ÜZERİNE OLMAYAN ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN ÜÇ DÖNÜŞÜM İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM METODU

Ebru DİYARBAKIRLI

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
2012

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜZERİNE OLMAYAN ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN ÜÇ DÖNÜŞÜM İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM METODU

Ebru DİYARBAKIRLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2012

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

ÜZERİNE OLMAYAN ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN ÜÇ DÖNÜŞÜM İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM METODU

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, **Ebru DİYARBAKIRLI** tarafından hazırlanan bu çalışma **02/01/2012** tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **Matematik** Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak **oybirliği (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜZERİNE OLMAYAN ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN
ÜÇ DÖNÜŞÜM İÇİN YENİ BİR YAKLAŞIM METODU

Ebru DİYARBAKIRLI

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezde, ilk olarak asimptotik genişlemeyen ve üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşüm sınıfları için son yıllarda kurulan iterasyon şemaları incelenmiş, kendi üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması oluşturulmuştur. Sonra da bu iterasyon şemasının dönüşümlerin ortak sabit noktasına güçlü ve zayıf yakınsaması incelenmiştir.

2012, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kendi üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta, kuvvetli ve zayıf yakınsama, düzgün konveks Banach uzayı.

ABSTRACT

MS Thesis

A NEW APPROACH METHOD FOR THREE NONSELF ASİMPTOTICALLY NONEXPANSİVE MAPPİNGS

Ebru DİYARBAKIRLI

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

In this thesis, firstly established in recent years for asymptotically nonexpansive mappings and nonself asymptotically nonexpansive mappings iteration process are examined, and it is introduced a new iterative process for three nonself asymptotically nonexpansive mappings. Later, the weak and strong convergence of this iteration process to a common fixed point these three mappings has been investigated.

2012, 63 pages

Keywords: Nonself asymptotically nonexpansive mapping, fixed point, strongly and weakly convergence, uniformly convex Banach space.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmamda bana her türlü kolaylığı sağlayan ve beni tecrübeleriyle destekleyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a ve Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerimle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa YILDIRIM'a ve Sayın Birol GÜNDÜZ'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ebru DİYARBAKIRLI
Ocak - 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

c_o	0 a yakınsayan dizilerin uzayı
$D(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{D}(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$dim\ (X)$	X uzayının boyutu
$diam\ (X)$	X kümesinin çapı
X^*	X uzayının normlu duali
X^{**}	X uzayının normlu ikinci duali
X'	X uzayının cebirsel duali
X''	X uzayının cebirsel ikinci duali
δ_X	X uzayının konveksliğinin modülü
ρ_X	X uzayının smoothluğunun modülü
B_X	X uzayındaki kapalı birim yuvar
S_X	X uzayındaki birim küre
$I_K(x)$	$x \in K$ nın inward kümesi
$\overline{I_K(x)}$	$x \in K$ nın inward kümesinin kapanışı
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$I(x_0,\alpha_n,\beta_n,T)$	Ishikawa iterasyonu
$K(x_0,\lambda,T)$	Krasnoselskij iterasyonu
$M(x_0,\alpha_n,T)$	Mann iterasyonu
$S(x_n,\alpha_n,\beta_n,T^n)$	Modifiye edilmiş S-iterasyonu
$P(x_0,T)$	Picard iterasyonu
$S(x_n,\alpha_n,\beta_n,T)$	S-iterasyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İnsanlığın ortak kültürünün çok önemli bir parçası olan matematik, doğanın anlaşılmasını oldukça kolaylaştıran bir bilim dalıdır. Matematiğin temel konusu teoremlerdir. Matematikçilerin temel amacı teoremleri kurmak, kanıtlamak, genellemek, kullanmak ve anlamaktır. Matematik bilimi mekanik, fizik, astronomi bilimlerinin temelini oluşturmasının yanı sıra sosyal bilimler, tıp, jeoloji, psikoloji, sosyoloji, iş idareciliği ve ekonomi gibi alanlarda da yaygın bir şekilde kullanılır.

Bu tezde ele alınan "Sabit Nokta Kavramı" matematikteki önemli hesaplama yöntemlerinden biri olup, ekonomi, oyun teorisi, denge problemleri, tomografi, telekomünikasyon ve bir çok mühendislik dalında uygulamaya sahiptir.

"Sabit Nokta Teorisi" çalışmaları 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemde çözümün varlığını göstermek amacıyla başlamıştır.

Genel olarak sabit nokta teorisi çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoridir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında L. E. J. Brouwer ile başlamıştır. Bilinen ilk sabit nokta teoremi, "$X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: X \to X$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin X de bir sabit noktası vardır" şeklindedir. 1912 yılında Brouwer bu teoremi n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ Euclidean uzayına "B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar ve $f: B \to B$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, B de en az bir sabit noktaya sahiptir" şeklinde genişletmiştir. Brouwer Sabit Nokta Teoremi, ekonomi biliminde Nobel ödülü alan John Nash'ın makalelerine temel bir matematiksel malzeme olmuştur.

Ekonomistler, Brouwer Sabit Nokta Teoremi'nin kesin bir ekonomik dengenin oluşturulması için yardımcı bir unsur olarak kullanılabileceğini belirtmektedirler.

Banach 1922 'deki çalışmada belirtilen ve "Daraltan (büzülme) Dönüşüm Teoremi" olarak da bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi, sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden en önemli teoremlerden biridir. Bu teorem, "(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)\,, \quad 0 \leq k < 1$$

ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir" şeklindedir. Bu teorem, S. Banach'ın doktora tezinin bir kısmı olarak belirlenmiş ve ispatı yapılmıştır. Bundan sonraki aşamalarda Banach'ın sabit nokta teoremi, matematiğin birçok dalındaki varlık problemlerinin çözümünde, kullanışlı ve kolaylık sağlayan bir unsur olmuştur.

Yukarıda ifade edilen Brouwer Teoremi sonsuz boyutlu uzaylar için geçerli değildir. Bu teoremin sonsuz boyutlu Banach uzaylarına bir genelleştirmesi olan ve Schauder Teoremi olarak adlandırılan teorem, 1930 yılında "K, bir X Banach uzayının boş olmayan kompakt, konveks bir alt kümesi ve $f: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, K da en az bir sabit noktaya sahiptir" şeklinde ifade edilmiştir.

Daha sonra Browder (1950); Chidume(2003); Kirk (1965); Ciric(1974) ve daha pek çok yazar bu temel sonuçları genelleştirmişlerdir. Bununla birlikte Junck (1976); Rhoades (2004); Zhou *et al.* (2007); Türkmen (2011) gibi pek çok araştırmacı birden fazla dönüşümün ortak sabit noktaları üzerine çok sayıda çalışma yapmışlardır. Goebel and Kirk (1972) çalışmasında, asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm için sabit noktanın varlığını ispatlanmış ve Schu (1991), Tan and Xu (1993); Rhoades (1994); Osilike and Udomene (2000) tarafından Hilbert ve Banach uzaylarında bu tür dönüşümlerin sabit noktaları üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Normlu bir uzayın, boş olmayan kapalı ve konveks bir alt kümesinden bu normlu uzaya tanımlanan ve "kendi üzerine tanımlı olmayan dönüşüm (nonself)" olarak adlandırılan dönüşümler için 2000 li yılların başlarından itibaren yeni iterasyon şemaları oluşturulmuş ve bu iterasyon şemalarının uygun şartlar altında sabit noktalara yakınsamaları incelenmiştir. Chidume *et al.* (2003); Wang (2006); Zhou *et al.* (2007); Thianwan (2008); Yıldırım and Özdemir (2009) gibi pek çok araştırmacı kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için bu yeni iterasyon metotlarını kullanarak önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Yine bu bölümde daraltan, kesin daraltan ve genişlemeyen dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, ilk olarak dönüşümlerin sabit noktaları bulunurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları verilmiştir. Bunlardan bazıları Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu, Krasnoselskij iterasyon metodu, Mann iterasyon metodu, Ishikawa iterasyon metodu, Noor iterasyonu, Rhoades'in n-adım iterasyonu, Agarwal-O'Regan-Sahu'nun S-iterasyon metodu ve modifiye edilmiş S-iterasyon metodudur. İkinci olarak ispatlarımızda kullanacağımız tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Üçüncü olarak asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yapılan çalışmalar ve daha sonra da kendi üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yapılan çalışmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, öncelikle kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması kurulmuş ve daha sonra reel Banach uzaylarında bu iterasyon şeması için bir kuvvetli yakınsama teoremi verilmiştir. Son olarak, smooth ve düzgün konveks reel Banach uzaylarında bu iterasyon şeması için kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri verilmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızdan hareketle bazı çalışılabilecek problemlere değinilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Normlu Uzay): N, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \ \ (\alpha \in F)$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \quad \|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) bir norm ve $(N, \| \quad \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.2 (Banach Uzayı): N normlu lineer uzay olsun**.** N**,** $d(x,y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

N nin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayıda reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 (Cebirsel Dual): X bir reel lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $L(X, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $L(X, \mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R} \text{ lineer}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in L(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $L(X, \mathbb{R})$ bir reel lineer uzaydır. Bu $L(X, \mathbb{R})$ uzayına X in cebirsel duali denir ve X' ile gösterilir. X' in cebirsel duali

$$L(X', \mathbb{R}) = (X')'$$

veya kısaca X'' ile gösterilir ve buna X lineer uzayının cebirsel ikinci duali (bidual space) adı verilir.

Tanım 2.1.4 (Normlu Dual): X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(X,\mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X,\mathbb{R}) = \{T: T: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineer ve sürekli$\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X,\mathbb{R})$ için

$$\begin{cases}(T_1+T_2)(x) = T_1(x)+T_2(x)\\(\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x)\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $C(X,\mathbb{R})$ bir lineer uzaydır. Bu $C(X,\mathbb{R})$ uzayına X in normlu duali denir ve X^* ile gösterilir. X^* in normlu duali

$$L(X^*,\mathbb{R}) = (X^*)^*$$

veya kısaca X^{**} ile gösterilir ve buna X normlu uzayının normlu ikinci duali (bidual space) adı verilir.

Burada X^*, $\|T\| = \sup\{T(x): \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu lineer uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzaydır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı da verilir.

Yukarıdaki tanımlardan da anlaşılacağı gibi, X^* uzayı X' cebirsel dual uzayının bir alt uzayıdır. Sonlu boyutlu uzayların normlu dualleri ile cebirsel dualleri aynıdır. Dolayısıyla sonlu boyutlu uzaylarda normlu dualle çalışmakla cebirsel dualle çalışmak arasında bir fark yoktur.

Örnek 2.1.5:

(i) Alışılmış norm ile $\mathbb{R}^n$ uzayının duali kendisidir.

(ii) ℓ_1 uzayının $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre normlu duali ℓ_∞ uzayıdır.

(iii) c_0 uzayının $\|x\| = sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$ normuna göre normlu duali ℓ_1 uzayıdır.

X normlu uzayı yansımalı ise X ve X^{**} uzayları eşmetrel eşyapılı (isomorphic) olurlar. Bunun tersi genel olarak doğru değildir. X normlu uzayı ile X^{**} uzayının eşmetrel eşyapılı olmaları, X uzayının yansımalı olmasını gerektirmediği 1950 ve 1951 yıllarında R.C. James tarafından gösterilmiştir.

Tanım 2.1.6 (Kuvvetli Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

veya kısaca $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 2.1.7 (Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer her $f \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \xrightarrow{z} x$ ya da $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Kuvvetli ve zayıf yakınsama arasındaki gerektirmeler aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.1.8: X normlu bir uzay olsun. Bu durumda

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.

(b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.

(c) $\dim(X) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir (Kreyszig 1989).

Normlu uzaylarda zayıf yakınsamanın kuvvetli yakınsamayı gerektirmediğini aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

Örnek 2.1.9: $X = \ell_2$ uzayını ve bu uzayda $x \in X$ için $\|x\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan normu alalım. $\{x_n\}$ dizisini

$$x_n = (0,0, \dots ,1,0, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Herhangi bir $y = (y_1, y_2, \dots , y_n, \dots) \in X^* = \ell_2$ ve $n \to \infty$ için

$$(x_n, y) = y_n \to 0$$

olur. Böylece $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup 0$ zayıf yakınsar. Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak değildir.

Tanım 2.1.10 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım, $x, y \in B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x + y)/2$ orta noktasının $S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ den bir δ uzaklığında ve B_X kapalı birim yuvar içinde olduğu ifade eder.

Örnek 2.1.11: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralelkenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

dir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_H = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet, $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde, H düzgün konveks bir uzaydır.

Örnek 2.1.12: ℓ_1 uzayı $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre düzgün konveks uzay değildir. Bunu göstermek için $\varepsilon = 1$ olmak üzere $x = (1,0,0,0,\dots), y = (0,-1,0,0,\dots) \in \ell_1$ elemanlarını alalım. Bu durumda $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre

$$\|x\|_1 = 1, \|y\|_1 = 1, \|x - y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon$$

olur. Ancak $\|(x + y)/2\|_1 = 1$ olduğundan $\|(x + y)/2\|_1 \leq 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Dolayısıyla ℓ_1 uzayı düzgün konveks değildir.

Tanım 2.1.13: X bir Banach uzayı olsun. $\delta_X\colon [0,2] \to [0,1]$,

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}$$

olarak tanımlanan δ_X fonksiyonuna X in konveksliğinin modülü denir.

Yukarıdaki tanımdan, $\delta_X(0) = 0$ ve her $t \geq 0$ için $\delta_X(t) \geq 0$ olduğunu görmek kolaydır.

Tanım 2.1.14 (Smooth Uzay): X bir Banach uzay olsun. Her $x, y \in S_X$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

limiti var ise X e smooth uzay denir.

Örneğin, $1 < p < \infty$ için l_p uzayları smooth Banach uzaylardır, c_0, l_1 ve l_∞ uzayları ise smooth uzaylar değildirler.

Tanım 2.1.15: X bir Banach uzayı olsun. $\rho_X: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\rho_X(t) &= \sup\left\{\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} - 1: \|x\| = 1, \|y\| = t\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|}{2} - 1: \|x\| = \|y\| = 1\right\},\ \ t \geq 0\end{aligned}$$

olarak tanımlanan ρ_X fonksiyonuna X in smoothluğunun modülü denir.

Yukarıdaki tanımdan, $\rho_X(0) = 0$ ve her $t \geq 0$ için $\rho_X(t) \geq 0$ olduğunu görmek kolaydır.

Tanım 2.1.16 (Frechet Türevlenebilir Norm): X bir Banach uzayı ve $S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ olsun. Eğer her $x \in S_X$ için

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$$

limiti her $y \in S_X$ için varsa (düzgün olarak) bu durumda X e Frechet türevlenebilir norma sahiptir denir.

Tanım 2.1.17 (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin,

1. $X = [0,4]$ olmak üzere $T: X \to X, Tx = 4 - x$ dönüşümü için $F(T) = \{2\}$ dir.

2. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.

3. $X = [0,3]$ ve $Y = [4,5]$ olmak üzere herhangi bir $T: X \to Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

4. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = x^5$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{-1,0,1\}$ dir.

5. $T: (0,1] \to (0,1]$, $Tx = \frac{x}{3}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ noktası tek sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dır.

X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n. iterasyonu denir. T^n $(n \geq 1)$ dönüşümüne de T nin n. iterasyonu denir. Bundan sonra $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılacaktır.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ dönüşümü $T(a) = c, T(b) = b, T(c) = a$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{a,b,c\}$ olduğu halde $F(T) = \{b\}$ dir.

X boş olmayan bir küme ve $T_1, T_2, \cdots, T_m: X \to X$ herhangi m tane dönüşüm olsun. Eğer $T_1x = T_2x = \cdots = T_mx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına $T_1, T_2, \cdots, T_m$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2) \cap \cdots \cap F(T_m)$ ile gösterilir. Aşağıda birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla ilgili örnekler verilmiştir.

Örnek 2.1.18:

i. $X = \mathbb{R}$, $T_1x = x^2 - 2x + 2$ ve $T_2x = x^2 + 3x - 3$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2) = \{1\}$ dir.

ii. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $T_1, T_2, T_3: X \to X$, $T_1(x,y) = (0,y)$, $T_2(x,y) = (ex,y)$ ve $T_3(x,y) = (2x,y)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T_1) \cap F(T_2) \cap F(T_3) = \{(0,y)\}$ dir.

2.2. Dönüşüm Sınıfları

Tanım 2.2.1 (Lipschitzian Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre Lipschitz şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x, y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.2: $X = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ olmak üzere $T: X \to X$,

$$Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2}\sin(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$$

dönüşümü süreklidir. Fakat Lipschitzian bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.3 (Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (conctraction) denir.

Eğer (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm ise bu dönüşümün bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir (Banach Daralma Prensibi).

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{x}{8}$ dönüşümünü alalım. Bu T dönüşümü daraltan dönüşümdür, fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n daraltan bir dönüşüm olabilir.

Örnek 2.2.4: $T: [0,2] \to [0,2]$, $Tx = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$ olsun. T dönüşümü $x = 1$ de süreksizdir. Bu nedenle daraltan dönüşüm değildir. Diğer taraftan, $T^2: \{0,1\} \to \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup T^2 daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T^2 nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 2.2.5 (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Bir T dönüşümü daraltan dönüşüm ise kesin daraltan dönüşümdür. Ancak tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.2.6: $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

Tam metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Buna karşın eğer sabit nokta varsa bu sabit nokta tektir.

Örnek 2.2.7: $X = [1, +\infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $Tx = x + \frac{1}{x}$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ için

$$d\big(T(x), T(y)\big) = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = \left(1 - \frac{1}{xy}\right)|x - y| < d(x, y)$$

olur. Dolayısı ile T dönüşümü kesin daraltandır. Ancak, $Tx = x + \frac{1}{x} \neq x$, yani; T nin sabit noktası yoktur.

Bu tip dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

Tanım 2.2.8 (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 2.2.9: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x - 2$ olsun.

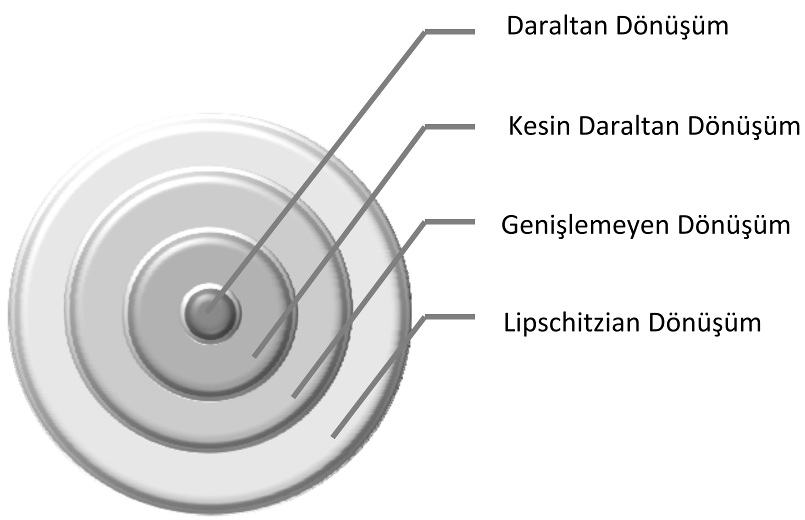
$$d(Tx, Ty) = |x - 2 - y + 2| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşüm ne daraltan ne de kesin daraltandır.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için, ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerinde bazı sınırlandırmalar yapılması gereklidir. Browder *et al.* (1965) düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

2.2.10. Dönüşümler Arasındaki Bağlantı

Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:



Şekil 2.1 Dönüşümler arasındaki bağlantı

Tanım 2.2.11 (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm): bir normlu uzay, boş olmayan bir alt küme ve bir dönüşüm olsun. Eğer her ve her için

olacak şekilde sayısı varsa, ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 2.2.12 (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir (Goebel and Kirk 1972).

Yukarıdaki tanımlardan görüleceği gibi asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda düzgün L-Lipschitzian bir dönüşümdür. Ayrıca asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu ifadelerin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.13: B_H, $H = \ell_2$ Hilbert uzayında kapalı birim yuvar ve $\{a_i\}$, $\prod_{i=2}^{\infty} a_i = 1/2$ $(0 < a_i < 1)$ şartını sağlayan bir reel sayı dizisi olsun. $T: B_H \to B_H$ dönüşümünü

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1^2, a_2 x_2, a_3 x_3, \cdots),$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda her $x, y \in B_H$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq 2\|x - y\|$$

dir. Diğer taraftan, her $x, y \in B_H$ ve $n \geq 2$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq 2 \prod_{i=2}^{n} a_i \|x - y\|$$

dir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $k_n = 2\prod_{i=2}^{n} a_i \to 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla T asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür fakat genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.14 (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

Sonuç 2.2.14.1:

1. En az bir sabit noktaya sahip olan genişlemeyen bir dönüşüm quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür.

2. Lineer quasi-genişlemeyen bir dönüşüm genişlemeyen bir dönüşümdür.

Aşağıdaki örnek ile lineer olmayan sürekli quasi-genişlemeyen dönüşümlerin genişlemeyen dönüşüm olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 2.2.15: $X = \ell_\infty$ ve $C = B_X = \{x \in l_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ kümeleri verilsin. Her $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in C$ için $T: C \to C$ dönüşümünü

$$Tx = (0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm lineer olmayan sürekli bir dönüşümdür ve $F(T) = \{0\}$ dır. Her $x \in C$ için

$$\|Tx - 0\|_\infty = \|(0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots)\|_\infty \leq \|(0, x_1, x_2, x_3, \cdots)\|_\infty = \|x - p\|_\infty$$

olur. Dolayısıyla T quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Buna rağmen $x = (1/2\,, 1/2\,, \cdots)$ ve $y = (3/4\,, 3/4\,, \cdots)$ için

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \left\|\left(0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \cdots\right)\right\|_\infty = \frac{5}{16} > \frac{1}{4} = \|x - y\|_\infty$$

olup, T genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.16 (Asimptotik Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$, her $x \in K$ ve her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x - p\|$$

olacak şekilde $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{r_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa T dönüşümüne asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Khan *et al.* 2008).

Asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, quasi-genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani quasi-genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.17: $X = l^2$ uzayı olsun. Her $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in X$ için $\|.\|$ normu $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ ve $T: X \to X$ dönüşümü $Tx = (0,2x_1, 0,0, \cdots ,0, \cdots)$ ile tanımlansın.

Herhangi bir $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in X$ için $Tx = x$ den $(0,2x_1, 0,0, \cdots ,0, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ olup, $F(T) = \{0\}$ dır. Ayrıca her $n = 2,3,4, \cdots$ için $T^n x = (0,0,0, \cdots ,0, \cdots)$ dır. $r_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\{r_n\}$ ve $p \in F$ için

$$\|Tx - p\| = 2\|x_1\| \leq (1 + r_1)\|x_n - p\|$$

ve

$$\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n)\|x_n - p\|$$

olur. Dolayısıyla T asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Ancak, T quasi-genişlemeyen dönüşüm değildir. Çünkü $x^0 = (1,0,0, \cdots ,0, \cdots) \in X$ için

$$\|Tx^0 - p\| = \|0,2,0,0, \cdots ,0, \cdots\| = 2 > 1 = \|x^0 - p\|$$

dur.

2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları

Daraltan, kesin daraltan, genişlemeyen ve Lipschitzian gibi dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde, hangi tür dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu teorem ve örneklerle ifade edeceğiz.

Aşağıdaki teorem, analizdeki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.3.1: $[a, b]$**,** $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a, b]$ için $T(x) = x - f(x)$ şeklinde bir $T: [a, b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise, $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır.

Teorem 2.3.2 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda $f: B \to B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Bu teorem sonlu boyutlu uzaylarda geçerlidir. Yani, Brouwer'ın bu teoremi herhangi bir sonsuz boyutlu Banach uzayında geçerli değildir. Bu durumu bir örnekle izah edelim.

Örnek 2.3.3: B, c_0 Banach uzayında bir kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, \ldots)$ için

$$T: B \to B,\ T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \ldots)$$

dönüşümünü alalım. Her $x, y \in B$ için

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin B de bir çözümü yoktur.

Teorem 2.3.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ boş olmayan kompakt konveks bir alt küme ve $f: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Teorem 2.3.5 (Banach Daralma İlkesi): (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olsun. Önce $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ve sonra da bu dizinin limit noktasının $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. $n, p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\
&\leq kd(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \\
&= kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \\
&\leq k^2 d(x_{n+p-2}, x_{n-2}) \leq \cdots \\
&\leq k^n d(x_{n+p-n}, x_{n-n}) = k^n d(x_p, x_0) \\
&\leq k^n(d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)) \\
&\leq k^n(kd(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)) \\
&= k^n(d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + kd(x_{p-1}, x_{p-2})) \\
&\leq k^n[d(x_{p-2}, x_0) + kd(x_{p-2}, x_{p-3}) + k^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})] \\
&\vdots \\
&\leq k^n(d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2 d(x_1, x_0) + \cdots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)(1 + k + k^2 + k^3 + \cdots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)\left(\frac{1}{1-k}\right), \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

dır. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(x_{n+p}, x_n) \to 0$ elde edilir. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x$ ve dolayısıyla $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ de $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y, T nin başka bir sabit noktası yani, $Ty = y$ olsun. Bu durumda

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

olur. Bu ise $d(x,y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü

$$\begin{aligned} d(x,y) \leq kd(x,y) &\Rightarrow d(x,y) - kd(x,y) \leq 0 \\ &\Rightarrow d(x,y)[1-k] \leq 0 \end{aligned}$$

dir. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. Dolayısıyla hem $1 - k > 0$ hem de $d(x,y) \geq 0$ olduğundan $d(x,y)[1-k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x,y) = 0$ olması gerekir. Bu da $x = y$ demektir.

Örnek 2.3.6: $X = [a,b]$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a,b)$ için

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartını sağlıyorsa bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a,b]$ için $c \in (a,b)$ olmak üzere

$$|Tx - Ty| = T'(c)|(x-y)| \leq k|x-y|$$

olur. Böylece Banach Daralma İlkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 2.3.6: $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $T: K \to K$, $Tx = \frac{x}{6}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{6}$ olarak seçelim. Buradan

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{36}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{216}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{1296}$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0$$

$$\vdots$$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ dir. Sabit nokta tanımından da

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{6} = x \Rightarrow\ x = 6x \Rightarrow x = 0$$

dır. Yani $x = 0$, T dönüşümünün sabit noktasıdır. Ancak dönüşümlerin sabit noktalarını tanımdan hareket ederek bulmak her zaman kolay değildir. Bu sebeple farklı dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının bulunmasında iterasyon metodları kullanılır.

Teorem 2.3.7: (X,d) bir tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0, T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.3.8: (X,d) bir tam metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere $T: D(x_0,r) \to X$ k-daraltan bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(Tx_0,x_0) < (1-k)r$$

ise bu durumda T dönüşümü $D(x_0,r)$ diskinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal *et al*. 2001).

İspat: $d(Tx_0,x_0) < (1-k)r_0$ olmak üzere $0 \le r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 vardır. Göstereceğiz ki $T: \overline{D(x_0,r_0)} \to \overline{D(x_0,r_0)}$ dir. $x \in \overline{D(x_0,r_0)}$ için

$$d(Tx, x_0) \leq d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0) \leq kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \leq r_0$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden dolayı T nin $\overline{D(x_0, r_0)} \subset D(x_0, r_0)$ da bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.3.9: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$$

dır (Khamsi and Kırk 2001).

İspat: $x \in X$ için

$$\phi(x) = d(x, Tx),$$

şartını sağlayan bir $\phi: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda ϕ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden ϕ, bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir. Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise

$$d(T^{n+1}x, x_0) = d(T^{n+1}x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \to \infty$ için

$$r = \lim_{n\to\infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca X kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi yakınsak bir $(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k+1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin x_0 noktasına yakınsadığını gösterir. O halde, $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$ dır.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktasının olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.10: $X = (0,1]$ ve $T: X \to X$, $Tx = \frac{3x}{5}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = \left|\frac{3x}{5} - \frac{3y}{5}\right| = \frac{3}{5}|x-y| = \frac{3}{5}d(x,y)$$

olduğundan T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin X de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımından $\frac{3x}{5} = x \Rightarrow 3x = 5x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0,1] = X$ olduğundan T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Aşağıdaki örnekte tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 2.3.11: $X = c_0$ Banach uzayı ve $K = B_X = \{x \in c_0 : \|x\| \le 1\}$ kapalı birim yuvarı verilsin. Her $x \in K$ için

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) = (1, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

şeklinde tanımlanan $T: K \to K$ dönüşümünü alalım. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $x = (1,1,1,\ldots)$, T nin bir sabit noktasıdır. Fakat $x = (1,1,1,\ldots) \notin c_0$ dır. Yani, T genişlemeyen dönüşümü c_0 uzayında bir sabit noktaya sahip değildir.

Yine tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktasının olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.12: $X = [1,\infty)$ kümesi üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriği ve $T: X \to X$, $Tx = x + \frac{1}{x^2}$ dönüşümü verilsin. $x \ne y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= |Tx - Ty| \\ &= \left|x + \frac{1}{x^2} - y - \frac{1}{y^2}\right| \\ &= \left|\frac{x^3y^2 + y^2 - x^2y^3 - x^2}{x^2y^2}\right| \\ &\leq \frac{|x-y||x^2y^2 - (x+y)|}{x^2y^2} \end{aligned}$$

olur. Burada her $x, y \in X = [1, \infty)$ için $\frac{|x^2y^2-(x+y)|}{x^2y^2} \leq 1$ olacağından

$$\frac{|x-y||x^2y^2 - (x+y)|}{x^2y^2} < |x-y|$$

olur ki bu da $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ şartının sağlandığını gösterir. O halde, T bir daraltan dönüşüm değildir fakat kesin daraltan bir dönüşümdür. Dikkat edilirse burada T nin bir sabit noktası yoktur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır. Bunlardan bazıları, Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu, Krasnoselskij iterasyon metodu, Mann iterasyon metodu, Ishikawa iterasyon metodu, Noor iterasyon metodu, Rhoades'in n-adım iterasyon metodu ve S iterasyon metodudur.

Picard İterasyon Metodu: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T : K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \;\; n = 1,2, \dots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Örnek 3.1.1: $X = [0,1]$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1) Picard iterasyonu,

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 = 1 - a \\
x_2 &= Tx_1 = T^2 x_0 = a \\
x_3 &= Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = 1 - a \\
&\;\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0 \\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup bu da $(a, 1-a, a, 1-a, \ldots)$ salınımlı dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla istenilen sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon metodlarını göz önüne almak gerekir.

Krasnoselskij İterasyon Metodu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : N \to N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0,1,2, \ldots \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Kirk İterasyon Metodu: X bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $i = 0,1,2, \ldots, k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir.

(3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

Mann İterasyon Metodu: W. R. Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n\,, \quad n = 0,1,2, \ldots \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

W. R. Mann'ın bulmuş olduğu sonuçlar Franks and Marzec (1971) çalışmasında, aynı şekilde Franks ve Marzec'in sonuçları da Rhoades (1974) çalışmasında genişletilmiştir. Yine Rhoades (1974) çalışmasıyla, herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Örnek 3.1.2: $X = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kümesi üzerinde $T: X \to X$, $Tx = \frac{1}{x}$ olarak tanımlanırsa Mann iterasyonu bu dönüşümün sabit noktası olan $x = 1$ e yakınsar.

Ishikawa İterasyon Metodu: 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır (Berinde 2006). X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n\,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \;\; n = 0,1,2,\dots \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Ishikawa 1974).

(3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

B. E. Rhoades ve Ş. M. Şoltuz, 2003-2004 yıllarında dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının, Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

Noor İterasyon Metodu: 2000 yılında M. A. Noor tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \,, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \ \ n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Noor 2000).

Xu ve Noor, Noor iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinden kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır (Xu and Noor 2002).

***n*-Adım İterasyon (Multistep Iteration) Metodu:** 2004 yılında, B. E. Rhoades ve Ş. M. Şoltuz tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere n-adım iterasyonu $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = \left(1-\beta_n^i\right)x_n + \beta_n^i T z_n^{i+1}, \\ z_n^{p-1} = \left(1-\beta_n^{p-1}\right)x_n + \beta_n^{p-1} T x_n, \quad i = 1,2,\dots,p-2 \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\{\alpha_n\} \subset (0,1), \ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \, , \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve

$$\{\beta_n^i\} \subset [0,1) \, , \ 1 \le i \le p-1 \, , \ \lim_{n\to\infty} \beta_n^1 = 0$$

dır (Rhoades and Şoltuz 2004).

S-İterasyon Metodu: X bir lineer uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \ \ n \ge 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dir (Agarwal-O'Regan-Sahu 2007).

S-iterasyon yöntemi Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden bağımsızdır. Yani S-iterasyonu ile Mann veya Ishikawa iterasyonu birbirinden elde edilemez. Agarwal-O'Regan-Sahu, daraltan dönüşümler için S-iterasyon yönteminin yakınsama hızının Picard iterasyon yönteminin yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir.

Modifiye Edilmiş S-İterasyon Metodu: X bir lineer uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere modifiye edilmiş S-iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)T^n x_n + \alpha_n T^n y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n, \ \ n \ge 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dir (Agarwal-O'Regan-Sahu 2007).

Agarwal-O’Regan-Sahu, çeşitli dönüşümler için hem S-iterasyon hem de modifiye edilmiş S-iterasyon yönteminin dönüşümün sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsamasını incelemişlerdir.

3.2. Bazı Önemli Tanımlar ve Lemmalar

Bu kısımda çalışmamızda kullanacağımız bazı tanım ve lemmalar verilmiştir.

Tanım 3.2.1 (Zayıf Inward Şartı): E bir Banach uzay ve K da E nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $x \in K$ için inward küme $I_K(x)$ ile gösterilir ve

$$I_K(x) = \{y \in E: y = x + \lambda(z - x), z \in K, \lambda \geq 0\}$$

şeklinde tanımlanır. $T: K \to E$ bir dönüşüm olsun. T dönüşümü her $x \in K$ için $Tx \in I_K(x)$ ise inward şartını, $Tx \in \overline{I_K(x)}$ ise zayıf inward şartını sağlıyor denir. (Burada $\overline{I_K(x)}$, $I_K(x)$ kümesinin kapanışıdır.)

Kendi üzerine tanımlı olmayan bir dönüşüm için ele alınan iterasyon şeması iyi tanımlı olmayabilir. Bu iterasyon şemasını iyi tanımlı yapabilmek için bir çekme dönüşümüne ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.2.2 (Çekme): E bir reel Banach uzayı ve K da E nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $Px = x$ olacak şekilde $P: E \to K$ sürekli dönüşümü varsa K ya E nin bir çekilmesi (retract) denir. Eğer $P: E \to E$ dönüşümü $P^2 = P$ şartını sağlıyorsa P ye bir çekme (retraction) denir. P dönüşümü bir çekme ise o zaman P nin görüntü kümesindeki her y için $Py = y$ dir.

Tanım 3.2.3 (Sunny Genişlemeyen Çekme): E bir Banach uzayı, C ve D, E nin iki alt kümesi olsun. $\forall x \in C$ ve $t \geq 0$ için $P\big(Px - t(x - Px)\big) = Px$ ise $P: C \to D$ dönüşümüne sunny çekme denir. Sunny çekme aynı zamanda genişlemeyen dönüşüm ise sunny genişlemeyen çekme olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.4: X bir Banach uzay, K da X in boştan farklı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun.

(i) K daki $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf ve $\{Tx_n\}$ dizisi p ye kuvvetli yakınsadığında $Tx^* = p$ oluyorsa T dönüşümüne p de demicloseddir denir.

(ii) Her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin bir $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisi var ve $\left\{Tx_{n_j}\right\}$ dizisi T nin görüntü kümesinde yakınsak ise, T dönüşümüne tamamen süreklidir denir. Bir dönüşüm sürekli ve kompakt ise tamamen süreklidir.

(iii) K daki $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ şartını sağlayan her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin K da bir x^* noktasına güçlü yakınsayan $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisi var ise T dönüşümüne semikompakttır denir.

Tanım 3.2.5 (Opial Şartı): Bir X Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması her $y \neq x$ için

$$\underset{n\to\infty}{limsup}\|x_n - x\| < \underset{n\to\infty}{limsup}\|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, bu durumda X Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Bu eşitsizlikteki "lim sup" ifadeleri "lim inf" ile yer değiştirirse benzer bir şart elde edilir. Yine aynı eşitsizlikte "<" yerine "≤" alınırsa zayıf Opial şartı olarak adlandırılan şart elde edilir.

Örnek 3.2.6: Her Hilbert uzayı Opial şartını sağlar. Yani bir H Hilbert uzayında $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ noktasına zayıf yakınsak ise her $y \in H$ ve $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$$

dir. Her zayıf yakınsak dizi sınırlı olduğundan $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$ sonludur.

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle$$

olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|^2 > \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2$$

elde edilir.

Tanım 3.2.7 ((A) Şartı): K, X Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\|x - Tx\| \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise T ye (A) şartını sağlıyor denir (Senter and Dotson 1974). Burada $d\big(x, F(T)\big) = \inf_{y \in F(T)} d(x, y)$ dir. Tan ve Xu ya göre (A) şartı, K nın kompaktlığından daha zayıftır (Tan and Xu 1993).

Khan ve Fukhar-ud-din, $T_1, T_2: K \to K$ iki dönüşüm için (A) şartını aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir.

Tanım 3.2.8 ((A') Şartı): X Banach uzayının boştan farklı bir K alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to K$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{2}(\|x - T_1x\| + \|x - T_2x\|) \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise, $T_1, T_2: K \to K$ dönüşümleri (A') şartını sağlıyor denir (Khan and Fukhar-ud-din 2005). Ayrıca $T_1 = T_2 = T$ olarak alınırsa (A) şartının (A') nün özel bir hali olduğu görülür.

(A') şartı üç dönüşüm için aşağıdaki gibi tanımlanır.

X Banach uzayının boştan farklı bir K alt kümesi ve $T_1, T_2, T_3: K \to K$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{3}(\|x - T_1x\| + \|x - T_2x\| + \|x - T_3x\|) \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise $T_1, T_2, T_3 : K \to K$ dönüşümleri (A') şartını sağlıyor denir.

Lemma 3.2.9: $\{r_n\}$ ve $\{t_n\}$

$$r_{n+1} \leq (1 + t_n)r_n\,, \;\; n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} r_n$ limiti vardır.

İspat: $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} r_{n+m+1} &\leq (1 + t_{n+m})r_{n+m} \\ &\leq (1 + t_{n+m})r_{n+m} \\ &\leq (1 + t_{n+m})(1 + t_{n+m-1})r_{n+m-1} \\ &\vdots \\ &\leq \left(\prod_{i=n}^{n+m}(1 + t_i)\right) r_n \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\lim sup_{m\to\infty}\, r_m \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty}(1 + t_i)\right) r_n$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty}(1 + t_i) = 1$ elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikden $\lim\,\sup_{n\to\infty} r_n \leq \lim\,\inf_{n\to\infty} r_n$ eşitsizliği yazılabilir. O halde $\lim_{n\to\infty} r_n$ limiti vardır.

Lemma 3.2.10: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve $t \in (0,1)$ olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X de iki dizi olmak üzere uygun bir $s \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq s\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq s\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \|tx_n + (1 - t)y_n\| = s$$

şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

İspat: $s = 0$ için ispat açıktır. $s > 0$ olsun. Kabul edelim ki $\{x_n - y_n\}$ dizisi sıfıra yakınsasın. Bu durumda $\{x_n - y_n\}$ dizisinin $\inf_i \left\|x_{n_i} - y_{n_i}\right\| > 0$ olacak şekilde $\left\{x_{n_i} - y_{n_i}\right\}$ alt dizisi vardır. $\lim\sup_{n\to\infty}\|x_n\| \leq s$ ve $\lim\sup_{n\to\infty}\|y_n\| \leq s$ olduğundan $\left\|x_{n_i}\right\| \leq r$, $\left\|y_{n_i}\right\| \leq r$ olacak şekilde $\{n_i\}$ alt dizisi için $r \in (s, s+1)$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) < 1 \text{ ve } \left\|x_{n_i} - y_{n_i}\right\| \geq \varepsilon > 0$$

olacak şekilde $r \geq \varepsilon > 0$ seçebiliriz. X düzgün konveks olduğundan her $t \in (0,1)$, $r > 0$, $x, y \in X$, $\|x\| \leq r$ ve $\|y\| \leq r$ için

$$\|tx + (1-t)y\| \leq r\left[1 - 2\min\{t, 1-t\}\delta_X\left(\frac{\|x-y\|}{r}\right)\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\left\|t_{n_i}x_{n_i} + (1-t_{n_i})y_{n_i}\right\| &\leq r\left[1 - 2t_{n_i}(1-t_{n_i})\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right]\\ &\leq r\left[1 - 2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right] < s\end{aligned}$$

olur. Bu durum hipotezle çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.11: E smooth bir reel Banach uzayı, K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: K \to E$ zayıf inward şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F(PT) = F(T)$ dir (Chidume 2009).

İspat: $F(T) \subseteq F(PT)$ olduğu açıkca görülmektedir. $F(PT) \subseteq F(T)$ olduğunu gösterelim. $F(PT) \nsubseteq F(T)$ olduğunu farzedelim. O halde $x \notin F(T)$ olacak şekilde $x \in F(PT)$ vardır. Fakat T zayıf inward olduğundan dolayı bir $\lambda > 1$ ve $u \neq x$ için $Tx = x + \lambda(u - x)$ olacak şekilde $u \in K$ vardır. $u = x$ ise $Tx = x$ olur. $x \notin F(T)$ olduğu için bu bir çelişkidir. P sunny genişlemeyen olduğundan dolayı her $t \geq 0$ için $P[PTx + t(Tx - PTx)] = x$ dir. Fakat $PTx = x$ olduğundan her $t \geq 0$ için $P[tTx + (1-t)x] = x$ olur. T zayıf inward ve $u \in K$ için $Pu = u$ olduğundan $u := t_0Tx + (1-t_0)x$ olacak şekilde $t_0 \in (0,1)$ vardır. Bu ise $u = Pu = x$ olmasını gerektirir.

$x \neq u$ olduğundan dolayı bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $F(PT) \subseteq F(T)$ olması gerekir. Bu durumda $F(PT) = F(T)$ dir.

3.3. Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler

Bu başlık altında asimptotik genişlemeyen dönüşümler kullanılarak yapılan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya sahip olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

Teorem 3.3.1: X düzgün konveks bir Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, K da bir sabit noktaya sahiptir (Goebel and Kirk 1972).

İspat: $y \in K$ ve $r > 0$ için y merkezli ve r yarıçaplı $B(y, r)$ yuvarını göz önüne alalım.

$$K \cap \left(\cap_{i=k}^{\infty} B(T^i y, r)\right) \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısının olduğu, bütün r sayılarından oluşan küme R_y olarak tanımlansın. Şeklinde tanımlansın. Eğer d, K nın çapı yani $d = \operatorname{diam}(K)$ ise $d \in R_y$ dir. Böylece $R_y \neq \emptyset$ dir. $r_0 = \inf\{r : r \in R_y\}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon = \cup_{k=1}^{\infty} \left(\cap_{i=k}^{\infty} B(T^i y, r_0 + \varepsilon)\right)$$

tanımlanabilir (Kirk 1969). O halde her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon \cap K$ kümesi boştan farklı ve konvekstir. X uzayının yansımalı olması

$$\cap_{\varepsilon > 0} \left(\overline{K_\varepsilon} \cap K\right) \neq \emptyset$$

olmasını gerektirir. $x \in \cap_{\varepsilon > 0} \left(\overline{K_\varepsilon} \cap K\right)$, $\eta > 0$ ve $n \geq n_0$ için

$$\|x - T^n y\| \leq r_0 + \eta$$

olacak şekilde bir n_0 tamsayısı vardır. Şimdi $x \in \cap_{\varepsilon>0} (\overline{K_\varepsilon} \cap K)$ elemanı için $\{T^n x\}$ dizisinin x noktasına kuvvetli yakınsamadığını kabul edelim. Bu durumda her $i = 1,2, \ldots$ için

$$\|T^{n_i}x - x\| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $\{T^n x\}$ in bir $\{T^{n_i}x\}$ alt dizisi vardır. T^n in Lipschitz sabiti k_n olsun. O halde $m > n$ için

$$\|T^n x - T^m x\| \leq k_n \|x - T^{m-n}x\|$$

dir.

$$\left(1 - \delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r_0 + \alpha}\right)\right)(r_0 + \alpha) < r_0$$

eşitsizliğini sağlayan $r_0 > 0$ ve $\alpha > 0$ sayılarının olduğunu kabul edelim. $\|x - T^n x\| \geq \varepsilon$ ve $k_n\left(r_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \leq r_0 + \alpha$ olacak şekilde bir n sayısı seçelim. Eğer $n_0 \geq n$ yeteri kadar büyükse bu durumda $m > n_0$ için

$$\|x - T^{m-n}y\| \leq r_0 + \frac{\alpha}{2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|T^n x - T^m y\| \leq k_n \|x - T^{m-n}y\| \leq k_n\left(r_0 + \frac{\alpha}{2}\right) \leq r_0 + \alpha$$

ve

$$\|x - T^m y\| \leq r_0 + \alpha$$

olup, $m > n_0$ için X in düzgün konveksliğinden

$$\left\|\frac{1}{2}(x + T^n x) - T^m y\right\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{\varepsilon}{r_0 + \alpha}\right)\right)(r_0 + \alpha) < r_0$$

elde edilir. Bu ise r_0 ın tanımına terstir. Böylece $r_0 = 0$ veya $x = Tx$ sonucu elde edilir. Fakat $r_0 = 0$, $\{T^n y\}$ nin bir Cauchy dizisi olmasını gerektirir ve böylece $\lim_{n\to\infty} T^n y = x = Tx$ olur. Bu durumda $\cap_{\varepsilon>0} (\overline{K_\varepsilon} \cap K)$, T nin bir sabit noktasını ihtiva eden tek nokta kümesidir.

Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının kümesinin kapalı ve konveks olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

Teorem 3.3.2: X düzgün konveks bir Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $F(T)$ kümesi kapalı ve konvekstir (Goebel and Kirk 1972).

İspat: T dönüşümü sürekli olduğundan $F(T)$ kümesi daima kapalıdır. $x, y \in F(T)$ olsun. $F(T)$ nin konveks olduğunu ispat etmek için $z = (x + y)/2 \in F(T)$ olduğunu göstermek gerekir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|x - T^n z\| = \|T^n x - T^n z\| \leq k_n \|x - z\| = \frac{1}{2} k_n \|x - y\|,$$

$$\|y - T^n z\| = \|T^n y - T^n z\| \leq k_n \|y - z\| = \frac{1}{2} k_n \|x - y\|,$$

dir. X düzgün konveks olduğundan

$$\|z - T^n z\| \leq \frac{1}{2}\left[1 - \delta_X\left(\frac{2}{k_n}\right)\right] k_n \|x - y\| \leq \frac{1}{2}\left[1 - \delta_X\left(\frac{2}{k_n}\right)\right] k_n \mathrm{diam}(K)$$

olur. Böylece $n \to \infty$ limit alınırsa, $T^n z \to z$ elde edilir. T dönüşümünün sürekliliğinden z, T nin bir sabit noktasıdır.

3.4. Kendi Üzerine Tanımlı Olmayan Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler

Kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramı, asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin önemli bir genelleştirmesi olarak ilk defa Chidume *et al.* (2003) ile tanımlanmıştır.

Pek çok yazar üzerine olmayan genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için değişik iterasyon şemaları oluşturup çalışmışlardır. Ancak üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşmak için iterasyon şemalarına çok fazla dikkat edilmemiştir. Bu durumun sebebi T üzerine dönüşüm olmadığında T^n dönüşümünün anlamsız olmasıdır. Bu sebeple üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık teoremleri oluşturmak amacıyla Chidume ve diğerleri aşağıdaki tanımı ortaya koymuşlardır**.**

Tanım 3.4.1: K, bir E reel normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $P: E \to K$ dönüşümü E nin K üzerindeki bir genişlemeyen çekmesi olsun.

(i) Her $x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n\|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, $T: K \to E$ dönüşümüne asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

(ii) $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her $x \in K$ ve $p \in F(T)$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n\|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, $T: K \to E$ dönüşümüne asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

(iii) Her $x, y \in K$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ reel sayısı varsa, $T: K \to E$ dönüşümüne düzgün L-Lipschitzian dönüşüm denir.

Ayrıca Chidume *et al*. (2003),

$$\begin{cases} x_1 \in K \\ x_{n+1} = P\big((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(PT)^{n-1}x_n\big) \end{cases}, \ \forall n \geq 1 \qquad (3.11)$$

iterasyon şemasını kullanarak düzgün konveks Banach uzayda üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için güçlü ve zayıf yakınsama teoremleri ve demiclosed prensibini elde etmiştir. Bu teoremler ve demiclosed prensibi aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.4.2 (Üzerine olmayan dönüşümler için demiclosed prensibi): E düzgün konveks reel Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks altkümesi olsun. $T: K \to E$ asimptotik genişlemeyen dönüşüm ise $(I - T)$ sıfırda demiclosedtır (Chidume *et al*. 2003).

İspat: $\{x_n\}$, K de bir dizi, $n \to \infty$ için $x_n \rightharpoonup x^* \in K$ ve $(I - T)x_n \to 0$ olsun. $(I - T)x^* = 0$ olduğunu ispatlayacağız. $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf yakınsak olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla $\{x_n\} \subset C = K \cap \bar{B}_r(0)$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. Böylece C, K da boştan farklı, kapalı, konveks ve sınırlı bir kümedir. Şimdi iddiamız $n \to \infty$ için

$$T(PT)^{n-1}x^* \to x^* \tag{3.12}$$

dir. Buna göre $\{x_n\}$ dizisi x^* a zayıf yakınsadığından Mazur'un teoreminden her $n > 1$ için $t_i^{(n)} \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} = 1$ olacak şekilde

$$y_n = \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} x_{i+n}$$

konveks kombinasyonu vardır ve $n \to \infty$ için

$$\|y_n - x^*\| \to 0 \tag{3.13}$$

dır (Wojtaszczyk 1991). Bununla birlikte $\{(I - T)x_n\}$ dizisi 0 a kuvvetli yakınsak olduğundan her $n \geq N$, $j \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|(I - T)x_n\| \leq \frac{1}{\left(1 + k_1 + k_2 + \cdots + k_{j-1}\right)} < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon, j) > 0$ sayısı vardır. Tanım 3.4.3 ten, P genişlemeyen bir dönüşüm olup, her $n \geq N$ için

$$\left\|\left(I - T(PT)^{j-1}\right)x_n\right\| \leq \|(I - T)x_n\| + \left\|\left(T - T(PT)\right)x_n\right\|$$
$$+ \cdots + \left\|\left(T(PT)^{j-2} - T(PT)^{j-1}\right)x_n\right\|$$

$$\leq \left(1 + k_1 + k_2 + \cdots + k_{j-1}\right)\|x_n - Tx_n\| < \varepsilon \tag{3.14}$$

elde edilir. $T: K \to E$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan $T : C \to E$ bir asimptotik genişlemeyen dönüşümdür. Dolayısıyla her $j \geq 1$ için $k_j \geq 1$ Lipschitz sabitine sahip $T(PT)^{j-1} : C \to E$ dönüşümü bir Lipschitzian dönüşümdür. Ayrıca

$$\left\|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\right\| \leq \left\|T(PT)^{j-1}y_n - \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} T(PT)^{j-1}x_{i+n}\right\|$$

$$+ \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} \left\|T(PT)^{j-1}x_{i+n} - x_{i+n}\right\| \tag{3.15}$$

dir. (3.14) eşitsizliğini kullanarak her $n \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} \left\|T(PT)^{j-1}x_{i+n} - x_{i+n}\right\| < \varepsilon \tag{3.16}$$

yazılabilir. (3.14) eşitsizliği ve X in düzgün konveksliğinden, her $n \geq N$ için

$$\left\|T(PT)^{j-1}y_n - \sum_{i=1}^{m(n)} t_i^{(n)} T(PT)^{j-1}x_{i+n}\right\| \leq k_j \phi^{-1}\left(2\varepsilon + 2r\left(1 - k_j^{-1}\right)k_j\right) \tag{3.17}$$

olacak şekilde kesin artan sürekli ve konveks bir $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ fonksiyonu vardır (Chang *et al.* 2001). (3.15) eşitsizliğinde (3.16) ve (3.17) kullanılırsa

$$\left\|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\right\| \leq k_j \phi^{-1}\left(2\varepsilon + 2r\left(1 - k_j^{-1}\right)k_j\right) + \varepsilon$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $\limsup$ u alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\right\| \leq k_j \phi^{-1}\left(2r\left(1 - k_j^{-1}\right)k_j\right) \tag{3.18}$$

elde edilir. Diğer taraftan herhangi bir $j \geq 1$ için (3.13) ten

$$\left\|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\right\| \leq \left\|T(PT)^{j-1}x^* - T(PT)^{j-1}y_n\right\| + \left\|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\right\|$$

$$+\|y_n - x^*\|$$

$$\leq \left(k_j + 1\right)\|y_n - x^*\| + \left\|T(PT)^{j-1}y_n - y_n\right\|$$

yazılabilir. (3.18) eşitsizliği kullanılarak üstteki eşitsizliğin her iki tarafının lim sup u alınırsa

$$\|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\| \leq k_j \phi^{-1}\left(2r\left(1-k_j^{-1}\right)k_j\right)$$

elde edilir. Yine yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının lim sup u alınırsa

$$\limsup_{j\to\infty} \|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\| \leq \phi^{-1}(0) = 0$$

olur. Bu da $j \to \infty$ iken $\|T(PT)^{j-1}x^* - x^*\| \to 0$ olmasını gerektirir. Böylece (3.12) de ki iddiamız sağlanmış olur. TP nin sürekliliğinden

$$\lim_{j\to\infty} TP\left(T(PT)^{j-1}x^*\right) = TPx^* = Tx^* = x^*$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.3: E reel düzgün konveks Banach uzay ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks altkümesi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$ olmak üzere $T: K \to E$ asimptotik genişlemeyen tamamen sürekli bir dönüşüm ve $F(T) \neq \phi$ olsun. $\{\alpha_n\}$, $\epsilon > 0$ için $\epsilon \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - \epsilon$ şartını sağlayan (0,1) aralığında bir dizi olsun. $x_1 \in K$ olmak üzere (3.11) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Chidume *et al.* 2003).

Teorem 3.4.4: E Frechet diferansiyellenebilir norma sahip reel düzgün konveks Banach uzay ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks altkümesi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$ olmak üzere $T: K \to E$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \phi$ olsun. $\{\alpha_n\}$, $\epsilon > 0$ için $\epsilon \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - \epsilon$ şartını sağlayan (0,1) aralığında bir dizi olsun. $x_1 \in K$ olmak üzere (3.11) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Chidume *et al*. 2003).

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.4.4 ten elde edilir.

Sonuç 3.4.5: E Frechet diferansiyellenebilir norma sahip reel düzgün konveks Banach uzay, K da E nin boş olmayan kapalı konveks altkümesi olsun. $T: K \to E$ genişlemeyen dönüşüm ve $F(T) \neq \phi$ olsun. $\{\alpha_n\}$, $\epsilon > 0$ için $\epsilon \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - \epsilon$ şartını sağlayan $(0,1)$ aralığında bir dizi olsun. $x_1 \in K$ olmak üzere (3.11) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Chidume *et al*. 2003).

Uyarı 3.4.6: Eğer T üzerine dönüşüm ise P birim dönüşümdür. Böylece kendi üzerine olmayan dönüşüm tanımları kendi üzerine dönüşümler için yapılan tanımlara dönüşür. Dikkat edilirse $T: K \to E$ asimptotik genişlemeyen dönüşüm ve $P: E \to K$ genişlemeyen çekme ise $PT: K \to K$ kendi üzerine tanımlı asimptotik genişlemeyen dönüşüm olur. Gerçekten Chidume, Ofoedu ve Zegeye'nin tanımı gözönüne alınırsa $\forall x, y \in K$ için

$$\begin{aligned} \|(PT)^n x - (PT)^n y\| &= \|PT(PT)^{n-1}x - PT(PT)^{n-1}y\| \\ &\leq \|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y \\ &\leq k_n\|x - y\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan hareketle Zhou *et al.* (2007) üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen ve düzgün lipshitzian dönüşümler için yeni bir tanım oluşturmuştur.

Tanım 3.4.7: K, bir E reel normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $P: E \to K$ dönüşümü E nin K üzerindeki bir genişlemeyen çekmesi olsun.

(i) Her $x, y \in K$ için

$$\|(PT)^n x - (PT)^n y\| \leq k_n\|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, $T: K \to E$ dönüşümüne asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

(ii) Her $x, y \in K$ için

$$\|(PT)^n x - (PT)^n y\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ reel sayısı varsa, $T: K \to E$ dönüşümüne düzgün L-Lipschitzian dönüşüm denir.

Zhou *et al.* (2007) aşağıdaki iterasyon şemasını vermiştir.

E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T_1, T_2: K \to E,\ P$ ye göre kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Bu durumda $x_1 \in K$ olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon dizisi

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n (PT_1)^n x_n + \gamma_n (PT_2)^n x_n\ ,\ \forall n \geq 1 \qquad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ $(0,1)$ aralığında reel sayı dizileri ve $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ dir.

Zhou bu iterasyon şemasını kullanarak düzgün konveks Banach uzayda üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümler için güçlü ve zayıf yakınsama teoremlerini ve demiclosed prensibini aşağıdaki gibi vermiştir.

Lemma 3.4.8: E reel smooth ve düzgün konveks Banach uzay ve K sunny genişlemeyen P çekmesiyle E'nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $T: K \to E$ zayıf inward ve P'ye göre asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda $I - T$ sıfırda demiclosedtır, yani $x_n \rightharpoonup x$ ve $x_n - Tx_n \to 0$ iken $Tx = x$'dir (Zhou *et al*. 2007).

İspat: Kabul edelim ki $\{x_n\} \subset K$, $x^* \in K$'ya zayıf yakınsasın ve $x_n - Tx_n \to 0$ olsun. $Tx^* = x^*$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten $\{x_n\} \subset K$ olduğu için P'nin özelliğinden $\forall n \geq 1$ için $Px_n = x_n$ dir ve böylece $x_n - Px_n \to 0$ dır. Lemma 3.4.2 den $x^* = PTx^*$ olduğu sonucuna varırız. Lemma 3.2.11 den $F(PT) = F(T)$ olduğundan $Tx^* = x^*$ elde edilir.

Teorem 3.4.9: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ olmak üzere $T_1, T_2: K \to E,\ P$ çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca

$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ $\varepsilon > 0$ için $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (3.19) deki gibi tanımlansın. Eğer T_1 ve T_2 den biri tamamen sürekli ve $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ dizisi T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar (Zhou *et al.* 2007).

Teorem 3.4.10: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ olmak üzere $T_1, T_2: K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ $\varepsilon > 0$ için $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (3.19) deki gibi tanımlansın. Eğer T_1 ve T_2 den biri demikompakt ve $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ dizisi T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar (Zhou *et al.* 2007).

Teorem 3.4.11: K, Opial şartını sağlayan ya da normu Frechet diferansiyellenebilir olan reel smooth ve düzgün konveks bir reel E Banach uzayının boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - 1) < \infty$ olmak üzere $T_1, T_2: K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ $\varepsilon > 0$ için $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (3.19) deki gibi tanımlansın. Eğer $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ dizisi T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktasına zayıf yakınsar (Zhou *et al.* 2007).

Sonra Turkmen *et al.* (2011) üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için aşağıdaki iterasyon şemasını çalışmış ve dönüşümlerin ortak sabit noktaları için güçlü ve zayıf yakınsama teoremlerini elde etmişlerdir.

E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T_1, T_2: K \to E$, P ye göre kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. Bu durumda $x_1 \in K$ olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon dizisi

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)(PT_1)^n y_n + \alpha_n (PT_2)^n y_n \\ \quad\; y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n (PT_1)^n x_n \end{cases}, \ \forall n \geq 1 \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanır.

Daha sonra Yüce (2011) üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için üç adımdan oluşan aşağıdaki iterasyon şemasını çalışmış ve dönüşümlerin ortak sabit noktaları için güçlü ve zayıf yakınsama teoremlerini elde etmiştir.

E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T_1, T_2: K \to E$, P ye göre kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\beta'_n\}$, $\{\gamma'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$, $\{\beta''_n\}$, $\{\gamma''_n\}$ dizileri $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = \alpha''_n + \beta''_n + \gamma''_n = 1$ şartını sağlayan $[0,1]$ aralığında reel diziler ve $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ K da sınırlı diziler olsun. $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \alpha_n (PT_1)^n y_n + \beta_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n, \\ y_n &= \alpha'_n (PT_1)^n z_n + \beta'_n (PT_2)^n z_n + \gamma'_n v_n, \\ z_n &= \alpha''_n x_n + \beta''_n (PT_1)^n x_n + \gamma''_n w_n, \end{cases} \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilecektir.

Kendi üzerine tanımlı olmayan asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm için yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiştir. İlk olarak bir reel Banach uzayında sonra smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzayında bu iterasyon şeması için kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri verilmiştir.

E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T_1, T_2, T_3: K \to E$, P ye göre kendi üzerine olmayan üç asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında reel sayı dizileri olmak üzere, $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & (1-\alpha_n)(PT_1)^n y_n + \alpha_n (PT_2)^n y_n, \\ y_n & = & (1-\beta_n)(PT_3)^n z_n + \beta_n (PT_1)^n z_n, \quad , n \epsilon \mathbb{N} \\ z_n & = & (1-\gamma_n) x_n + \gamma_n (PT_3)^n x_n \end{array} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu şema kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm için yeni bir iterasyon yöntemidir.

Sonuç 4.1:

(i) (4.1) iterasyon şeması, $T_1 = I$, $T_2 = T$, $P = I$ ve $\beta_n = \gamma_n = 0$ olması durumunda Mann type iterasyon şemasına indirgenir.

(ii) (4.1) iterasyon şeması $PT_3 = I$ olması durumunda Türkmenin iterasyon şemasına indirgenir.

Sonuç 4.1 (ii) den de görüldüğü gibi bizim elde edeceğimiz teoremler ve sonuçlar Turkmen *et al*. (2011) teorem ve sonuçlarının genelleştirmesidir.

$i = 1{,}2{,}3$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\left(k_n^{(i)} - 1\right) < \infty$ ve $\left\{k_n^{(i)}\right\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3: K \to E$, P çekmesine göre üç asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $k_n = \max\left\{k_n^{(1)}, k_n^{(2)}, k_n^{(3)}\right\}$ alınırsa, $i = 1{,}2{,}3$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\left(k_n^{(i)} - 1\right) < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olur. Dolayısıyla çalışmamızın bundan sonraki kısmında T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin her üçü içinde ortak olarak $\{k_n\}$ dizisini kullanılacaktır.

4.1.Reel Banach Uzaylarda Yakınsama Teoremleri

Bu bölümde reel Banach uzaylarında (4.1) iterasyon şemasının dönüşümlerin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsadığı gösterilecektir. Bu teoremi vermeden önce teoremin ispatında kullanacağımız lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.1.1: E reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3: K \to E$, P çekmesine göre üç asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise

i) Her $p \epsilon F$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır.

ii) Her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $p \epsilon F$ için $\|x_{m+n} - p\| \le M\|x_n - p\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır.

İspat:

i) $p \in F$ olsun. (4.1) den

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n(PT_3)^n x_n - p\| \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|(PT_3)^n x_n - p\| \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n k_n\|x_n - p\| \\
&= \big(1 + \gamma_n(k_n - 1)\big)\|x_n - p\| \\
&\le \big(1 + (k_n - 1)\big)\|x_n - p\| \\
&= k_n\|x_n - p\| \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

olur. (4.1) ve (4.2) den dolayı

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|(1-\beta_n)(PT_3)^n z_n + \beta_n (PT_1)^n z_n - p\| \\
&\le (1-\beta_n)\|(PT_3)^n z_n - p\| + \beta_n \|(PT_1)^n z_n - p\| \\
&\le (1-\beta_n)k_n\|z_n - p\| + \beta_n k_n \|z_n - p\| \\
&= (1 + (k_n - 1))\|z_n - p\| \\
&\le k_n(k_n\|x_n - p\|) \\
&= k_n^2\|x_n - p\| \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.1) ve (4.3) ten

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1-\alpha_n)(PT_1)^n y_n + \alpha_n (PT_2)^n y_n - p\| \\
&= \|(1-\alpha_n)((PT_1)^n y_n - p) + \alpha_n((PT_2)^n y_n - p)\| \\
&\le (1-\alpha_n)k_n\|y_n - p\| + \alpha_n k_n \|y_n - p\| \\
&= k_n\|y_n - p\| \\
&\le k_n^3\|x_n - p\| \\
&= (1 + (k_n^3 - 1))\|x_n - p\| \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

bulunur. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olduğundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^3 - 1) < \infty$ dur. (4.4) ve Lemma 3.2.9 dan her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır.

ii) (4.4) ten

$$\|x_{n+1} - p\| \le k_n^3\|x_n - p\|$$

elde edilir. Her $x \ge 0$ için $1 + x \le e^x$ olup, bu yukarıdaki eşitsizlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m} - p\| &\le \big(1 + (k_{n+m-1}^3 - 1)\big)\|x_{n+m-1} - p\| \\
&\le e^{k_{n+m-1}^3 - 1}\|x_{n+m-1} - p\| \\
&\le e^{k_{n+m-1}^3 - 1}[(1 + (k_{n+m-2}^3 - 1))\|x_{n+m-1} - p\|] \\
&\le e^{k_{n+m-1}^3 - 1 + k_{n+m-2}^3 - 1}\|x_{n+m-2} - p\| \\
&\;\vdots \\
&\le e^{\sum_{j=n}^{n+m-1}(k_j^3 - 1)}\|x_n - p\| \\
&\le M\|x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M = e^{\sum_{j=n}^{n+m-1}(k_j^3 - 1)}$ dir. Yani her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $p\epsilon F$ için

$$\|x_{n+m} - p\| \le M\|x_n - p\|$$

dir.

Teorem 4.1.2: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 \colon K \to E$, P çekmesine göre üzerine olmayan üç asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. $\{x_n\}$ iterasyon şemasının T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $d(x_n, F) = \inf\{\|x - p\| \colon p \in F\}$ olmak üzere $\lim\ \inf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik şartı açıktır. Bu yüzden sadece yeterlilik şartını ispatlayacağız. $\lim\ \inf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olduğunu kabul edelim. Lemma 4.1.1 (i) den

$$d(x_{n+1}, F) \leq (1 + (k_n^3 - 1))\mathrm{d}(x_n, \mathrm{F})$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^3 - 1) < \infty$ olduğu için Lemma 3.2.9 dan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ limiti vardır. $\lim\ \inf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ hipotezinden dolayı $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olmalıdır.

Şimdi $\{x_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olduğundan dolayı her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, F) < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}}$$

olacak şekilde bir n_0 sabiti vardır. Burada $M > 0$ Lemma 4.1.1 (ii) deki sabittir. Böylece

$$\|x_{n_0} - p'\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

olacak şekilde $p' \in F$ bulunabilir. $n \geq n_0$ ve $m \in \mathbb{N}$ için Lemma 4.1.1 (ii) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - p'\| + \|x_n - p'\| \\
&\leq M\|x_{n_0} - p'\| + M\|x_{n_0} - p'\| \\
&\leq 2M\|x_{n_0} - p'\| = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$, K kümesinde bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle $\{x_n\}$ dizisi K da bir noktaya yakınsar. $\lim_{n\to\infty} x_n = q$ olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olması $d(q, F) = 0$ olmasını gerektirir. Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının kümesi kapalı olduğundan F kapalıdır. O halde, $q \in F$ dir.

4.2. Düzgün Konveks Banach Uzaylarda Yakınsama Teoremleri

Bu bölümde düzgün konveks reel ve smooth Banach uzaylarda (4.1) iterasyon yönteminin T_1, T_2 ve T_3, P çekmesine göre üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsamasını ispatlayacağız. Bunun için öncelikle ispatlarımızda kullanacağımız aşağıdaki lemma ispatlandı.

Lemma 4.2.1: E düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 : K \to E$, P çekmesine göre üç asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ dizileri bir $a \in (0,1)$ için $[a, 1-a]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - (PT_1)x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - (PT_2)x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - (PT_3)x_n\| = 0$$

dır.

İspat: Lemma 4.1.1 (i) den $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| = c$ olsun. Eğer $c = 0$ ise sonuç açıktır. $c > 0$ olduğunu kabul edelim. (4.1) ve (4.3) eşitsizliklerinin her iki yanının $\limsup$ alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_n - p\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - p\| = c$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} \|y_n - p\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - p\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - p\| = c \tag{4.5}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|(PT_1)^n y_n - p\| \leq k_n \|y_n - p\|$ ve $\|(PT_2)^n y_n - p\| \leq k_n \|y_n - p\|$ dir. Bu eşitsizliklerin her iki tarafının $\limsup$ u alınırsa sırasıyla

$$\lim\ \sup_{n\to\infty}\|(PT_1)^n y_n - p\| \le c \tag{4.6}$$

ve

$$\lim\ \sup_{n\to\infty}\|(PT_2)^n y_n - p\| \le c \tag{4.7}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca

$$c = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - p\| = \lim_{n\to\infty}\|(1-\alpha_n)(PT_1)^n y_n + \alpha_n (PT_2)^n y_n - p\|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\|(1-\alpha_n)((PT_1)^n y_n - p) + \alpha_n((PT_2)^n y_n - p)\|$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|(1-\alpha_n)((PT_1)^n y_n - p) + \alpha_n((PT_2)^n y_n - p)\| = c \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.6), (4.7), (4.8) ve Lemma 3.2.10 dan

$$\lim_{n\to\infty}\|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\| = 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) kullanılarak

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|(1-\alpha_n)(PT_1)^n y_n + \alpha_n (PT_2)^n y_n - p\|\\ &\le \|(PT_1)^n y_n - \mathrm{p}\| + \alpha_n\|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\|\\ &\le k_n\|y_n - p\| + \alpha_n\|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\|\\ &= k_n\|y_n - p\|\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikten

$$c \le \lim\ \inf_{n\to\infty}\|y_n - p\|$$

elde edilir. (4.5) ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - p\| = c$$

bulunur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $\|(PT_3)^n x_n - p\| \le k_n\|z_n - p\|$ ve $\|(PT_1)^n z_n - p\| \le k_n\|z_n - p\|$ dir. Buradan her iki tarafın lim sup u alınırsa

$$\lim\ \sup_{n\to\infty}\|(PT_3)^n z_n - p\| \le c$$

ve

$$\lim\ \sup_{n\to\infty}\|(PT_1)^n z_n - p\| \le c$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \|y_n - p\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)(PT_3)^n z_n + \beta_n (PT_1)^n x_n - p\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)((PT_3)^n z_n - p) + \beta_n((PT_1)^n z_n - p)\|
\end{aligned}
$$

olup, buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)((PT_3)^n z_n - p) + \beta_n((PT_1)^n z_n - p)\| = c$$

bulunur. Lemma 3.2.10 dan

$$\lim_{n\to\infty} \|(PT_1)^n z_n - (PT_3)^n z_n\| = 0 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) dan

$$
\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|(1-\beta_n)(PT_3)^n z_n + \beta_n (PT_1)^n z_n - p\| \\
&\le \|(PT_3)^n z_n - p\| + \beta_n \|(PT_3)^n z_n - (PT_1)^n z_n\| \\
&\le k_n \|z_n - p\| + \beta_n \|(PT_3)^n z_n - (PT_1)^n z_n\| \\
&= k_n \|z_n - p\|
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitsizlikten

$$c \le \liminf_{n\to\infty} \|z_n - p\|$$

elde edilir. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $\|(PT_2)^n x_n - p\| \le k_n \|x_n - p\|$ dir. Her iki tarafın $\limsup$ u alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} \|(PT_2)^n x_n - p\| \le c$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
c = \lim_{n\to\infty} \|z_n - p\| &= \lim_{n\to\infty} \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n (PT_3)^n x_n - p\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(1-\gamma_n)(x_n - p) + \gamma_n((PT_3)^n x_n - p)\|
\end{aligned}
$$

dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|(1-\gamma_n)(x_n - p) + \gamma_n((PT_3)^n x_n - p)\| = c$$

elde edilir. Yine Lemma 3.2.10 dan

$$\lim_{n\to\infty} \|(PT_3)^n x_n - x_n\| = 0 \tag{4.11}$$

bulunur. $z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n(PT_3)^n x_n$ olduğundan

$$\|z_n - x_n\| = \gamma_n\|(PT_3)^n x_n - x_n\|$$

yazılır. Bu nedenle (4.11) den

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n - x_n\| = 0 \tag{4.12}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|(PT_3)^n z_n - x_n\| &\le \|(PT_3)^n z_n - (PT_3)^n x_n\| + \|(PT_3)^n x_n - x_n\| \\ &\le k_n\|z_n - x_n\| + \|(PT_3)^n x_n - x_n\|\end{aligned}$$

olup. (4.11) ve (4.12) den

$$\lim_{n\to\infty}\|(PT_3)^n z_n - x_n\| = 0 \tag{4.13}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\|(PT_1)^n z_n - x_n\| \le \|(PT_1)^n z_n - (PT_3)^n z_n\| + \|(PT_3)^n z_n - x_n\|$$

olup, (4.10) ve (4.13) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}\|(PT_1)^n z_n - x_n\| = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14) ten

$$\begin{aligned}\|y_n - x_n\| &= \|(1-\beta_n)(PT_3)^n z_n + \beta_n(PT_1)^n z_n - x_n\| \\ &\le (1-\beta_n)\|(PT_3)^n z_n - x_n\| + \beta_n\|(PT_1)^n z_n - x_n\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0 \tag{4.15}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\|(PT_1)^n y_n - x_n\| &\le \|(PT_1)^n y_n - (PT_1)^n z_n\| + \|(PT_1)^n z_n - (PT_3)^n z_n\| \\ &\quad + \|(PT_3)^n z_n - x_n\| \\ &\le k_n\|y_n - z_n\| + \|(PT_1)^n z_n - (PT_3)^n z_n\| + \|(PT_3)^n z_n - x_n\| \\ &\le k_n(\|y_n - x_n\| + \|x_n - z_n\|) + \|(PT_1)^n z_n - (PT_3)^n z_n\| \\ &\quad + \|(PT_3)^n z_n - x_n\|\end{aligned}$$

dir. (4.15), (4.12), (4.10) ve (4.13) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}\|(PT_1)^n y_n - x_n\| = 0 \tag{4.16}$$

elde edilir.

$$\|(PT_2)^n y_n - x_n\| \leq \|(PT_2)^n y_n - (PT_1)^n y_n\| + \|(PT_1)^n y_n - x_n\|$$

ifadesinde (4.9) ve (4.16) kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|(PT_2)^n y_n - x_n\| = 0 \tag{4.17}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|(1-\alpha_n)(PT_1)^n y_n + \alpha_n (PT_2)^n y_n - x_n\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|(PT_1)^n y_n - x_n\| + \alpha_n\|(PT_2)^n y_n - x_n\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

ifadesinde (4.16) ve (4.17) kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = 0 \tag{4.18}$$

bulunur. (4.16) dan

$$\begin{aligned}\|x_n - (PT_1)^n x_n &\leq \|x_n - (PT_1)^n y_n\| + \|(PT_1)^n y_n - (PT_1)^n x_n\| \\ &\leq \|x_n - (PT_1)^n y_n\| + k_n\|y_n - x_n\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_1)^n x_n\| = 0 \tag{4.19}$$

olur. (4.16), (4.9) ve (4.15) den

$$\begin{aligned}\|x_n - (PT_2)^n x_n\| &\leq \|x_n - (PT_1)^n y_n\| + \|(PT_1)^n y_n - (PT_2)^n y_n\| \\ &\quad + \|(PT_2)^n y_n - (PT_2)^n x_n\| \\ &\to 0\end{aligned}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_2)^n x_n\| = 0$$

elde edilir. P çekmesine göre her asimptotik genişlemeyen dönüşüm yine P çekmesine göre düzgün L-Lipschitzian dönüşüm olduğundan dolayı $L = \sup_{n\geq 1}\{k_n\} \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|x_n - (PT_1)x_n\| &\le \|x_n - \mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}\| + \|x_{n+1} - (PT_1)^{n+1}\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}\| \\ &\quad + \|(PT_1)^{n+1}x_{n+1} - (PT_1)^{n+1}x_n\| + \|(\mathrm{PT}_1)^{\mathrm{n+1}}\mathrm{x}_{\mathrm{n}} - (\mathrm{PT}_1)\mathrm{x}_{\mathrm{n}}\| \\ &\le \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - (\mathrm{PT}_1)^{\mathrm{n+1}}x_{n+1}\| + k_n\|\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}} - x_n\| \\ &\quad + L\|(PT_1)^n x_n - x_n\|\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlikte (4.18) ve (4.19) kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_1)x_n\| = 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\|x_n - (PT_2)x_n\| &\le \|x_n - \mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}\| + \|x_{n+1} - (PT_2)^{n+1}\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}\| \\ &\quad + \|(PT_2)^{n+1}x_{n+1} - (PT_2)^{n+1}x_n\| + \|(\mathrm{PT}_2)^{\mathrm{n+1}}\mathrm{x}_{\mathrm{n}} - (\mathrm{PT}_1)\mathrm{x}_{\mathrm{n}}\| \\ &\le \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - (\mathrm{PT}_2)^{\mathrm{n+1}}x_{n+1}\| + k_n\|\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}} - x_n\| \\ &\quad + L\|(PT_2)^n x_n - x_n\|\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlikte (4.18) ve (4.19) kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_2)x_n\| = 0$$

elde edilir. Yine aynı şekilde

$$\begin{aligned}\|x_n - (PT_3)x_n\| &\le \|x_n - \mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}\| + \|x_{n+1} - (PT_3)^{n+1}\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}}\| \\ &\quad + \|(PT_3)^{n+1}x_{n+1} - (PT_3)^{n+1}x_n\| + \|(\mathrm{PT}_3)^{\mathrm{n+1}}\mathrm{x}_{\mathrm{n}} - (\mathrm{PT}_3)\mathrm{x}_{\mathrm{n}}\| \\ &\le \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - (\mathrm{PT}_3)^{\mathrm{n+1}}x_{n+1}\| + k_n\|\mathrm{x}_{\mathrm{n+1}} - x_n\| \\ &\quad + L\|(PT_3)^n x_n - x_n\|\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlikte (4.18) ve (4.11) kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_3)x_n\| = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 \colon K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ dizileri bir $a \in (0,1)$ için $[a, 1-a]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinden biri tamamen sürekli ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Herhangi bir $p \in F$ için Lemma 4.1.1 (i) den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır. $\{x_n\}$ nin T_1, T_2 ve T_3 ün ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsayan bir alt dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.2.1 den

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_1)x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_2)x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_3)x_n\| = 0$$

dır. T_1 dönüşümünün tamamen sürekli olduğunu farzedelim. P nin genişlemeyen olduğu göz önüne alınırsa, $\{PT_1x_n\}$ nin $PT_1x_{n_j} \to p$ olacak şekilde $\{PT_1x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Bu yüzden $\left\|x_{n_j} - p\right\| \leq \left\|x_{n_j} - PT_1x_{n_j}\right\| + \left\|PT_1x_{n_j} - p\right\|$ ifadesinden $j \to \infty$ için $x_{n_j} \to p$ dir. $\lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - PT_1x_{n_j}\right\| = 0$ eşitliği ile birlikte P ve T_1 in sürekliliğinden $p = PT_1p$ elde edilir. Benzer olarak, $p = PT_2p$ ve $p = PT_3p$ dir ve Lemma 3.4.8 den $p = T_1p = T_2p = PT_3p$ dir. F kapalı olduğundan $p \in F$'dir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1, T_2 ve T_3 ün ortak p sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 : K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ dizileri bir $a \in (0,1)$ için $[a, 1-a]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1, T_2 ve T_3 dönüşümleri (A') şartını sağlıyorsa $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Lemma 4.1.1 (i) den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ vardır. Böylece her $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty}d(x_n, F)$ vardır. Aynı zamanda Lemma 4.2.1 den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_1)x_n\| =$

$\lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_2)x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - (PT_3)^n x_n\| = 0$ dır. (A') şartı ve Lemma 3.2.11 den

$$\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, F)\big) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(\|x_n - (PT_1)x_n\| + \|x_n - (PT_2)x_n\| + \|x_n - (PT_3)^n x_n\|)$$
$$= 0$$

elde edilir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, F)\big) = 0$$

dir. $f(0) = 0$ ve $\forall t \in (0,\infty)$ için $f(t) > 0$ olacak şekilde $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$$

olmalıdır. Teorem 4.1.2 den $\{x_n\}$ nin K da bir Cauchy dizisidir. K tam uzayın kapalı alt kümesi olduğundan $x_n \to q$ olacak şekilde bir $q \in K$ vardır. O halde $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olması $d(q, F) = 0$ olmasını gerektirir. F kapalı olduğundan $q \in F$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.4: E, Opial şartını sağlayan smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3: K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ dizileri $a \in (0,1)$ için $[a, 1-a]$ aralığında diziler olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $p \in F$ olsun. Lemma 4.1.1 (i) den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti var ve $\{x_n\}$ sınırlıdır. PT_1 , PT_2 ve PT_3 dönüşümlerinin K da kendi üzerine olduklarına dikkat edelim. Şimdi $\{x_n\}$ nin F de tek bir zayıf yakınsak alt dizisi olduğunu ispatlayacagız. İlk olarak $\{x_n\}$ nin sırasıyla p_1 ve p_2 ye zayıf yakınsayan $\{x_{n_k}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizileri olduğunu farzedelim. Lemma 4.2.1 den $i = 1,2,3$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_{n_k} - (PT_i)x_{n_k}\| = 0$ dir.

Lemma 3.2.11 den $(I - PT_1)p_1 = 0$ yani $(PT_1)p_1 = p_1$ dir. Benzer olarak, $(PT_2)p_1 = p_1$ ve $(PT_3)p_1 = p_1$ dir. Aynı yolla $p_2 \in F$ olduğu söylenir. Dolayısıyla Lemma 3.4.8 den $p_1, p_2 \in F$ dir. İkinci olarak $p_1 \neq p_2$ olduğunu farzedelim. O halde Opial şartından

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|x_n - p_1\| &= \lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k} - p_1\right\| \\
&< \lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k} - p_2\right\| \\
&= \lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - p_2\right\| \\
&< \lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k} - p_1\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\|x_n - p_1\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $p_1 = p_2$ dir. O halde $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1 , T_2 ve T_3 ün ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu kısımda dördüncü bölümde vermiş olduğumuz (4.1) iterasyon şemasının hatalı şekli tanıtıldı ve bu iterasyon şeması için yakınsama teoremleri ispatsız olarak verildi.

E bir reel normlu lineer uzay ve K da E nin P çekmesine sahip boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi, $T_1, T_2, T_3 : K \to E$, P ye göre kendi üzerine olmayan ve asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\beta'_n\}$, $\{\gamma'_n\}$, $\{\alpha''_n\}$, $\{\beta''_n\}$, $\{\gamma''_n\}$ dizileri $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = \alpha''_n + \beta''_n + \gamma''_n = 1$ şartını sağlayan $[0,1]$ aralığında reel diziler ve $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ K da sınırlı diziler olsun. $\{x_n\}$ iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \alpha_n (PT_1)^n y_n + \beta_n (PT_2)^n y_n + \gamma_n u_n, \\ y_n &= \alpha'_n (PT_3)^n z_n + \beta'_n (PT_1)^n z_n + \gamma'_n v_n, \\ z_n &= \alpha''_n x_n + \beta''_n (PT_3)^n x_n + \gamma''_n w_n, \end{cases} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu şemada, $\gamma_n = \gamma'_n = \gamma''_n = 0$ alınırsa (4.1) iterasyon şeması elde edilir. Ayrıca (5.1) şeması Yücenin (3.21) iterasyon şemasından bağımsızdır. Yani (3.21) ile (5.1) birbirinden elde edilemez.

Sonuç 5.1: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 : K \to E$, P çekmesine göre üzerine olmayan üç asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Ayrıca $F \neq \emptyset$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma''_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (5.1) ile tanımlansın. $\{x_n\}$ iterasyon şemasının T_1, T_2 ve T_3 ün ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $d(x_n, F) = \inf\{\|x - p\| : p \in F\}$ olmak üzere $\lim\ \inf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olmasıdır.

Sonuç 5.2: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 : K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha_n'\}$, $\{\alpha_n''\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1-a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (5.1) ile tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinden biri tamamen sürekli ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.3: E smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 : K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha_n'\}$, $\{\alpha_n''\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1-a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (5.1) ile tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ve T_1, T_2 ve T_3 dönüşümleri (A') şartını sağlıyorsa $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.4: E, Opial şartını sağlayan smooth ve düzgün konveks bir reel Banach uzay ve K da E nin sunny genişlemeyen bir çekmeye sahip boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ ve $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ olmak üzere $T_1, T_2, T_3 : K \to E$, P çekmesine göre zayıf inward ve asimptotik genişlemeyen üç dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\alpha_n'\}$, $\{\alpha_n''\}$ dizileri bir $a > 0$ için $[a, 1-a]$ aralığında olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (5.1) deki gibi tanımlansın. Eğer $F \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması T_1, T_2 ve T_3 dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., Meehan, M. and O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D.R., 2007. İterative construction of fixed points of nearly asymtotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal., 8 (1), 61-79.

Aksoy, A. G. and Khamsi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory. ISBN 0-387-97364-8.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Math.

Browder, F. E., 1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Natl. Acad. Sci., 54, 1041-1044.

Chang, S. S., Cho, Y. J. and Zhou, H., 2001. Demi-closed principle and weak convergence problem for asymptotically nonexpansive mappings, J.Korean Math. Soc., 38, 1245-1260.

Chidume, C.E., 2009. Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations, Lecture Notes in Math.

Chidume, C. E., Ofoedu E. U. and Zegeye H., 2003. Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 280, 364-374.

Ciric, L. B., 1974. A generalization of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

Franks, R. L. and Marzec, R. P., 1971. A theorem on mean-value iterations, Proc. Amer. Math. Soc., 30, 324-326.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 35, 171-174.

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150.

Junck, G., 1976. Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Monthly, 83, 261-263.

Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.

Khan, A. R., Domlo A. A. and Fukhar-ud-din H., 2008. Common fixed points Noor iteration for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 341, 1-11.

Khan, S. H. and Fukhar-ud-din, H., 2005. Weak and stronge convergence of a scheme with errors of two nonexpansive mappings, Nonlinear Anal., 61, 1295-1301.

Kirk, W. A., 1965. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72, 1004-1006.

Kirk, W. A., 1969. On nonlinear mappings of strongly semicontractive type, J. Math. Anal. Appl., 27, 409-412.

Kirk, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, Glasgow Math. J., 6-9.

Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk., 10, 123-127.

Kreyszig, E., 1989. Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library Edition Published.

Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510.

Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.

Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc., 591-597.

Osilike, M. O. and Udomene, A., 2000. Weak and strong convergence theorems for fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Math. Comput. Modelling, 32, 1181-1191.

Petryshyn, W. V. and Williamson, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 43, 459-497.

Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.

Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176.

Rhoades, B. E., 1994. Fixed point iterations for certain nonlinear mappings, J. Math. Anal. Appl., 183, 118-120.

Rhoades, B. E. and Soltuz S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration, Nonlinear Anal., 58, 219-228.

Senter, H. F. and Dotson, W. G., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 375-380.

Schu, J., 1991. Iterative construction of a fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 158, 407-413.

Schu, J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc., 43, 153-159.

Tan, K. K. and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by Ishikawa iteration process, J. Math. Anal. Appl., 178, 301-308.

Thianwan, S., 2008. Weak and stronge convergence theorems for new iterations with errors for nonexpansive nonself mapping, Thai J. Math., 6 (3), 27-38.

Turkmen, E., Khan S.H. and Ozdemir M., 2011. An iteration process for common fixed points of two nonself asymptotically nonexpansive mappings, Dscrete Dyn. Nat. Soc., Vol. 2011,ID 487864.

Zhou, H.Y., Cho, Y.J and Kang, S.M., 2007. A new iterative algorithm for approximating common fixed points for asymptotically nonexpansive mappings, Fixed Point Theory Appl., ID 64874, 10.

Wang, L., 2006. Strong and weak convergence theorems for common fixed points of nonself asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 323, 550-557.

Wojtaszczyk P., 1991. Banach Spaces for Analysts, Cambridge Univ. Press.

Xu, B. and Noor M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453.

Yildirim, I. and Ozdemir M., 2009, A new iterative process for common fixed points of finite families of non-self asymptotically non-expansive mappings, Nonlinear Analysis, 71, 991-999.

Yüce A., 2011. Asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yeni yaklaşım metotları, Atatürk üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Hatay ilinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antakya'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2010 yılında dereceyle mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.