T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA NÖTRAL GECİKMELİ DİNAMİK DENKLEMLERİN SALINIMSIZ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Hazırlayan
İsmail ULUSOY
(Yüksek Lisans Tezi)

Danışman
Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL
Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Haziran 2011
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: İsmail ULUSOY
İmza :

"Zaman Skalasında Nötral Gecikmeli Dinamik Denklemlerin Salınımsız Çözümlerinin Varlığı" adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
İsmail ULUSOY

Danışman
Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

Uygulamalı Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL ve Doç. Dr. Tuncay CANDAN danışmanlığında **İsmail ULUSOY** tarafından hazırlanan **"Zaman Skalasında Nötral Gecikmeli Dinamik Denklemlerin Salınımsız Çözümlerinin Varlığı"** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **yüksek lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

15 / 06 / 2011

JÜRİ:

Danışman	: Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL	M.T.Şenel
Üye	: Prof. Dr. Fuat GÜRCAN	
Üye	: Prof. Dr. Osman MUCUK	O. Mucuk

ONAY:
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 28/06/2011 tarih ve 2011/22-17 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28/06/2011

Prof. Dr. Necmettin MARAŞLI
....
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Matematik lisans mezunu olarak geldiğim Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda her şeyden önce Anabilim Dalı'na adaptasyonumda, çalışmalarımı yönlendirmesinde, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar insani ilişkilerde de sonsuz desteğiyle gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL ve Doç. Dr. Tuncay CANDAN'a, yüksek lisans dersleri ve tezimin yazımı esnasındaki yardımlarından dolayı Araş. Gör. Erkam LÜY ve Araş. Gör. Hasan ARSLAN'a, lisans ve yüksek lisans öğrenimimin ders aşamasında derslerime ve çalışmalarıma devam edebilmem için gösterdiğim insanüstü gayretlere sağladıkları kolaylıklar için Adıyaman Üniversitesi'ndeki mesai arkadaşlarıma, çalışmalarım süresince birçok fedakârlıklar gösterip beni destekleyerek her an yanımda olan eşim ve oğluma, yaşamımın her döneminde bana duydukları güven için aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

İsmail ULUSOY
Kayseri, Haziran 2011

ZAMAN SKALASINDA NÖTRAL GECİKMELİ DİNAMİK DENKLEMLERİN SALINIMSIZ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

İsmail ULUSOY
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2011
Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL ve Doç. Dr. Tuncay CANDAN

KISA ÖZET

Bu tezde zaman skalasında Kranoselskii'nin sabit nokta teoremi kullanılarak nötral gecikmeli dinamik denklemlerin salınımsız çözümlerinin varlığı incelendi.

Birinci bölümde konu için gerekli temel kavramlar ve zaman skalasında türev ve integralle ilgili tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, zaman skalasında birinci mertebeden

$$\left[x(t)+p(t)x(g(t))\right]^{\Delta}+f\left(t,x\left(h(t)\right)\right)=0$$

nötral dinamik denklemin salınımsız çözümlerin varlığını araştıran makale incelendi [3].

Üçüncü bölümde, zaman skalasında ikinci mertebeden

$$\left[x(t)+p(t)x(\tau_0(t))\right]^{\Delta\Delta}+q_1(t)x\left(\tau_1(t)\right)-q_2(t)x\left(\tau_2(t)\right)=e(t)$$

nötral gecikmeli dinamik denklemin salınımsız çözümlerin varlığını araştıran makale incelendi [4].

Son olarak dördüncü bölümde, birinci ve ikinci mertebeden nötral gecikmeli dinamik denklemlerle ilgili bazı uygulamalar verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kranoselskii sabit nokta teoremi; zaman skalası; nötral dinamik denklem; nötral gecikmeli dinamik denklem.

EXISTENCE OF NONOSCILLATORY SOLUTIONS TO NEUTRAL DELAY DYNAMIC EQUATIONS ON TİME SCALES

İsmail ULUSOY
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, June 2011
Supervisor: Asist. Prof. Dr. M. Tamer ŞENEL
Assoc. Prof. Dr. Tuncay CANDAN

ABSTRACT

In this thesis, we investigate existence of nonoscillatory solutions to neutral delay dynamic equations on time scales.

In the first chapter, the basic notations which we need in investigations have been given and definition and theorems concern with the concept of derivative and integral on time scale are given.

In the second chapter, we will show the existence of nonoscillatory solutions to the first order neutral equation of the form

$$\left[x(t)+p(t)x(g(t))\right]^{\Delta}+f\left(t,x\left(h(t)\right)\right)=0$$

on a time scale $\mathbb{T}$ [3].

In the third chapter, we will show the existence of nonoscillatory solutions to the second-order neutral equation of the form

$$\left[x(t)+p(t)x(\tau_0(t))\right]^{\Delta\Delta}+q_1(t)x\left(\tau_1(t)\right)-q_2(t)x\left(\tau_2(t)\right)=e(t)$$

on a time scale $\mathbb{T}$ [4].

Finally, in the fourth chapter, some applications are given about first and second order neutral delay dynamic equations.

Keywords: Kranoselskii's fixed point theorem, time scale, neutral dynamic equation, neutral delay dynamic equation

İÇİNDEKİLER

ZAMAN SKALASINDA NÖTRAL GECİKMELİ DİNAMİK DENKLEMLERİN SALINIMSIZ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

3. BÖLÜM

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL GECİKMELİ DİNAMİK DENKLEMLERDE SALINIMSIZ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

4. BÖLÜM

SONUÇ

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR VE SİMGELER

Sembol	**Anlamı**	**Okunuşu**
C_{rd}	Sağda yoğun sürekli fonksiyonların kümesi	
C_{rd}^{1}	Türevlenebilir sağda yoğun sürekli fonksiyonların kümesi	
Δf	ileri fark operatörü	
Δ	Delta türevi	
$S_k^{(n)}$	k kez σ ve n - k kez Δ'yı içeren bir küme	
f^{σ}	f fonksiyonun ileri sıçraması	
f^{Δ}	f fonksiyonun delta türevi	
$\lVert x \rVert$	x fonksiyonun normu	
$\sum$	Toplam sembolü	
σ	ileri sıçrama operatörü	Sigma
ρ	geri sıçrama operatörü	Ro
ε		Epsilon
Ω		Omega
α		Alfa
β		Beta
μ		Mu
δ		Delta
κ		Kappa
Λ		Lamda
τ		Tau

GİRİŞ

Zaman skalası teorisi ilk kez Steven Hilger'in 1988'deki doktora tezinde sürekli ortamdaki ve ayrık ortamdaki olayların analizini birleştirmek için ortaya atılmıştır. Bu yeni fikir uygulamalı bilimlerde bir çok alanda kendini göstermektedir. Bu alanlardan biriside zaman skalasında dinamik denklemlerdir.

Diferensiyel denklemlerle ilgili birçok sonuç W. Kelley ve A. Peterson tarafından fark denklemlere çok kolay bir şekilde taşınabilmesine rağmen diğer bazı sonuçlar için bu çok zor olabilir. Zaman skalasındaki dinamik denklemler çalışması işte bu zorlukları ortadan kaldırmıştır ve matematikçileri hem diferensiyel denklemler hem de fark denklemler için sonuçları iki kere ispat etme zahmetinden kurtarmıştır.

Zaman skalasını basit bir şekilde ifade edecek olursak reel sayıların boş olmayan keyfi kapalı bir altkümesidir. Eğer zaman skalası olarak reel sayıları alırsak o zaman karşımıza adi diferensiyel denklemler çıkar. Eğer tam sayıları alırsak karşımıza fark denklemler çıkar. Bununla birlikte başka zaman skalaları için karşımıza çok farklı sonuçlarda ortaya çıkar.

Son zamanlarda üzerinde birçok çalışmalar [1,2,5,6] yapılan bu konu uygulama alanlarında büyük bir potansiyele sahiptir. Örneğin bir böcek türüne ait olan popülasyonu modelleyebiliriz. Bu türe ait yaşam süresi bir birim zaman olsun. Ayrıca bu tür ölmeden hemen önce yumurtlasın ve iki birim zaman sonra yavrular yumurtadan çıksın. Böylece örtüşmeyen bir popülasyon ortaya çıkar. Bu ise kapalı aralıkların bir birleşimidir. Bu problem ileriki bölümlerde çözülecektir.

Biz bu tezde zaman skalasında bazı dinamik denklemlerin salınımsız çözümlerinin varlığı ile ilgileneceğiz.

Tezin birinci bölümünde zaman skalası ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiş ve $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için delta türev, çarpma ve bölme kuralı tanıtılmış, integral ve süreklilikle ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde ise birinci mertebeden

$$\left[x(t)+p(t)x(g(t))\right]^{\Delta}+f\left(t,x\left(h(t)\right)\right)=0 \tag{1.1}$$

formundaki nötral dinamik denklemin salınımsız çözümlerin varlığını araştıran makale incelenmiştir. [3]

Tezin üçüncü bölümünde ise ikinci mertebeden

$$\left[x(t)+p(t)x(\tau_0(t))\right]^{\Delta\Delta}+q_1(t)x\left(\tau_1(t)\right)-q_2(t)x\left(\tau_2(t)\right)=e(t) \tag{1.2}$$

formundaki nötral gecikmeli dinamik denklemin salınımsız çözümlerin varlığını araştıran makale incelenmiştir. [4]

Tezin dördüncü bölümünde ise zaman skalasında dinamik denklemlerle ilgili örnek ve uygulamalara yer verilmiştir.

1. BÖLÜM

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Zaman skalasını basit bir şekilde ifade edecek olursak reel sayıların boş olmayan keyfi bir kapalı altkümesidir. Zaman skalasına reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar negatif olmayan tamsayılar, $\left[0,2\right]\cup\left[4,7\right]$ kapalı aralıkların birleşimi ve $\left[0,1\right]\cup\mathbb{N}$ kümesi örnek olarak verilebilir. Rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar ve $\left(0,1\right)$ açık aralığı ise zaman skalası olmayan kümelerdir.

Bu tez çalışmasında zaman skalası $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilecektir.

Zaman skalası, ilk kez ayrık ve sürekli ortamlardaki analizi birleştirmek için Stefan Hilger tarafından 1988'de ortaya atılmıştır. Gerçekten de ilerleyen bölümlerde $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonun f^{Δ} delta türevi reel sayılar ve tam sayılar için aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

(i) Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $f^{\Delta}=f\,'$ adi türev

(ii) Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise $f^{\Delta}=\Delta f$, ileri fark operatörü

olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.1 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Bir $t\in\mathbb{T}$ için

ileri sıçrama operatörü $\sigma:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{T}$

$$\sigma(t):=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}$$

geri sıçrama operatörü $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

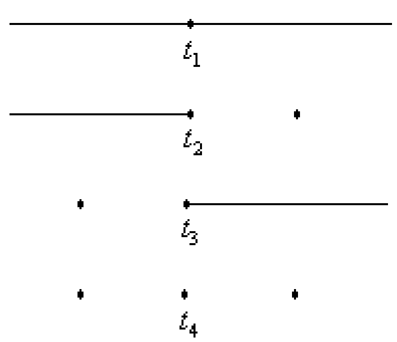
$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\sigma(t) > t$ ise t noktasına **sağda saçılımlı nokta**, $\rho(t) < t$ ise t noktasına **solda saçılımlı nokta** denir. Aynı anda solda ve sağda saçılımlı noktaya ise **izole edilmiş nokta** denir. $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına **sağda yoğun nokta**, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktasına **solda yoğun nokta** denir. Aynı anda solda yoğun ve sağda yoğun noktaya ise **yoğun nokta** denir. (Bakınız Tablo 1.1 ve Şekil 1.1)

Tablo 1.1 Noktaların sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı	$\sigma(t) > t$
t sağda yoğun	$\sigma(t) = t$
t soldan saçılımlı	$\rho(t) < t$
t solda yoğun	$\rho(t) = t$
t izole edilmiş	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



t_1 sağda ve solda yoğun nokta

t_2 solda yoğun ve sağdan saçılımlı nokta

t_3 soldan saçılımlı ve sağda yoğun nokta

t_4 sağdan ve soldan saçılımlı nokta

(t_1 yoğun nokta ve t_4 izole edilmiş nokta)

Şekil 1.1 Noktaların şematik sınıflandırılması

Ayrıca $\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ çekirdek fonksiyonu

$$\mu(t) := \sigma(t) - t$$

şeklinde tanımlanır.

Tanımdan herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için $\rho(t) \in \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ olduğu açıktır. Şimdi $\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilen $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesini tanımlayalım. Eğer $\mathbb{T}$ sola saçılımlı m maksimum değerine sahip ise o zaman $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - \{m\}$. Diğer durumlarda ise $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$. Özetlersek;

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & ; \quad \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & ; \quad \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise $f^{\sigma} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\sigma}(t) = (f o \sigma)(t)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.1.2 Farklı zaman skalaları için çekirdek fonksiyonunun nasıl değiştiğini görelim:

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alırsak, herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t,\infty) = t\,,$$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t\,.$$

Böylece her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\mu(t) = 0\,.$$

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alırsak, herhangi bir $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf(t+1, t+2, t+3, \ldots) = t+1\,,$$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\{..., t-3, t-2, t-1\} = t-1 .$$

Böylece $\rho(t) < t < \sigma(t)$ olduğundan her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole edilmiştir. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(t) := \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1 .$$

(iii) $\mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ alırsak, herhangi bir $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = \sigma(\sqrt{n}) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > \sqrt{n}\} = \inf\{\sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, ...\} = \sqrt{n+1} = \sqrt{t^2+1} ,$$

$$\rho(t) = \rho(\sqrt{n}) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < \sqrt{n}\} = \sup\{..., \sqrt{n-2}, \sqrt{n-1}\} = \sqrt{n-1} = \sqrt{t^2-1}$$

olur. Böylece $\rho(t) < t < \sigma(t)$ olduğundan her $t \in \mathbb{T}$ noktası izole edilmiştir. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sqrt{t^2+1} - t$$

elde edilir. Çekirdek fonksiyonu zaman skalasında çok önemli bir role sahiptir. Birçok formül, $\mu(t)$ çarpanını içeren terimlere sahiptir. Bu formüllerden bir tanesi de Riccati denklemidir. Genel zaman skalasında skaler Riccati denklemi [1]'de aşağıdaki formda verilmiştir.

$$z^{\Delta} + q(t) + \frac{z^2}{p(t) + \mu(t) z} = 0$$

Bu denklemde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa adi Riccati diferansiyel denklemini

$$z^{\Delta} + q(t) + \frac{1}{p(t)} z^2 = 0$$

elde ederiz. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa Riccati fark denklemini

$$z^{\Delta}+q(t)+\frac{z^2}{p(t)+z}=0$$

elde ederiz. $\mathbb{T}$ zaman skalasında [a,b] aralığını

$$[a,b]:=\{t\in\mathbb{T}: a\leq t\leq b\}$$

şeklinde tanımlayacağız. Diğer açık ve yarı açık aralıklarda benzer şekilde tanımlanır. Ayrıca b solda yoğun nokta ise $[a,b]^{\kappa}=[a,b]$ ve b soldan saçılımlı nokta ise $[a,b]^{\kappa}=[a,b)=[a,\rho(b)]$ elde edilir.

1.2 ZAMAN SKALASINDA TÜREV

Tanım 1.2.1 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Herhangi bir pozitif ε sayısı için t'nin bir N komşuluğunda her $s\in N$ için

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t)-s\right]\right|\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

şartını sağlayan $f^{\Delta}(t)$ sayısına f fonksiyonun t noktasındaki **delta türevi** denir. Ayrıca her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcutsa f fonksiyonuna **delta türevlenebilir** denir. $f^{\Delta}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna ise f fonksiyonunun $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerindeki delta türevi denir.

Örnek 1.2.2

(i) $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $\alpha\in\mathbb{R}$ sabit sayı olmak üzere $f(t)=\alpha$ şeklinde tanımlansın. $f^{\Delta}(t)\equiv 0$ olduğunda herhangi bir pozitif ε sayısı için,

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-0.\left[\sigma(t)-s\right]\right|=\left|\alpha-\alpha\right|=0\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

şartı her $s\in\mathbb{T}$ için sağlanır.

(ii) $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $f(t)=t$ şeklinde tanımlansın. O zaman $f^{\Delta}(t)\equiv 1$ olur. Çünkü herhangi bir pozitif ε sayısı için,

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-1.\left[\sigma(t)-s\right]\right|=\left|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)\right|=0\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

şartı her $s\in \mathbb{T}$ için sağlanır.

Teorem 1.2.3 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. O zaman ;

(i) *f, t* noktasında türevlenebilir ise o zaman *f, t* noktasında süreklidir.

(ii) *f, t* noktasında sürekli ve *t* noktası sağdan saçılımlı ise o zaman *f, t* noktasında türevlenebilirdir ve bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

olur.

(iii) t noktası sağda yoğun ise o zaman f, t noktasında türevlenebilirdir ancak ve ancak

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limiti mevcuttur. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

iv) f, t noktasında türevlenebilir ise o zaman

$$f(\sigma(t))=f(t)+f^{\Delta}(t)\mu(t).$$

İspat: **(i)** f, t noktasında sürekli ve t noktası sağa dağılmış olsun. $\varepsilon\in(0,1)$ ve $\varepsilon^{*}=\varepsilon\left[1+\left|f^{\Delta}(t)\right|+2\mu(t)\right]^{-1}$ olsun. O zaman $\varepsilon^{*}\in(0,1)$ olur. Tanım 1.2.1'den t noktasının öyle bir N komşuluğu vardır ki her $s\in U$ için

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t)-s\right]\right|\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|.$$

Böylece her $s\in N\cap(t-\varepsilon^{*},t+\varepsilon^{*})$ için

$$\begin{aligned}|f(t)-f(s)| &= \Big|\{f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\} \\ &\quad -\{f(\sigma(t))-f(t)-\mu(t)f^{\Delta}(t)\}+|t-s|\,f^{\Delta}(t)\Big| \\ &\le \varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|+\varepsilon^{*}\mu(t)+\ |t-s|\,|f^{\Delta}(t)| \\ &\le \varepsilon^{*}\Big[\mu(t)+|t-s|+\mu(t)+|f^{\Delta}(t)|\Big] \\ &\le \varepsilon^{*}\Big[1+|f^{\Delta}(t)|+2\mu(t)\Big]=\varepsilon.\end{aligned}$$

O halde f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

(ii) f, t noktasında sürekli ve t noktası sağdan saçılımlı olsun. Süreklilikten

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

Böylece verilen $\varepsilon>0$ sayısı için, t noktasının öyle bir N komşuluğu vardır ki her $s\in N$ için

$$\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\right|\le\varepsilon$$

elde edilir. Bu eşitsizliği $|\sigma(t)-s|$ ile çarparsak

$$\left|[f(\sigma(t))-f(s)]-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}[\sigma(t)-s]\right|\le\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece bu eşitsizlikten

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

sonucu elde edilmiş olur ki bu ispatı tamamlar.

(iii) *f*, *t* noktasında türevlenebilir ve *t* noktası sağda yoğun olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. *f*, *t* noktasında türevlenebilir olduğundan t noktasının bir N komşuluğu vardır öyle ki her $s \in N$ için

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \varepsilon\left|\sigma(t) - s\right|$$

eşitsizliği sağlanır. $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t)\left[t - s\right]\right| \leq \varepsilon\left|t - s\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da her $s \in N,\ s \neq t$ için

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

denklemi elde edilir.

(iv) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $\sigma(t) = t$ ise o zaman $\mu(t) = 0$ olur. O halde

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

ile istenen kolayca elde edilir. Diğer taraftan $\sigma(t) > t$ ise o zaman (ii)'den

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

$$= f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Örnek 1.2.4 $f^{\Delta}(t)$ türevini bazı zaman skalası örnekleri için inceleyelim:

(i) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ alalım ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t\in\mathbb{R}$ noktasında delta türevlenebilir olsun. $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limiti mevcutsa f fonksiyonunun t noktasında türevlenebilir olduğunu ve bu limitin $f'(t)$ ile gösterildiğini türevin tanımından biliyoruz. O halde Teorem 1.2.3 (iii) şıkkından

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(t)$$

elde edilir. Böylece $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $f^{\Delta}(t)=f'(t)$ olur.

(ii) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ve $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{Z}$ noktasında delta türevlenebilir olsun. O zaman

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

elde edilir ki bu bilinen ileri fark operatoründen başkası değildir.

(iii) $\mathbb{T}=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ ve $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{Z}$ noktasında delta türevlenebilir olsun. O zaman

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(\sqrt{t^2+1})-f(t)}{\sqrt{t^2+1}-t}$$

elde edilir.

Teorem 1.2.5 $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir olsun. O zaman

(i) $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f+g\right)^{\Delta}\left(t\right)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t).$$

(ii) Herhangi bir α sabiti için,

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, t noktasında türevlenebilirdir ve

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).$$

(iv) $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$, t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$, t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

İspat: Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında delta türevlenebilir olsun.

(i) $\varepsilon > 0$ olsun. O halde t'nin öyle N_1 ve N_2 komşulukları vardır öyle ki her $s \in N_1$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|$$

ve her $s \in N_2$ için

$$\left| g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\sigma(t) - s|.$$

$N = N_1 \cap N_2$ alalım. O zaman her $s \in N$ için

$$\left|\left(f+g\right)(\sigma(t))-\left(f+g\right)(s)-\left[f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)\right]\left(\sigma(t)-s\right)\right|$$

$$=\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)+g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right|$$

$$\leq\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right|+\left|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|=\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|.$$

Böylece $f+g$, t'de türevlenebilir ve $\left(f+g\right)^{\Delta}=f^{\Delta}+g^{\Delta}$ sağlanır.

(iii) $\varepsilon\in(0,1)$ olsun. $\varepsilon^{*}=\varepsilon\left[1+\left|f(t)\right|+\left|g(\sigma(t))\right|+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]^{-1}$ şeklinde tanımlansın. O zaman $\varepsilon^{*}\in(0,1)$ olur. Böylece t'nin öyle N_1 ve N_2 komşulukları vardır öyle ki her $s\in N_1$ için

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|$$

ve her $s\in N_2$ için

$$\left|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|$$

ve Teorem 1.2.3 (i)'den her $s\in N_3$ için

$$\left|f(t)-f(s)\right|\leq\varepsilon^{*}$$

olur. $N=N_1\cap N_2\cap N_3$ ve $s\in N$ olsun. O zaman

$$\left|\left(fg\right)(\sigma(t))-\left(fg\right)(s)-\left[f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))+f(t)g^{\Delta}(t)\right]\left(\sigma(t)-s\right)\right|$$

$$=\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right]g(\sigma(t))\right.$$

$$+\left[g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right]f(t)$$

$$+\left[g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right]\left[f(s)-f(t)\right]$$

$$+\left(\sigma(t)-s\right)g^{\Delta}(t)\left[f(s)-f(t)\right]\Big|$$

$$\leq \varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|\left|g(\sigma(t))\right|+\varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|\left|f(t)\right|+\varepsilon^{*}\varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|+\varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|\left|g^{\Delta}(t)\right|$$

$$=\varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|\left[\left|g(\sigma(t))\right|+\left|f(t)\right|+\varepsilon^{*}+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]$$

$$\leq \varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|\left[\left|g(\sigma(t))\right|+\left|f(t)\right|+1+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]=\varepsilon^{*}\left|\sigma(t)-s\right|.$$

Böylece t noktasında $\left(fg\right)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}g^{\sigma}+fg^{\Delta}$ eşitliği sağlanır.

(iv) $\dfrac{f}{g}$, t noktasında türevlenebilir olsun.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)&=f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))}\\&=-f(t)\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}+f^{\Delta}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))}\\&=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.\end{aligned}$$

Teorem 1.2.6 α bir sabit ve $m\in\mathbb{N}$ olsun.

(i) f fonksiyonu $f(t)=(t-\alpha)^{m}$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$f^{\Delta}(t)=\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{\nu}\left(t-\alpha\right)^{m-1-\nu}.$$

(ii) g fonksiyonu $g(t)=\dfrac{1}{(t-\alpha)^{m}}$ şeklinde tanımlansın. O zaman $\left(t-\alpha\right)\left(\sigma(t)-\alpha\right)\neq 0$ olmak üzere

$$g^{\Delta}(t)=-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m-\nu}\left(t-\alpha\right)^{\nu+1}}.$$

İspat: **(i)** Bu formulü tümevarım yöntemiyle ispat edelim. Eğer $m=1$ ise o zaman $f(t)=t-\alpha$ olur. Örnek 1.2.2 (i), (ii) ve Teorem 1.2.5 (i)'den $f^{\Delta}(t)=1$ buluruz. Şimdi kabul edelim ki $f(t)=(t-\alpha)^m$ için

$$f^{\Delta}(t)=\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-1-v}$$

sağlansın. $F(t)=(t-\alpha)^{m+1}=(t-\alpha)f(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Teorem 1.2.5 (iii)'teki çarpım kuralını kullanırsak

$$\begin{aligned}
F^{\Delta}(t)&=f(\sigma(t))+\left(t-\alpha\right)f^{\Delta}(t)\\
&=\left(\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m}+\left(t-\alpha\right)\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-1-v}\right)\\
&=\left(\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m}+\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-v}\right)\\
&=\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-v}.
\end{aligned}$$

Böylece tümevarım yönteminden istenen sonuç elde edilir.

(ii) $g(t)=\dfrac{1}{(t-\alpha)^m}=\dfrac{1}{f(t)}$ için, Teorem 1.2.5 (iv)'ü uygularsak $\left(t-\alpha\right)\left(\sigma(t)-\alpha\right)\neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t)&=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f^{\sigma}(t)}\\
&=-\frac{\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-1-v}}{\left(t-\alpha\right)^{m}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m}}\\
&=-\sum_{v=0}^{m-1}\frac{1}{\left(t-\alpha\right)^{v+1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m-v}}.
\end{aligned}$$

Örnek 1.2.7 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için

(i) $f(t)=t^2$ ise

$$f^{\Delta}(t)=\sum_{v=0}^{1}\sigma(t)^{v}.t^{1-v}=t+\sigma(t)$$

$$=\begin{cases} 2t & ;\quad \mathbb{T}=\mathbb{R} \\ 2t+1 & ;\quad \mathbb{T}=\mathbb{Z} \\ \sqrt{t^2+1}+t & ;\quad \mathbb{T}=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}. \end{cases}$$

(ii) $f(t)=(t-1)^3$ ise

$$f^{\Delta}(t)=\sum_{v=0}^{2}(\sigma(t)-1)^{v}.(t-1)^{2-v}$$

$$=(t-1)^2+(\sigma(t)-1)(t-1)+(\sigma(t)-1)^2$$

$$=\begin{cases} 3(t-1)^2 & ;\quad \mathbb{T}=\mathbb{R} \\ 3t^2-3t+1 & ;\quad \mathbb{T}=\mathbb{Z} \\ 2t^2-3t+4+\sqrt{t^2+1}(t-3) & ;\quad \mathbb{T}=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}. \end{cases}$$

(iii) $f(t)=\dfrac{1}{t}$ ise

$$f^{\Delta}(t)=-\frac{1}{t\sigma(t)}$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{t^2} & ;\quad \mathbb{T}=\mathbb{R} \\ -\dfrac{1}{t^2+t} & ;\quad \mathbb{T}=\mathbb{Z} \\ -\dfrac{1}{t\sqrt{t^2+1}} & ;\quad \mathbb{T}=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}. \end{cases}$$

(iv) $\dfrac{1}{t^2}$ ' nin türevini bulalım.

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{\nu=0}^{1} \frac{1}{\sigma(t)^{2-\nu}\left(t\right)^{\nu+1}} = -\frac{t+\sigma\left(t\right)}{\sigma(t)^2 t^2}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{t^3} & ; \quad \mathbb{T} = \mathbb{R} \\ -\dfrac{2t+1}{t^2(t+1)^2} & ; \quad \mathbb{T} = \mathbb{Z} \\ -\dfrac{t+\sqrt{t^2+1}}{t^2(t^2+1)} & ; \quad \mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Tanım 1.2.8 (Yüksek mertebeden türevler) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f^{Δ}, $\mathbb{T}^{\kappa^2} = \left(\mathbb{T}^{\kappa}\right)^{\kappa}$ üzerinde türevlenebilir olsun. O zaman $f^{\Delta\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$ 'ya ikinci mertebeden delta türevi denir. Benzer şekilde n. mertebeden $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$ delta türevleri de tanımlanabilir. Son olarak $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ şeklinde tanımlansın. Benzer şekilde $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ tanımlanabilir. Ayrıca

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t,\ f^{\Delta^0} = f \ \text{ ve } \ \mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}.$$

Örnek 1.2.9 Genelde f ve g iki kez türevlenebilir olsalar bile fg iki kez türevlenebilir olmayabilir. f ve g iki kez türevlenebilir ve f^{σ} türevlenebilir olsun.

$$\left(fg\right)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

olduğu bilindiğine göre

$$\begin{aligned} \left(fg\right)^{\Delta\Delta} &= \left(f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}\right)^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + \left(f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}\right)g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta}. \end{aligned}$$

Burada $f^{\Delta^{\sigma}}$ yerine $f^{\Delta\sigma}$, $f^{\sigma^{\Delta}}$ yerine $f^{\sigma\Delta}$ ve $f^{\sigma^{\sigma}}$ yerine $f^{\sigma\sigma}$ kullanıldı. Bundan sonra da bu gösterimleri kullanacağız. n. mertebeden türev için ise Leibniz formülünü kullanacağız.

Teorem 1.2.10 $S_k^{(n)}$, k kez σ ve n - k kez Δ'yı içeren bir küme olsun. Eğer her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Λ} mevcutsa o zaman her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\left(fg\right)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} . \tag{2.1}$$

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispat edelim. $n = 1$ için Örnek 1.2.9'dan (2.1) doğrudur. ($n = 0$ için $\sum_{\Lambda \in \varnothing} f^{\Lambda} = f$ kabul edelim. Böylece $n = 0$ için de (2.1) sağlanır.) Şimdi kabul edelim ki her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\left(fg\right)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k}$$

sağlansın. O zaman delta türevinin çarpma ve toplama kurallarını kullanırsak

$$\begin{aligned}
\left(fg\right)^{\Delta^{n+1}} &= \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} \right\}^{\Delta} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right)^{\sigma} g^{\Delta^{k+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right)^{\Delta} g^{\Delta^k} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(n)}} f^{\Lambda\sigma} \right) g^{\Delta^k} + \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda\Delta} \right) g^{\Delta^k} \\
&= \left(\sum_{\Lambda \in S_n^{(n)}} f^{\Lambda\sigma} \right) g^{\Delta^{n+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_0^{(n)}} f^{\Lambda\Delta} \right) g + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(n)}} f^{\Lambda\sigma} + \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda\Delta} \right) g^{\Delta^k} \\
&= \left(\sum_{\Lambda \in S_{n+1}^{(n+1)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^{n+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_0^{(n+1)}} f^{\Lambda} \right) g + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n+1)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n+1)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} .
\end{aligned}$$

Böylece tümevarım yönteminden istenen sonuç elde edilir.

Örnek 1.2.11 (i) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise o zaman her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için $f^{\Lambda}=f^{(n-k)}$ olur. Burada $f^{(n)}$, f fonksiyonunun n. mertebeden türevini göstermektedir.

$$\left|S_k^{(n)}\right|=\binom{n}{k}$$

olduğundan

$$\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}=\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{(n-k)}=f^{(n-k)}\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} 1=\binom{n}{k} f^{(n-k)}$$

olur. Böylece

$$(fg)^{\Delta^n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

elde edilir ki bu analizdeki Leibniz formülüdür.

(ii) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise o zaman her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için $f^{\Lambda}=\Delta^{n-k} f$ olur. Burada $\Delta^n f$, f fonksiyonunun n. mertebeden fark operatörünü göstermektedir.

$$\left|S_k^{(n)}\right|=\binom{n}{k}$$

olduğundan

$$\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}=\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} \Delta^{n-k} f=\Delta^{n-k} f\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} 1=\binom{n}{k} \Delta^{n-k} f$$

elde edilir. Böylece

$$(fg)^{\Delta^n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \Delta^{n-k} f(t+k)\Delta^{k} g(t)$$

olur ki bu fark denklemlerdeki Leibniz formülüdür.

Örnek 1.2.12 $h>0$ ve $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}=\{hk:k\in\mathbb{Z}\}$ olsun. $t\in\mathbb{T}$ için

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}=\inf\{t+nh:n\in N\}=t+h,$$

$$\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\}=\sup\{t-nh:n\in N\}=t-h.$$

Böylece her $t\in\mathbb{T}$ noktası izole edilmiş noktadır ve her $t\in\mathbb{T}$ için

$$\mu(t)=\sigma(t)-t=t+h-t=h$$

olur. Yani $\mu(t)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyondur. Ayrıca $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden delta türevi, her $t\in\mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t))-f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{f^{\Delta}(t+h)-f^{\Delta}(t)}{h} \\ &= \frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)}{h}-\frac{f(t+h)-f(t)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(t+2h)-f(t+h)-f(t+h)+f(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $f^{\Delta^n}(t)$ ' yi hesaplamak çok uzun bir yöntem olur. Başka bir yaklaşımla bu fonksiyonu hesaplayalım. İlk önce dikkat edilirse

$$\sigma^n(t)=t+nh \text{ ve } \rho^n(t)=t-nh,\ \forall n\in\mathbb{N}_0$$

olduğu hemen görülür.

Şimdi bir Δ_h operatörü, I birim operatör olmak üzere $\Delta_h=\frac{1}{h}(\sigma-I)$ şeklinde tanımlansın. Binom teoreminden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

olduğunu biliyoruz. Δ_h operatörünün n. kuvvetini bulmak için bu teoremi kullanırsak

$$\Delta_h^n = \frac{1}{h^n}(\sigma - I) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma^k(-I)^{n-k}$$

elde edilir. Bu operatöre f fonksiyonunu uygulayalım. Böylece

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} f(t+kh)$$

elde edilir ki bu f fonksiyonunun n. mertebeden delta türevidir.

Örnek 1.2.13 $a,b>0$ olsun ve

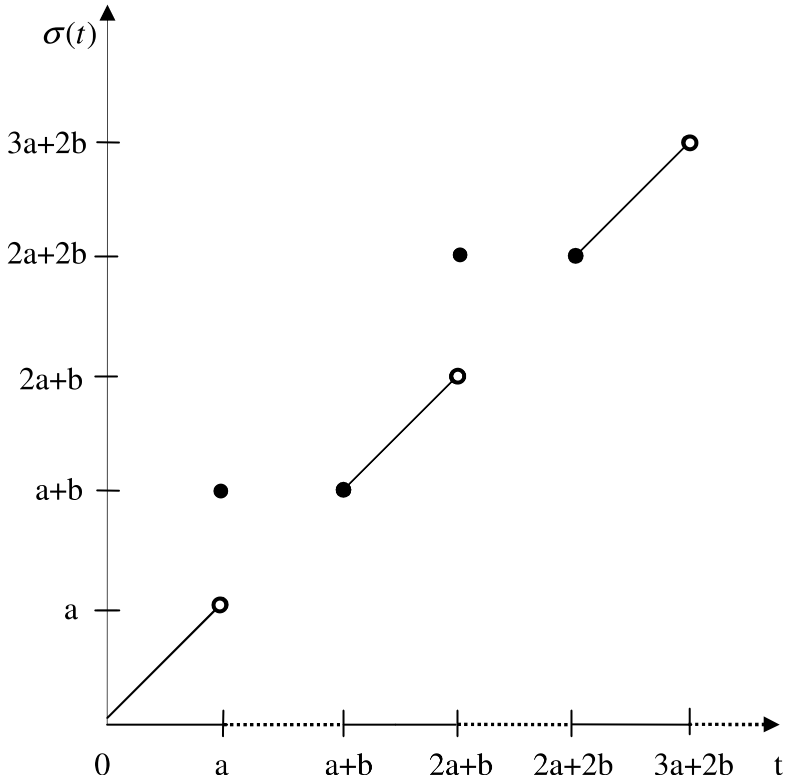
$$\mathsf{P}_{a,b} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\left[k(a+b), k(a+b)+a\right]$$

zaman skalasını göz önüne alalım. O zaman

$$\sigma(t) = \begin{cases} t & ; \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left[k(a+b), k(a+b)+a\right] \\ t+b & ; \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{k(a+b)+a\right\} \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left[k(a+b), k(a+b)+a\right] \\ b & ; \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{k(a+b)+a\right\} \end{cases}$$

elde edilir. (Bakınız Şekil 1.2)



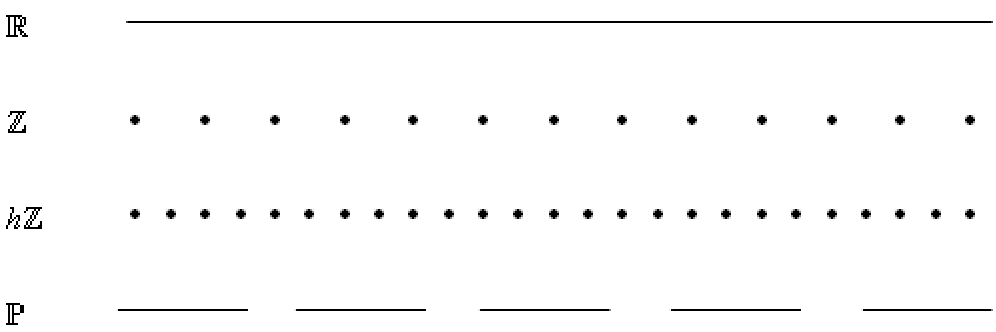
Şekil 1.2 $\mathsf{P}_{a,b}$ için ileri sıçrama operatörü

Örnek 1.2.14 Farz edelim ki bir türe ait yaşam süresi bir birim zaman olsun. Ayrıca bu tür ölmeden hemen önce yumurtlasın ve iki birim zaman sonra yavrular yumurtadan çıksın. Böylece zaman skalası denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\mathsf{P}_{1,2} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1].$$

Bu zaman skalası için çekirdek fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \quad ; \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1] \\ 2 \quad ; \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\} \end{cases}$$



Şekil 1.3 Bazı Zaman Skalası Örnekleri

Örnek 1.2.15 $q>1$ olsun.

$$q^{\mathbb{Z}} := \left\{ q^k : k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ve } \overline{q^{\mathbb{Z}}} := q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

Burada zaman skalası olarak $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ alalım. O zaman $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf \left\{ q^n : n \in [m+1, \infty) \right\} = q^{m+1} = qq^m = qt,$$

$$\rho(t) = \sup \left\{ q^n : n \in (-\infty, m-1] \right\} = q^{m-1} = q^{-1} q^m = \frac{t}{q},$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = (q-1)t$$

olur. O halde 0 noktası sağda yoğun nokta, diğer noktalar ise izole edilmiş noktalardır. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}, \ \forall t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$$

ve

$$f^{\Delta}(0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \to 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}.$$

Şimdi f fonksiyonunun $t \neq 0$ noktasındaki ikinci mertebeden türevine bakalım.

$$
\begin{aligned}
f^{\Delta\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\
&= \frac{f^{\Delta}(qt) - f^{\Delta}(t)}{(q-1)t} \\
&= \frac{\dfrac{f(q^2t) - f(qt)}{q(q-1)t} - \dfrac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}}{(q-1)t} \\
&= \frac{f(q^2t) - f(qt) - qf(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2 t^2} \\
&= \frac{f(q^2t) - f(qt)(q+1) + qf(t)}{q(q-1)^2 t^2}.
\end{aligned}
$$

Örnek 1.2.16 $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}$ zaman skalasını düşünelim.

$$\sigma(n^2) = \inf\{s \in \mathbb{N}_0^2 : s > n^2\} = \inf\{(n+1)^2 : n \in \mathbb{N}_0\} = (n+1)^2,$$

$$\rho(n^2) = \sup\{s \in \mathbb{N}_0^2 : s < n^2\} = \sup\{(n-1)^2 : n \in \mathbb{N}_0\} = (n-1)^2,$$

$$\mu(n^2) = \sigma(n^2) - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1.$$

O halde $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = \left(\sqrt{t}+1\right)^2$, $\rho(t) = \left(\sqrt{t}-1\right)^2$ ve $\mu(t) = 1 + 2\sqrt{t}$ elde edilir. Böylece her $t \in \mathbb{T}$ noktası izole edilmiş noktadır. Ayrıca $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(\left(\sqrt{t}+1\right)^2) - f(t)}{1 + 2\sqrt{t}}, \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

elde edilir.

Tablo 1.2 Zaman skalası örnekleri

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	qt	t/q
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

1.3. ZAMAN SKALASINDA İNTEGRAL

İntegrallenebilir fonksiyonların sınıflarını tanımlamadan önce aşağıdaki iki kavramın tanımını verelim.

Tanım 1.3.1 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$'deki bütün sağda yoğun noktalarda sağ limiti var ve bütün solda yoğun noktalarda sol limiti var ise f fonksiyonuna **düzenli (regulated) fonksiyon** denir.

Tanım 1.3.2 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$'deki bütün sağda yoğun noktalarda sürekli ve bütün solda yoğun noktalarda sol limiti var ise f fonksiyonuna **rd-sürekli** denir. Bu tezde $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonlarının kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

ile gösterilecektir. Türevlenebilir ve türevi rd-sürekli $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi ise

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

şeklinde gösterilecektir.

Teorem 1.3.3 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

(i) f fonksiyonu sürekli ise o zaman f fonksiyonu rd-süreklidir.

(ii) f fonksiyonu rd-sürekli ise o zaman f fonksiyonu da düzenlidir.

(iii) Sıçrama operatörü σ rd-süreklidir.

(iv) f fonksiyonu düzenli ve rd-sürekli ise o zaman f^{σ} fonksiyonu da düzenli ve rd-süreklidir.

(v) f fonksiyonu sürekli olsun. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya rd-sürekli ise fog fonksiyonu da düzenli veya rd-süreklidir.

Tanım 1.3.4 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

(i) $D\subset\mathbb{T}^{\kappa}$ olmak üzere, $\mathbb{T}^{\kappa}\setminus D$ sayılabilirdir.

(ii) D kümesi, $\mathbb{T}$ 'nin sağdan saçılımlı öğelerinin hiçbirini içermez.

(iii) f fonksiyonu her $t\in D$ için türevlenebilir ise f fonksiyonuna D türevlenebilme bölgesi ile birlikte önceden türevlenebilir denir.

Örnek 1.3.5 $\mathbb{T}:=\mathbb{P}_{2,1}$ olsun. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t)=\begin{cases}0 & ; \quad t\in\bigcup_{k=0}^{\infty}[3k,3k+1]\\ t-3k-1 & ; \quad t\in[3k+1,3k+2], k\in\mathbb{N}_0\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. (Bakınız Şekil 1.2). O zaman D türevlenebilme bölgesi

$$D:=\mathbb{T}\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty}\{3k+1\}$$

ile birlikte f fonksiyonu önceden türevlenebilirdir.

Teorem 1.3.6 Kompakt bir aralıkta her düzenli fonksiyon sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. O halde $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\exists t_n\in[a,b] \quad \ni \quad |f(t_n)|>n\,.$$

Ayrıca $\{t_n : n\in\mathbb{N}\}\subset[a,b]$ olduğundan yakınsak bir $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. Bu ise bazı $t_0\in[a,b]$ için

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0 \tag{2.2}$$

demektir. $\mathbb{T}$ kapalı ve $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ olduğundan $t_0 \in \mathbb{T}$ 'dir. (2.2)'den t_0 izole edilemez ve ya üstten ya da alttan t_0 'a yaklaşan bir alt dizisi vardır. Her iki durumda da $\lim_{t\to t_0} f(t)$ sonlu olmak zorundadır. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Teorem 1.3.7 (Orta Değer Teoremi) f ve g, $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve D üzerinde önceden türevlenebilir olsunlar. O zaman

$$\left|f^{\Delta}(t)\right| \le g^{\Delta}(t),\ \forall t \in D \text{ ise } \left|f(s)-f(r)\right| \le g(s)-g(r), \forall r,s \in \mathbb{T}, r \le s$$

İspat: $r,s \in \mathbb{T}$ ve $r \le s$ olsun. $[r,s)\setminus D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde gösterilsin. $\varepsilon > 0$ olsun. Şimdi tümevarım ilkesini kullanarak, her $t \in [r,s]$ için

$$S(t):\quad \left|f(t)-f(r)\right| \le g(t)-g(r)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t} 2^{-n}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

I. $S(r)$ cümlesi doğrudur. Çünkü

$$\left|f(r)-f(r)\right| = 0 \le g(t)-g(r)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t} 2^{-n}\right)$$

II. t sağdan saçılımlı ve $S(t)$ cümlesi doğru olsun. O zaman $t \in D$ için

$$\begin{aligned}
\left|f(\sigma(t))-f(r)\right| &= \left|f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)-f(r)\right| \\
&\le \mu(t)\left|f^{\Delta}(t)\right| + \left|f(t)-f(r)\right| \\
&\le \mu(t)g^{\Delta}(t)+g(t)-g(r)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t} 2^{-n}\right) \\
&= g(\sigma(t))-g(r)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<\sigma(t)} 2^{-n}\right)
\end{aligned}$$

$$< g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\left(\sigma(t) - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n}\right).$$

Böylece $S(\sigma(t))$ cümlesi doğrudur.

III. Kabul edelim ki $S(t)$ cümlesi doğru ve $t \neq s$ noktası sağda yoğun olsun. Bu takdirde iki farklı durum söz konusudur: $t \in D$ ve $t \notin D$. Şimdi kabul edelim ki $t \in D$ olsun. O zaman f ve g, t noktasında türevlenebilirdir ve böylece t'nin bir U komşuluğu vardır öyle ki her $\tau \in U$ için

$$\left| f(t) - f(\tau) - f^{\Delta}(t)(t-\tau) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|,$$

$$\left| g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t-\tau) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

olur. Böylece her $\tau \in N$ için

$$|f(t) - f(\tau)| \leq \left[\left| f^{\Delta}(t) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t-\tau|$$

$$\left| g(\tau) - g(t) - g^{\Delta}(t)(\tau - t) \right| \geq -\frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

elde edilir. O halde her $\tau \in N \cap (t, \infty)$ için

$$|f(t) - f(r)| \leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \left[\left| f^{\Delta}(t) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t-\tau|^{\Delta} + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \left[\left| g^{\Delta}(t) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \right] |t-\tau| + g(t) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right)$$

$$= g^{\Delta}(t)(\tau - t) + \frac{\varepsilon}{2}(\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t-r) + \varepsilon\left(\sum_{t_n < t} 2^{-n} \right)$$

$$\leq g(\tau)-g(t)+\frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|+\frac{\varepsilon}{2}(\tau-t)+g(t)-g(r)+\varepsilon(t-r)+\varepsilon\left(\sum_{t_n<t}2^{-n}\right)$$

$$=g(\tau)-g(t)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right)$$

olur. Böylece $S(\tau)$ cümlesi doğrudur. İkinci durum için $t\notin D$ olsun. O zaman bazı $m\in \mathbb{N}$ için $t=t_m$ olur. f ve g önceden türevlenebilir olduğundan her ikisi de süreklidir ve böylece t'nin bir N komşuluğu vardır öyle ki her $\tau\in N$ için

$$|f(\tau)-f(t)|\leq\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$$

$$|g(\tau)-g(t)|\leq\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$$

olur. Bu yüzden her $\tau\in N$ için

$$|g(\tau)-g(t)|\leq\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$$

ve

$$\begin{aligned}|f(\tau)-f(r)|&\leq|f(\tau)-f(t)|+|f(t)-f(r)|\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}+g(t)-g(r)+\varepsilon\left(t-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right)\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}+g(\tau)+\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}-g(r)+\varepsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right)\\&=\varepsilon2^{-m}+g(\tau)-g(r)+\varepsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}\right)\\&\leq g(\tau)-g(r)+\varepsilon\left(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}2^{-n}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $\tau \in N \cap (t,\infty)$ için $S(\tau)$ cümlesi doğrudur.

IV. Şimdi t solda yoğun ve $S(\tau)$ cümlesi her $\tau < t$ için doğru olsun. O zaman

$$\lim_{\tau \to t^-} |f(\tau) - f(r)| \le \lim_{\tau \to t^-} \left\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left(\tau - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n} \right) \right\}$$

$$\le \lim_{\tau \to t^-} \left\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon \left(\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n} \right) \right\}$$

olduğundan $S(\tau)$ cümlesi doğrudur.

Önerme 1.3.8 Kabul edelim ki f ve g, D türevlenebilme bölgesi ile birlikte önceden türevlenebilir olsun.

(i) Eğer N kümesi $r, s \in \mathrm{T}$ son noktalarıyla birlikte kompakt bir aralık ise o zaman

$$|f(s) - f(r)| \le \left\{ \sup_{t \in U^{\kappa} \cap D} |f^{\Delta}(t)| \right\} |s - r|$$

(ii) Her $\tau \in D$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ise o zaman f sabit bir fonksiyondur.

(iii) Her $\tau \in D$ için $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ ise o zaman her $t \in \mathrm{T}$ için $g(t) = f(t) + C$. Burada C bir sabit sayıdır.

İspat: Kabul edelim ki f fonksiyonu, D ile birlikte önceden türevlenebilir olsun. $r \le s$ olacak şekilde $r, s \in \mathrm{T}$ alalım. $t \in \mathrm{T}$ için $g(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$g(t) := \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^{\kappa} \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (t - r).$$

O zaman her $t \in [r,s]^{\kappa} \cap D$ için

$$g^{\Delta}(t) := \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^{\kappa} \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} \ge |f^{\Delta}(t)|.$$

Teorem 1.3.7'den her $t \in [r,s]$ için

$$g(t) - g(r) \geq |f(t) - f(r)|$$

olur . Buradan

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) = g(s) = \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^{\kappa} \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (s - r)$$

elde edilir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Teorem 1.3.9 f düzenli olsun. O zaman D türevlenebilme bölgesinde önceden türevlenebilir bir *F* fonksiyonu vardır öyle ki her $t \in D$ için

$$F^{\Delta}(t) = f(t) .$$

Tanım 1.3.10 Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli olsun. Teorem 1.3.9'daki gibi herhangi bir F fonksiyonuna f fonksiyonunun ön antitürevi denir. Bir *f* düzenli fonksiyonunun belirsiz integralini aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

Burada C bir sabit sayı ve F fonksiyonu *f* fonksiyonunun ön antitürevidir. Cauchy integralini de aşağıdaki gibi tanımlayalım: Her $r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta(t) = F(s) - F(r) .$$

Ayrıca her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

ise $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun antitürevi denir.

Örnek 1.3.11 Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $a \neq 1$ bir sabit sayı olmak üzere,

$$\int a^t \Delta(t)$$

belirsiz integralini hesaplayalım.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1}-a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan $\int a^t \Delta(t) = \frac{a^t}{a-1} + C$ elde edilir.

Teorem 1.3.12 Her rd-sürekli fonksiyon bir antitüreve sahiptir. Özel olarak $t_0 \in \mathbb{T}$ ise o zaman $t \in \mathbb{T}$ için

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonu f fonksiyonunun bir antitürevidir.

İspat: Kabul edelim ki f fonksiyonu rd-sürekli bir fonksiyon olsun. Teorem 1.3.3 (ii)'den f fonksiyonu düzenli bir fonksiyondur. F bir fonksiyon olsun. Teorem 1.3.9'dan biliyoruz ki bu F fonksiyonu D türevlenebilme bölgesi olmak üzere, her $t \in D$ için,

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

şartını sağlar ve F fonksiyonu D türevlenebilme bölgesi ile önceden türevlenebilirdir. Şimdi her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

şartının sağlandığını gösterelim. (Bu elbette $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$'deki bütün noktaları da kapsar). O halde $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ alalım. O zaman t sağda yoğundur çünkü Tanım 1.3.4 (ii)'den $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ herhangi bir sağa dağılmış nokta içermez. f rd-sürekli olduğundan t noktasında da süreklidir. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman t noktasının bir N komşuluğu vardır öyle ki $\forall s \in N$ için $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$ elde edilir.

Ayrıca $\tau \in \mathrm{T}$ için, $h(\tau) := F(\tau) - f(t)(\tau - t_0)$ fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman h fonksiyonu, D türevlenebilme bölgesi ile önceden türevlenebilirdir. Buradan $\forall \tau \in \mathrm{T}$ için,

$$h^{\Delta}(\tau) = F^{\Delta}(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t)$$

olur. Böylece her $s \in D \cap U$ için,

$$h^{\Delta}(s) = \left| f(s) - f(t) \le \varepsilon \right|$$

elde edilir. Buradan da

$$\sup_{s \in D \cap U} \left| h^{\Delta}(s) \right| \le \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla Önerme 1.3.8'den $r \in N$ için,

$$\begin{aligned} \left| F(t) - F(r) - f(t)(t-r) \right| &= \left| h(t) + f(t)(t - t_0) - \left[h(r) + f(t)(r - t_0) \right] - f(t)(t-r) \right| \\ &= \left| h(t) - h(r) \right| \\ &= \left\{ \sup_{s \in D \cap U} \left| h^{\Delta}(s) \right| \right\} \left| t - r \right| \\ &\le \varepsilon \left| t - r \right|. \end{aligned}$$

Sonuç olarak $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ve F fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir.

Teorem 1.3.13 $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathrm{T}^{\kappa}$ ise o zaman

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t) f(t)$$

İspat: Teorem 1.3.12' den f 'nin bir F antitürevi vardır ve

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t) = \mu(t) F^{\Delta}(t) = \mu(t) f(t)$$

Teorem 1.3.14 $f^{\Delta} \geq 0$ ise o zaman f azalmayandır.

İspat: $[a,b]$ üzerinde $f^{\Delta} \geq 0$ ve $s,t \in \mathbb{T}$ olsun. $a \leq s \leq t \leq b$ kabul edelim. O zaman

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau \geq f(s)$$

Teorem 1.3.15 $a,b,c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f,g \in C_{rd}$ ise o zaman

(i) $\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta(t) + \int_a^b g(t)\Delta t;$

(ii) $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t;$

(iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t;$

(iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t;$

(v) $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t;$

(vi) $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t;$

(vii) $\int_a^a f(t)\Delta t = 0;$

(viii) $[a,b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise o zaman

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t;$$

(ix) Her $a \leq t \leq b$ için, $f(t) \geq 0$ ise o zaman $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$.

İspat: **(i)** f ve g fonksiyonu rd-sürekli olduğundan Teorem 2.3.12'den F ve G şeklinde antitürevlere sahiptir. $F+G$, $f+g$'nin antitürevi olmak üzere, Teorem 1.2.5 (i)'den

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(t)\Delta &= (F+G)(b)-(F+G)(a)\\ &= F(b)-F(a)+G(b)-G(a)\\ &= \int_a^b f(t)\Delta t+\int_a^b g(t)\Delta t.\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\Delta t &= F(b)-F(a)\\ &= F(c)-F(a)+F(b)-F(c)\\ &= \int_a^c f(t)\Delta t+\int_c^b f(t)\Delta t.\end{aligned}$$

(v) fg, $f^{\sigma}g^{\Delta}+f^{\Delta}g$'nin antitürevi olduğundan

$$\int_a^b \left(f^{\sigma}g^{\Delta}+f^{\Delta}g\right)(t)\Delta t = (fg)(b)-(fg)(a).$$

(i) şıkkından istenen elde edilir. Burada (v) ve (vi) şıklarına **kısmi integrasyon** denir.

Teorem 1.3.16 $a,b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise o zaman

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt.$$

(ii) $[a,b]$ aralığı sadece izole noktaları içeriyorsa o zaman

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t) & ; \quad a<b \\ 0 & ; \quad a=b \\ -\sum_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t) & ; \quad a>b \end{cases}$$

şeklindedir.

(iii) $h>0$ olmak üzere, $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in Z\}$ ise o zaman

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=a/h}^{b/h} f(kh)h & ; \quad a<b \\ 0 & ; \quad a=b \\ -\sum_{k=b/h}^{a/h-1} f(kh)h & ; \quad a>b \end{cases}$$

şeklindedir.

(iv) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise o zaman

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & ; \quad a<b \\ 0 & ; \quad a=b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & ; \quad a>b \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: (i) Örnek 1.2.4'ten açıktır.

(ii) $[a,b]$ aralığındaki her nokta izole olduğundan dolayı, $[a,b]$ aralığı sadece sonlu sayıda nokta içerir. Kabul edelim ki $a<b$ ve $[a,b]=\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ olsun. Burada

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$$

Teorem 1.2.15 (iv)'ten

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\Delta t$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t)\Delta t$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(t_i) f(t_i) \ \left(\text{Teorem 3.2.13'ten} \right)$$

$$= \sum_{t\in[a,b)}^{n-1} \mu(t) f(t).$$

$a > b$ ise o zaman $a < b$ için yapılanlar ve Teorem 1.3.15 (iii) kullanılarak istenen elde edilir. $a = b$ ise o zaman Teorem 1.3.15 (vii)'den $\int_a^b f(t)\Delta t = 0$ elde edilir. (iii) ve (iv) (ii)'nin özel durumlarıdır.

Tanım 1.3.17 $a \in \mathrm{T}$, $\sup \mathrm{T} = \infty$ ve $[a,\infty)$ aralığında *f,* rd-sürekli ise genelleştirilmiş integrali

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\Delta t$$

şeklinde tanımlanır. Bu limit varsa genelleştirilmiş integral yakınsaktır. Eğer limit yoksa o zaman genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Tanım 1.3.18 $T_0, T_1 \in \mathbb{T}$ için $[T_0,\infty)_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : t \geq T_0\}$ ve $[T_0, T_1]_{\mathbb{T}} := \{t \in \mathbb{T} : T_0 \leq t \leq T_1\}$ olsun. $C\left([T_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right)$, $[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye bütün sürekli fonksiyonlarını göstersin.

$$BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}} := \left\{ x : x \in C\left([T_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right), \sup_{t\in[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}} |x(t)| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlansın. $\left(BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \|\ .\ \| \right)$ uzayı , $\|x\| = \sup_{t\in[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}} |x(t)|$ normuyla bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.3.19 $X \subseteq BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\forall x \in X, \quad \exists T_1 \in [T_0,\infty)_{\mathbb{T}} \ \ni \ |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon \quad ,\forall t_1,t_2 \in [T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$$

şartlarını sağlıyorsa X kümesine **düzgün Cauchy** denir.

Tanım 1.3.20 Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $\forall x \in X$ ve $t_1,t_2 \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ olduğunda en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ şartını sağlıyorsa X kümesine $[a,b]_{\mathbb{T}}$ üzerinde **eş-sürekli** denir.

Lemma 1.3.21 $X \subseteq BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ sınırlı ve düzgün Cauchy olsun. $\forall T_1 \in [T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için X, $[T_0,T_1]_{\mathbb{T}}$ üzerinde eş-sürekli ise o zaman X kümesine **relatif kompakt** denir.

Lemma 1.3.22 (Kranoselskii'nin sabit nokta teoremi) Ω bir Banach uzayı ve X kümesi Ω Banach uzayının sınırlı, konveks ve kapalı altkümesi olsun. Ayrıca $U,S : X \to \Omega$ operatörleri aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) $\forall x,y \in X$ için $Ux + Sy \in X$

(ii) U daralma dönüşümü

(iii) S tam sürekli

O zaman $U+S$, X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Lemma 1.3.23 Ω bir Banach uzayı ve X kümesi Ω Banach uzayının sınırlı, konveks ve kapalı altkümesi olsun. Ayrıca $U,S : X \to \Omega$ operatörleri aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) $\forall x \in X$ için $Sx \in X$

(ii) S tam sürekli

O zaman S, X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Tanım 1.3.24 (Nötral ve gecikmeli diferensiyel denklemler)

$a_0 x''(t) + a_1 x''(t-\tau) + b_0 x'(t) + b_1 x'(t-\tau) + c_0 x(t) + c_1 x(t-\tau) = f(x)$ denkleminde

i) $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ ya da

ii) $a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ b_0 \neq 0$ ve $b_1 \neq 0$ ise nötral diferensiyel denklem,

iii) $a_0 \neq 0$ ve $a_1 = 0$ ise $b_1 \neq 0$ veya $c_1 \neq 0$ ya da

iv) $a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ b_0 \neq 0,\ b_1 = 0,\ c_1 \neq 0$ ise gecikmeli diferensiyel denklem olarak tanımlanır.

2. BÖLÜM
ZAMAN SKALASINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİNAMİK DENKLEMLERDE SALINIMSIZ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

2.1. (1.1) Nötral Dinamik Denkleminin Salınımsız Çözümlerinin Varlığı

Bu bölümde Z.-Q.Zhu ve Q.-R.Wang'ın keyfi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde,

$$\left[x(t)+p(t)x(g(t))\right]^{\Delta}+f\left(t,x\left(h(t)\right)\right)=0 \tag{1.1}$$

formundaki nötral dinamik denklemin salınımsız çözümlerinin varlığını inceleyen makale incelenmiştir [3]. Bu bölümden sonra (1.1) denklemi için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

$(\mathrm{H1})$ $g,h\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{T})$, $\mathrm{g}(t)\le t$, $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=\infty$ ve bir $\{c_k\}_{k\ge 0}$ dizisi vardır öyle ki $\lim\limits_{t\to\infty}c_k=\infty$ ve $g(c_{k+1})=c_k$.

$(\mathrm{H2})$ $p\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ve $|p_0|<1$ olacak şekilde bir p_0 sabiti vardır öyle ki $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=p_0$.

$(\mathrm{H3})$ $f\in C\left(\mathbb{T}\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$, $f\left(t,x\right)$ fonksiyonu x'e göre azalmayan $t\in\mathbb{T}$ ve $x\neq 0$ için $xf\left(t,x\right)>0$.

Bu bölümden itibaren

$$z(t)=x(t)+p(t)x\left(g(t)\right) \tag{2.1}$$

notasyonunu kullanacağız.

Teorem 2.1.1 $x(t)$, (1.1)'in belli bir yerden sonra pozitif olan çözümü olsun. O zaman ya $\lim_{t\to\infty} x(t) = a > 0$ ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ olur.

İspat: Kabul edelim ki $x(t)$, (1.1)'in belli bir yerden sonra pozitif olan çözümü olsun. (H1) ve (H2) kabulünü göz önüne alalım. Böylece her $t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(h(t)) > 0$, $x(g(t)) > 0$ ve $|p(t)| \le p_1$ olacak şekilde $T_1 \in \mathbb{T}$ ve $|p_0| \le p_1 < 1$ vardır. O zaman (2.1) denklemini (1.1) denkleminde yerine yazarsak $z^{\Delta}(t) = -f\left(t, x(h(t))\right)$ elde edilir. (H3) kabulünden $x(h(t))$ pozitif olduğundan $f\left(t, x(h(t))\right)$ fonksiyonu da pozitiftir. Dolayısıyla $z^{\Delta}(t) < 0$ olur. Yani $z(t)$, $[T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde azalandır.

Şimdi belli bir yerden sonra $z(t) \ge 0$ olduğunu gösterelim: Aksini kabul edelim. Yani $\lim_{t\to\infty} z(t) < 0$ ya da $\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty$ olsun. Öyleyse en az bir $T_2 \ge T_1$ vardır öyle ki $t \in [T_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) < -p(t)x(g(t)) < p_1 x(g(t))$ olur. (H1) kabulünden her $k \ge k_0$ için $c_k \ge T_2$ olacak şekilde bazı k_0 pozitif tamsayısını öyle seçebiliriz ki herhangi bir $k \ge k_0 + 1$ için

$$\begin{aligned} x(c_k) &< p_1 x\left(g(c_k)\right) = p_1 x(c_{k-1}) < p_1^{\,2} x\left(g(c_{k-1})\right) = p_1^{\,2} x(c_{k-2}) \\ &< \ldots < p_1^{\,k-k_0} x\left(g\left(c_{k_0+1}\right)\right) = p_1^{\,k-k_0} x\left(c_{k_0}\right). \end{aligned}$$

Böylece $0 < p_1 < 1$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} x(c_k) = 0$ elde edilir. (3.1)'den $\lim_{k\to\infty} z(c_k) = 0$ elde edilir ki bu da $\lim_{t\to\infty} z(t) < 0$ ya da $\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty$ olması ile çelişir. Böylece b sonlu olmak üzere $\lim_{t\to\infty} z(t) = b \ge 0$ olduğunu göstermiş olduk.

$x(t)$'nin sınırlı olduğunu gösterelim: $x(t)$ sınırlı olmasın. O halde $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ olacak şekilde bir $\{t_k\}$ dizisi vardır öyle ki $x(t_k) = \max_{t_0 \le s \le t_k} x(s)$ ve $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = \infty$ olur. $g(t) \le t$ ve $z(t_k) = x(t_k) + p(t_k)x\left(g(t_k)\right) \ge \left(1 - |p(t_k)|\right)x(t_k)$ olduğundan ve ayrıca (H2) kabulünü de göz önüne alırsak $\lim_{k\to\infty} z(t_k) = \infty$ elde edilir. Bu ise $\lim_{t\to\infty} z(t) = b \geq 0$ (b sonlu) olması ile çelişir. Böylece $x(t)$ sınırlı olur.

Şimdi kabul edelim ki $\limsup_{t\to\infty} x(t) = \overline{x}$ ve $\liminf_{t\to\infty} x(t) = \underline{x}$ olsun.

$0 \leq p_0 < 1$ ise $b \geq \overline{x} + p_0\underline{x}$ ve $b \leq \underline{x} + p_0\overline{x}$ olur. Bu da $\overline{x} \leq \underline{x}$ demektir. O halde $\overline{x} = \underline{x}$

$-1 < p_0 < 0$ ise $b \geq \overline{x} + p_0\overline{x}$ ve $b \leq \underline{x} + p_0\underline{x}$ olur. Bu da $\overline{x} \leq \underline{x}$ demektir. O halde $\overline{x} = \underline{x}$

Sonuç olarak $\lim_{t\to\infty} x(t)$ vardır ve $\lim_{t\to\infty} x(t) = b/1 + p_0$ elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 2.1.2 (1.1) denklemi $\lim_{t\to\infty} x(t) = a > 0$ olacak şekilde belli bir yerden sonra pozitif bir $x(t)$ çözümüne sahiptir ancak ve ancak pozitif bir K sabiti vardır öyle ki

$$\int_{t_0}^{\infty} f(s, K)\Delta s < \infty \tag{2.2}$$

şartı sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki $x(t)$, (1.1) denkleminin belli bir yerden sonra pozitif olan çözümü ve $\lim_{t\to\infty} x(t) = a > 0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} z(t) &= \lim_{t\to\infty}\left[x(t) + p(t)x(g(t))\right] \\ &= a + \lim_{t\to\infty} p(t)x(g(t)) \\ &= a + p_0 a = (1 + p_0)a\end{aligned}$$

ve en az bir $T_1 \in \mathbb{T}$ vardır ki $t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(h(t)) \geq a/2$ olur. (1.1) denkleminden $z^{\Delta}(t) = -f(t, x(h(t)))$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği T_1'den t'ye integre edersek

$$z(t) - z(T_1) = -\int_{T_1}^{t} f(s, x(h(s)))\Delta s$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı sonlu olduğundan

$$\int_{T_1}^{\infty} f\left(s, x\left(h(s)\right)\right)\Delta s < \infty$$

elde edilir. (H3) kabulünden $f(s,x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre azalmayandır. Yani $a/2 \le x(h(t))$ iken $f\left(a/2\right) \le f\left(x(h(t))\right)$ olduğundan $\int_{T_1}^{\infty} f\left(s, a/2\right) < \infty$ olduğu görülür ve böylece istenen elde edilmiş olur.

Diğer taraftan bazı pozitif K sabiti için (2.2) sağlansın. O halde ortaya iki durum çıkar.

$0 \le p_0 < 1$ durumu: $p_0 < p_1 < \left(1+4p_0\right)/5 < 1$ olacak şekilde bir p_1 sayısı alalım. O zaman $p_0 > \dfrac{5p_1 - 1}{4}$ olur. $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = p_0$ ve (2.2)'yi dikkate alırsak yeterince büyük öyle $T_0 \in \mathbb{T}$ seçebiliriz ki

$$\frac{5p_1 - 1}{4} \le p(t) \le p_1 < 1, \quad t \in \left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}} \tag{2.3}$$

ve

$$\int f\left(s, K\right)\Delta s \le \frac{\left(1-p_1\right)K}{8}. \tag{2.4}$$

Üstelik (H1) kabulünden $T_1 > T_0$ olacak şekilde öyle $T_1 \in \mathbb{T}$ vardır ki $t \in \left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}}$ için $g(t) \ge T_0$ ve $h(t) \ge T_0$ sağlanır. $BC\left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayını Tanım 1.3.18'teki gibi tanımlayalım ve X kümesini

$$X = \left\{ x \in BC\left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}} : \frac{K}{2} \le x(t) \le K \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. X kümesinin tanımından X kümesi $BC\left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}}$ uzayının sınırlı ve kapalı altkümesidir. Şimdi X kümesinin konveks olduğunu gösterelim. $x, y \in X$ ve $a \in [0,1]$ olsun. O zaman $\dfrac{K}{2} \le x(t) \le K$ ve $\dfrac{K}{2} \le y(t) \le K$ olur. Böylece

$$\frac{K}{2} \le ax + (1-a)y \le K$$

olduğundan $ax + (1-a)y \in X$ olur. Böylece X kümesi konvekstir. (H3) kabulünden f fonksiyonu ikinci değişkene göre azalmayan olduğundan herhangi bir $x \in X$ için $x(h(t)) \le K$ iken

$$f\left(t, x\left(h(t)\right)\right) \le f\left(t, K\right), \qquad t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}. \tag{2.5}$$

Şimdi $U, S : X \to BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\left(Ux\right)(t) = \begin{cases} \dfrac{3Kp_1}{4} - p(t)x\left(g\left(T_1\right)\right) & ; \quad t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{3Kp_1}{4} - p(t)x\left(g\left(t\right)\right) & ; \quad t \in [T_1, \infty]_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\left(Sx\right)(t) = \begin{cases} \dfrac{3K}{4} + \int_{T_1}^{\infty} f\left(s, x\left(h\left(s\right)\right)\right)\Delta s & ; \quad t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{3K}{4} + \int_{t}^{\infty} f\left(s, x\left(h\left(s\right)\right)\right)\Delta s & ; \quad t \in [T_1, \infty]_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{2.7}$$

(i) Her $x, y \in X$ için $Ux + Sy \in X$ olduğunu gösterelim: Herhangi bir $x, y \in X$ için $K/2 \le x \le K$ ve $K/2 \le y \le K$ olduğunu biliyoruz. (2.3)'ü dikkate alırsak, herhangi bir $x, y \in X$ ve $t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} \left(Ux\right)(t) + \left(Sy\right)(t) &= \frac{3\left(1+p_1\right)K}{4} - p(t)x\left(g\left(t\right)\right) + \int_t^{\infty} f\left(s, y\left(h\left(s\right)\right)\right)\Delta s \\ &\ge \frac{3\left(1+p_1\right)K}{4} - p_1 K \\ &= \frac{3\left(1+p_1\right)K}{4} \ge \frac{K}{2}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan (2.3) ve (2.5)'ten

$$\left(Ux\right)(t)+\left(Sy\right)(t)\le\frac{3\left(1+p_1\right)K}{4}-\frac{p(t)K}{2}+\frac{\left(1-p_1\right)K}{8}$$

$$\le\frac{3\left(1+p_1\right)K}{4}-\frac{5p_1-1}{4}\times\frac{K}{2}+\frac{\left(1-p_1\right)K}{8}=K$$

elde edilir.

Benzer şekilde herhangi bir $x,y\in X$ ve $t\in\left[T_0,T_1\right]_{\mathbb{T}}$ için $K/2\le\left(Ux\right)(t)+\left(Sy\right)(t)\le K$ olduğu da gösterilebilir. Böylece her $x,y\in X$ için $Ux+Sy\in X$ olur.

(ii) U operatörünün daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x,y\in X$ olsun. Gerçekten $t\in\left[T_0,T_1\right]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\left(Ux\right)(t)-\left(Uy\right)(t)\right|=\left|p(t)\left[x\left(g\left(T_1\right)\right)-y\left(g\left(T_1\right)\right)\right]\right|\le p_1\sup_{t\in\left[T_0,\infty\right)_{\mathbb{T}}}\left|x(t)-y(t)\right|$$

ve $t\in\left[T_1,\infty\right)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\left(Ux\right)(t)-\left(Uy\right)(t)\right|=\left|p(t)\left[x\left(g\left(t\right)\right)-y\left(g\left(t\right)\right)\right]\right|\le p_1\sup_{t\in\left[T_0,\infty\right)_{\mathbb{T}}}\left|x(t)-y(t)\right|$$

Böylece $\left\|Ux-Uy\right\|\le p_1\left\|x-y\right\|$ olur. O halde U daralma dönüşümü olur.

(iii) S ‘nin tam sürekli dönüşüm olduğunu gösterelim. (2.4), (2.5) ve (2.7)’den

$$\left(Sx\right)(t)\ge\frac{K}{2}\ \text{ ve }\ \left(Sx\right)(t)\le\frac{3K}{4}+\frac{\left(1-p_1\right)K}{8}\le K\quad,\ t\in\left[T_0,\infty\right)_{\mathbb{T}}$$

olur. Böylece S, X ‘ten X ’e bir dönüşüm olur.

İkinci olarak S dönüşümünün sürekliliğini gösterelim. $x_n\in X$ ve $n\to\infty$ iken $\left\|x_n-x\right\|\to 0$ olsun. O zaman herhangi bir $t\in\left[T_0,\infty\right)_{\mathbb{T}}$ için, $x\in X$ ve $n\to\infty$ iken $\left|x_n(t)-x(t)\right|\to 0$ olur. Sonuç olarak $t\in\left[T_1,\infty\right)_{\mathbb{T}}$ için,

$$n\to\infty\ \text{iken}\ \left|f\left(t,x_n\left(h(t)\right)\right)-f\left(t,x\left(h(t)\right)\right)\right|\to 0 \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.5)'den

$$\left|f\left(t,x_n\left(h(t)\right)\right)-f\left(t,x\left(h(t)\right)\right)\right|\le\left|f\left(t,x_n\left(h(t)\right)\right)\right|+\left|f\left(t,x\left(h(t)\right)\right)\right|$$
$$\le f\left(t,K\right)+f\left(t,K\right)\le 2f\left(t,K\right) \qquad (2.9)$$

sonucu çıkar. Diğer taraftan (2.7)'den $t\in\left[T_0,T_1\right]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\left(Sx_n\right)(t)-\left(Sx\right)(t)\right|\le\int_{T_1}^{\infty}\left|f\left(s,x_n\left(h(s)\right)\right)-f\left(s,x\left(h(s)\right)\right)\right|\Delta s \qquad (2.10)$$

ve $t\in\left[T_1,\infty\right)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\left(Sx_n\right)(t)-\left(Sx\right)(t)\right|\le\int_{t}^{\infty}\left|f\left(s,x_n\left(h(s)\right)\right)-f\left(s,x\left(h(s)\right)\right)\right|\Delta s \qquad (2.11)$$

Böylece (2.10) ve(2.11)'i bir arada değerlendirirsek

$$\left\|Sx_n-Sx\right\|\le\int_{T_1}^{\infty}\left|f\left(s,x_n\left(h(s)\right)\right)-f\left(s,x\left(h(s)\right)\right)\right|\Delta s \qquad (2.12)$$

elde edilir. Ayrıca zaman skalasında integraller için Lebesque Dominated yakınsaklık teoreminin sağlandığını biliyoruz [1]. O zaman (2.8), (2.9) ve (2.12)'yi dikkate alırsak $n\to\infty$ iken $\left\|\left(Sx_n\right)(t)-\left(Sx\right)(t)\right\|\to 0$ elde edilir. O halde S, X üzerinde süreklidir.

Son olarak SX dönüşümünün relatif kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için Lemma 1.3.21'daki koşulların sağlandığını göstermek yeterlidir. X kümesinin tanımından SX dönüşümünün sınırlı olduğu açıktır. Düzgün Cauchy olduğunu gösterelim:
$\varepsilon>0$ için öyle $T_2\in\left[T_1,\infty\right)_{\mathbb{T}}$ alalım ki

$$\int_{t_0}^{\infty}f\left(s,K\right)\Delta s<\infty$$

olsun. Herhangi bir $x\in X$ ve $t_1,t_2\in\left[T_2,\infty\right)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\left(Sx\right)(t_1)-\left(Sx\right)(t_2)\right|<2\varepsilon$$

olur. Böylece SX dönüşümü Düzgün Cauchy olur. Şimdi de SX dönüşümünün herhangi bir $T_2 \in [T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $[T_0,T_2]_{\mathbb{T}}$ üzerinde eş-sürekli olduğunu gösterelim: Genelliği bozmaksızın $T_1 < T_2$ alalım. Herhangi bir $x \in X$ ve $t_1,t_2 \in [T_0,T_1]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right| \equiv 0$$

$t_1,t_2 \in [T_1,T_2]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right| = \left|\int_{t_1}^{\infty} f\left(s,x\left(h(s)\right)\right)\Delta s - \int_{t_2}^{\infty} f\left(s,x\left(h(s)\right)\right)\Delta s\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_1}^{t_2} f\left(s,K\right)\Delta s\right|$$

Şimdi herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $\exists\delta > 0$ ve $t_1,t_2 \in [T_0,T_2]_{\mathbb{T}}$ iken $|t_1-t_2| < \delta$ olduğunda her $x \in X$ için $\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right| < \varepsilon$ olur ki bu da SX eş-sürekli demektir. Böylece SX relatif kompakttır.

$[T_0,T_2]_{\mathbb{T}}$ üzerinde herhangi bir $T_2 \in [T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve en az bir $x \in X$ için $(U+S)x = x$ sağlanır. Böylece

$$x(t) = \frac{3(1+p_1)K}{4} - p(t)x\left(g(t)\right) + \int_{t}^{\infty} f\left(s,x\left(h(s)\right)\right)\Delta s, \quad t \in [T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$$

olur. Bu da $x(t)$, (1.1) denkleminin belli bir yerden sonra pozitif olan çözümü demektir. Üstelik $\lim_{t\to\infty} z(t) = 3(1+p_1)K/4$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3(1+p_1)K/(4+4p_0)$ olur. Burada dikkat edilirse $x \in X$ için, $x(t)$ belli bir yerden sonra pozitiftir.

$-1 < p_0 < 0$ durumu: $-p_0 < p_1 < (1-4p_0)/5 < 1$ olacak şekilde p_1 sayısını seçelim. O zaman $p_0 < (1-5p_1)/4$ olur. (2.2) ve $\lim_{t\to\infty} p(t) = p_0$ olduğunu göz önüne alırsak yeterince büyük $T_0 \in \mathbb{T}$ seçebiliriz öyle ki (2.4) sağlanır ve ayrıca

$$\frac{5p_1-1}{4} \le -p(t) \le p_1 <, \quad t \in [T_0,\infty)_{\mathbb{T}} \tag{2.13}$$

$T_1 > T_0$ olacak şekilde öyle bir $T_1 \in \mathbb{T}$ alalım ki $t \in [T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $g(t) \ge T_0$, $h(t) \ge T_0$ olsun. $BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayını ve bu uzayın X altkümesini $0 \le p_0 < 1$ durumundaki gibi tanımlayalım. U ve S operatörlerini

$$(Ux)(t) = \begin{cases} -\dfrac{3Kp_1}{4} - p(t)x\big(g(T_1)\big) & ; \ t \in [T_0,T_1]_{\mathbb{T}} \\ -\dfrac{3Kp_1}{4} - p(t)x\big(g(t)\big) & ; \ t \in [T_1,\infty]_{\mathbb{T}} \end{cases}$$

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \dfrac{3K}{4} + \int_{T_1}^{\infty} f\big(s, x(h(s))\big)\Delta s & ; \ t \in [T_0,T_1]_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{3K}{4} + \int_{t}^{\infty} f\big(s, x(h(s))\big)\Delta s & ; \ t \in [T_1,\infty]_{\mathbb{T}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi $\forall x, y \in X$ için $Ux + Sy \in X$ olduğunu gösterelim. (2.13) ve (2.4)'ü göz önüne alırsak $x, y \in X$ ve $t \in [T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}(Ux)(t)+(Sy)(t) &= \frac{3(1-p_1)K}{4} - p(t)x\big(g(t)\big) + \int_t^{\infty} f\big(s, y(h(s))\big)\Delta s \\ &\ge \frac{3(1-p_1)K}{4} + \frac{(5p_1-1)}{4}\times\frac{K}{2} = \frac{(5-p_1)K}{8} \ge \frac{K}{2}\end{aligned}$$

ve

$$(Ux)(t)+(Sy)(t) \le \frac{3(1-p_1)K}{4} - p(t)K + \frac{(1-p_1)K}{8} \le K$$

olur. Böylece her $x, y \in X$ için $Ux + Sy \in X$ olur. Kalan kısım $0 \le p_0 < 1$ durumuna benzer şekilde ispat edilir. Böylece Lemma 1.3.22'den öyle bir $x \in X$ vardır ki

$$x(t) = \frac{3(1+p_1)K}{4} - p(t)x\big(g(t)\big) + \int_t^{\infty} f\big(s, x(h(s))\big)\Delta s, \quad t \in [T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$$

olur. Bu da $x(t)$, (1.1) denkleminin belli bir yerden sonra pozitif olan çözümü demektir. Üstelik $\lim_{t\to\infty} z(t) = 3(1-p_1)K/4$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3(1-p_1)K/(4+4p_0)$ olur.

Teorem 2.1.3 $T_0 > 0$ olsun. $p(t)e^{-g(t)} \le -e^{-t}$, $t \in [T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve

$$\int_t^\infty f\left(s, \frac{1}{h(s)}\right)\Delta s \le \frac{1}{t} + \frac{p(t)}{g(t)}, \quad t \in [T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

olacak şekilde $T_0 \in \mathbb{T}$ var ise o zaman (1.1) denklemi $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ olacak şekilde belli bir yerden sonra pozitif olan bir $x(t)$ çözümüne sahiptir.

İspat: $T_1 > T_0$ olacak şekilde öyle bir $T_1 \in \mathbb{T}$ alalım ki $t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $g(t) \ge T_0$, $h(t) \ge T_0$ olsun. $BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayını Tanım 1.3.18'teki gibi tanımlayalım. X kümesini

$$X = \left\{ x \in BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}} : e^{-t} \le x(t) \le \frac{1}{t}, \; t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}} \text{ ve } e^{-T_1} \le x(t) \le \frac{1}{t}, \; t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}} \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman X kümesi $BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayının sınırlı, konveks ve kapalı altkümesi olur. S operatörünü

$$(Sx)(t) = \begin{cases} -p(T_1)x(g(T_1)) + \int_{T_1}^\infty f(s, x(h(s)))\Delta s & ; \; t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}} \\ -p(t)x(g(t)) + \int_t^\infty f(s, x(h(s)))\Delta s & ; \; t \in [T_1, \infty]_{\mathbb{T}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. İlk olarak her $x \in X$ için $Sx \in X$ olduğunu gösterelim. Teorem 2.1.3'ün kabullerinden $t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}(Sx)(t) &= -p(t)x(g(t)) + \int_t^\infty f(s, x(h(s)))\Delta s \\ &\le \frac{-p(t)}{g(t)} + \frac{1}{t} + \frac{p(t)}{g(t)} \le \frac{1}{t}\end{aligned}$$

ve

$$\left(Sx\right)(t) \geq -p(t)e^{-g(t)} \geq e^{-t}$$

elde edilir. Böylece $t \in \left[T_0, T_1\right]_{\mathbb{T}}$ için $e^{-T_1} \leq \left(Sx\right)(t) \leq \frac{1}{t}$ olur. Yani $\forall x \in X$ için $Sx \in X$ olur. Teoremin kalan kısmı Teorem 2.1.2' ye benzer şekilde yapılır. Lemma 1.3.23' den $x \in X$ için

$$x(t) = -p(t)x\left(g(t)\right) + \int_t^\infty f\left(s, x\left(h(s)\right)\right)\Delta s, \quad t \in \left[T_1, \infty\right)_{\mathbb{T}}$$

elde edilir ki bu da $x(t)$, (1.1) denkleminin belli bir yerden sonra pozitif olan bir çözümü demektir. X kümesinin tanımından $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.4 $T_0 > 0$ olacak şekilde $T_0 \in \mathbb{T}$ olsun ve $K > 0$ sabiti için

$$0 \leq p(t) \leq Kg(t)e^{-t}, \quad t \in \left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}}$$

$$\int_t^\infty f\left(s, e^{-h(s)}\right)\Delta s \geq \left(K+1\right)e^{-t}, \quad t \in \left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}}$$

ve

$$\int_t^\infty f\left(s, \frac{1}{h(s)}\right)\Delta s \leq \frac{1}{t}, \quad t \in \left[T_0, \infty\right)_{\mathbb{T}}$$

şartları sağlanıyor ise o zaman (1.1) denklemi $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ olacak şekilde belli bir yerden sonra pozitif olan bir $x(t)$ çözümüne sahiptir.

3. BÖLÜM
ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL GECİKMELİ DİNAMİK DENKLEMLERDE SALINIMSIZ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

3.1. (1.2) Nötral Gecikmeli Dinamik Denklemin Salınımsız Çözümlerinin Varlığı

Bu bölümde T. Li ve arkadaşlarının keyfi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde,

$$[x(t)+p(t)x(\tau_0(t))]^{\Delta\Delta}+q_1(t)x(\tau_1(t))-q_2(t)x(\tau_2(t))=e(t) \tag{1.2}$$

formundaki nötral gecikmeli dinamik denklemin salınımsız çözümlerinin varlığını inceleyen makale incelenmiştir [4].

Bu bölümden sonra (1.2) denklemi için aşağıdaki şartın sağlandığını kabul edelim.

(H) $\tau_i(t)\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{T}),\ \tau_i(t)\le t,\ \lim_{t\to\infty}\tau_i(t)=\infty,\ i=0,1,2,\ p(t),q_j(t)\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}),\ q_j(t)>0,$

$\int_{t_0}^{\infty}\sigma(s)q_j(s)\Delta s<\infty,\ j=1,2,$ ve $\exists\ E(t)\in C_{rd}{}^2(\mathbb{T},\mathbb{R})\ \ni\ E^{\Delta\Delta}(t)=e(t),\ \lim_{t\to\infty}E(t)=e_0\in\mathbb{R}.$

Teorem 3.1.1 (1.2) denklemi için (H) şartları sağlansın ve $|p(t)|\le p<1/3$ olsun. O zaman (1.2) denklemi belli bir yerden sonra pozitif olan bir çözüme sahiptir.

İspat: (H) kabulünden yeterince büyük öyle $T_0\in\mathbb{T}$ $(T_0\ge 1)$ ve M_1, M_2 pozitif sabitleri seçebiliriz ki

$$1<M_2<\frac{1-p-2M_1}{2p}$$

$$\int_{T_0}^{\infty} \sigma(s) q_1(s) \Delta s \le \frac{(1-p)(M_2-1)}{M_2} \tag{3.1}$$

$$\int_{T_0}^{\infty} \sigma(s) q_2(s) \Delta s \le \frac{1-p(1+2M_2)-2M_1}{2M_2} \tag{3.2}$$

$$\int_{T_0}^{\infty} \sigma(s) \left[q_1(s) + q_2(s) \right] \Delta s \le \frac{3(1-p)}{4} \tag{3.3}$$

$$\left| E(t) - e_0 \right| \le \frac{1-p}{4}, \qquad t \ge T_0 \tag{3.4}$$

şartları sağlanır. Ayrıca $T_1 > T_0$ olacak şekilde $T_1 \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki $t \in [T_1, \infty]_{\mathbb{T}}$ için $\tau_i(t) \ge T_0$, $i = 0,1,2$ $BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayı Tanım 1.3.18' deki gibi tanımlansın ve

$$X = \left\{ x \in BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}} : M_1 \le x(t) \le M_2 \right\}$$

olsun. X kümesi, $BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayının sınırlı ve kapalı altkümesi olduğu X kümesinin tanımından açıktır. Şimdi X kümesinin konveks olduğunu gösterelim. $x, y \in X$ ve $a \in [0,1]$ olsun. O zaman $M_1 \le x(t) \le M_2$ ve $M_1 \le y(t) \le M_2$ olur. Böylece $M_1 \le ax + (1-a)y \le M_2$ olduğundan $ax + (1-a)y \in X$ olur. Böylece X kümesi konvekstir.

Şimdi $U, S : X \to BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ operatörlerini tanımlayalım:

$$(Ux)(t) = \frac{1-p}{4} - p(t) x(\tau_0(T_1)) + E(T_1) - e_0 \quad ; \quad t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}}$$

$$(Ux)(t) = \frac{1-p}{4} - p(t) x(\tau_0(t)) + E(t) - e_0 \quad ; \quad t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$$

$$(Sx)(t) = \frac{1-p}{2} + T_1 \int_{T_1}^{\infty} \left[q_1(s) x(\tau_1(s)) - q_2(s) x(\tau_2(s)) \right] \Delta s \quad ; \quad t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}}$$

$$(Sx)(t)=\frac{1-p}{2}+t\int_t^\infty\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s$$

$$+\int_{T_1}^t\sigma(s)\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s \qquad ; \quad t\in[T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$$

U ve S operatörlerinin Lemma 1.3.22'deki şartları sağladığını gösterelim.

(i) $\forall x,y\in X$ için $Ux+Sy\in X$ olduğunu gösterelim: Herhangi bir $x,y\in X$ için $M_1\le x\le M_2$ ve $M_1\le y\le M_2$ olduğunu biliyoruz. (3.1), (3.2) ve (3.4)'ü dikkate alırsak, herhangi bir $x,y\in X$ ve $t\in[T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(Ux)(t)+(Sy)(t)=\frac{1-p}{4}+\frac{1-p}{2}-p(t)x(\tau_0(t))+E(t)-e_0$$

$$+t\int_t^\infty\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s$$

$$+\int_{T_1}^t\sigma(s)\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s$$

$$\ge\frac{3(1-p)}{4}-pM_2-\frac{1-p}{4}-t\int_t^\infty q_2(s)x(\tau_2(s))\Delta s$$

$$-\int_{T_1}^t\sigma(s)q_2(s)x(\tau_2(s))\Delta s$$

$$\ge\frac{1-p}{2}-pM_2-M_2\int_{T_1}^\infty\sigma(s)q_2(s)\Delta s\ge M_1$$

$$(Ux)(t)+(Sy)(t)\le\frac{3(1-p)}{4}+\frac{1-p}{4}+pM_2+t\int_t^\infty q_1(s)x(\tau_1(s))\Delta s$$

$$+\int_{T_1}^t\sigma(s)q_1(s)x(\tau_1(s))\Delta s$$

$$\le 1-p+pM_2+M_2\int_{T_1}^\infty\sigma(s)q_1(s)\Delta s\le M_2.$$

Benzer şekilde herhangi bir $x, y \in X$ ve $t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}}$ için $M_1 \leq (Ux)(t) + (Sy)(t) \leq M_2$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $\forall x, y \in X$ için $Ux + Sy \in X$ olur.

(ii) U'nun daralma dönüşümü olduğunu gösterelim: $x, y \in X$ olsun. $t \in [T_0, T_1]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|(Ux)(t) - (Uy)(t)\right| = \left|p(t)\left[x\left(\tau_0(T_1)\right) - y\left(\tau_0(T_1)\right)\right]\right| \leq p_1 \sup_{t \in [T_0, \infty)_{\mathbb{T}}} \left|x(t) - y(t)\right|$$

ve $t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|(Ux)(t) - (Uy)(t)\right| = \left|p(t)\left[x\left(\tau_0(t)\right) - y\left(\tau_0(t)\right)\right]\right| \leq p_1 \sup_{t \in [T_0, \infty)_{\mathbb{T}}} \left|x(t) - y(t)\right|$$

olduğundan $\|Ux - Uy\| \leq p_1 \|x - y\|$ olur. O halde U daralma dönüşümü olur.

(iii) S dönüşümünün tam sürekli olduğunu gösterelim. (i)'den S, X kümesinden X kümesine bir dönüşümdür.

Şimdi S 'nin sürekli olduğunu gösterelim: $x_n \in X$ ve $n \to \infty$ iken $\|x_n - x\| \to 0$ olsun. O zaman herhangi bir $t \in [T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için, $x \in X$ ve $n \to \infty$ iken $\left|x_n(t) - x(t)\right| \to 0$ olur. Sonuç olarak (3.3)'ten $t \in [T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\begin{aligned}
\left|(Sx_n)(t) - (Sx)(t)\right| &= \Bigg| t\int_t^{\infty} \left[q_1(s)x_n\left(\tau_1(s)\right) - q_2(s)x_n\left(\tau_2(s)\right)\right]\Delta s \\
&+ \int_{T_1}^{t} \sigma(s)\left[q_1(s)x_n\left(\tau_1(s)\right) - q_2(s)x_n\left(\tau_2(s)\right)\right]\Delta s - t\int_t^{\infty}\left[q_1(s)x\left(\tau_1(s)\right) - q_2(s)x\left(\tau_2(s)\right)\right]\Delta s \\
&+ \int_{T_1}^{t} \sigma(s)\left[q_1(s)x\left(\tau_1(s)\right) - q_2(s)x\left(\tau_2(s)\right)\right]\Delta s \Bigg| \\
&\leq t\left[\int_t^{\infty} q_1(s)\left|x_n\left(\tau_1(s)\right) - x\left(\tau_1(s)\right)\right|\Delta s + \int_t^{\infty} q_2(s)\left|x_n\left(\tau_2(s)\right) - x\left(\tau_2(s)\right)\right|\Delta s\right]
\end{aligned}$$

$$+\int_{T_1}^{t}\sigma(s)q_1(s)\left|x_n(\tau_1(s))-x(\tau_1(s))\right|\Delta s+\int_{T_1}^{t}\sigma(s)q_2(s)\left|x_n(\tau_2(s))-x(\tau_2(s))\right|\Delta s$$

$$\leq\|x_n-x\|\left[\int_{t}^{\infty}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s+\int_{T_1}^{t}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s\right]$$

$$=\|x_n-x\|\int_{T_1}^{\infty}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s\leq\frac{3(1-p)}{4}\|x_n-x\|.$$

Böylece $n\to\infty$ iken $\|Sx_n-Sx\|\to 0$ olur. O halde S dönüşümü X üzerinde süreklidir.

Son olarak SX ’in relatif kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için Lemma 1.3.21’daki koşulların sağlandığını göstermek yeterlidir. X kümesinin tanımından SX ’in sınırlı olduğu açıktır.

Düzgün Cauchy olduğunu gösterelim: $\varepsilon>0$ için öyle $T_2\in[T_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ alalım ki

$$\int_{T_2}^{\infty}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s<\varepsilon$$

koşulu sağlansın. Herhangi bir $x\in X$ ve $t_1,t_2\in[T_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right|$$

$$\leq\left|t_1\int_{t_1}^{\infty}\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s-t_2\int_{t_2}^{\infty}\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right|$$

$$+\left|\int_{T_1}^{t_1}\sigma(s)\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right.$$

$$\left.-\int_{T_1}^{t_2}\sigma(s)\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right|$$

$$\leq M_2\int_{t_1}^{\infty}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s+M_2\int_{t_2}^{\infty}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s$$

$$+M_2\left|\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s\right|<3M_2\varepsilon$$

olur. Böylece SX düzgün Cauchy olur.

Son olarak SX 'in eş-sürekli olduğunu gösterelim:

$T_1<T_2$ olsun. Herhangi bir $x\in X$ ve $t_1,t_2\in[T_0,T_1]_{\mathbb{T}}$ için $\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right|\equiv 0$ olduğunu biliyoruz ve

$$\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right|$$

$$\leq\left|t_1\int_{t_1}^{\infty}\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s-t_2\int_{t_2}^{\infty}\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right|$$

$$+\left|\int_{T_1}^{t_1}\sigma(s)\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right.$$

$$\left.-\int_{T_1}^{t_2}\sigma(s)\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right|$$

$$\leq M_2\left|\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s\right|+\left|(t_1-t_2)\int_{t_1}^{\infty}\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right|$$

$$+\left|t_2\int_{t_1}^{\infty}\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s-t_2\int_{t_2}^{\infty}\left[q_1(s)x(\tau_1(s))-q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s\right|$$

$$\leq(M_2t_2+M_2)\left|\int_{t_1}^{t_2}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s\right|+M_2\left|t_1-t_2\right|\int_{t_1}^{\infty}\sigma(s)\left[q_1(s)+q_2(s)\right]\Delta s.$$

Şimdi herhangi bir $\varepsilon>0$ için, $\exists\delta>0$ ve $t_1,t_2\in[T_0,T_2]_{\mathbb{T}}$ iken $\left|t_1-t_2\right|<\delta$ olduğunda her $x\in X$ için

$$\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right|<\varepsilon$$

olur. Bu da SX eş-sürekli demektir. Böylece SX relatif kompakttır. O halde S tam sürekli bir dönüşüm olur. Lemma 1.3.22'den öyle bir $x \in X$ vardır ki $(U+S)x = x$ olur. O zaman

$$x(t) = \frac{3(1-p)}{4} - p(t)x(x(\tau_0 t)) + t\int_t^\infty \left[q_1(s)x(\tau_1(s)) - q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s$$

$$+\int_{T_1}^t \sigma(s)\left[q_1(s)x(\tau_1(s)) - q_2(s)x(\tau_2(s))\right]\Delta s + E(t) - e_0, \;\; t \in [T_1, \infty)_{\mathbb{T}}$$

elde edilir ki bu da $x(t)$, (1.2) denkleminin belli bir yerden sonra pozitif olan bir çözümü demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.2 (1.2) denklemi için (H) şartları sağlansın ve $0 \le p(t) \le p_1 < 1$ olsun. O zaman (1.2) denklemi belli bir yerden sonra pozitif olan bir çözüme sahiptir.

İspat: (H) kabulünden yeterince büyük öyle $T_0 \in \mathbb{T}$ $(T_0 \ge 1)$ ve M_3, M_4 pozitif sabitleri seçebiliriz ki

$$1 - M_4 < p_1 < \frac{1-2M_3}{1+2M_4}$$

$$\int_{T_0}^\infty \sigma(s)q_1(s)\Delta s \le \frac{p_1 + M_4 - 1}{M_4}$$

$$\int_{T_0}^\infty \sigma(s)q_2(s)\Delta s \le \frac{1 - p_1(1+2M_4) - 2M_3}{2M_4}$$

$$\int_{T_0}^\infty \sigma(s)\left[q_1(s) + q_2(s)\right]\Delta s \le \frac{3(1-p_1)}{4}$$

$$\left|E(t) - e_0\right| \le \frac{1-p_1}{4}, \qquad t \ge T_0$$

şartları sağlanır. Ayrıca (H) kabulünden $T_1 > T_0$ olacak şekilde $T_1 \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki $t \in [T_1, \infty]_{\mathbb{T}}$ için $\tau_i(t) \geq T_0$, $i = 0,1,2$. $BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayı Tanım 1.3.18'teki gibi tanımlansın ve

$$X = \{x \in BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}} : M_1 \leq x(t) \leq M_2\}$$

olsun. X kümesinin, $BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayının sınırlı ve kapalı altkümesi olduğu X kümesinin tanımından açıktır. Şimdi X kümesinin konveks olduğunu gösterelim. $x, y \in X$ ve $a \in [0,1]$ olsun. O zaman $M_3 \leq x(t) \leq M_4$ ve $M_3 \leq y(t) \leq M_4$ olur. Böylece $M_3 \leq ax + (1-a)y \leq M_4$ olduğundan $ax + (1-a)y \in X$ olur. Böylece X kümesi konvekstir.

Şimdi $U, S : X \to BC[T_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ operatörlerini Teorem 3.1.1'deki gibi tanımlayalım ve p yerine p_1 yazalım. Teoremin kalan kısmı Teorem 3.1.1'e benzer şekilde yapılır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3 (1.2) denklemi için (H) şartları sağlansın ve $-1 < p_2 \leq p(t) \leq 0$ olsun. O zaman (1.2) denklemi belli bir yerden sonra pozitif olan bir çözüme sahiptir.

İspat: (H) kabulünden yeterince büyük öyle $T_0 \in \mathbb{T}$ $(T_0 \geq 1)$ ve M_5, M_6 pozitif sabitleri seçebiliriz ki

$$2M_5 + p_2 < 1 < M_6$$

$$\int_{T_0}^{\infty} \sigma(s) q_1(s) \Delta s \leq \frac{(1-p_2)(M_6 - 1)}{M_6}$$

$$\int_{T_0}^{\infty} \sigma(s) q_2(s) \Delta s \leq \frac{1 - p_2 - 2M_5}{2M_6}$$

$$\int_{T_0}^{\infty} \sigma(s) [q_1(s) + q_2(s)] \Delta s \leq \frac{3(1-p_2)}{4}$$

$$\left|E(t)-e_0\right| \le \frac{1-p_2}{4}, \qquad t \ge T_0$$

şartları sağlanır. Ayrıca (H) kabulünden $T_1 > T_0$ olacak şekilde $T_1 \in \mathbb{T}$ vardır öyle ki $t \in [T_1, \infty]_{\mathbb{T}}$ için $\tau_i(t) \ge T_0$, $i = 0,1,2$. $BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayı Tanım 1.3.18'teki gibi tanımlansın ve

$$X = \left\{x \in BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}} : M_5 \le x(t) \le M_6\right\}$$

olsun. X kümesinin, $BC[T_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ Banach uzayının sınırlı ve kapalı altkümesi olduğu X kümesinin tanımından açıktır. Şimdi X kümesinin konveks olduğunu gösterelim. $x, y \in X$ ve $a \in [0,1]$ olsun. O zaman $M_5 \le x(t) \le M_6$ ve $M_5 \le y(t) \le M_6$ olur. Böylece $M_5 \le ax + (1-a)y \le M_6$ olduğundan $ax + (1-a)y \in X$ olur. Böylece X kümesi konvekstir.

Şimdi U ve S operatörlerini Teorem 3.1.1'deki gibi tanımlayalım ve p yerine p_2 yazalım. Teoremin kalan kısmı Teorem 3.1.1'e benzer şekilde yapılır. Bu ise ispatı tamamlar.

4. BÖLÜM
TARTIŞMA VE SONUÇ

4.1. (1.1) Tipindeki Nötral Dinamik Denklemlerin Uygulamaları

Örnek 4.1.1 $q>1$ ve $\mathbb{T}=\{q^n : n\in \mathbb{N}_0\}$ olsun.

$$\left[x(t)+\frac{t+1}{2t}x\left(\rho(t)\right)\right]^{\Delta}+\frac{x\left(\sigma(t)\right)}{t\sigma(t)}=0,\quad t\in\mathbb{T} \tag{4.1}$$

denklemini düşünelim. O zaman $p(t)=\dfrac{t+1}{2t},\ g(t)=\rho(t),\ h(t)=\sigma(t)$ ve $f(t,x)=\dfrac{x}{t\sigma(t)}$ alırsak (H1), (H2) ve (H3) şartları sağlanır. Hem de herhangi bir $K>0$ için $\int_1^{\infty} f\left(s,K\right)\Delta s=K$ sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.1.2'den (4.1) denkleminin $\lim_{t\to\infty} x(t)=a>0$ olacak şekilde belli bir yerden sonra pozitif olan bir $x(t)$ çözümü vardır.

4.2. (1.2) Tipindeki Nötral Gecikmeli Dinamik Denklemlerin Uygulamaları

Örnek 4.2.1 $\tau>0$ ve $\mathbb{T}=\{n\tau : n\in \mathbb{N}_0\}$ olsun.

$$\left[x(t)-e^{-\tau}x\left(t-\tau\right)\right]^{\Delta}+\frac{\left(2t+\tau\right)x\left(\left(t+\tau\right)^2\right)}{t^2}=0,\quad t\in\mathbb{T} \tag{4.2}$$

denklemini düşünelim. $p(t)=-e^{-\tau},\ g(t)=t-\tau,\ h(t)=\left(t+\tau\right)^2$ ve $f(t,x)=\dfrac{\left(2t+\tau\right)x}{t^2}$ olarak düşünürsek (H1), (H2) ve (H3) şartları sağlanır. Hemde $p(t)e^{-g(t)}=e^{-t}$ ve $\int_t^{\infty} f\left(s,\dfrac{1}{h(s)}\right)\Delta s=\dfrac{1}{t^2}$ olduğundan Teorem 2.1.3'teki kabuller sağlanır. Dolayısıyla

Teorem 2.1.3'den (4.2) denkleminin $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ olacak şekilde belli bir yerden sonra pozitif olan bir $x(t)$ çözümü vardır.

Örnek 4.2.2. $\mathbb{T}=\{t\geq 0 : t\in\mathbb{R}\}$ olsun.

$$\left[x(t)+(t-1)e^{-t}x(t-1)\right]^{\Delta}+e^{-t/4}x(\frac{t}{4})=0,\quad t\in\mathbb{T} \tag{4.3}$$

denklemini düşünelim. $p(t)=(t-1)e^{-t}$, $g(t)=t-1$, $h(t)=\frac{t}{4}$ ve $f(t,x)=e^{-t/4}x$ olarak düşünürsek (H1), (H2) ve (H3) şartları sağlanır. O zaman $t\geq 4$ için $\int_t^{\infty} f\left(s,\frac{1}{h(s)}\right)\Delta s\leq 4e^{-t/4}$ olur. Üstelik olduğundan $\int_t^{\infty} f\left(s,e^{-h(s)}\right)\Delta s=2e^{-t/2}$ şartı sağlanır. $K=1$ alırsak Teorem 2.1.4'teki kabuller sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.1.4'den (4.3) denkleminin $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ olacak şekilde belli bir yerden sonra pozitif olan bir $x(t)$ çözümü vardır.

Örnek 4.2.3 $t_0>0,\ \alpha>1,\ \beta>1,\ \tau_i(t)\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{T})$, $\tau_i(t)\leq t$, $\lim_{t\to\infty}\tau_i(t)=\infty$, $i=0,1,2,$ $|p(t)|\leq p<\frac{1}{3}$ şeklinde olmak üzere,

$$\left[x(t)+p(t)x(\tau_0(t))\right]^{\Delta\Delta}+\frac{1}{t^{\alpha}\sigma(t)}x(\tau_1(t))-\frac{1}{t^{\beta}\sigma(t)}x(\tau_2(t))=\frac{-t-\sigma(t)}{t^2\sigma^2(t)},\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$$

ikinci mertebeden gecikmeli dinamik denklemini düşünelim. O halde $q_1(t)=\frac{1}{t^{\alpha}\sigma(t)}$, $q_2(t)=\frac{1}{t^{\beta}\sigma(t)}$, $e(t)=\frac{-t-\sigma(t)}{t^2\sigma^2(t)}$ olur. $E(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^2}\Delta s$ alalım. Böylece (H) şartı sağlanır. Teorem 3.1.1'den bu denklem belli bir yerden sonra pozitif olan bir $x(t)$ çözümü vardır.

KAYNAKLAR

1. Bohner, M., Peterson, A., 2001. Dynamic equations on time scales: An introduction with application. **Birkhauser**, Boston, Mass, USA, 358 pp.
2. Bohner, M., Peterson, A., 2003. Advances in dynamic equations on time scales. **Birkhauser**, Boston, Mass, USA, 348 pp.
3. Zhu, Z.-Q., Wang, Q.-R., 2007. Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 335 (2): 751-762.
4. Li, T., Sun, S., Han, S., Yang, D., 2009. Existence of nonoscillatory solutions to second order neutral delay dynamic equations on time scales. **Advance in Difference Equations**, 2009, Article ID 562329: 10 pages,
5. Li, T., Han, Z., Sun, S., 2009. Oscillation of one kind of second-order delay dynamic equations on time scales. **Journal of Jishou University**, 30 (3): 24-27.
6. Agarwall, R., Bohner, M., O'Regan, D., Peterson, A., 2002. Dynamic equations on time scales: a survey. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 141 (1-2): 1-26.
7. Erbe, L., Peterson, A., 2002. Oscillation criteria for second-order matrix dynamic equations on a time scale. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. 141: 169–185.
8. Erbe, L., Peterson, A., Saker, S.H., 2003. Oscillation criteria for second-order nonlinear dynamic equations on time scales. **Journal of London Mathematics Society**. 67: 701–714.
9. Saker, S.H., 2004. Oscillation of nonlinear dynamic equations. **Applied Mathematics and Computation**. 148: 81–91.
10. Kulenovic, M. R. S., Hadziomerspahic, S., 1998. Existence of nonoscillatory solution of second order neutral delay equation. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 228 (2): 436-448.
11. Sun, S., Han, Z., Zhang, C., 2009. Oscillation of second-order delay dynamic equations on time scales. **Journal of Applied Mathematics and Computing**. 30 (1-2): 459-468.

12. Erbe, L., Peterson, A. Saker, S.H., 2007. Oscillation criteria for second-order nonlinear delay dynamic equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 333 (1): 505-522.

13. Kelley, W. G., Peterson, A., 2001. Difference equations: An introduction with application. **Harcourt Academic Press**, USA, 403 pp.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: İsmail ULUSOY
Uyruğu: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri: 15 Haziran 1980, İstanbul
Medeni Durumu: Evli
Tel: +90 416 223 38 00
email: iulusoy@adiyaman.edu.tr
Yazışma Adresi: Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Altınşehir/Adıyaman,

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	2011
Lisans	HÜ FEF Matematik	2007
Lise	Bağcılar Lisesi, İstanbul	1997

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2008- Halen	Adıyaman Üniversitesi	Öğretim yardımcısı
2007–2008	Yeni Renk Dershanesi	Öğretmen

YABANCI DİL

İngilizce