}(p,n,\alpha)$	$\mathcal{K}(p,n,\alpha) \cap \mathcal{T}(p,n)$
D^n	Salagean türev operatörü
D_p^m	p-valent analitik fonksiyonlar için verilen Salagean tipi türev operetörü
$\mathfrak{D}_z^{-\delta} f(z)$	f fonksiyonunun kesirsel integrali
$\mathfrak{D}_z^{\delta} f(z)$	f fonksiyonunun kesirsel türevi
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$f * g$	f ile g fonksiyonlarının hadamard çarpımı
$\mathcal{H}$	U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{H}[a,n]$	U birim diskinde analitik olan $f(z) = a + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}$	Konveks fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}(\alpha)$	α. mertebeden konveks fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}(p,n)$	p-valent konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{K}(p,n,\alpha)$	α. mertebeden p-valent konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{N}_\delta(f)$	f fonksiyonunun δ-komşuluğu

$\mathcal{N}_{n,\delta}(f)$	f fonksiyonunun (n,δ)-komşuluğu
$\emptyset$	Boş küme
$\mathcal{P}$	Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonlar sınıfı
$Ref(z)$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\mathcal{S}$	U birim diskinde univalent olan normalize $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*$	Starlike fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\alpha.$ mertebeden starlike fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*(p,n)$	p-valent starlike fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}(p,n,\alpha)$	$\alpha.$ mertebeden p-valent starlike fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{T}_n$	Negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{T}(p)$	Negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{T}(p,n)$	Negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{T}^*(p,n,\alpha)$	$\mathcal{S}(p,n,\alpha) \cap \mathcal{T}(p,n)$
U	$U = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ \lvert z\rvert < 1\}$ şelindeki açık birim disk
U_r	$U = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ \lvert z\rvert < r < 1\}$ şeklindeki açık disk
$\overline{U_r}$	$U = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ \lvert z\rvert \leq r < 1\}$ şeklindeki kapalı disk
$\mathcal{V}$	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
Γ	Gama fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Multivalent fonksiyonlar teorisi, 1933 yılında P. Montel' in "Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes" isimli kitabında ilk kez multivalent fonksiyon kavramını tanıtmasıyla çalışılmaya başlanmıştır. f genişletilmiş kompleks düzlemdeki herhangi bir bölgede kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu bu bölgedeki her değeri en fazla p ve en az bir değeri kesin p defa alıyorsa f fonksiyonuna p-valent veya p. mertebeden multivalent fonksiyon denir. $p = 1$ olması durumunda f fonksiyonu aynı zamanda univalenttir. Dolayısıyla multivalent fonksiyon kavramı univalent fonksiyon kavramının doğal bir genellemesidir (Seidel 1942; Hummel 1960).

Multivalent fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanıtarak bu sınıfların özelliklerinin incelenmesi, bu sınıflara ait katsayı sınırlarının ve distorsiyon eşitsizliklerinin verilmesi multivalent fonksiyonlar teorisinde pek çok araştırmacı tarafından ele alınan önemli problemlerdendir. Fekete and Szegö (1933), Goodman (1948), Hummel (1960), Keogh and Merkes (1969) bu özellikler üzerine önemli çalışmalar yapan araştırmacılardan bazılarıdır. Son yıllarda ise Ali *et al*. (2007), Ramachandran *et al.* (2007) ve Shanmugam *et al*. (2009) bu konuyla ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Ayrıca, Silverman *et al.* (1981), Patil and Thakare (1983), Owa (1991), Altıntaş (1991), Aouf (2000) ve Liu *et al.* (2009) multivalent fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanıtarak bu sınıfların özelliklerini incelemişlerdir.

Multivalent fonksiyonlar teorisinde pek çok araştırmacı tarafından ele alınan önemli problemlerden bir diğeri de multivalent fonksiyonlar için yeni komşuluk tanımları verilerek bu komşulukların incelenmesidir. $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman tarafından yapılmıştır. Ruscheweyh (1981), Goodman tarafından verilen komşuluk tanımını daha genel hale getirerek $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının δ-komşuluğu kavramını tanıtmıştır. 1985'de Brown Ruscheweyh tarafından elde edilen sonuçları genelleştirmiştir. 1990'da Walker pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluklarını ele almış ve Walker tarafından verilen sonuçlar 1993 te Owa *et al.* tarafından genişletilmiştir. 1996 da, negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının (n,δ)-komşuluğu Altıntaş and Owa tarafından verilmiştir. 2007 de ise Orhan $et\ al.$ $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonları için yeni komşuluk tanımlarını ele almışlardır ve bu komşuluk tanımları 2009 da Altuntaş $et\ al.$ tarafından $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonları için daha genel hale getirilmiştir. 2011 de Frasin negatif katsayılı analitik fonksiyonların (α, β, δ)-komşuluğunu tanımlamıştır. Ayrıca bu konuda, Orhan and Kadıoğlu (2004), Orhan and Kamali (2005) ve Altıntaş (2007) önemli çalışmalar yapmışlardır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Aynı bölümde multivalent fonksiyon kavramı tanıtılarak multivalent fonksiyonların katsayı sınırları ve distorsiyon eşitsizlikleri üzerine yapılan önemli bazı çalışmalara değinilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılan bazı önemli tanım ve lemmaların verilmesinin yanı sıra tarihsel gelişim içerisinde multivalent fonksiyonların önemli bazı alt sınıfları ve komşuluklarıyla ilgili bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, multivalent fonksiyonların yeni alt sınıfları tanıtılmış ve daha sonra bu sınıfların özellikleri incelenerek bu fonksiyon sınıflarına ait katsayı eşitsizlikleri ve distorsiyon sınırları verilmiştir. Son olarak, multivalent fonksiyonların belli bir alt sınıfı için yeni komşuluk tanımları verilerek bu komşuluklarla ilgili teoremler ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

$$\overline{D(z_0, \varepsilon)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk,

$$\partial D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember,

$$D^{\circ}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine de z_0 noktasının ε delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in A$ için $D(z_0, \varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde $\exists \varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktasıdır denir.

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı Küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir.

Tanım 2.1.4 (Bağlantılı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesi boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, A kümesine bağlantılıdır denir. Yani,

i. $A \subseteq U \cup V$,

ii. $A \cap U \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$,

iii. $A \cap U \cap V = \emptyset$

olacak şekilde $U, V \subset \mathbb{C}$ gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyorsa A kümesine bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bölge): Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım 2.1.6 (Basit Bağlantılı Küme): Tümleyeni bağlantılı olan kümeye basit bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.7 (Diferensiyellenebilme): $A \subseteq \mathbb{C}, f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A'nın bir iç noktası olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti var ise f fonksiyonuna z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Bu limit değerine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8 (Analitik Fonksiyon): A kompleks düzlemin boş olmayan açık bir alt kümesi ve f fonksiyonu tanım kümesi A'yı kapsayan kompleks değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A kümesine ait her noktada diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu A kümesinde analitiktir (veya holomorftur) denir. Tanım kümesi açık bir küme ve bu kümede analitik olan fonksiyonlara analitik fonksiyon denir (Palka 1991).

U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfını $\mathcal{H} = \mathcal{H}(U)$ biçiminde gösterelim. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a, a_n, a_{n+1}, \ldots \in \mathbb{C}$ için,

$$\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}: f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\}$$

olsun.

Tanım 2.1.9: f fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna normalize edilmiş fonksiyon denir.

U birim diskinde analitik normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}_n$ ile gösterilir. Bu sınıf $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ olmak üzere,

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H}: f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0, n \in \mathbb{N})$$

şeklindeki negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonlarının sınıfı ise $\mathcal{T}_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10 (Univalent Fonksiyon): f fonksiyonu herhangi bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. $\forall z_1, z_2 \in D$ için,

$$z_1 \neq z_2 \text{ iken } f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgede aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde univalent (veya yalınkat) fonksiyon denir (Duren 1983).

U birim diskinde univalent olan normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A}: f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, f(z) \text{ fonksiyonu } U \text{ birim diskinde univalent} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.11 (Maksimum Modül Prensibi): $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge ve f fonksiyonu D bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu D bölgesinde analitik ve bu bölgenin sınırında sürekli ise

$$max\{|f(z)|: z \in \overline{D}\} = max\{|f(z)|: z \in \partial D\}$$

olur (Conway 1973).

Lemma 2.1.12 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve

i. $z \in U$ için $|f(z)| < 1$,

ii. $f(0) = 0$

olsun. Bu durumda, her $z \in U$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ olur. Ayrıca, herhangi bir $z \neq 0$ noktası için $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ ise her $w \in U$ için $f(w) = cw$ olacak şekilde modülü $|c| = 1$ olan bir c sabiti vardır (Conway 1973).

Tanım 2.1.13 (Schwarz Fonksiyonu): φ, U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu $z \in U$ için $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ şartlarını sağlarsa φ'ye Schwarz fonksiyonu denir ve Schwarz fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{V}$ ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

Başka bir deyişle, U birim diskinde analitik olan ve Schwarz lemmasındaki hipotezleri sağlayan fonksiyonlara Schwarz fonksiyonu denir (Graham and Kohr 2003).

Tanım 2.1.14 (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyon): U birim diskinde $Reg(z) > 0$ olmak üzere U'da regüler olan

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

biçimindeki fonksiyonlara pozitif reel kısımlı fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$ ile gösterilir (Goodman 1983a).

Tanım 2.1.15 (Subordinasyon): $f, g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları verilsin. U birim diskinde $f(z) = g(\varphi(z))$ olacak şekilde bir $\varphi \in \mathcal{V}$ fonksiyonu varsa f fonksiyonu U'da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. g fonksiyonunun univalent olması durumunda, $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ olmasıdır (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 2.1.16 (Hadamard Çarpımı): U birim diskinde analitik olan

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı $f * g$ ile gösterilir ve bu çarpım,

$$(f * g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 2.1.17 (Starlike Bölge): D kompleks düzlemde bir bölge ve $w_0 \in D$ olsun. Başlangıç noktası w_0 olan her ışın ile D bölgesinin arakesiti bir doğru parçası veya bir ışın ise D bölgesine w_0 noktasına göre starlike bölge denir (Goodman 1983a).

Başka bir deyişle, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $\forall w \in D$ için $(1-t)w_0 + tw \in D$ ise D bölgesine w_0 noktasına göre starlike denir.

Tanım 2.1.18 (Starlike Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U'yu w_0'a göre starlike olan bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna w_0'a göre starlike denir. $w_0 = 0$ ise f fonksiyonuna starlike fonksiyon denir (Goodman 1983a).

Teorem 2.1.19: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun U'da starlike olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için,

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır (Goodman 1983a).

Normalize edilmiş starlike fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterelir ve bu sınıf,

$$\mathcal{S}^* = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.20 (Konveks Bölge): $\forall w_1, w_2 \in D \subset \mathbb{C}$ için w_1 ve w_2'yi birleştiren doğru parçası D bölgesinde kalıyorsa, yani $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)w_2 \in D$ ise D bölgesine konveks denir (Goodman 1983a).

Tanım 2.1.21 (Konveks Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U'yu konveks bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Goodman 1983a).

Teorem 2.1.22: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun U'da konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için,

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır (Goodman 1983a).

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir ve bu sınıf,

$$\mathcal{K} = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.23 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $f \in \mathcal{K}$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır (Duren 1983).

Tanım 2.1.24: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U'da α. mertebeden starlike fonksiyon denir (Miller and Mocanu 2000).

α. mertebeden starlike fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf,

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.25: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U'da α. mertebeden konveks fonksiyon denir (Miller and Mocanu 2000).

α. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf,

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.26 (De-Branges Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilsin. Buna göre her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olur. Eşitlik durumu yalnızca $f(z) = z\left(1 - ze^{i\theta}\right)^{-2}$ Koebe fonksiyonları için geçerlidir (Hayman 1994).

Tanım 2.1.27 (Ölçülebilir Fonksiyon): $\mathcal{X}$ boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{B}$ de bu kümenin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathfrak{B}$ ailesi için,

i. $\mathcal{X} \in \mathfrak{B}$

ii. $\forall E \in \mathfrak{B} \Rightarrow E^t = \mathcal{X} \setminus E \in \mathfrak{B}$

iii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{B}$

şartları sağlanıyorsa $\mathfrak{B}$ ye $\mathcal{X}$ üzerinde bir σ-cebiri denir. $\mathfrak{B}$ deki her bir kümeye ölçülebilir küme ve $(\mathcal{X}, \mathfrak{B})$ ikilisine de ölçülebilir uzay denir. $\mathcal{X}$ ölçülebilir bir küme $f(x)$ de bu kümede tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer α reel sayısı için

$$\{x \in \mathcal{X}: f(x) > \alpha\}$$

kümesi ölçülebilirse f ye bu kümede ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.1.28: f analitik bir fonksiyon olmak üzere z_0 f nin bir kökü ve $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ olsun. Buna göre f nin z_0 noktası civarındaki kuvvet serisi $n.$ terimden başlar ve f, $n.$ dereceden sıfıra sahiptir denir (Conway 1973).

2.2. Multivalent Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1: f fonksiyonu $D \subset \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bölgesinde analitik ve $w \in D$ için $f(z) = w$ denkleminin D bölgesindeki köklerinin sayısı $n(w)$ olsun. Burada dört durum karşımıza çıkar:

i. p pozitif bir tam sayı olmak üzere her $w \in D$ için $n(w) \leq p$ ise f fonksiyonuna D bölgesinde p-valent (veya $p.$ mertebeden multivalent) fonksiyon denir. $p = 1$ olmak üzere f p-valent bir fonksiyon ise f univalenttir.

ii. Çoğu durumda sonuçları elde etmek için daha zayıf ortalama şartlar yeterlidir. $0 < R < \infty$ için,

$$p(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} n\left(Re^{i\phi}\right)d\phi$$

$n(w)$ nın $|w| = R$ çemberi etrafındaki (Lebesgue) integral ortalaması olmak üzere $p(R) \leq p$ ise f fonksiyonuna çembersel ortalama p-valent fonsiyon denir. Bu durum, $|w| = R$ çemberleri üzerindeki w değerlerinin ortalama en fazla p kez alındığını söyler. Burada $n(w)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve p herhangi bir pozitif sayıdır.

iii. f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve W U birim diskinin f dönüşümü altındaki Riemann görüntüsü olsun. $W(R)$ W'nın $|w| = R$ çemberi içerisinde kalan kısmının alanını belirtmek üzere

$$W(R) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{R} tdt \int_{0}^{2\pi} n\left(te^{i\phi}\right)d\phi = \int_{0}^{R} 2p(t)dt \leq pR^2$$

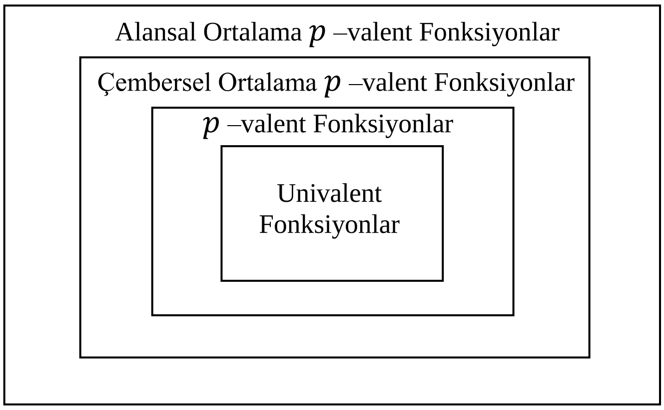
koşulunu sağlayan fonksiyonlara alansal ortalama p-valent fonsiyonlar denir. Alansal ortalama p-valent fonksiyon olma durumu yukarıda verilen tanımlara göre daha zayıf bir koşuldur.

iv. p pozitif tam sayı olmak üzere $0 < R < \infty$ için ya $n\left(Re^{i\phi}\right) = p$, $0 \leq \phi < 2\pi$ ya da $0 \leq \phi < 2\pi$ ve $n\left(Re^{i\phi}\right) < p$ olacak şekilde ϕ değeri vardır. Bu şartı sağlayan fonksiyonlara zayıf p-valent fonksiyonlar adı verilir (Hayman 1994).

Bir fonksiyon çembersel ortalama p-valent fonksiyon ise aynı zamanda alansal ortalama p-valent fonksiyondur; ancak bu ifadenin tersi geçerli değildir. Ayrıca her p-valent fonksiyon ortalama p-valent fonksiyondur (Goodman 1983b).

Yukarıda verilen tanımlar göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

f univalent $\Longrightarrow f$ p-valent $\Longrightarrow f$ çembersel ortalama p-valent $\Longrightarrow f$ alansal ortalama p-valent



Şekil 2.1. Fonksiyon Sınıfları Arasındaki Kapsama İlişkisi

p-valent fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar p-valent fonksiyonlar sınıfının ortalama p-valent fonksiyonların bir alt sınıfı olarak göz önüne alınmasıyla büyük ilerleme kaydetmiştir.

Multivalent fonksiyonlar univalent fonksiyonlarınkine benzer pek çok ekstremal özelliğe sahiptir. Bu nedenle Bieberbach tahmini, distorsiyon teoremleri gibi univalent fonksiyonlar teorisinde klasikleşmiş bazı sonuçlar p-valent fonksiyonlar için genelleştirilebilir.

2.2.1. Kesin sınırlar

Teorem 2.2.1.1: p pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots$$

fonksiyonu U birim diskinde regüler ve p-valent ise

$$\left|a_{p+1}\right| \leq 2p$$

olur.

Ayrıca, $|z| = r\ (0 < r < 1)$ için,

$$\frac{r^p}{(1+r)^{2p}} \leq |f(z)| \leq \frac{r^p}{(1-r)^{2p}}\ ,$$

$$|f'(z)| \leq \frac{p(1+r)}{r(1-r)}|f(z)| \leq \frac{pr^{p-1}(1+r)}{(1-r)^{2p+1}}$$

eşitsizlikleri elde edilir (Hayman 1994).

Yukarıda verilen sonuçlar 1950 yılında Hayman tarafından çembersel ortalama p-valent fonksiyonlar için verilmiştir. $\left|a_{p+1}\right| \leq 2p$ eşitsizliği alansal ortalama p-valent fonksiyonlar için 1941 yılında Spencer tarafından ispatlanmıştır. Teoremdeki son ifade (p-valent fonksiyonların distorsiyon sınırları) ise 1954 yılında Garabedian ve Royden tarafından alansal ortalama p-valent fonksiyonlara genişletilmiştir (Hayman 1994).

2.2.2. Katsayı sınırları ve Goodman tahmini

p. dereceden polinomlar düzlemde p-valenttir. Bu nedenle f fonksiyonu U birim diskinde p-valent olduğunda önceki katsayılara bağlı olarak $\left|a_p\right|$ için sınır elde etmenin zor bir problem olduğu düşünülebilir. Ancak böyle fonksiyonlar için a_p den sonraki katsayıların a_0'dan a_p'ye kadar olan katsayılara bağlı olarak sınırlandırılabileceği 1935 yılında Cartwright tarafından gösterilmiştir. 1948 yılında ise Goodman tarafından aşağıdaki tahmin verilmiştir.

p pozitif bir tam sayı ve

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

U birim diskinde p-valent olsun. Buna göre $n > p$ için,

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{2k(n+p)!}{(p+k)!\,(p-k)!\,(n-p-1)!\,(n^2-k^2)}|b_k|$$

olur.

Bu tahmin, $n.$ katsayının ilk p tane katsayının belli bir lineer kombinasyonu ile sınırlandırılabileceğini söyler. $p = 1$ olması durumunda univalent fonksiyonlar için verilen de-Branges Teoremi elde edilir (Hayman 1994).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüme ilk olarak tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılan fonksiyon sınıflarını tanıtarak başlayalım ve yine bu bölümde bazı önemli tanım ve lemmaları verelim.

$U = \{z: z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ açık birim diskinde analitik ve p-valent olan

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k} \quad (n, p \in \mathbb{N} = \{1,2, \dots\}) \tag{3.1}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}(p,n)$ ile gösterilir.

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \quad (n, p \in \mathbb{N} = \{1,2, \dots\}) \tag{3.2}$$

biçimindeki U da analitik ve p-valent olan fonksiyonların sınıfı ise $\mathcal{A}(p)$ ile gösterilir. Bu durumda, $\mathcal{A}(p,1) = \mathcal{A}(p)$ ve $\mathcal{A}(1,1) = \mathcal{A}$ eşitliği yazılabilir.

$\mathcal{A}(p,n)$ sınıfının

$$f(z) = z^p - \sum_{k=n}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k} \quad \left(a_{p+k} \geq 0;\ n, p \in \mathbb{N}\right) \tag{3.3}$$

biçimindeki negatif katsayılı fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $\mathcal{T}(p,n)$ ile gösterilmek üzere negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{T}(p)$ ile gösterilir. Buradan $\mathcal{T}(p,1) = \mathcal{T}(p)$ olur.

Tanım 3.1 (Sălăgean Türev Operatörü): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için, Sălăgean türev operatörü $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $D^n: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} D^0 f(z) &= f(z) \\ D^1 f(z) &= Df(z) = zf'(z) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$D^n f(z) = D\big(D^{n-1} f(z)\big), \qquad (z \in U)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca D^n için rekürans formülü,

$$D^{n+1} f(z) = z\big(D^n f(z)\big)'$$

biçiminde de yazılabilir (Salagean 1983).

$f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonuna Sălăgean türev operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} D^0 f(z) &= f(z) \\ D^1 f(z) &= Df(z) = z\big(D^0 f(z)\big)' = pz^p + \sum_{k=n}^{\infty}(p+k)a_{p+k}\, z^{p+k} \\ D^2 f(z) &= D\big(Df(z)\big) = z\big(Df(z)\big)' = p^2 z^p + \sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^2 a_{p+k}\, z^{p+k} \\ &\vdots \\ D^\Omega f(z) &= D\left(D^{\Omega-1} f(z)\right) = p^\Omega z^p + \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^\Omega\, a_{p+k} z^{p+k} \end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitlikleri elde edilir.

$\mathcal{T}(p,n)$ sınıfına ait f fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} D^0 f(z) &= f(z) \\ D^1 f(z) &= Df(z) = z\big(D^0 f(z)\big)' = pz^p - \sum_{k=n}^{\infty}(p+k)a_{p+k}\, z^{p+k} \\ D^2 f(z) &= D\big(Df(z)\big) = z\big(Df(z)\big)' = p^2 z^p - \sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^2 a_{p+k}\, z^{p+k} \\ &\vdots \\ D^\Omega f(z) &= D\left(D^{\Omega-1} f(z)\right) = p^\Omega z^p - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^\Omega\, a_{p+k} z^{p+k} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır.

Tanım 3.2 (Gama Fonksiyonu): $x > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

biçiminde tanımlanan $\Gamma(x)$ fonksiyonuna Gama fonksiyonu denir (Goodman 1983a).

Tanım 3.3 (Beta Fonksiyonu): $x > 0$ ve $y > 0$ olmak üzere,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

biçiminde tanımlanan $B(x,y)$ fonksiyonuna Beta fonksiyonu denir.

Gama ve Beta fonksiyonları yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

eşitliği yazılır.

Tanım 3.4 (Pochhammer Sembolü): $a, v \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$(a)_v = \frac{\Gamma(a+v)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & \big(v = 0, a \in \mathbb{C} - (0)\big) \\ a(a+1)\ldots(a+n-1), & (v = n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(a)_v$ ifadesine Pochhammer sembolü denir (Altıntaş 2007).

Gama fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $n \in \mathbb{N}_0$ için $(1)_n = n!$ olur.

Tanım 3.5 (Kesirsel İntegral): $f(z)$, $z - \xi > 0$ iken $\log(z-\xi)$ reel olacak şekilde $(z-\xi)^{\delta-1}$ in katlılıklarının kaldırıldığı ve orijini içeren z-düzlemindeki basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyon olmak üzere f'nin δ. mertebeden kesirsel integrali

$$\mathfrak{D}_z^{-\delta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\delta}} d\xi \quad (\delta > 0) \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanır (Owa 1978).

Tanım 3.6 (Kesirsel Türev): $f(z)$, $(z-\xi)^{\delta-1}$ in katlılıklarının Tanım 3.5 teki gibi kaldırıldığı z-düzlemindeki basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyon olmak üzere f'nin δ. mertebeden kesirsel türevi

$$\mathfrak{D}_z^{\delta} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{\delta}} d\xi \quad (0 \leq \delta < 1) \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlanır (Owa 1978).

Tanım 3.7: $0 \leq \delta < 1, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere Tanım 3.5 teki hipotezler altında $(n+\delta)$ mertebeden kesirsel türev

$$\mathfrak{D}_z^{n+\delta} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} \mathfrak{D}_z^{\delta} f(z)$$

şeklinde tanımlanır (Altıntaş 2007).

$f \in \mathcal{T}(p,n)$ olmak üzere $D^{\Omega} f(z)$ fonksiyonunun δ. mertebeden kesirsel türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_z^{\delta} D^{\Omega} f(z) &= \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{D^{\Omega} f(\xi)}{(z-\xi)^{\delta}} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{p^2 \xi^p - \sum_{k=n}^{\infty} (p+k)^2 a_{p+k} \xi^{p+k}}{(z-\xi)^{\delta}} d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} p^{\Omega} B(1-\delta, p+1)(p-\delta+1) z^{p-\delta} \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \sum_{k=n}^{\infty} (p+k)^{\Omega} B(1-\delta, p+k+1)(p+k-\delta+1) a_{p+k} z^{p+k-\delta} \\
&= p^{\Omega} (p+1-\delta)_{\delta} z^{p-\delta} - \sum_{k=n}^{\infty} (p+k)^{\Omega} (p+k+1-\delta)_{\delta} a_{p+k} z^{p+k-\delta} \\
&= (p+1-\delta)_{\delta} z^{-\delta} \left\{ p^{\Omega} z^p - \sum_{k=n}^{\infty} (p+k)^{\Omega} \frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}} a_{p+k} z^{p+k} \right\}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır.

Tanım 3.8: $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonu için $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere D_p^m türev operatörü,

$$D_p^0 f(z) = f(z)$$
$$D_p^1 f(z) = \frac{z}{p} f'(z)$$
$$\vdots$$
$$D_p^m f(z) = D_p^1 \left(D_p^{m-1} f(z)\right)$$

biçiminde tanımlanır (Shenan *et al.* 2004).

Buradan,

$$D_p^0 f(z) = f(z)$$
$$D_p^1 f(z) = \frac{z}{p} f'(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k}{p} a_k z^k$$
$$D_p^2 f(z) = \frac{z}{p}\left(D_p^1 f(z)\right)' = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k^2}{p^2} a_k z^k$$
$$\vdots$$
$$D_p^m f(z) = D_p^1 \left(D_p^{m-1} f(z)\right) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{k^m}{p^m} a_k z^k$$

eşitlikleri yazılır.

Lemma 3.9 (Jack Lemması): $z_0 \in U$ ve $r_0 = |z_0|$ olsun. $f \in \mathcal{H}[0, n]$ fonksiyonu $f(z) \not\equiv 0$, $n \geq 1$ olmak üzere $\overline{U_{r_0}}$ da sürekli ve $U_{r_0} \cup \{z_0\}$ kümesinde analitik olsun. $|f(z_0)| = max\{|f(z)|: z \in \overline{DU_{r_0}}\}$ ise,

i. $\dfrac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = m,$

ii. $Re \dfrac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geq m$

olacak şekilde bir $m \geq n$ sayısı vardır (Miller and Mocanu 2000).

Lemma 3.10 (Miller ve Mocanu Lemması): $w(z) \not\equiv 0$, $z \in U$ olmak üzere

$$w(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \quad (n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun.

$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ $(r_0 < 1)$ ve $|w(z_0)| = max|w(z)|$ ise m reel ve $m \geq n \geq 1$ olmak üzere,

$$z_0 w'(z_0) = m w(z_0)$$

olur (Miller and Mocanu 1978).

3.1. Multivalent Fonksiyonların Bazı Özel Alt Sınıfları

Bu başlık altında Tanım 2.2 de ifade edilen temel multivalent fonksiyon sınıfları dışında bu alanda yapılan araştırmalarda önemli bir yere sahip olan multivalent fonksiyonların özel alt sınıfları tanıtılarak bu sınıflara ait bazı katsayı eşitsizlikleri verilecektir.

Tanım 3.1.1: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu verilsin. $\forall z \in U$ için,

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

ise f fonksiyonuna U'da p-valent starlike fonksiyon denir.

p-valent starlike fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(p,n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu verilsin. $\forall z \in U$ için,

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

ise f fonksiyonuna U'da p-valent konveks fonksiyon denir.

p-valent konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(p,n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3: f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve (2.1) şeklinde olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $z \in U$ için,

i. $\dfrac{f(z)}{z} f'(z) \neq 0,$

ii. $Re\left[\alpha\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$

ise f'ye α-konveks fonksiyon denir (Goodman 1983a).

α-konveks bir fonksiyon $\alpha = 1$ için konveks, $\alpha = 0$ için starlike olur.

α-konveks fonksiyon kavramı ilk olarak 1969'da Mocanu tarafından tanıtılmıştır.

1973 yılında Miller, Mocanu ve Reade tarafından α-konveks fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki geometrik şartlar verilerek ispatlanmıştır (Goodman 1983a).

Teorem 3.1.4: α herhangi bir reel sayı ve f fonksiyonu α-konveks bir fonksiyon olsun.

i. $\alpha \geq 1$ ise f fonksiyonu konveks,

ii. $\alpha < 1$ ise f fonksiyonu starlike olur (Goodman 1983a).

α-konveks kavramının tanıtılmasından çok önce 1962'de Sakaguchi, (3.1) biçimindeki daha genel fonksiyonlar için,

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}+k\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0 \quad (z \in U) \tag{3.7}$$

şartını vererek f fonksiyonunun

i. $0 < k$ için p-valent starlike,

ii. $-1 < k \leq 0$ için p-valent konveks ve

iii. $k = -1$ için (3.7) şartını sağlayan yalnız bir fonksiyon olduğunu, yani $f(z) \equiv z^p$ olduğunu ispatlamıştır (Goodman 1983a).

Tanım 3.1.5: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ ve $0 \leq \alpha < p$ olmak üzere $\forall z \in U$ için,

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

ise f fonksiyonuna α. mertebeden p-valent starlike fonksiyon denir (Altıntaş *et al.* 2004).

α. mertebeden p-valent starlike fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}(p,n,\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ ve $0 \leq \alpha < p$ olmak üzere her $z \in U$ için,

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna α. mertebeden p-valent konveks fonksiyon denir (Altıntaş *et al.* 2004).

α. mertebeden p-valent konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(p,n,\alpha)$ ile gösterilir.

1991 yılında Altıntaş $\mathcal{S}(p,n,\alpha)$ ve $\mathcal{K}(p,n,\alpha)$ sınıflarını birleştirerek aşağıdaki fonksiyon sınıfını tanımlamıştır.

Tanım 3.1.7: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ olmak üzere $\alpha(0 \leq \alpha < 1), 0 \leq \lambda \leq 1$ için f fonksiyonu

$$Re\left\{\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda)f(z)}\right\} > \alpha$$

şartını sağlarsa f fonksiyonu $\mathcal{P}(n,\lambda,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyondur denir (Altıntaş 1991).

$\mathcal{S}(p,n,\alpha)$ ve $\mathcal{K}(p,n,\alpha)$ fonksiyon sınıfları Owa (1991) tarafından çalışılmıştır.

$\mathcal{S}^*(p,\alpha) = \mathcal{S}(p,1,\alpha)$ sınıfı ise Patil and Thakare (1983) tarafından ele alınmıştır.

Negatif katsayılı α. mertebeden p-valent starlike ve negatif katsayılı α. mertebeden p-valent konveks fonksiyonlar sınıfı $0 \leq \alpha < p$ olmak üzere her $z \in U$ için sırasıyla,

$$\mathcal{T}^*(p,n,\alpha) = \mathcal{S}(p,n,\alpha) \cap \mathcal{T}(p,n) = \left\{f : f \in \mathcal{T}(p,n), Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\right\},$$

$$\mathcal{C}(p,n,\alpha) = \mathcal{K}(p,n,\alpha) \cap \mathcal{T}(p,n) = \left\{f : f \in \mathcal{T}(p,n), Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\mathcal{T}^*(p,\alpha) = \mathcal{S}^*(p,\alpha) \cap \mathcal{T}_p; \mathcal{C}(p,\alpha) = \mathcal{K}(p,\alpha) \cap \mathcal{T}_p$$

fonksiyon sınıflarına ait katsayı eşitsizlikleriyle ilgili Owa tarafından aşağıdaki lemmalar verilmiştir.

Lemma 3.1.8: f fonksiyonu (3.3) deki gibi tanımlansın. Buna göre $f \in \mathcal{T}^*(p,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k+\alpha)a_{p+k} \leq p - \alpha \tag{3.8}$$

olmasıdır. Bu sonuç kesindir (Owa 1985).

Lemma 3.1.9: f fonksiyonu (3.3) de ki gibi tanımlansın. Buna göre $f \in \mathcal{C}(p,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)(p+k-\alpha)a_{p+k} \leq p(p-\alpha) \tag{3.9}$$

olmasıdır. Bu sonuç kesindir (Owa 1985).

$\mathcal{T}^*(p,\alpha)$ sınıfına ait (3.3) biçiminde tanımlanan bir f fonksiyonu için Lemma 3.1.8 den

$$a_{p+1} \leq \frac{p-\alpha}{p+1-\alpha} \tag{3.10}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan, $\mathcal{C}(p,\alpha)$ sınıfına ait (3.3) biçiminde tanımlanan bir f fonksiyonu için Lemma 3.1.9 dan,

$$a_{p+1} \leq \frac{p(p-\alpha)}{(p+1)(p+1-\alpha)} \tag{3.11}$$

olur. (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden dolayı, $\mathcal{T}^*(p,\alpha)$ nın

$$f(z) = z^p - \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{p+1-\alpha} z^{p+1} - \sum_{k=2}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}$$

$$\left(a_{p+k} \geq 0, p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} - \{1\};\ 0 \leq \alpha < p; 0 \leq \varepsilon < 1\right)$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $\mathcal{T}_\varepsilon^*(p,\alpha)$ ve $\mathcal{C}(p,\alpha)$ nın

$$f(z) = z^p - \frac{p(p-\alpha)\varepsilon}{(p+1)(p+1-\alpha)} z^{p+1} - \sum_{k=2}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k} \tag{3.12}$$

$$\left(a_{p+k} \geq 0, p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} - \{1\};\ 0 \leq \alpha < p; 0 \leq \varepsilon < 1\right)$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $\mathcal{C}_\varepsilon(p,\alpha)$ ile gösterilmek üzere, p-valent analitik fonksiyonların $\mathcal{T}_\varepsilon^*(p,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_\varepsilon(p,\alpha)$ şeklinde iki farklı sınıfının tanıtılarak çalışılması doğaldır.

$\mathcal{T}_\varepsilon^*(p,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_\varepsilon(p,\alpha)$ sınıfları Aouf *et. al.* (2000) tarafından çalışılmıştır.

$\mathcal{T}_\varepsilon^*(\alpha) = \mathcal{T}_\varepsilon^*(1,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_\varepsilon(\alpha) = \mathcal{C}_\varepsilon(1,\alpha)$ sınıfları ise daha önce Silverman and Silvia (1981) tarafından göz önüne alınmıştır.

2007 yılında Ali *et al.* tarafından aşağıdaki fonksiyon sınıfları tanıtılmıştır.

Tanım 3.1.10: $\varphi(z)$, U birim diskini $w_0 = 1$ noktasına göre starlike bir bölgeye resmeden, reel eksene göre simetrik, $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) > 0$ olmak üzere U birim diskinde pozitif reel kısma sahip analitik bir fonksiyon olsun. $f \in \mathcal{A}(p)$ olmak üzere,

$$1 + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{p}\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right) \prec \varphi(z) \quad (z \in U, b \in \mathbb{C} - \{0\}),$$

$$1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bp}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\varphi(z)\quad(z\in U, b\in\mathbb{C}-\{0\})$$

koşullarını sağlayan $f\in\mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarına sırasıyla, $\mathcal{S}^*_{b,p}(\varphi)$ ve $\mathcal{K}_{b,p}(\varphi)$ fonksiyon sınıflarına aittir denir. Ayrıca, $f\in\mathcal{A}(p)$ fonksiyonu

$$1+\frac{1}{b}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}-1\right)\prec\varphi(z)\quad(z\in U, b\in\mathbb{C}-\{0\})$$

koşulunu sağlarsa f fonksiyonu $\mathcal{R}_{b,p}(\varphi)$ sınıfına aittir denir (Ali *et al*. 2007).

$\mathcal{S}^*_{1,1}(\varphi)=\mathcal{S}^*(\varphi)$ ve $\mathcal{K}_{1,1}(\varphi)=\mathcal{K}(\varphi)$ olur. $\mathcal{S}^*(\varphi)$ ve $\mathcal{K}(\varphi)$ fonksiyon sınıfları Ma and Minda (1992) tarafından tanıtılan sınıflardır.

α. mertebeden starlike fonksiyonların $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfı ve α. mertebeden konveks fonksiyonların $\mathcal{K}(\alpha)$ sınıfı, $0\le\alpha<1$ ve $\varphi(z)=(1+(1-2\alpha)z)\,/\,(1-z)$ olmak üzere, sırasıyla, $\mathcal{S}^*_{1,1}(\varphi)$ ve $\mathcal{K}_{1,1}(\varphi)$ sınıflarının özel halidir.

Tanım 3.1.11: $f\in\mathcal{A}(p)$ fonksiyonu $z\in U, -1\le B<A\le 1, 0\le\beta\le 1$ ve $\alpha\ge 0$ olmak üzere,

$$(1-\beta)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\beta\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}$$

bağıntısını sağlarsa f fonksiyonu $\mathcal{H}_p(A,B,\alpha,\beta)$ sınıfına aittir denir (Owa and Patel 2000).

Tanım 3.1.12: $f\in\mathcal{A}(p)$ fonksiyonu $0\le\beta\le 1$ ve $\alpha\ge 0$ olmak üzere,

$$1+\frac{1}{b}\left\{(1-\beta)\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}+\beta\frac{zf'(z)}{pf(z)}\left(\frac{f(z)}{z^p}\right)^{\alpha}-1\right\}\prec\varphi(z)\quad(z\in U, b\in\mathbb{C}-\{0\})$$

ise f fonksiyonu $\mathcal{R}_{b,p,\alpha,\beta}(\varphi)$ sınıfına aittir denir (Ramachandran *et al*. 2007).

Shanmugam *et al.* 2009 yılında $\mathcal{S}^*_{b,p}(\varphi)$ ve $\mathcal{K}_{b,p}(\varphi)$ fonksiyon sınıflarını birleştiren aşağıdaki sınıfı tanımladılar.

Tanım 3.1.13: $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) > 0$ olmak üzere φ fonksiyonu reel eksene göre simetrik ve U birim diskini sağ yarı düzlemdeki bir bölgeye resmeden, $w_0 = 1$ noktasına göre starlike univalent bir fonksiyon olsun. $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonu $0 \leq \alpha \leq 1$ ve

$$F(z) = (1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

olmak üzere,

$$1 + \frac{1}{b}\left\{\frac{1}{p}\left((1-\alpha)\frac{zF'(z)}{F(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right)\right) - 1\right\} \prec \varphi(z) \quad (z \in U, b \in \mathbb{C} - \{0\})$$

şartını sağlarsa f fonksiyonu $\mathcal{M}_{b,p,\alpha,\lambda}(\varphi)$ sınıfına aittir denir (Shanmugam *et al.* 2009).

$\mathcal{V}$, U açık birim diskinde $|w(z)| < 1$ şartını sağlayan

$$w(z) = w_1 z + w_2 z^2 + \cdots$$

şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı olmak üzere bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri ile ilgili aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 3.1.14: $w \in \mathcal{V}$ ise,

$$|w_2 - t w_1^2| \leq \begin{cases} -t & t \leq -1, \\ 1 & -1 \leq t \leq 1, \\ t & t \geq 1, \end{cases}$$

olur. Burada eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart w'nın,

i. $t < -1$ veya $t > 1$ iken $w(z) = z$,

ii. $t = -1$ iken

$$w(z) = \frac{z(z+\lambda)}{1+\lambda z} \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

iii. $t = 1$ iken

$$w(z) = -\frac{z(z+\lambda)}{1+\lambda z} \quad (0 \le \lambda \le 1)$$

veya t' nin aldığı değerlere göre w'nın rotasyonlarından biri olmasıdır (Ali *et al.* 2007).

Yukarıda verilen üst sınır kesin olmasına rağmen bu üst sınır $-1 < t < 1$ iken aşağıdaki gibi iyileştirilebilir:

$$|w_2 - tw_1^2| + (t+1)|w_1|^2 \le 1 \quad (-1 < t \le 0)$$

ve

$$|w_2 - tw_1^2| + (1-t)|w_1|^2 \le 1 \quad (0 < t < 1).$$

Lemma 3.1.15: $w \in \mathcal{V}$ ise herhangi bir t kompleks sayısı için,

$$|w_2 - tw_1^2| \le max\{1; |t|\}$$

olur. Bu sonuç $w(z) = z$ veya $w(z) = z^2$ fonksiyonları için kesindir (Keogh and Merkes 1969).

Lemma 3.1.16: $w \in \mathcal{V}$ ise herhangi q_1 ve q_2 reel sayıları için aşağıdaki ekstremal tahmin doğrudur.

$$H(q_1,q_2) = \begin{cases} 1 & (q_1,q_2) \in D_1 \cup D_2\,, \\ |q_2| & (q_1,q_2) \in \bigcup_{k=3}^{7} D_k\,, \\ \frac{2}{3}(|q_1|+1)\left(\frac{|q_1|+1}{3(|q_1|+1+q_2)}\right)^{\frac{1}{2}} & (q_1,q_2) \in D_8 \cup D_9\,, \\ \frac{q_2}{3}\left(\frac{q_1^2-4}{q_1^2-4q_2}\right)\left(\frac{q_1^2-4}{3(q_2-1)}\right)^{\frac{1}{2}} & (q_1,q_2) \in D_{10} \cup D_{11} - \{\pm 2,1\}\,, \\ \frac{2}{3}(|q_1|-1)\left(\frac{|q_1|-1}{3(|q_1|-1-q_2)}\right)^{\frac{1}{2}} & (q_1,q_2) \in D_{12}\,, \end{cases}$$

olmak üzere,

$$|w_3 + q_1 w_1 w_2| \le H(q_1,q_2)$$

olur (Prokhorov and Szynal 1984).

Ekstremal fonksiyonlar ve bunların rotasyon fonksiyonları,

$$w(z) = z^3,\;\; w(z) = z,\;\; w(z) = w_0(z) = \frac{(z[(1-\lambda)\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_1] - \varepsilon_1\varepsilon_2 z)}{1 - [(1-\lambda)\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2]z}$$

$$w(z) = w_1(z) = \frac{z(t_1 - z)}{1 - t_1 z}, w(z) = w_2(z) = \frac{z(t_2 + z)}{1 + t_2 z},$$

$$|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1, \varepsilon_1 = t_0 - e^{\frac{-i\theta_0}{2}}(a \mp b), \varepsilon_2 = -e^{\frac{-i\theta_0}{2}}(ia \mp b),$$

$$a = t_0 cos\frac{\theta_0}{2}, b = \sqrt{1 - t_0^2 sin^2\frac{\theta_0}{2}}, \lambda = \frac{b \pm a}{2b},$$

$$t_0 = \left[\frac{2q_2(q_1^2+2) - 3q_1^2}{3(q_2-1)(q_1^2+4q_2)}\right]^{\frac{1}{2}}, t_1 = \left(\frac{|q_1|+1}{3(|q_1|+1+q_2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$t_2 = \left(\frac{|q_1|-1}{3(|q_1|-1-q_2)}\right)^{\frac{1}{2}}, cos\frac{\theta_0}{2} = \frac{q_1}{2}\left[\frac{q_2(q_1^2+8) - 2(q_1^2+2)}{2q_2(q_1^2+2) - 3q_1^2}\right]$$

şeklindedir.

D_k, $k = 1,2,\dots,12$ kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_1 = \left\{(q_1, q_2) : |q_1| \le \frac{1}{2}, |q_2| \le 1\right\},$$

$$D_2 = \left\{(q_1, q_2) : \frac{1}{2} \le |q_1| \le 2, \frac{4}{27}(|q_1|+1)^3 - (|q_1|+1) \le |q_2| \le 1\right\},$$

$$D_3 = \left\{(q_1, q_2) : |q_1| \le \frac{1}{2}, |q_2| \le -1\right\},$$

$$D_4 = \left\{(q_1, q_2) : |q_1| \ge \frac{1}{2}, |q_2| \le -\frac{2}{3}(|q_1|+1)\right\},$$

$$D_5 = \{(q_1, q_2) : |q_1| \le 2, |q_2| \ge 1\},$$

$$D_6 = \left\{(q_1, q_2) : 2 \le |q_1| \le 4, q_2 \ge \frac{1}{12}(q_1^2+8)\right\},$$

$$D_7 = \left\{(q_1, q_2) : |q_1| \ge 4, q_2 \ge -\frac{2}{3}(|q_1|-1)\right\},$$

$$D_8 = \left\{(q_1, q_2): \frac{1}{2} \leq |q_1| \leq 2, -\frac{2}{3}(|q_1| + 1) \leq q_2 \leq \frac{4}{27}(|q_1| + 1)^3 - (|q_1| + 1)\right\},$$

$$D_9 = \left\{(q_1, q_2): |q_1| \geq 2, -\frac{2}{3}(|q_1| + 1) \leq q_2 \leq \frac{2|q_1|(|q_1| + 1)}{q_1^2 + 2|q_1| + 4}\right\},$$

$$D_{10} = \left\{(q_1, q_2): 2 \leq |q_1| \leq 4, \frac{2|q_1|(|q_1| + 1)}{q_1^2 + 2|q_1| + 4} \leq q_2 \leq \frac{1}{12}(q_1^2 + 8)\right\},$$

$$D_{11} = \left\{(q_1, q_2): |q_1| \geq 4, \frac{2|q_1|(|q_1| + 1)}{q_1^2 + 2|q_1| + 4} \leq q_2 \leq \frac{2|q_1|(|q_1| - 1)}{q_1^2 - 2|q_1| + 4}\right\},$$

$$D_{12} = \left\{(q_1, q_2): |q_1| \geq 4, \frac{2|q_1|(|q_1| - 1)}{q_1^2 - 2|q_1| + 4} \leq q_2 \leq \frac{2}{3}(|q_1| - 1)\right\}.$$

3.2. Analitik ve Multivalent Fonksiyonların Komşulukları

$\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman tarafından yapılmıştır. Goodman tarafından yapılan bu çalışmada yer alan aşağıda verilen teorem komşuluk kavramının geliştirilmesine temel oluşturmuştur.

Teorem 3.2.1: $|z| < 1$ için,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde univalenttir ve bu bölgeyi orijine göre starlike bir bölgeye resmeder.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde univalenttir ve bu bölgeyi konveks bir bölgeye resmeder (Goodman 1957).

1981 yılında Ruscheweyh, Goodman tarafından verilen komşuluk kavramını genelleştirerek $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının δ-komşuluğunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 3.2.2: $f \in \mathcal{A}$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\delta(f) = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n - b_n| \leq \delta \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun δ-komşuluğu denir (Ruscheweyh 1981).

Buna göre, $e(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu için,

$$\mathcal{N}_\delta(e) = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n| \leq \delta \right\}$$

olur. Ayrıca $\mathcal{N}_1(e) \subset \mathcal{S}^*$ dır.

Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluğu 1990 yılında Walker tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.3: $p \in \mathcal{P}$ ve $\delta \geq 0$ için p nin δ-komşuluğu $\mathcal{N}_\delta(p)$ ile gösterilir ve bu küme

$$\mathcal{N}_\delta(p) = \left\{ q \in \mathcal{P} : q(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} |p_n - q_n| \leq \delta \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Walker 1990).

1996 yılında Altıntaş ve Owa tarafından negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonlarının (n, δ)-komşuluğu kavramı verilmiştir.

Tanım 3.2.4: $f \in \mathcal{T}_n$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\delta}(f) = \left\{ g \in \mathcal{A}_n : g(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k \ , \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k - b_k| \leq \delta \ \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun (n, δ)-komşuluğu denir (Altıntaş and Owa 1996).

2004 te Altıntaş *et al.* Tanım 3.2.4 te verilen (n, δ)-komşuluk kavramını negatif katsayılı analitik multivalent fonksiyonlar sınıfına genişlettiler.

Tanım 3.2.5: $f \in \mathcal{T}(p, n)$ $(p \in \mathbb{N})$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\delta}(f;p) = \left\{ g \in \mathcal{T}(p,n) : g(z) = z^p - \sum_{k=n}^{\infty} b_{p+k} z^{p+k}, \sum_{k=n}^{\infty} k\left|a_{p+k} - b_{p+k}\right| \leq \delta \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun (n, δ)-komşuluğu denir.

$h(z) = z^p$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\delta}(h;p) = \left\{ g \in \mathcal{T}(p,n) : g(z) = z^p - \sum_{k=n}^{\infty} b_{p+k} z^{p+k}, \sum_{k=n}^{\infty} k\left|b_{p+k}\right| \leq \delta \right\}$$

olur (Altıntaş *et al.* 2004).

2007 yıllında Orhan ve arkadaşları tarafından $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonları için aşağıdaki yeni komşuluk tanımları verildi.

Tanım 3.2.6: $f, g \in \mathcal{A}$ olmak üzere $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ ve $\delta > \sqrt{2(1 - cos\alpha)}$ için,

$$\left|f'(z) - e^{i\alpha} g'\,(z)\right| < \delta \quad (z \in U)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna g fonksiyonunun (α,δ)-komşuluğu denir ve bu komşuluk $(\alpha,\delta)-\mathcal{N}(g)$ biçiminde gösterilir.

Ayrıca $-\pi \le \alpha \le \pi$ ve $\delta > \sqrt{2(1-cos\alpha)}$ için,

$$\left|\frac{f(z)}{z} - e^{i\alpha}\frac{g(z)}{z}\right| < \delta \quad (z \in U)$$

şartı sağlanırsa $f \in (\alpha,\delta)-\mathcal{M}(g)$ olur (Orhan *et al.* 2007).

2009 da Altuntaş *et al.* , Orhan ve arkadaşları tarafından yukarıda verilen tanımları $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonları için genelleştirdiler.

Tanım 3.2.7: $f,g \in \mathcal{A}(p,n)$ olmak üzere $-\pi \le \alpha \le \pi$ ve $\delta > p\sqrt{2(1-cos\alpha)}$ için f fonksiyonu,

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{g'(z)}{z^{p-1}}\right| < \delta \quad (z \in U)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna g fonksiyonunun $(\alpha,\delta)_p$-komşuluğu denir ve bu komşuluk $(\alpha,\delta)_p-\mathcal{N}(g)$ biçiminde gösterilir.

Ayrıca $-\pi \le \alpha \le \pi$ ve $\delta > \sqrt{2(1-cos\alpha)}$ için,

$$\left|\frac{f(z)}{z^p} - e^{i\alpha}\frac{g(z)}{z^p}\right| < \delta \quad (z \in U)$$

şartı sağlanırsa$(\alpha,\delta)_p \in (\alpha,\delta)-\mathcal{M}(g)$ olur (Altuntaş *et al.* 2009).

2011 yılında Frasin $f \in \mathcal{T}_1$ fonksiyonları için (α,β,δ)-komşuluk tanımını verdi.

Tanım 3.2.8: $f,g \in \mathcal{T}_1$ olmak üzere $-\pi \le \alpha,\beta \le \pi$ ve $\delta > \sqrt{2\big(1-cos(\alpha-\beta)\big)}$ için, f fonksiyonu

$$\left|e^{i\alpha}\left(D^k f(z)\right)' - e^{i\beta}\left(D^k g(z)\right)'\right| < \delta$$

şartını sağlarsa f fonksiyonuna g fonksiyonunun (α, β, δ)-komşuluğu denir (Frasin 2011).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir. İlk olarak multivalent fonksiyonların yeni alt sınıfları tanımlanarak bu sınıflara ait katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon sınırları verilmiştir. Ayrıca, bu sınıfları karakterize eden özellikler incelenmiştir. Son olarak da, multivalent fonksiyonların özel bir alt sınıfı için yeni komşuluk tanımları verilerek bazı sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. $\mathcal{M}_{p,b,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ Sınıfı

Tanım 4.1.1: $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) > 0$ olmak üzere φ fonksiyonu U açık birim diskini sağ yarı düzlemde bir bölgeye resmeden, reel eksene göre simetrik ve $w = 1$'e göre univalent starlike bir fonksiyon olsun. $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonu

$$F_{\lambda,m}(z) = (1-\lambda)D_p^m f(z) + \lambda D_p^{m+1} f(z) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

ve $0 \leq \alpha \leq 1, m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$1 + \frac{1}{b}\left[\frac{1}{p}\left((1-\alpha)\frac{zF'_{\lambda,m}(z)}{F_{\lambda,m}(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zF''_{\lambda,m}(z)}{F'_{\lambda,m}(z)}\right)\right) - 1\right] \prec \varphi(z)$$

koşulunu sağlarsa f fonksiyonu $\mathcal{M}_{p,b,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ sınıfına aittir denir (Altuntaş and Kamali 2009).

Ayrıca, $f * g \in \mathcal{M}_{p,b,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ şartını sağlayan tüm $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{M}_{p,b,\alpha,\lambda,m,g}(\varphi)$ ile gösterilsin (Altuntaş and Kamali 2009).

Bu durumda $\mathcal{M}_{p,b,\alpha,\lambda,m,g}(\varphi)$ sınıfı yukardaki gibi tanımlanmak üzere, bu sınıf aşağıdaki sınıflara indirgenebilir:

$\mathcal{M}_{1,1,1,0,0}(\varphi) \equiv \mathcal{K}(\varphi)$, $\mathcal{M}_{1,1,0,0,0}(\varphi) \equiv S^*(\varphi)$ sınıfları Ma and Minda (1992) tarafından tanıtılarak çalışılmıştır.

Ayrıca $\mathcal{M}_{p,1,0,0,0}(\varphi) \equiv S_p^*(\varphi)$, $\mathcal{M}_{p,1,1,0,0}(\varphi) \equiv \mathcal{K}_p(\varphi)$, $\mathcal{M}_{p,b,1,0,0}(\varphi) \equiv \mathcal{K}_{b,p}(\varphi)$ sınıfları da Ali *et al.* (2007) tarafından tanıtılarak çalışılmış sınıflardır.

Lemma 3.1.14-3.1.16 yı kullanarak $\mathcal{M}_{p,1,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ sınıfına ait aşağıdaki katsayı sınırlarını ispatlayalım.

Teorem 4.1.2: $B_1 \geq 0$ ve $B_2 \geq 0$ olmak üzere B_n reel sayıları için,

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$$

ve $m \in N_0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere,

$$\sigma_1 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3 B_1^2 p^m (p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 - B_1 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\sigma_2 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3 B_1^2 p^m (p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 + B_1 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\sigma_3 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3 B_1^2 p^m (p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m) = \frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2} - 2\mu p^2 \frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}$$

olsun. (3.2) biçiminde verilen f fonksiyonu $M_{p,1,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ sınıfına ait ise,

$$\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| \leq \begin{cases} \frac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m \{B_2 + pB_1^2 \xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\} & \mu \leq \sigma_1, \\ \frac{p^3 B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m & \sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_2, \\ -\frac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m \{B_2 + pB_1^2 \xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\} & \mu \geq \sigma_2, \end{cases} \tag{4.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Yani herhangi bir μ kompleks sayısı için,

$$\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| \leq \frac{p^3 B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m max\left\{1, \left|\frac{B_2}{B_1} + pB_1 \xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\right|\right\}$$

eşitsizliği vardır.

Ayrıca,

$$q_1 = 2\left(\frac{B_2}{B_1}\right) + \frac{3(p^2 + 3\alpha p + 2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)} pB_1,$$

$$q_2 = \frac{B_3}{B_1} + \frac{3(p^2 + 3\alpha p + 2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)} pB_2$$

$$+ \left[\frac{3(p^2 + 3\alpha p + 2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)} \frac{p^2 + 2\alpha p + \alpha}{(p+\alpha)^2} - \frac{p^3 3\alpha^2 p + 3\alpha p + \alpha}{(p+\alpha)^3}\right] p^2 B_1^2$$

ve $H(q_1, q_2)$ Lemma 3.1.16 daki gibi tanımlanmak üzere,

$$|\alpha_{p+3}| \leq \frac{p^3 B_1}{3(p+3\alpha)(p+3\lambda)} \left(\frac{p}{p+3}\right)^m H(q_1, q_2)$$

olur. Bu sonuçlar kesindir (Altuntaş and Kamali 2009).

İspat: $f \in M_{p,1,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ ise $0 \leq \alpha \leq 1, m \in N_0$ ve

$$F_{\lambda,m}(z) = (1-\lambda)D^m f(z) + \lambda D^{m+1} f(z)$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{p}\left\{(1-\alpha)\frac{zF'_{\lambda,m}(z)}{F_{\lambda,m}(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zF''_{\lambda,m}(z)}{F'_{\lambda,m}(z)}\right)\right\} = \varphi(w(z)) \qquad (4.2)$$

olacak şekilde bir $w(z) = w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 \ldots \in \mathcal{V}$ Schwarz fonksiyonu vardır.

$D_p^m f(z)$ ve $F_{\lambda,m}(z)$ nin tanımından,

$$F_{\lambda,m}(z) = z^p + \frac{1}{p}\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^m [p + (n-p)\lambda] a_n z^n$$

$$= z^p + \frac{1}{p}\left(\frac{p+1}{p}\right)^m (p+\lambda) a_{p+1} z^{p+1}$$

$$+ \frac{1}{p}\left(\frac{p+2}{p}\right)^m (p+2\lambda) a_{p+2} z^{p+2}$$

$$+ \frac{1}{p}\left(\frac{p+3}{p}\right)^m (p+3\lambda) a_{p+3} z^{p+3} + \cdots$$

yazılabilir.

$$A_{p+c}=\frac{1}{p}\left(\frac{p+c}{p}\right)^{m}(p+c\lambda)a_{p+c}\quad (\, c\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\})$$

olsun. Bu durumda,

$$F_{\lambda,m}(z)=z^{p}+A_{p+1}z^{p+1}+A_{p+2}z^{p+2}+A_{p+3}z^{p+3}+\cdots \tag{4.3}$$

yazılır ve (4.3) de her iki tarafın türevi alınırsa,

$$F'_{\lambda,m}(z)=pz^{p-1}+(p+1)A_{p+1}z^{p}+(p+2)A_{p+2}z^{p+1}+(p+3)A_{p+3}z^{p+2}+\cdots \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. (4.3) ve (4.4) ten,

$$\frac{zF'_{\lambda,m}(z)}{F_{\lambda,m}(z)}=p+A_{p+1}z+\left(2A_{p+2}-A_{p+1}^{2}\right)z^{2}+\left(3A_{p+3}-3A_{p+2}A_{p+1}+A_{p+1}^{3}\right)z^{3}+\cdots$$

olur. Benzer olarak,

$$F''_{\lambda,m}(z)=p(p-1)z^{p-2}+p(p+1)A_{p+1}z^{p-1}+(p+1)(p+2)A_{p+2}z^{p}+\cdots$$

ve

$$\frac{zF''_{\lambda,m}(z)}{F'_{\lambda,m}(z)}=\frac{p(p-1)+p(p+1)A_{p+1}z+(p+1)(p+2)A_{p+2}z^{2}+\cdots}{p+(p+1)A_{p+1}z+(p+2)A_{p+2}z^{2}+\cdots}$$

yazılabilir.

$B_{p+c}=(p+c)A_{p+c}$ şeklinde alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{zF''_{\lambda,m}(z)}{F'_{\lambda,m}(z)}&=\frac{p(p-1)+pB_{p+1}z+(p+1)B_{p+2}z^{2}+(p+2)B_{p+3}z^{3}+\cdots}{p+B_{p+1}z+B_{p+2}z^{2}+B_{p+3}z^{3}+\cdots}\\&=p-1+\frac{1}{p}B_{p+1}z+\frac{1}{p}\left(2B_{p+2}-\frac{1}{p}B_{p+1}^{2}\right)z^{2}\\&\quad+\frac{1}{p}\left(3B_{p+3}-\frac{3}{p}B_{p+2}B_{p+1}+\frac{1}{p^{2}}B_{p+1}^{3}\right)z^{3}+\cdots\end{aligned}$$

olur.

$$\frac{1}{p}\left\{(1-\alpha)\frac{zF'_{\lambda,m}}{F_{\lambda,m}}+\alpha\left(1+\frac{zF''_{\lambda,m}}{F'_{\lambda,m}}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{p}\{(1-\alpha)\big[p+A_{p+1}z+\left(2A_{p+2}-A_{p+1}^2\right)z^2\\
&\quad+\left(3A_{p+3}-3A_{p+2}A_{p+1}+A_{p+1}^3\right)z^3+\cdots\big]\\
&\quad+\alpha\left[1+(p-1)+\frac{1}{p}B_{p+1}z+\frac{1}{p}\left(2B_{p+2}-\frac{1}{p}B_{p+1}^2\right)z^2\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{p}\left(3B_{p+3}-\frac{3}{p}B_{p+2}B_{p+1}+\frac{1}{p^2}B_{p+1}^3\right)z^3+\cdots\right]\Bigg\}\\
&=1+\frac{1}{p}\left(\frac{p+\alpha}{p}\right)A_{p+1}z+\frac{1}{p}\left[\frac{2(p+2\alpha)}{p}A_{p+2}-\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{p^2}A_{p+1}^2\right]z^2\\
&\quad+\frac{1}{p}\left\{\frac{3}{p}(p+3\alpha)A_{p+3}-\frac{3}{p^2}(p^2+3\alpha p+2\alpha)A_{p+2}A_{p+1}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{p^3}(p^3+3\alpha p^2+3\alpha p+\alpha)A_{p+1}^3\right\}z^3+\cdots
\end{aligned}\tag{4.5}$$

olduğundan ve (4.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\varphi\big(w(z)\big)&=1+B_1w_1z+(B_1w_2+B_2w_1^2)z^2\\
&\quad+(B_1w_3+2B_2w_1w_2+B_3w_1^3)z^3+\cdots
\end{aligned}\tag{4.6}$$

yazılabileceğinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

İlk olarak,

$$B_1w_1=\frac{1}{p}\left(\frac{p+\alpha}{p}\right)\frac{1}{p}\left(\frac{p+1}{p}\right)^m(p+\lambda)a_{p+1}$$

eşitliğinden

$$a_{p+1}=\frac{p^3B_1w_1}{(p+\alpha)(p+\lambda)}\left(\frac{p}{p+1}\right)^m\tag{4.7}$$

ve ikinci olarak,

$$B_1 w_2 + B_2 w_1^2 = \frac{2}{p}\left(\frac{p+2\alpha}{p}\right)\frac{1}{p}\left(\frac{p+2}{p}\right)^m (p+2\lambda)a_{p+2}$$

$$-\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{p^3}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{p+1}{p}\right)^m (p+\lambda)\frac{p^3 B_1 w_1}{(p+\alpha)(p+\lambda)}\left(\frac{p}{p+1}\right)^m\right]^2$$

eşitliğinden

$$a_{p+2} = \frac{p^3 B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m \left\{w_2 - w_1^2\left[-\frac{B_2}{B_1} - pB_1\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right]\right\} \qquad (4.8)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, (4.7) ve (4.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned} a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2 &= \frac{p^3 B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m \\ &\times\left\{w_2 - w_1^2\left[-\frac{B_2}{B_1} - pB_1\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right]\right\} \\ &-\mu\left\{\frac{p^6 B_1^2 w_1^2}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2}\left(\frac{p}{p+1}\right)^{2m}\right\} \\ &= \frac{p^3 B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m \\ &\times\left\{w_2 - w_1^2\left[-\frac{B_2}{B_1} - pB_1\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right.\right. \\ &\left.\left.+2\mu p^3 B_1\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}\right]\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$v = -\frac{B_2}{B_1} - pB_1\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2} + 2\mu p^3 B_1\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}$$

olsun. Bu durumda,

$$a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2 = \frac{p^3 B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m \{w_2 - v w_1^2\}$$

olur.

$$\sigma_1 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3B_1^2p^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 - B_1 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\sigma_2 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3B_1^2p^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 + B_1 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\sigma_3 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3B_1^2p^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\}$$

ve

$$\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m) = \frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2} - 2\mu p^2\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}$$

olmak üzere Lemma 3.1.14 ü kullanarak $\mu \le \sigma_1$ için,

$$\begin{aligned}\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| &\le \frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\left\{\frac{B_2}{B_1} + pB_1\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right.\\ &\quad\left. -2\mu p^3B_1\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}\right\}\\ &= \frac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\left\{B_2 + pB_1^2\left[\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right.\right.\\ &\quad\left.\left. -2\mu p^2\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}\right]\right\}\\ &= \frac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\{B_2 + pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\}\end{aligned}$$

$\mu \ge \sigma_2$ için,

$$\begin{aligned}\left|\alpha_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| &\le -\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\left\{\frac{B_2}{B_1} + pB_1\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right.\\ &\quad\left. -2\mu p^3B_1\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}\right\}\\ &= -\frac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\left\{B_2 + pB_1^2\left[\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right.\right.\\ &\quad\left.\left. -2\mu p^2\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}\right]\right\}\\ &= -\frac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\{B_2 + pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\}\end{aligned}$$

yazılır.

Ayrıca, $\sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_3$ ise,

$$\left|a_{p+2}-\mu a_{p+1}^2\right|+\frac{1}{(p+2)^m}\frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3B_1^2p^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}$$
$$\times\{B_1-B_2-pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\}\left|a_{p+1}\right|^2$$
$$\leq\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m|w_2-vw_1^2|$$
$$+\frac{1}{(p+2)^m}\frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3B_1^2p^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}$$
$$\times\{B_1-B_2-pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\}\frac{p^6B_1^2}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2}\frac{p^{2m}}{(p+1)^{2m}}|w_1|^2$$
$$\leq\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\{|w_2-vw_1^2|+(1+v)|w_1|^2\}$$
$$\leq\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m,$$

$\sigma_3 \leq \mu \leq \sigma_2$ ise,

$$\left|a_{p+2}-\mu a_{p+1}^2\right|+\frac{1}{(p+2)^m}\frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3B_1^2p^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}$$
$$\times\{B_1+B_2+pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\}\left|a_{p+1}\right|^2$$
$$\leq\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m|w_2-vw_1^2|$$
$$+\frac{1}{(p+2)^m}\frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3B_1^2p^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}$$
$$\times\{B_1+B_2+pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\}\frac{p^6B_1^2}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2}\frac{p^{2m}}{(p+1)^{2m}}|w_1|^2$$
$$\leq\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m\{|w_2-vw_1^2|+(1-v)|w_1|^2\}$$
$$\leq\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m$$

elde edilir. Lemma 3.1.15 i kullanarak, herhangi bir μ kompleks sayısı için,

$$\left|a_{p+2}-\mu a_{p+1}^2\right|\leq\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^m max\left\{1,\left|\frac{B_2}{B_1}+pB_1\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\right|\right\}$$

yazılabilir. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri kullanılarak,

$$\frac{3}{p^2}(p+3\alpha)\frac{1}{p}\left(\frac{p+3}{p}\right)^m (p+3\lambda)a_{p+3}$$

$$= B_1w_3 + 2B_2w_1w_2 + B_3w_1^3 + \frac{3}{p^3}(p^3+3\alpha p+2\alpha)\frac{1}{p}(p+\lambda)\frac{1}{p}(p+2\lambda)$$
$$\times \frac{p^3B_{1w_1}}{(p+\alpha)(p+\lambda)}\frac{p^3B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left\{w_2 + {w_1}^2\left[\frac{B_2}{B_1} + pB_1\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right]\right\}$$
$$-\frac{1}{p^4}(p^3+3\alpha p^2+3\alpha p+\alpha)\left[\frac{1}{p}\left(\frac{p+1}{p}\right)^m (p+\lambda)\frac{p^3B_1w_1}{(p+\alpha)(p+\lambda)}\left(\frac{p}{p+1}\right)^m\right]^3$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} a_{p+3} = {} & \frac{p^3B_1}{3(p+3\alpha)(p+3\lambda)}\left(\frac{p}{p+3}\right)^m \\ & \times\left\{w_3 + \left[2\frac{B_2}{B_1} + \frac{3(p^2+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}pB_1\right]w_1w_2\right. \\ & + \left[\frac{B_3}{B_1} + \frac{3(p^2+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}pB_2 + \left(\frac{3(p^2+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}\right.\right. \\ & \left.\left.\left.\times\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2} - \frac{p^3+3\alpha p^2+3\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^3}\right)p^2B_1^2\right]w_1^3\right\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

olur.

$$q_1 = 2\left(\frac{B_2}{B_1}\right) + \frac{3(p^2+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}pB_1,$$

$$q_2 = \frac{B_3}{B_1} + \frac{3(p^2+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}pB_2$$
$$+\left[\frac{3(p^2+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2} - \frac{p^3 3\alpha p^2+3\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^3}\right]p^2B_1^2$$

olsun. Buna göre (4.9) eşitliğinden,

$$a_{p+3} = \frac{p^3B_1}{3(p+3\alpha)(p+3\lambda)}\left(\frac{p}{p+3}\right)^m \{w_3 + q_1w_1w_2 + q_2{w_1}^3\}$$

elde edilir. Dolayısıyla $H(q_1, q_2)$ Lemma 3.1.16 daki gibi tanımlanmak üzere,

$$\left|a_{p+3}\right| \leq \frac{p^3 B_1}{3(p+3\alpha)(p+3\lambda)}\left(\frac{p}{p+3}\right)^m H(q_1, q_2)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

(4.1), (4.5) ve (4.6) daki sınırların kesin olduğunu göstermek için,

$$\frac{1}{p}\left\{(1-\alpha)\frac{z\left(K_{\varphi n}\right)'(z)}{\left(K_{\varphi n}\right)(z)}+\alpha\left(1+\frac{z\left(K_{\varphi n}\right)''(z)}{z\left(K_{\varphi n}\right)'(z)}\right)\right\}=\varphi(z^{n-1}),$$

$$\left(K_{\varphi n}\right)(0)=0=\left[K_{\varphi n}\right]'(0)-1$$

ile $K_{\varphi n}$ $(n=2,3,\ldots)$ fonksiyonlarını,

$$\frac{1}{p}\left\{(1-\alpha)\frac{z\left(F_{\lambda,m}\right)'(z)}{\left(F_{\lambda,m}\right)(z)}+\alpha\left(1+\frac{z\left(F_{\lambda,m}\right)''(z)}{\left(F_{\lambda,m}\right)'(z)}\right)\right\}= \varphi\left(z\frac{z+\lambda}{1+\lambda z}\right),$$

$$\left(F_{\lambda,m}\right)(0)=0=\left[F_{\lambda,m}\right]'(0)-1$$

ve

$$\frac{1}{p}\left\{(1-\alpha)\frac{z\left(G_{\lambda,m}\right)'(z)}{\left(G_{\lambda,m}\right)(z)}+\alpha\left(1+\frac{z\left(G_{\lambda,m}\right)''(z)}{\left(G_{\lambda,m}\right)'(z)}\right)\right\}=\varphi\left(-z\frac{z+\lambda}{1+\lambda z}\right)$$

$$\left(G_{\lambda,m}\right)(0)=0=\left[G_{\lambda,m}\right]'(0)-1$$

ile de $F_{\lambda,m}$ ve $G_{\lambda,m}$ $(0\leq\lambda\leq 1, m\in\mathbb{N}_0)$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

Burada $K_{\varphi n}, F_{\lambda,m}, G_{\lambda,m} \in M_{p,1,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ olduğu açık bir şekilde görülür. Ayrıca, $K_\varphi = K_{\varphi 2}$ dir.

$\mu < \sigma_1$ ve $\mu < \sigma_2$ ise eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart f nin K_φ ya da K_φ nin rotasyonlarından biri olmasıdır.

$\sigma_1 < \mu < \sigma_2$ iken eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart f nin $K_{\varphi 3}$ ya da onun rotasyonlarından biri olmasıdır.

$\mu = \sigma_1$ ise eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart f nin $F_{\lambda,m}$ ya da onun rotasyonlarından biri olmasıdır.

$\mu = \sigma_2$ iken eşitlik durumunun geçerli olması için ise gerek ve yeter şart f nin $G_{\lambda,m}$ ya da onun rotasyonlarından biri olmasıdır.

Teorem 4.1.2 de $\lambda = 0, \alpha = 0, m = 0$ olarak alınırsa Ali *et al.* tarafından tanıtılan $S_{b,p}^{*}(\varphi)$ sınıfı için elde edilmiş olan aşağıdaki Teorem 4.1.3 ü verebiliriz.

Teorem 4.1.3. $\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$ ve

$$\sigma_1 := \frac{B_2 - B_1 + pB_1^2}{2pB_1^2}, \sigma_2 := \frac{B_2 + B_1 + pB_1^2}{2pB_1^2}, \sigma_3 = \frac{B_2 + pB_1^2}{2pB_1^2}$$

olsun. (3.2) biçiminde verilen f fonksiyonu $S_{b,p}^{*}(\varphi)$ sınıfına ait ise,

$$\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| \le \begin{cases} \frac{p}{2}\{B_2 + (1-2\mu)pB_1^2\} & \mu \le \sigma_1 , \\ \frac{pB_1}{2} & \sigma_1 \le \mu \le \sigma_2 , \\ -\frac{p}{2}\{B_2 + (1-2\mu)pB_1^2\} & \mu \ge \sigma_2 , \end{cases}$$

olur. Ayrıca $\sigma_1 \le \mu \le \sigma_3$ ise,

$$\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| + \frac{1}{2pB_1}\left(1 - \frac{B_2}{B_1} + (2\mu - 1)pB_1\right)\left|a_{p+1}\right|^2 \le \frac{pB_1}{2},$$

$\sigma_3 \le \mu \le \sigma_2$ ise,

$$\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| + \frac{1}{2pB_1}\left(1 - \frac{B_2}{B_1} - (2\mu - 1)pB_1\right)\left|a_{p+1}\right|^2 \le \frac{pB_1}{2}$$

dır. Herhangi bir μ kompleks sayısı için,

$$\left|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2\right| \le \frac{pB_1}{2} max\left\{1, \left|\frac{B_2}{B_1} + (1 - 2\mu)pB_1\right|\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca,

$$q_1 := \frac{4B_2 + 3pB_1^2}{2B_1}, q_2 := \frac{2B_3 + 3pB_1B_2 + p^2B_1^3}{2B_1}$$

için $H(q_1, q_2)$ Lemma 3.1.16 daki gibi tanımlanmak üzere,

$$|a_{p+3}| \leq \frac{pB_1}{3} H(q_1, q_2)$$

dır. Bu sonuçlar kesindir (Ali *et al.* 2007).

Uyarı 4.1.4: Teorem 4.1.2 de $\lambda = 0, \alpha = 0, m = 0, p = 1$ alındığında elde edilen sonuçlar $S^*(\varphi)$ sınıfı için Ma and Minda (1994) tarafından elde edilen sonuçlarla çakışır.

4.2. $\mathfrak{I}(\Omega, \lambda, p, \alpha)$, $\mathfrak{I}^*(\Omega, \lambda, p, \alpha)$ ve $\mathfrak{I}_\varepsilon^*(\Omega, \lambda, p, \alpha)$ Sınıfları

Bu başlık altında p-valent analitik fonksiyonlar sınıfını koruyan özel bir dönüşüm tanımlanarak bu dönüşüm yardımıyla yeni fonksiyon sınıfları tanıtılacaktır. Ayrıca bu fonksiyon sınıflarının özellikleri incelenecektir.

$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{p^\Omega}, p \in \mathbb{N}, \Omega \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\wp(\Omega, \lambda, p) = \left(\frac{1}{p^\Omega} - \lambda\right) D^\Omega f(z) + \frac{\lambda}{p} z \left(D^\Omega f(z)\right)'$$

biçiminde normalize edilmiş p-valent analitik fonksiyonlar sınıfını koruyan $\wp : \mathcal{A}(p,n) \to \mathcal{A}(p,n)$ dönüşümünü tanımlayalım.

Tanım 4.2.1: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu α $(0 \leq \alpha <)$, $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{p^\Omega}$, $\Omega \in \mathbb{N}_0$ ve her $z \in U$ için,

$$Re\left\{\frac{z\left(\wp(\Omega, \lambda, p)\right)'}{\wp(\Omega, \lambda, p)}\right\} > \alpha \tag{4.10}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonu $\mathfrak{I}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyondur denir (Kamali and Sağsöz 2011).

$\mathfrak{I}^*(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ fonksiyon sınıfı,

$$\mathfrak{I}^*(\Omega,\lambda,p,\alpha)=\mathfrak{I}(\Omega,\lambda,p,\alpha)\cap\mathcal{T}(p,n)$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $0\le\varepsilon<1$ olmak üzere $\mathfrak{I}^*(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ nin,

$$f(z)=z^p-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{p+k}z^{p+k} \tag{4.11}$$

biçimindeki fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $\mathfrak{I}^*_{\varepsilon}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ olsun.

Şimdi tanımladığımız bu fonksiyon sınıflarına ait özellikleri inceleyelim.

4.2.1. $\mathfrak{I}^*(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ ve $\mathfrak{I}^*_{\varepsilon}(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{p},\boldsymbol{\alpha})$ sınıflarına ait katsayı sınırları ve özellikler

İlk olarak $\mathfrak{I}^*(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfı için elde edilen katsayı eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.2.1.1: f fonksiyonu (3.3) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $\mathfrak{I}^*_{\varepsilon}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-\alpha)a_{p+k}\le p-\alpha \tag{4.12}$$

olmasıdır (Kamali and Sağsöz 2011).

İspat: $f(z)\in\mathfrak{I}^*(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.10) dan

$$Re\left\{\frac{z\left(\wp(\Omega,\lambda,p)\right)'}{\wp(\Omega,\lambda,p)}\right\}=Re\left\{z\frac{\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\left(\frac{1}{p}-1\right)\lambda\right)\left(D^{\Omega}f(z)\right)'+\frac{\lambda}{p}z\left(D^{\Omega}f(z)\right)''}{\left(\frac{1}{p^{\Omega}}-\lambda\right)D^{\Omega}f(z)+\frac{\lambda}{p}z\left(D^{\Omega}f(z)\right)'}\right\}$$

$$= Re\left\{\frac{pz^p - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega+1}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right)a_{p+k}z^{p+k}}{z^p - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right)a_{p+k}z^{p+k}}\right\}$$

$$> \alpha$$

eşitsizliği elde edilir.

z reel olacak şekilde seçilirse $z \to 1^-$ iken

$$\left\{\frac{p - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega+1}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right)a_{p+k}}{1 - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right)a_{p+k}}\right\} \geq \alpha$$

veya buna denk olarak

$$p - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega+1}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right)a_{p+k} \geq \alpha\left\{1 - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right)a_{p+k}\right\}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left\{(k+p)^{\Omega+1}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right) - (k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\frac{\lambda k}{p}\right)\right\}a_{p+k} \leq p-\alpha$$

veya

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left\{\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)\right\}a_{p+k} \leq p-\alpha$$

bulunur.

Tersine (4.12) eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim ve $z \in \partial U = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ olsun. Buna göre tanım (3.3) ten

$$\left|\frac{z\big(\wp(\Omega,\lambda,p)\big)'}{\wp(\Omega,\lambda,p)} - p\right| = \left|z\frac{\left(\frac{1}{p^{\Omega}}+\left(\frac{1}{p}-1\right)\lambda\right)\left(D^{\Omega}f(z)\right)' + \frac{\lambda}{p}z\left(D^{\Omega}f(z)\right)''}{\left(\frac{1}{p^{\Omega}}-\lambda\right)D^{\Omega}f(z) + \frac{\lambda}{p}z\left(D^{\Omega}f(z)\right)'} - p\right|$$

$$= \left| \frac{pz^p - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega+1}\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \frac{\lambda k}{p}\right) a_{p+k} z^{p+k}}{z^p - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \frac{\lambda k}{p}\right) a_{p+k} z^{p+k}} - p \right|$$

$$\leq \left| \frac{\sum_{k=n}^{\infty} k(k+p)^{\Omega+1}\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \frac{\lambda k}{p}\right) a_{p+k}}{1 - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \frac{\lambda k}{p}\right) a_{p+k}} \right|$$

elde edilir. (4.12) eşitsizliği kullanılarak,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)a_{p+k}$$

$$\leq p - \alpha \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} k\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})a_{p+k}$$

$$\leq p - \alpha - \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p-\alpha)a_{p+k}$$

veya

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})a_{p+k} \leq p - \alpha - (p-\alpha)\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})a_{p+k}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\left| z\frac{\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \left(\frac{1}{p} - 1\right)\lambda\right)\left(D^{\Omega}f(z)\right)' + \frac{\lambda}{p} z\left(D^{\Omega}f(z)\right)''}{\left(\frac{1}{p^{\Omega}} - \lambda\right)D^{\Omega}f(z) + \frac{\lambda}{p} z\left(D^{\Omega}f(z)\right)'} - p \right|$$

$$= \left| \frac{\sum_{k=n}^{\infty} k(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \frac{\lambda k}{p}\right) a_{p+k} z^k}{1 - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \frac{\lambda k}{p}\right) a_{p+k} z^k} \right|$$

$$\leq \frac{p - \alpha - (p-\alpha)\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})a_{p+k}}{1 - \sum_{k=n}^{\infty}(k+p)^{\Omega}\left(\frac{1}{p^{\Omega}} + \frac{\lambda k}{p}\right) a_{p+k}}$$

$$= p - \alpha$$

elde edilir.

Böylece Teorem 4.2.1.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1.2: f fonksiyonu (4.11) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $\mathfrak{J}_{\varepsilon}^{*}(\Omega, \lambda, p, \alpha)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart $0 \leq \alpha < p$, $0 \leq \varepsilon < 1$ ve $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{p^{\Omega}}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda k p^{\Omega-1})(k + p - \alpha) a_{p+k} \leq (p - \alpha)(1 - \varepsilon) \tag{4.13}$$

olmasıdır. Bu sonuç $n \in \mathbb{N}$, $k = n + 1, n + 2, \ldots$ olmak üzere,

$$f(z) = z^{p} - \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda n p^{\Omega-1})(n + p - \alpha)} z^{p+n} - \frac{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda k p^{\Omega-1})(k + p - \alpha)} z^{p+k}$$

şeklinde verilen f fonksiyonu için kesindir (Kamali and Sağsöz 2011).

İspat: (4.12) eşitsizliği kullanılarak,

$$\left(\frac{n+p}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda n p^{\Omega-1})(n + p - \alpha) a_{p+n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda k p^{\Omega-1})(k + p - \alpha)\, a_{p+k} \leq p - \alpha$$

veya

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda k p^{\Omega-1})(k + p - \alpha)\, a_{p+k} \leq p - \alpha - \left(\frac{n+p}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda n p^{\Omega-1})(n + p - \alpha) a_{p+n}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Burada,

$$a_{p+n} = \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}$$

olarak alınırsa,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)\,a_{p+k}$$

$$\leq p-\alpha-\left(\frac{n+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}$$

veya

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)\,a_{p+k} \leq (p-\alpha)(1-\varepsilon)$$

olur.

Şimdi $\mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfı için aşağıdaki kapanış teoremini verelim.

Teorem 4.2.1.3: $a_{p+k,s} \geq 0; p,n \in \mathbb{N}; 0 \leq \varepsilon < 1; s = 1,2,3,\dots,m$ olmak üzere

$$f_s(z) = z^p - \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{p+k,s}\,z^{p+k}$$

olsun. $f_s \in \mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ ise

$$b_{p+k} = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} a_{p+k,s} \geq 0 \tag{4.14}$$

olmak üzere,

$$g(z) = z^p - \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_{p+k}\,z^{p+k}$$

şeklinde verilen g fonksiyonu da $\mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına aittir (Kamali and Sağsöz 2011).

İspat: $s=1,2,\dots,m$ için $f_s \in \mathfrak{I}_\varepsilon^*(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ olduğundan Teorem 4.2.1.2 den

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)\,a_{p+k,s} \le (p-\alpha)(1-\varepsilon) \tag{4.15}$$

olduğu görülür. (4.15)'e (4.14) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)\,b_{p+k}\\
&=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)\left\{\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}a_{p+k,s}\right\}\\
&=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)a_{p+k,s}\right\}\\
&\le\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}(p-\alpha)\,(1-\varepsilon)=(p-\alpha)(1-\varepsilon)
\end{aligned}$$

yazılır.

Teorem 4.2.1.4: $k\in\{n+1,n+2,\dots\}$ olmak üzere,

$$f_{p+n}(z)=z^p-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
f_{p+k}(z)=z^p&-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}\\
&-\frac{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)}z^{p+k}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde olsun. Buna göre f fonksiyonunun $\mathfrak{I}_\varepsilon^*(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\eta_{p+k}\,f_{p+k}(z)\quad\left(\eta_{p+k}\ge 0;\sum_{k=n}^{\infty}\eta_{p+k}=1\right) \tag{4.18}$$

şeklinde ifade edilebilmesidir.

İspat: f fonksiyonu (4.18) deki gibi verilsin, öyle ki η_{p+k} katsayıları $\eta_{p+k} \geq 0$, $\sum_{k=n}^{\infty} \eta_{p+k} = 1$ şeklinde olmak üzere (4.16) ve (4.17) den

$$f(z) = z^p - \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} z^{p+n}$$
$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)} \eta_{p+k} z^{p+k}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha) \frac{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)} \eta_{p+k}$$

$$\begin{aligned} &= (p-\alpha)(1-\varepsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_{p+k} \\ &= (p-\alpha)(1-\varepsilon)\left(1-\eta_{p+n}\right) \\ &\leq (p-\alpha)(1-\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.19}$$

olduğundan Teorem 4.2.1.2 den $f \in \mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega, \lambda, p, \alpha)$ olduğu görülür.

Tersine, (4.11) de ki gibi tanımlanan f fonksiyonunun $\mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega, \lambda, p, \alpha)$ sınıfına ait olduğunu kabul edelim. Buna göre $k \in \{n+1, n+2, \ldots\}$ için (4.13) ten görüleceği gibi

$$a_{p+k} \leq \frac{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)}$$

olur. $k \in \{n+1, n+2, \ldots\}$ için,

$$\eta_{p+k} = \frac{\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda k p^{\Omega-1})(k+p-\alpha)}{(p-\alpha)(1-\varepsilon)} a_{p+k}$$

ve $\eta_{p+k} = 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_{p+k}$ şeklinde alınırsa (4.18) de ki ifade elde edilir.

Böylece Teorem 4.1.1.4 ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1.5: f fonksiyonu (4.11) deki gibi verilsin ve $s_m(z)$ kısmi toplamları

$$S_m(z)=\begin{cases} z^p-\dfrac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}; & m=n \\ z^p-\dfrac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}a_{p+k}z^{p+k}; & m=n+1,n+2,\ldots \end{cases} \tag{4.20}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca,

$$d_{p+k}=\frac{(p+k)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-\alpha)}{p^{\Omega}(p-\alpha)(1-\varepsilon)}\quad (0\le\alpha<p,0\le\varepsilon<1,0\le\lambda\le\frac{1}{p^{\Omega}})$$

olmak üzere,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}d_{p+k}a_{p+k}\le 1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} \tag{4.21}$$

olsun. Buna göre $m\ge n+1$ için,

$$Re\left\{\frac{f(z)}{s_m(z)}\right\}>1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{(p+m+1)^{\Omega}[1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}](p+m+1-\alpha)} \tag{4.22}$$

ve

$$Re\left\{\frac{s_m(z)}{f(z)}\right\}>\frac{(p+m+1)^{\Omega}\{1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}\}(p+m+1-\alpha)}{p^{\Omega}(p-\alpha)(1-\varepsilon)+(p+m+1)^{\Omega}\{1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}\}(m+p+1-\alpha)} \tag{4.23}$$

bulunur (Kamali and Sağsöz 2011).

İspat: (4.21) ve Teorem 4.2.1.2 den $f\in\Im_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ olduğu görülür. d_{p+k} nın tanımından

$$\begin{aligned} d_{p+k}&=\frac{\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-\alpha)}{(p-\alpha)(1-\varepsilon)} \\ &=\left(1+\frac{k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left[\frac{p-\alpha+k}{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}\right] \end{aligned}$$

$$= \left(1+\frac{k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})\left[\frac{1}{1-\varepsilon}+\frac{k}{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}\right]$$
$$> 1$$

yazılabilir.

Bu teoremdeki hipotezler altında, (4.21) den $k = n+1, n+2, \dots$ olmak üzere $d_{p+k+1} > d_{p+k} > 1$ olduğu görülür. Buna göre,

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} + d_{p+m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} d_{p+k}\, a_{p+k}$$
$$\leq 1 - \frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(p+n-\alpha)} \tag{4.24}$$

olur. (4.11) ve (4.20) kullanılarak,

$$\frac{f(z)}{s_{m(z)}} = \frac{z^p - \frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+n-\alpha)} z^{p+n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}}{z^p - \frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(p+n-\alpha)} z^{p+n} - \sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} z^{p+k}}$$

$$= 1 - \frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}}{z^p - \frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(p+n-\alpha)} z^{p+n} - \sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} z^{p+k}}$$

yazılır.

$$\psi_1(z) = d_{p+m+1}\left[\frac{f(z)}{s_m(z)} - \left(1 - \frac{1}{d_{p+m+1}}\right)\right]$$
$$= 1 - \frac{d_{p+m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k}\, z^k}{1 - \frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda n p^{\Omega-1})(p+n-\alpha)} z^{n} - \sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} z^{k}} \tag{4.25}$$

şeklinde alınsın. (4.24) ve (4.25) deki ifadeler kullanılırsa $z \in U, m \geq n+1$ için

$$\left|\frac{\psi_1(z)-1}{\psi_1(z)+1}\right|$$

$$=\left|\frac{-d_{p+m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}a_{p+k}\,z^k}{2-\frac{2p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(p+n-\alpha)}z^n-2\sum_{k=n+1}^{m}a_{p+k}z^k-d_{p+m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}a_{p+k}z^k}\right|$$

$$=\frac{d_{p+m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}a_{p+k}\,z^{p+k}}{2\left[1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(p+n-\alpha)}-\sum_{k=n+1}^{m}a_{p+k}\right]-d_{p+m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}a_{p+k}}$$

$$\leq 1$$

bulunur. Bu da $Re\psi_1(z)>0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$Re\psi_1(z)=Re\left\{d_{p+m+1}\left[\frac{f(z)}{s_m(z)}-\left(1-\frac{1}{d_{p+m+1}}\right)\right]\right\}>0\Rightarrow$$

$$Re\left\{\frac{f(z)}{s_m(z)}\right\}>1-\frac{1}{d_{p+m+1}}$$

veya

$$Re\left\{\frac{f(z)}{s_m(z)}\right\}>1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{(p+m+1)^{\Omega}[1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}](p+m+1-\alpha)}$$

elde edilir.

$$f(z)=z^p-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(p+n-\alpha)}z^{p+n}-\frac{1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(p+n-\alpha)}}{d_{p+m+1}}z^{p+m+1} \tag{4.26}$$

olsun. Bu durumda $f(z)$ (4.21) şartını sağlar ve $f\in\mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ olur. Dolayısıyla,

$$\frac{f(z)}{s_m(z)}=1-\frac{\frac{1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(p+n-\alpha)}}{d_{p+m+1}}z^{m+1}}{1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(p+n-\alpha)}z^n}$$

ve $z\to 1^-$ iken (4.22) de ki sınırın muhtemel en iyi sonuç olduğunu gösteren

$$\to 1-\frac{1}{d_{p+m+1}}=1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{(p+m+1)^{\Omega}[1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}](p+m+1-\alpha)}$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca $f(z)$ ve $s_m(z)$ nin tanımları kullanılarak,

$$\frac{s_m(z)}{f(z)} = \frac{z^p - \dfrac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} z^{p+n} - \sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} z^{p+k}}{z^p - \dfrac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} z^{p+n} - \sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} z^{p+k}}$$

$$= 1 + \frac{\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k} z^k}{1 - \dfrac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} z^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{p+k} z^k}$$

yazılabilir.

$$\psi_2(z) = \left(1+d_{p+m+1}\right)\left\{\frac{s_m(z)}{f(z)} - \frac{d_{p+m+1}}{1+d_{p+m+1}}\right\}$$

$$= 1 + \frac{\left(1+d_{p+m+1}\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k} z^k}{1 - \dfrac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} z^n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{p+k} z^k}$$

olarak alınır ve (4.24) kullanılırsa,

$$\left|\frac{\psi_2(z)-1}{\psi_2(z)+1}\right|$$

$$= \left|\frac{\left(1+d_{p+m+1}\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k} z^k}{2 - \dfrac{2(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} z^n - 2\sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} z^k + \left(d_{p+m+1}-1\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k} z^k}\right|$$

$$\leq \frac{\left(1+d_{p+m+1}\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k}}{2 - \dfrac{2(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} - 2\sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k} - \left(d_{p+m+1}-1\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k}}$$

$$= \frac{\left(1+d_{p+m+1}\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k}}{2\left\{1 - \dfrac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} - \sum_{k=n+1}^{m} a_{p+k}\right\} - \left(d_{p+m+1}-1\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k}}$$

$$\leq \frac{\left(1+d_{p+m+1}\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k}}{2d_{p+m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k} - \left(d_{p+m+1}-1\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{p+k}}$$

$$= 1$$

sonucuna ulaşılır.

$\left|\frac{\psi_2(z)-1}{\psi_2(z)+1}\right| \leq 1$ olması $Re\{\psi_2(z)\} > 0$ olmasını gerektirdiğinden

$$Re\{\psi_2(z)\} = \left(1 + d_{p+m+1}\right)Re\left[\frac{s_m(z)}{f(z)} - \left(\frac{d_{p+m+1}}{\left(1 + d_{p+m+1}\right)}\right)\right] > 0$$

veya

$$Re\left\{\frac{s_m(z)}{f(z)}\right\} > \left(\frac{d_{p+m+1}}{\left(1 + d_{p+m+1}\right)}\right)$$

elde edilir.

Son eşitsizlikten Teorem 4.2.1.5 te ki idea (4.23) ün doğru olduğu görülür.

(4.26) da verilen ekstremal fonksiyon için (4.23) te ki sınır kesindir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1.5 te $\Omega = 0, \lambda = 0$ ve $n = 1$ alınırsa Jin-Lin Liu tarafından verilen aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1.6: f fonksiyonu (4.11) deki gibi verilsin ve $s_m(z)$ kısmi toplamları

$$s_m(z) = \begin{cases} z^p - \dfrac{(p-\alpha)\varepsilon}{p+1-\alpha} z^{p+1}; & m = 1 \\ z^p - \dfrac{(p-\alpha)\varepsilon}{n+p-\alpha} z^{p+1} - \displaystyle\sum_{k=2}^{m} a_{p+k} z^{p+k}\,; & m = 2,3,\ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Ayrıca, $d_{p+k} = \frac{k+p-\alpha}{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}$, $0 \leq \alpha \leq p$, $0 \leq \varepsilon < 1$ olmak üzere,

$$\sum_{k=2}^{\infty} d_{p+k} a_{p+k} \leq 1 - \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{p+1-\alpha}$$

olduğunu kabul edelim. Buna göre $m \geq 2$ için,

$$Re\left\{\frac{f(z)}{s_m(z)}\right\} > \frac{(p-\alpha)\varepsilon+m+1}{p+m+1-\alpha},$$
$$Re\left\{\frac{s_m(z)}{f(z)}\right\} > \frac{p+m+1-\alpha}{(p-\alpha)(2-\varepsilon)+m+1}$$

olur. Yukarıda elde edilen sınırlar muhtemel en iyi sonuçlardır (Liu 2009).

4.3. $\mathfrak{J}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$, $\mathfrak{J}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ ve $\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ Sınıfları

Bu bölümde multivalent fonksiyonların genelleştirilmiş iki yeni alt sınıfı tanıtılarak bu sınıflara ait p-valent analitik fonksiyonların katsayı sınırları ve distorsiyon eşitsizlikleri verilecektir. Ayrıca, $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonlarının (n,p,ε)-komşuluğu tanımlanarak bu sınıflara ait fonksiyonların (n,p,ε)-komşuluğu için bazı içerme bağıntıları elde edilecektir.

İlk olarak,

$$\begin{aligned}\nabla_f(z) &= \frac{1}{(p+1-\delta)_\delta} z^\delta \mathfrak{D}_z^\delta D^\Omega f(z)\\ &= p^\Omega z^p - \sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^\Omega \frac{(p+k+1-\delta)_\delta}{(p+1-\delta)_\delta} a_{p+k} z^{p+k}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\wp(\Omega,\lambda,p,\delta) = \left(\frac{1}{p^\Omega}-\lambda\right)\nabla_f(z) + \frac{\lambda}{p} z\left(\nabla_f(z)\right)' \quad \left(0 \le \lambda \le \frac{1}{p^\Omega}, 0 \le \delta < 1, \Omega \in \mathbb{N}_0\right)$$

olacak şekilde bir $\wp: \mathcal{A}(p,n) \to \mathcal{A}(p,n)$ dönüşümü tanımlayalım.

Tanım 4.3.1: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu verilsin. $\alpha(0 \le \alpha < p), 0 \le \lambda \le \frac{1}{p^\Omega}$, $0 \le \delta < 1$, $\Omega \in \mathbb{N}_0$ ve her $z \in U$ için,

$$Re\left\{\frac{z\left(\wp(\Omega,\lambda,p,\delta)\right)'}{\wp(\Omega,\lambda,p,\delta)}\right\} > \alpha \tag{4.27}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathfrak{I}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyondur denir (Sağsöz and Kamali 2011).

$\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfını

$$\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)=\mathfrak{I}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)\cap\mathcal{T}(p,n)$$

biçiminde tanımlayalım.

Uyarı 4.3.2: (4.27) eşitsizliğinde $\delta=0$ alınırsa $\mathfrak{I}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Uyarı 4.3.3: (4.27) eşitsizliğinde $\delta=0,\Omega=0$ ve $p=1$ alınırsa, Altıntaş (1991) tarafından çalışılan $\mathcal{P}(n,\lambda,\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Uyarı 4.3.4: (4.27) eşitsizliğinde $\lambda=0,\delta=0$ ve $\Omega=0$ alınırsa Owa (1991) tarafından çalışılan α. mertebeden p-valent starlike fonksiyonların $\mathcal{S}(p,n,\alpha)$ sınıfı elde edilir.

Goodman (1983), Ruscheweyh (1981), Altıntaş and Owa (1996) ve Altıntaş *et al.* (2000) tarafından daha önceden yapılmış olan çalışmaları göz önüne alarak $f\in\mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonunun (n,p,ε)-komşuluğunu

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}(\nabla_f,\nabla_g)=\Bigg\{g\in\mathcal{T}(p,n): g(z)=z^p-\sum_{k=n}^{\infty}b_{p+k}z^{p+k}, \quad \sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_\delta}{(p+1-\delta)_\delta}\left|a_{p+k}-b_{p+k}\right|\le\varepsilon\Bigg\} \tag{4.28}$$

biçiminde tanımlayalım.

$$h(z)=z^p \quad (p\in\mathbb{N}) \tag{4.29}$$

ise (4.28) den

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}(\nabla_h, \nabla_g) = \left\{ g \in \mathcal{T}(p,n) : g(z) = z^p - \sum_{k=n}^{\infty} b_{p+k} z^{p+k}, \right.$$
$$\left. \sum_{k=n}^{\infty} (p+k)^{\Omega+1} \frac{(p+k+1-\delta)_\delta}{(p+1-\delta)_\delta} |b_{p+k}| \le \varepsilon \right\} \tag{4.30}$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

Tanım 4.3.5 : $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu verilsin. $w = \nabla_f(z), g \in \mathfrak{I}^*(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha)$ ve $\mu > -p$ $(\mu \in \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + 2(\mu+1)z\frac{dw}{dz} + \mu(\mu+1)w = (p+\mu)(p+\mu+1)\nabla_g(z) \tag{4.29}$$

biçimindeki homojen olmayan Cauchy-Euler diferansiyel denklemini sağlarsa f fonksiyonuna $\mathcal{K}(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha, \mu)$ sınıfına aittir denir (Sağsöz and Kamali 2011).

4.3.1. $\mathfrak{I}^*(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha)$ ve $\mathcal{K}(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha, \mu)$ sınıflarına ait katsayı sınırları ve distorsiyon eşitsizlikleri

İlk olarak $\mathfrak{I}^*(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha)$ sınıfına ait katsayı sınırlarını verelim.

Lemma 4.3.1.1: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu (3.3) biçiminde tanımlansın. Bu durumda, f nin $\mathfrak{I}^*(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $\Omega \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \lambda < \frac{1}{p^\Omega}, 0 \le \delta < 1$ iken

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega} (1 + \lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta (p+k-\alpha) a_{p+k} \le (p-\alpha)(p+1-\delta)_\delta \tag{4.32}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Sağsöz and Kamali 2011).

İspat: $f \in \mathfrak{I}^*(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha)$ olsun. O halde (4.27) den

$$Re\left\{\frac{(p+1-\delta)_\delta p z^p-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(p+k)(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}z^{p+k}}{(p+1-\delta)_\delta z^p-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}z^{p+k}}\right\}>\alpha$$

olur.

z yi reel olacak şekilde seçersek, $z \to 1^-$ iken (4.32) eşitsizliği elde edilir.

Tersine, (4.32) eşitsizliğinin geçerli olduğunu kabul edelim ve

$$z \in \partial U=\{z; z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$$

olsun. Buna göre Tanım 3.6 dan

$$\left|\frac{z\big(\wp(\Omega,\lambda,p,\delta)\big)'}{\wp(\Omega,\lambda,p,\delta)}-p\right|$$

$$=\left|\frac{(p+1-\delta)_\delta p z^p-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(p+k)(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}z^{p+k}}{(p+1-\delta)_\delta z^p-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}z^{p+k}}\right|$$

$$=\left|\frac{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(p+k)(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}z^{p+k}}{(p+1-\delta)_\delta-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}z^{k}}\right|$$

$$\leq\frac{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(p+k)(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}}{(p+1-\delta)_\delta-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k}}$$

olur.

(4.32) eşitsizliği kullanılarak,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta (p+k-\alpha)a_{p+k}$$
$$\leq (p-\alpha)(p+1-\delta)_\delta \Rightarrow$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} k\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_{\delta} a_{p+k}$$
$$\leq (p-\alpha)\left\{(p+1-\delta)_{\delta}-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_{\delta} a_{p+k}\right\}$$

yazılır. Dolayısıyla buradan,

$$\left|\frac{z\big(\wp(\Omega,\lambda,p,\delta)\big)'}{\wp(\Omega,\lambda,p,\delta)}-p\right|$$

$$\leq \frac{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_{\delta} a_{p+k}}{(p+1-\delta)_{\delta}-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_{\delta} a_{p+k}}$$

$$\leq \frac{(p-\alpha)\left\{(p+1-\delta)_{\delta}-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_{\delta} a_{p+k}\right\}}{(p+1-\delta)_{\delta}-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_{\delta} a_{p+k}}$$

$$= p-\alpha$$

bulunur.

Böylece Lemma 4.3.1.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.3.1.1 de $\Omega=0, \delta=0, p=1$ alınırsa, Teorem 4.3.1.2 elde edilir.

Teorem 4.3.1.2: $f(z) \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonunun $\mathcal{P}(n,\lambda,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart,

$$\sum_{k=n}^{\infty}(k+1-\alpha)\,(1+\lambda k)a_{k+1} \leq 1-\alpha$$

olmasıdır (Altıntaş 1991).

Lemma 4.3.1.3: (3.3) biçiminde verilen f fonksiyonu $\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega}\,(p+k+1-\delta)_{\delta}a_{p+k} \leq \frac{p^{\Omega}(p-\alpha)(p+1-\delta)_{\delta}}{(1+\lambda k p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} \tag{4.33}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\,(p+k+1-\delta)_{\delta}a_{p+k} \leq \frac{p^{\Omega}(p+n)(p-\alpha)(p+1-\delta)_{\delta}}{(1+\lambda k p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)} \tag{4.34}$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

İspat: Lemma 4.3.1.1 kullanılarak, (4.32) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p^{\Omega}}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(n+p-\alpha)\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega}\,(p+k+1-\delta)_{\delta}a_{p+k}\\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda k p^{\Omega-1})(p+k-\alpha)(p+k+1-\delta)_{\delta}a_{p+k}\\
&\leq (p-\alpha)(p+1-\delta)_{\delta}
\end{aligned}$$

bulunur.

Buda doğrudan Lemma 4.3.1.3 teki ilk iddiayı yani (4.33) eşitsizliğini bize verir.

İkinci iddiayı ispatlamak için (4.32) eşitsizliğine başvurulursa aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^{\Omega}}(1+\lambda k p^{\Omega-1})\Bigg\{&\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\,(p+k+1-\delta)_{\delta}a_{p+k}\\
&-\alpha\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega}\,(p+k+1-\delta)_{\delta}a_{p+k}\Bigg\} \leq (p-\alpha)(p+1-\delta)_{\delta}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

olur. (4.35) de (4.33) eşitsizliğinden faydalanılarak Lemma 4.3.1.3 teki iddia (4.34) elde edilir.

$\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ sınıfına ait fonksiyonlar için distorsiyon eşitsizlikleri Teorem 4.3.1.4 te verilmiştir.

Teorem 4.3.1.4: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ sınıfına ait bir fonksiyon ise,

$$|f(z)| \leq |z|^p + \left(\frac{p}{p+n}\right)^{\Omega} \frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)(p+1-\delta)_\delta}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p+1-\delta)_\delta} |z|^{n+p} \tag{4.36}$$

$$|f(z)| \geq |z|^p - \left(\frac{p}{p+n}\right)^{\Omega} \frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)(p+1-\delta)_\delta}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p+1-\delta)_\delta} |z|^{n+p} \tag{4.37}$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

İspat: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonunun (3.3) biçiminde verildiğini kabul edelim ve aynı zamanda (4.31) ile verilen homojen olmayan diferansiyel denklemde bulunan $g \in \mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ fonksiyonu

$$b_{p+k} \geq 0 \quad (p \in \mathbb{N}, k = n, n+1, n+2, \dots)$$

olmak üzere Tanım 3.6 ve 3.7 deki gibi verilsin.

Bu durumda, (4.31) den

$$a_{p+k} = \frac{(p+\mu)(p+\mu+1)}{(p+k+\mu)(p+k+\mu+1)} b_{p+k} \quad (p \in \mathbb{N}, k = n, n+1, n+2, \dots) \tag{4.38}$$

eşitliği kolayca bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^p - \sum_{k=n}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k} \\ &= z^p - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(p+\mu)(p+\mu+1)}{(p+k+\mu)(p+k+\mu+1)} b_{p+k} z^{p+k} \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$|f(z)| \leq |z|^p + |z|^{n+p} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(p+\mu)(p+\mu+1)}{(p+k+\mu)(p+k+\mu+1)} b_{p+k} \tag{4.40}$$

olur.

$g \in \Im^*(\delta; \Omega, \lambda, p, \alpha)$ olduğundan Lemma 4.3.1.3 teki ilk iddia aşağıdaki eşitsizliği verir:

$$|b_{p+k}| \leq \left(\frac{p}{p+n}\right)^{\Omega} \frac{(p-\alpha)(p+1-\delta)_\delta}{(n+p-\alpha)(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p+1-\delta)_\delta} \tag{4.41}$$

(4.40) ve (4.41) den

$$|f(z)| \leq |z|^p + |z|^{n+p} \left(\frac{p}{p+n}\right)^{\Omega} \frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)(p+1-\delta)_\delta}{(n+p-\alpha)(1+\lambda n p^{\Omega-1})(n+p+1-\delta)_\delta} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(p+k+\mu)(p+k+\mu+1)} \tag{4.42}$$

bulunur. Ayrıca, $\mu \in \mathbb{R} - \{-n-p, -p-1, \ldots\}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(p+k+\mu)(p+k+\mu+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{p+k+\mu} - \frac{1}{p+k+\mu+1}\right) = \frac{1}{n+p+\mu} \tag{4.43}$$

teleskopik toplamı göz önüne alınırsa (4.42) den Teorem 4.3.1.4 teki iddia (4.36) elde edilir.

Teorem 4.3.1.4 teki ikinci iddia (4.38), benzer şekilde (4.39), (4.41)-(4.43) ten faydalanılarak ispatlanabilir.

Teorem 4.3.1.4 te $\Omega = 0, \lambda = 0, \delta = 0$ ve $\Omega = 1, \lambda = 0, \delta = 0$ olarak alınırsa, sırasıyla, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.3.1.5: $g \in S_n^*(p, \alpha)$ olmak üzere f ve g fonksiyonları (4.31) biçiminde verilen homojen olmayan Cauchy-Euler diferensiyel denklemini sağlarsa

$$|f(z)| \leq |z|^p + \frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)} |z|^{n+p}$$

$$|f(z)| \geq |z|^p - \frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)} |z|^{n+p}$$

olur (Altıntaş *et al.* 2004).

Sonuç 4.3.1.6: $g \in C_n(p,\alpha)$ olmak üzere f ve g fonksiyonları (4.31) biçiminde verilen homojen olmayan Cauchy-Euler diferensiyel denklemini sağlarsa

$$|f(z)| \leq |z|^p + \frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)(n+p)}|z|^{n+p}$$
$$|f(z)| \geq |z|^p - \frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)(n+p)}|z|^{n+p}$$

eşitsizlikleri elde edilir (Altıntaş *et al.* 2004).

4.3.2. $\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ ve $\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ sınıflarına ait içerme bağıntıları

Bu bölümde $\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ ve $\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ sınıfları için (4.28) ve (4.30) daki gibi tanımlanan (n,p,ε)-komşuluğuna ilişkin çeşitli içerme bağıntıları kurulacaktır.

Teorem 4.3.2.1: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu $\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Buna göre, ε parametresi

$$\varepsilon = \frac{p^{\Omega}(n+p)(p-\alpha)}{(n+p-\alpha)(1+\lambda n p^{\Omega-1})} \tag{4.44}$$

ve $h(z)$ fonksiyonu (4.29) biçiminde verilmek üzere

$$\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha) \subset \mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}(\nabla_h,\nabla_f)$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

İspat: (4.34) ten ve g yerine f fonksiyonu yazılmak üzere (4.30) biçiminde verilen $\mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}(\nabla_h,\nabla_f)$ nin tanımından iddia (4.44) kolaylıkla elde edilir.

Teorem 4.3.2.2: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. ε parametresi

$$\varepsilon = \left(\frac{n+(p+\mu)(p+\mu+2)}{n+p+\mu}\right)\frac{p^{\Omega}(n+p)(p-\alpha)}{(n+p-\alpha)(1+\lambda n p^{\Omega-1})}$$

ve g fonksiyonu (4.31) deki gibi verilmek üzere,

$$\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)\subset\mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}\big(\nabla_g,\nabla_f\big)$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

İspat: $f\in\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ olduğunu varsayalım. $a_{p+k}\geq 0$ ve $b_{p+k}\geq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}\left|b_{p+k}-a_{p+k}\right|$$
$$\leq\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}b_{p+k}$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}a_{p+k}$$

katsayı eşitsizliğinde (4.38) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}\left|b_{p+k}-a_{p+k}\right|$$
$$\leq\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}b_{p+k}$$
$$+\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}\frac{(p+\mu)(p+\mu+1)}{(p+k+\mu)(p+k+\mu+1)}b_{p+k}$$

bulunur.

$g\in\mathfrak{I}^{*}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ olduğundan, Lemma 4.3.1.3 teki iddia (4.34) ten

$$(p+k)^{\Omega+1}(p+k+1-\delta)_{\delta}b_{p+k}\leq\frac{p^{\Omega}(n+p)(p-\alpha)(p+1-\delta)_{\delta}}{(n+p-\alpha)(1+\lambda np^{\Omega-1})}\qquad(4.45)$$

$$(p\in\mathbb{N},k=n,n+1,\dots)$$

yazılır. (4.45) eşitsizliğinin yanı sıra (4.34) ten yararlanılarak

$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}\left|b_{p+k}-a_{p+k}\right|$$
$$\leq\frac{p^{\Omega}(n+p)(p-\alpha)}{(n+p-\alpha)(1+\lambda np^{\Omega-1})}\left(1+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(p+\mu)(p+\mu+1)}{(p+k+\mu)(p+k+\mu+1)}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Son olarak, (4.43) teki teleskopik toplam göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}\frac{(p+k+1-\delta)_{\delta}}{(p+1-\delta)_{\delta}}\left|b_{p+k}-a_{p+k}\right|$$
$$\leq\left(\frac{n+(p+\mu)(p+\mu+2)}{n+p+\mu}\right)\frac{p^{\Omega}(n+p)(p-\alpha)}{(n+p-\alpha)(1+\lambda np^{\Omega-1})}$$
$$=\varepsilon$$

olur. (4.28) deki komşuluk tanımında g ile f fonksiyonlarının yerleri değiştirilirse $f\in\mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}\left(\nabla_g,\nabla_f\right)$ olur.

Böylece Teorem 4.3.3.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

4.4. $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\Omega})_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{g})$ ve $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\Omega})_{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{g})$ Komşulukları

Bu bölümde yeni komşuluk tanımları yapılarak aşağıda tanımlanan $\wp_{(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\lambda})}$ sınıfına ait fonksiyonların komşuluklarıyla ilgili teoremler verilecektir.

$0\leq\lambda\leq\frac{1}{p^{\Omega}},p\in\mathbb{N},\Omega\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\wp(\Omega,\lambda,p)=\left(\frac{1}{p^{\Omega}}-\lambda\right)D^{\Omega}f(z)+\frac{\lambda}{p}z\left(D^{\Omega}f(z)\right)' \tag{4.46}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfını $\wp_{(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\lambda})}$ ile gösterelim.

$\wp_{(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\lambda})}$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki komşuluk tanımlarını verelim.

Tanım 4.4.1: $f, g \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ olmak üzere $-\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi$ ve

$\delta > p\sqrt{2\big(1 - cos(\phi - \alpha)\big)}$ için,

$$\left| e^{i\phi} \frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha} \frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}} \right| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının kümesine g nin $(\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p$-komşuluğudur denir. Bu komşuluk $(\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ ile gösterilir.

Tanım 4.4.2 : $f, g \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ olmak üzere $-\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi$,

$\delta > p\sqrt{2\big(1 - cos(\phi - \alpha)\big)}$ için,

$$\left| e^{i\phi} \frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p}} - e^{i\alpha} \frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p}} \right| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının oluşturduğu g nin $(\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p$-komşuluğu $(\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{M}(g)$ ile gösterilir.

4.4.1. $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Omega})_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{g})$ ve $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Omega})_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{g})$ komşuluklarına ait özellikler

Teorem 4.4.1.1: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $-\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi$, $\delta > p\sqrt{2\{1 - \cos(\phi - \alpha)\}}$ için,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (k+p)(1 + \lambda k p^{\Omega-1}) \left| e^{i\phi} a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k} \right| \leq \delta - p\sqrt{2\{1 - \cos(\phi - \alpha)\}}$$

eşitsizliğini sağlarsa $f \in (\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ olur.

İspat: (4.46) ya dayanarak

$$\left|e^{i\Phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}}\right|$$

$$= \left|pe^{i\phi} + e^{i\phi}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})a_{p+k}z^k - pe^{i\alpha} - \sum_{k=n}^{\infty}e^{i\alpha}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})b_{p+k}z^k\right|$$

$$< p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}} + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k} - e^{i\alpha}b_{p+k}\right|$$

yazılır. Buradan,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|a_{p+k} - e^{i\alpha}b_{p+k}\right| \le \delta - p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}}$$

ise

$$\left|e^{i\phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}}\right| < \delta \quad (z \in U)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, $f \in (\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ olur.

Örnek 4.4.1.2: Verilen bir

$$g(z) = z^p + \sum_{k=n}^{\infty}B_{p+k}(\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)z^{p+k} \in \wp_{(\Omega,\lambda)} \quad (n,p \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$$

fonksiyonu için,

$$A_{p+k} = \frac{p^{\Omega}\left(\delta - p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}\right)}{(k+p)^{\Omega+2}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-1)}(n+p-1)e^{i\beta} + e^{i(\alpha-\phi)}B_{p+k}$$

olmak üzere,

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n}^{\infty}A_{p+k}(\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)z^{p+k} \in \wp_{(\Omega,\lambda)} \quad (n,p \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradan,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}A_{p+k}-e^{i\alpha}B_{p+k}\right|$$
$$=(n+p-1)\left(\delta-p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+p)(k+p-1)} \tag{4.47}$$

elde edilir.

Son olarak, teleskopik toplam göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+p)(k+p-1)} &= \lim_{q\to\infty}\sum_{k=n}^{q}\left\{\frac{1}{(k+p-1)}-\frac{1}{(k+p)}\right\}\\ &= \lim_{q\to\infty}\left\{\frac{1}{(n+p-1)}-\frac{1}{(p+q)}\right\}\\ &= \frac{1}{n+p-1}\end{aligned} \tag{4.48}$$

yazılır. (4.47), (4.48) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}A_{p+k}-e^{i\alpha}B_{p+k}\right|$$
$$=\left(\delta-p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}\right)$$

olur. Bu nedenle, $f\in(\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p-\mathcal{N}(g)$ dir.

Sonuç 4.4.1.3: $f\in\wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $n,p\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$, $-\pi\leq\phi-\alpha\leq\pi$, $\delta>p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}}$ ve $arga_{p+k}-argb_{p+k}=\alpha-\phi$ için,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|\left|a_{p+k}\right|-\left|b_{p+k}\right|\right|\leq\delta-p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$$

eşitsizliğini sağlarsa $f\in(\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p-\mathcal{N}(g)$ olur.

İspat: Teorem 4.4.1.1 den $f\in(\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p-\mathcal{N}(g)$ olduğunu gösteren

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right| \leq \delta - p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}} \tag{4.49}$$

eşitsizliği yazılır.

$arga_{p+k} - argb_{p+k} = \alpha - \phi$ olduğundan, $arga_{p+k} = \varphi_{p+k}$ ise $argb_{p+k} = \varphi_{p+k} - \alpha + \phi$ yazılır. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} e^{i\phi}a_{p+k} - e^{i\alpha}b_{p+k} &= e^{i\phi}\left|a_{p+k}\right|e^{i\varphi_{p+k}} - e^{i\alpha}\left|b_{p+k}\right|e^{i(\varphi_{p+k}-\alpha+\phi)} \\ &= \left(\left|a_{p+k}\right| - \left|b_{p+k}\right|\right)e^{i(\varphi_{p+k}+\phi)} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\left|e^{i\phi}a_{p+k} - e^{i\alpha}b_{p+k}\right| = \left|\left|a_{p+k}\right| - \left|b_{p+k}\right|\right| \tag{4.50}$$

elde edilir.

(4.50) de (4.49) eşitliği yerine yazılırsa, Sonuç 4.4.1.3 ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.1.4: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $-\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi$ ve $\delta > \sqrt{2(1-\cos(\alpha-\phi))}$ $z \in U$ için,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right| \leq \delta - \sqrt{2(1-\cos(\alpha-\phi))}$$

şartını sağlarsa $f \in (\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p - \mathcal{M}(g)$ olur.

Bu teoremin ispatı Teorem 4.4.1.1. in ispatına benzerdir.

Teorem 4.4.1.5: $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}, k = n, n+1, \dots$ olmak üzere $f \in (\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ ve $arg\left(e^{i\phi}a_{p+k} - e^{i\alpha}b_{p+k}\right) = k\varphi$ ise,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda k p^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right| \leq \delta - p\{cos\phi - cos\alpha\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: $f(z) \in (\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ için,

$$\left|e^{i\phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}}\right|$$

$$= \left|p\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda k p^{\Omega-1})\left(e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right)z^{k}\right|$$

$$= \left|p\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda k p^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right|e^{ik\varphi}z^{k}\right|$$

$$< \delta$$

bulunur.

$\arg z = -\varphi$ olacak şekilde bir z kompleks sayısı göz önüne alalım. Bu durumda $z^k = |z|^k e^{-ik\varphi}$ yazılır. Böyle bir $z \in U$ noktası için,

$$\left|e^{i\phi}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}{}'(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}{}'(\mathrm{g})(z)}{z^{p-1}}\right|$$

$$= \left|p\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}\right)+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda k p^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right||z|^{k}\right|$$

$$= \left\{\left[\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda k p^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right||z|^{k} + p(\cos\phi-\cos\alpha)\right]^{2} + p^{2}(\sin\phi-\sin\alpha)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$< \delta$$

olduğu görülür.

Bu da, $z \in U$ için,

$$\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right||z|^{k}+p(\cos\phi-\cos\alpha)\right\}^{2} < \delta^{2}$$

ya da

$$p(\cos\phi-\cos\alpha)+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right||z|^{k}<\delta$$

olmasını gerektirir. $|z| \to 1^{-}$ iken

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right| \leq \delta-p(\cos\phi-\cos\alpha)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.1.6: $n \in \mathbb{N}, k=n,n+1,\ldots$ olmak üzere $f \in (\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p-\mathcal{M}(g)$ ve $arg\left(e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right)=k\varphi$ ise

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right| \leq \delta+\cos\alpha-\cos\phi$$

olur.

Uyarı 4.4.1.7: Teorem 4.4.1.5 de $\phi=0, \Omega=0, \lambda=0$ ve $p=1$ alınırsa Orhan *et al.* (2007) tarafından verilen aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4.1.8: $f \in (\alpha,\delta)_p-\mathcal{N}(g)$ ve $n \in \mathbb{N}, k=n,n+1,\ldots$ olmak üzere $arg\left(a_n-e^{i\alpha}b_n\right)=(n-1)\varphi$ ise

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left|a_n-e^{i\alpha}b_n\right| \leq \delta+\cos\alpha-1$$

eşitsizliği elde edilir (Orhan *et al.* 2007).

Uyarı 4.4.1.9: Teorem 2.6 da $\phi = 0, \Omega = 0,$ ve $\lambda = 0$ alınırsa Altuntaş *et al.* (2009) tarafından verilen aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4.1.10: $f \in (\alpha,\delta)_p - \mathcal{N}(g)$ ve $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}, k = n, n+1, \dots$ olmak üzere $arg\big(a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k}\big) = k\varphi$ ise,

$$\sum_{k=n}^{\infty}(k+p)\left|a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k}\right| \leq \delta - p(1-\cos\alpha)$$

olur (Altuntaş *et al.* 2009).

4.4.2. Miller ve Mocanu Lemması'nın uygulaması

Teorem 4.4.2.1: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $z \in U, -\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi$ ve

$\delta > \left(\frac{p}{p+n}\right)\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$ için,

$$\left|e^{i\phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}}\right| < \delta(p+n) - p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$$

eşitsizliğini sağlarsa

$$\left|e^{i\phi}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p}} - e^{i\alpha}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p}}\right| < \delta + \sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))} \quad (z \in U)$$

olur.

İspat: $w(z)$ fonksiyonunu

$$e^{i\phi}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p}} - e^{i\alpha}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p}} = e^{i\phi} - e^{i\alpha} + \delta w(z) \tag{4.51}$$

biçiminde tanımlayalım.

Bu durumda, $w(z)$ fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $w(0) = 0$ olur. (4.51) de her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{e^{i\phi}\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)-e^{i\alpha}\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{e^{i\phi}\wp_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)-e^{i\alpha}\wp_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}-\frac{p}{z}=\frac{\delta w'(z)}{e^{i\phi}-e^{i\alpha}+\delta w(z)}$$

bulunur.

$$\frac{e^{i\phi}\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)-e^{i\alpha}\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p}\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}+\delta w(z)\right)}=\frac{p}{z}+\frac{\delta w'(z)}{e^{i\phi}-e^{i\alpha}+\delta w(z)}$$

olduğundan

$$e^{i\phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}}-e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}}=p\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}\right)+\delta w(z)\left(p+\frac{zw'(z)}{w(z)}\right)$$

yazılır. Bu da,

$$\left|e^{i\phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}}-e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}}\right|=\left|p\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}\right)+\delta w(z)\left(p+\frac{zw'(z)}{w(z)}\right)\right|$$

olmasını gerektirir.

Biz U birim diskinde

$$\left|e^{i\phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}}-e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}}\right|<\delta(p+n)-p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$$

eşitsizliğinin var olduğunu ileri sürdük.

Aksi taktirde, Miller ve Mocanu Lemmasından dolayı $w(z_0)=e^{i\theta}$ ve $m\geq n\geq 1$ olmak üzere $z_0 w'(z_0)=mw(z_0)$ olacak biçimde bir $z_0\in U$ noktası bulunurdu. Buna göre,

$$\begin{aligned}\left|e^{i\phi}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(f)(z_0)}{{z_0}^{p-1}}-e^{i\alpha}\frac{\wp'_{(\Omega,\lambda)}(g)(z_0)}{{z_0}^{p-1}}\right|&=\left|p\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}\right)+\delta e^{i\theta}(p+m)\right|\\&\geq\delta(p+m)-\left|p\left(e^{i\phi}-e^{i\alpha}\right)\right|\\&\geq\delta(p+n)-p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik Teorem 4.4.2.1 deki koşulla çelişir. Bu nedenle,$|w(z_0)| = 1$ olacak şekilde bir $z_0 \in U$ noktası yoktur. Bu da, her $z \in U$ için $|w(z)| < 1$ olmasını gerektirir.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\left|e^{i\phi}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^p} - e^{i\alpha}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^p}\right| &= \left|\left(e^{i\phi} - e^{i\alpha}\right) + \delta w(z)\right| \\ &\leq \left|e^{i\phi} - e^{i\alpha}\right| + \delta|w(z)| \\ &< \delta + \sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.4.2.1 de $\phi = 0, \Omega = 0, \lambda = 0$ ve $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alınırsa aşağıda verilen Sonuç 4.4.2.2 elde edilir.

Sonuç 4.4.2.2:$f(z) \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu herhangi bir $\delta > \sqrt{2}\left(\frac{p}{p+n}\right)$ sayısı için,

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}} - i\frac{g'(z)}{z^{p-1}}\right| < \delta(p+n) - p\sqrt{2} \quad (z \in U)$$

şartını sağlarsa

$$\left|\frac{f(z)}{z^p} - i\frac{g(z)}{z^p}\right| < \delta + \sqrt{2} \quad (z \in U)$$

eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilecektir.

İlk olarak tanımladığımız multivalent fonksiyonların alt sınıflarıyla ilgili elde ettiğimiz sonuçları verelim.

Bulunan sonuçlar şunlardır:

Sonuç 5.1: $B_1 \geq 0$ ve $B_2 \geq 0$ olmak üzere B_n reel sayıları için,

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$$

ve $m \in N_0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere,

$$\sigma_1 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3 B_1^2 p^m (p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 - B_1 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\sigma_2 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3 B_1^2 p^m (p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 + B_1 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\sigma_3 := \frac{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}{2p^3 B_1^2 p^m (p+2\alpha)(p+2\lambda)(p+2)^m}\left\{B_2 + pB_1^2\left(\frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2}\right)\right\},$$

$$\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m) = \frac{p^2+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^2} - 2\mu p^2\frac{p^m(p+2)^m(p+2\alpha)(p+2\lambda)}{(p+\alpha)^2(p+\lambda)^2(p+1)^{2m}}$$

olsun.

$f \in M_{p,1,\alpha,\lambda,m}(\varphi)$ ise,

$$|\alpha_{p+2} - \mu\alpha_{p+1}^2| \leq \begin{cases} \dfrac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\dfrac{p}{p+2}\right)^m \{B_2 + pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\} & \mu \leq \sigma_1, \\ \dfrac{p^3 B_1}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\dfrac{p}{p+2}\right)^m & \sigma_1 \leq \mu \leq \sigma_2, \\ -\dfrac{p^3}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\dfrac{p}{p+2}\right)^m \{B_2 + pB_1^2\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\} & \mu \geq \sigma_2, \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir.

Yani herhangi bir μ kompleks sayısı için,

$$\left|\alpha_{p+2}-\mu\alpha_{p+1}^{2}\right| \leq \frac{p^{3}B_{1}}{2(p+2\alpha)(p+2\lambda)}\left(\frac{p}{p+2}\right)^{m} max\left\{1,\left|\frac{B_{2}}{B_{1}}+pB_{1}\xi(p,\alpha,\lambda,\mu,m)\right|\right\}$$

eşitsizliği vardır. Ayrıca,

$$q_{1}=2\left(\frac{B_{2}}{B_{1}}\right)+\frac{3(p^{2}+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}pB_{1},$$

$$q_{2}=\frac{B_{3}}{B_{1}}+\frac{3(p^{2}+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}pB_{2}$$

$$+\left[\frac{3(p^{2}+3\alpha p+2\alpha)}{2(p+\alpha)(p+2\alpha)}\frac{p^{2}+2\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^{2}}-\frac{p^{3}3\alpha^{2}p+3\alpha p+\alpha}{(p+\alpha)^{3}}\right]p^{2}B_{1}^{2}$$

ve $H(q_{1},q_{2})$ Lemma 3.1.16 da ki gibi tanımlanmak üzere,

$$\left|\alpha_{p+3}\right| \leq \frac{p^{3}B_{1}}{3(p+3\alpha)(p+3\lambda)}\left(\frac{p}{p+3}\right)^{m} H(q_{1},q_{2})$$

olur. Bu sonuçlar kesindir (Altuntaş and Kamali 2009).

Sonuç 5.2: f fonksiyonu (3.3) de ki gibi tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $\Im_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-\alpha)a_{p+k} \leq p-\alpha$$

olmasıdır (Kamali and Sağsöz 2011).

Sonuç 5.3: f fonksiyonu (4.11) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $\Im_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart $0 \leq \alpha < p$, $0 \leq \varepsilon < 1$ ve $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{p^{\Omega}}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-\alpha)a_{p+k} \leq (p-\alpha)(1-\varepsilon)$$

olmasıdır.

Bu sonuç,

$$f(z)=z^p-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}$$
$$-\frac{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-\alpha)}z^{p+k}\quad (k=n+1,n+2,\dots;n\in\mathbb{N})$$

şeklinde verilen f fonksiyonu için kesindir (Kamali and Sağsöz 2011).

Sonuç 5.4: $a_{p+k,s}\geq 0; p,n\in\mathbb{N}; 0\leq\varepsilon<1; s=1,2,3,\dots,m$ olmak üzere,

$$f_s(z)=z^p-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{p+k,s}\,z^{p+k}$$

olsun. $f_s\in\mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ ise

$$b_{p+k}=\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}a_{p+k,s}\geq 0$$

olmak üzere,

$$g(z)=z^p-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}-\sum_{k=n+1}^{\infty}b_{p+k,s}\,z^{p+k}$$

şeklinde verilen g fonksiyonu da $\mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına aittir (Kamali and Sağsöz 2011).

Sonuç 5.5: $k\in\{n+1,n+2,\dots\}$ olmak üzere,

$$f_{p+n}(z)=z^p-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}$$

ve

$$f_{p+n}(z)=z^p-\frac{(p-\alpha)\varepsilon}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}$$
$$-\frac{(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{\left(\frac{p+n}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda nk)(k+p-\alpha)}z^{p+k}$$

şeklinde olsun. Buna göre, f fonksiyonunun $\mathfrak{I}_{\varepsilon}^{*}(\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\eta_{p+k}\,f_{p+k}(z)\quad\left(\eta_{p+k}\geq 0;\sum_{k=n}^{\infty}\eta_{p+k}=1\right)$$

şeklinde ifade edilebilmesidir (Kamali and Sağsöz 2011).

Sonuç 5.6: f fonksiyonu (4.11) deki gibi verilsin ve $s_m(z)$ kısmi toplamları

$$S_m(z)=\begin{cases} z^p-\dfrac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}; & m=n\\ z^p-\dfrac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}z^{p+n}-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}a_{p+k}z^{p+k}; & m=n+1,n+2,\ldots\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca,

$$d_{p+k}=\frac{(p+k)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(k+p-\alpha)}{p(p-\alpha)(1-\varepsilon)};0\leq\alpha<p,0\leq 1,0\leq\lambda\leq\frac{1}{p^{\Omega}}$$

olmak üzere,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}d_{p+k}a_{p+k}\leq 1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)\varepsilon}{(p+n)^{\Omega}(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}$$

olsun. Buna göre $m\geq n+1$ için,

$$Re\left\{\frac{f(z)}{s_m(z)}\right\}>1-\frac{p^{\Omega}(p-\alpha)(1-\varepsilon)}{(p+m+1)^{\Omega}[1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}](p+m+1-\alpha)}$$

ve

$$Re\left\{\frac{s_m(z)}{f(z)}\right\}>\frac{(p+m+1)^{\Omega}\{1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}\}(p+m+1-\alpha)}{p^{\Omega}(p-\alpha)(1-\varepsilon)+(p+m+1)^{\Omega}\{1+\lambda(m+1)p^{\Omega-1}\}(m+p+1-\alpha)}$$

olur. (4.22) ve (4.23) te ki sınırlar muhtemel en iyi sonuçlardır (Kamali and Sağsöz 2011).

Sonuç 5.7: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu (3.3) biçiminde tanımlansın. Bu durumda, f nin $\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $0 \leq \lambda < \frac{1}{p^\Omega}, 0 \leq \delta < 1, \Omega \in \mathbb{N}_0$ iken,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{p+k}{p}\right)^{\Omega}(1+\lambda kp^{\Omega-1})(p+k+1-\delta)_\delta(p+k-\alpha)a_{p+k}$$
$$\leq (p-\alpha)(p+1-\delta)_\delta$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Sağsöz and Kamali 2011).

Sonuç 5.8: (3.3) biçiminde verilen f fonksiyonu $\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega}(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k} \leq \frac{p^\Omega(p-\alpha)(p+1-\delta)_\delta}{(1+\lambda kp^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}$$
$$\sum_{k=n}^{\infty}(p+k)^{\Omega+1}(p+k+1-\delta)_\delta a_{p+k} \leq \frac{p^\Omega(p+n)(p-\alpha)(p+1-\delta)_\delta}{(1+\lambda kp^{\Omega-1})(n+p-\alpha)}$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

Sonuç 5.9: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ sınıfına ait bir fonksiyon ise

$$|f(z)| \leq |z|^p + \left(\frac{p}{p+n}\right)^{\Omega}\frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)(p+1-\delta)_\delta}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p+1-\delta)_\delta}|z|^{n+p}$$

$$|f(z)| \geq |z|^p + \left(\frac{p}{p+n}\right)^{\Omega}\frac{(p-\alpha)(p+\mu)(p+\mu+1)(p+1-\delta)_\delta}{(n+p-\alpha)(n+p+\mu)(1+\lambda np^{\Omega-1})(n+p+1-\delta)_\delta}|z|^{n+p}$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

Sonuç 5.10: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu $\mathfrak{I}^*(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Buna göre, ε parametresi

$$\varepsilon = \frac{p^{\Omega}(n+p)(p-\alpha)}{(n+p-\alpha)(1+\lambda np^{\Omega-1})}$$

ve $h(z)$ fonksiyonu (4.29) biçiminde verilmek üzere

$$\mathfrak{I}^{*}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha) \subset \mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}(\nabla_h,\nabla_f)$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

Sonuç 5.11: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ fonksiyonu $\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. ε parametresi

$$\varepsilon = \left(\frac{n+(p+\mu)(p+\mu+2)}{n+p+\mu}\right)\frac{p^{\Omega}(n+p)(p-\alpha)}{(n+p-\alpha)(1+\lambda np^{\Omega-1})}$$

ve g fonksiyonu (4.31) deki gibi verilmek üzere,

$$\mathcal{K}(\delta;\Omega,\lambda,p,\alpha,\mu) \subset \mathcal{N}_{n,p}^{\varepsilon}(\nabla_g,\nabla_f)$$

olur (Sağsöz and Kamali 2011).

Son olarak multivalent fonksiyonların yeni komşuluk tanımlarıyla ilgili elde ettiğimiz sonuçları verelim.

Sonuç 5.12: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $-\pi \le \phi-\alpha \le \pi,\ \delta > p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}}$ için,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|e^{i\phi}a_{p+k}-e^{i\alpha}b_{p+k}\right| \le \delta - p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}}$$

eşitsizliğini sağlarsa $f \in (\phi,\alpha,\delta,\lambda,\Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ olur.

Sonuç 5.13: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $-\pi \le \phi-\alpha \le \pi,\ \delta > \sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}}$ ve $arga_{p+k} - argb_{p+k} = \alpha - \phi\ (n,p \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$ için,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega}(k+p)(1+\lambda kp^{\Omega-1})\left|\left|a_{p+k}\right|-\left|b_{p+k}\right|\right| \le \delta - p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$$

eşitsizliğini sağlarsa $f \in (\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ olur.

Sonuç 5.14: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $-\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi$ ve $\delta > \sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$, $z \in U$ için,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda k p^{\Omega-1}) \left| e^{i\phi} a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k} \right| \leq \delta - p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}}$$

şartını sağlarsa $f \in (\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{M}(g)$ dır.(Altıntaş 1991)

Sonuç 5.15: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $-\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi, \delta > \sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$ ve $arga_{p+k} - argb_{p+k} = \alpha - \phi \quad (n, p \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$ için,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (1+\lambda k p^{\Omega-1}) \left| |a_{p+k}| - |b_{p+k}| \right| \leq \delta > \sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$$

eşitsizliğini sağlarsa $f \in (\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{M}(g)$ olur.

Sonuç 5.16: $f \in (\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ ve $arg\left(e^{i\phi} a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k}\right) = k\varphi$ ise

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (k+p)(1+\lambda k p^{\Omega-1}) \left| e^{i\phi} a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k} \right| \leq \delta - p\sqrt{2\{1-\cos(\phi-\alpha)\}}$$
$$(k = n, n+1, \dots; n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.17: $f \in (\phi, \alpha, \delta, \lambda, \Omega)_p - \mathcal{N}(g)$ ve $arg\left(e^{i\phi} a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k}\right) = k\varphi$ ise

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k+p}{p}\right)^{\Omega} (k+p)(1+\lambda k p^{\Omega-1}) \left| e^{i\phi} a_{p+k} - e^{i\alpha} b_{p+k} \right| \leq \delta + \cos\alpha - \cos\phi$$
$$(k = n, n+1, \dots; n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$$

olur.

Sonuç 5.18: $f \in \wp_{(\Omega,\lambda)}$ fonksiyonu $-\pi \leq \phi - \alpha \leq \pi$ ve $z \in U$,

$\delta > \left(\frac{p}{p+n}\right)\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$ için,

$$\left| e^{i\phi}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}} \right| < \delta(p+n) - p\sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))}$$

eşitsizliğini sağlarsa

$$\left| e^{i\phi}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(f)(z)}{z^{p-1}} - e^{i\alpha}\frac{\wp_{(\Omega,\lambda)}(g)(z)}{z^{p-1}} \right| < \delta + \sqrt{2(1-\cos(\phi-\alpha))} \quad (z \in U)$$

olur.

KAYNAKLAR

Ali, R.M., Ravichandran, V. and Seenivasagan, N., 2007. Coefficient bounds for p-valent functions. Applied Mathematics and Computation, 187 (1), 35-46.

Altıntaş, O., 1991. On a subclass of certain starlike functions with negative coefficients. Math. Japon., 36 (3), 489-495.

Altıntaş, O., 2007. Neighborhoods of certain p-valently analytic functions with negative coefficients. Applied Mathematics and Computation, 187 (1), 47-53.

Altıntaş, O. and Owa, S., 1996. Neighborhoods of certain analytic functions with negative coefficients. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 19 (4), 797-800.

Altıntaş, O., Özkan, Ö. and Srivastava, H., 2004. Neighborhoods of a certain family of multivalent functions with negative coefficients. Computers & Mathematics with Applications, 47 (10-11), 1667-1672.

Altuntaş, F. and Kamali, M., 2009. On certain coefficient bounds for multivalent functions. Annales Universitaties Mariae Curie-Sklodowska Lublin - Polonia Sectio A, 63 (2), 1-16.

Altuntaş, F., Owa, S. and Kamali, M., 2009. $(\alpha,\delta)p$ - Neighborhood for certain class of multivalent functions. PanAmerican Mathematical Journal, 19 (2), 35-46.

Aouf, M., Hossen, H. and Srivastava, H., 2000. Some families of multivalent functions. Computers & Mathematics with Applications, 39 (7-8), 39-48.

Brown, J.E., 1985. Some sharp neighborhoods of univalent functions. American Mathematical Society, 287 (2).

Cartwright, M., 1935. Some inequalities in the theory of functions. Mathematische Annalen, 111 (1), 98-118.

Conway, J.B., 1973. Functions of one complex variable AMS Subject Classification. Springer-Verlag, 313 p, New York.

Duren, P.L., 1983. Univalent functions, 259. Springer, 378 p, New York, USA.

Fekete, M. and Szegö, G., 1933. Eine bemerkung über ungerade schlichte funktionen. Journal of the London Mathematical Society, 1 (2), 85-89.

Frasin, B., 2011. (α, β, δ)-Neighborhood for certain analytic functions with negative coefficients. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 4 (1), 14-19.

Garabedian, P.R. and Royden, H.L., 1954. The One-quarter theorem for mean univalent functions. The Annals of Mathematics, 59 (2), 316-324.

Goodman, A.W., 1948. On some determinants related to p-valent functions. Trans. Amer. Math. Soc., 63, 175-192.

Goodman, A.W., 1957. Univalent functions and nonanalytic curves. Proc. Amer. Math. Soc., 8, 598–601.

Goodman, A.W., 1983a. Univalent Functions. Mariner Publ. Co., Tampa, Fl, vol.I, 246 p, Florida, USA.

Goodman, A.W., 1983b. Univalent Functions. Mariner Publ. Co., Tampa, Fl, vol.II, 311 p, Florida, USA.

Graham, I.R. and Kohr, G., 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions, 255. CRC, 530 p, New York, USA.

Hayman, W.K., 1994. Multivalent functions. Cambridge Univ Pr, 263 p, New York, USA.

Hummel, J.A., 1960. Extremal problems in the class of starlike functions. Proc. Amer. Math. Soc, 11, 741-749.

Kamali, M. and Sağsöz, F., 2011. Some properties of subclasses of multivalent functions. Abstract and Applied Analysis, 2011, 1-15.

Keogh, F. and Merkes, E., 1969. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., 20, 8–12.

Liu, J.L., 2009. Some further properties of certain class of multivalent analytic functions. Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 25 (4), 369-376.

Miller, S.S. and Mocanu, P., 2000. Differential subordinations: theory and applications, 225. CRC, 459 p, New York, USA.

Miller, S.S. and Mocanu, P.T., 1978. Second order differential inequalities in the complex plane. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 65 (2), 289-305.

Orhan, H., Kadioglu, E. and Owa, S., 2007. (α,δ) Neighborhood for certain analytic functions. In: Owa, S. and Polatoğlu, Y. (Editors), International Symposium on Geometric Function Theory and Applications. İstanbul Kültür University Pub., İstanbul, pp. 207-213.

Orhan, H. and Kadıoğlu, E., 2004. Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coeffcients. Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 20 (2), 135-142.

Orhan, H. and Kamali, M., 2005. Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.(NS), 21 (1), 55-61.

Owa, S., 1978. On the distortion theorems. I. Kyungpook Math. J, 18 (1), 53-59.

Owa, S., 1985. On certain classes of p-valent functions with negative coefficients. Simon Stevin, 59 (4), 385–402.

Owa, S., 1991. Some properties of certain multivalent functions. Applied Mathematics Letters, 4 (5), 79-83.

Owa, S. and Patel, J., 2000. Properties of certain integral operators. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 24 (3), 411-419.

Owa, S., Saitoh, H. and Nunokawa, M., 1993. Neighborhoods of certain analytic functions. Applied Mathematics Letters, 6 (4), 73-77.

Palka, D., 1991. An introduction to complex function theory. Springer, New York.

Patil, D. and Thakare, N., 1983. On convex hulls and extreme points of p-valent starlike and convex classes with applications. Bull. Math. Soc. Sci. Math. RS Roumanie (NS), 27 (75), 145–160.

Prokhorov, D.V. and Szynal, J., 1984. Inverse coefficients for (α, β)–convex functions. Annales Universitaties Mariae Curie-Sklodowska Lublin - Polonia Sectio A, 35 (1981), 125–141.

Ramachandran, C., Sivasubramanian, S. and Silverman, H., 2007. Certain coefficient bounds for p-valent functions. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2007, 11.

Ruscheweyh, S., 1981. Neighborhoods of univalent functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 81 (4), 521-527.

Sağsöz, F. and Kamali, M., 2011. On neighborhoods of two new subclasses of multivalent functions with negative coefficients. Computers & Mathematics with Applications.

Sağsöz, F. and Kamali, M., 2011. On neighborhoods of two new subclasses of multivalent functions with negative coefficients. Computers and Mathematics with Applications, 62 (4), 1772-1779.

Salagean, G., 1983. Subclasses of univalent functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 362-372 p.

Seidel, W., 1942. Book Review of "Les Fonctions Multivalentes ". Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1).

Shanmugam, T., Owa, S., Ramachandran, C., Sivasubramanian, S. and Nakamura, Y., 2009. On certain coefficient inequalities for multivalent functions. J. Math. Inequal, 3, 31-41.

Shenan, G.M., Salim, T. and Mousa, M.S., 2004. A certain class of multivalent prestarlike functions involving the Srivastava-Saigo-Owa fractional integral operator. Kyungpook Math. J, 44 (3), 353–362.

Silverman, H. and Silvia, E., 1981. Fixed coefficients for subclasses of starlike functions. Houston J. Math, 7, 129-136.

Spencer, 1941. On finitely mean valent functions. Proc.London Math. Soc., 47 (2), 201-211.

Walker, J.B., 1990. A note on neighborhoods of analytic functions having positive real part. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 13 (3), 425-429.

ÖZGEÇMİŞ

6 Aralık 1982 tarihinde Aydın'ın İncirliova ilçesinde dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Muğla'da tamamladı. 2001 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Lisans programından (yüksek lisans ile birleştirilmiş) 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında doktora programına başladı. 2007 yılından bu yana Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.