T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SLANT HELİSLER ÜZERİNE

Hazırlayan
Hasibe İKİZ

Danışman
Yrd.Doç.Dr.Nural YÜKSEL

Yüksek Lisans Tezi

Agustos 2012
KAYSERİ

Yüksek Lisans Tezi Tezi Hazırlayanın Adı Soyadı Hasibe İKİZ Anabilim Dalı Matematik 2012

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SLANT HELİSLER ÜZERİNE

Hazırlayan
Hasibe İKİZ

Danışman
Yrd.Doç.Dr.Nural YÜKSEL

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2012
KAYSERİ

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı : Hasibe İKİZ

İmza :

Slant Helisler Üzerine adlı Yüksek Lisans, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

Ad Soyad İmza

Hasibe İKİZ

Danışman

Ad Soyad İmza

Yrd.Doç.Dr.Nural YÜKSEL

Ana Bölüm Dalı Başkanı

Ad Soyad İmza

Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Yrd.Doç.Dr.Nural YÜKSEL danışmanlığında **Hasibe İKİZ** tarafından hazırlanan "**Slant Helisler Üzerine** " adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

..01..../08./2012

JÜRİ:

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK

ONAY:
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 14/08/2012 tarih ve 2012/35-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

...14./08./.2012

Prof. Dr. Necmettin MARAŞLI

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezim boyunca danışmanlığımı büyük bir sabır ile yapan değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL' e, karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen ve çalışmalarımı titizlikle inceleyen değerli hocam, Sayın Arş. Gör. Ferdağ KAHRAMAN'a, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde, maddi ve manevi hiçbir fedakârlıktan çekinmeyen anne-babama ve hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan sevgili eşim Murat İKİZ'e, en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hasibe İKİZ

Kayseri, Ağustos 2012

SLANT HELİSLER ÜZERİNE

Hasibe İKİZ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2012

Danışman: Yrd.Doç. Dr. Nural YÜKSEL

KISA ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrıldı.

İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar kaynaklarıyla verildi.

Üçüncü bölümde, genel helisler tanımlanmış ve çeşitli karakterizasyonlar verildi.

Dördüncü bölümde, slant helisler incelendi ve örnekler verildi.

Son bölümde ise, V_n- slant helisler incelendi.

Ağustos 2012, 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eğrilik, Harmonik Eğrilik, Genel helis, Slant helis, V_n- Slant helis, Darboux vektörü, Genel Darboux vektörü.

ON SLANT HELİCES

Hasibe İKİZ
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, August 2012
Thesis Supervisor: Asist. Prof. Nural YÜKSEL

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, some basic and fundamental defintions and theorems have been presented.

The third chapter, has been devoted to the presentation of general helix and varion Characterization have been given.

The fourth chapter slant helix has been investigated. Some examples have been presented.

The last chapter V_n- slant helix has been investigated.

August 2012, 48 pages

Keywords: Curvature, Harmonik curvature, General helix, Slant helix, V_n- slant helix Darboux vector , General Darboux vector.

SEMBOLLER

E^n	: Öklid Uzayı
$\alpha(t)$	: Birim hızlı uzay eğrisi
$V_i(t)$	: i-yinci Frenet vektörü
∇	: Kovaryant türev operatörü
$D(t)$	: Genel Darboux vektörü
$d(t)$	: Darboux vektörü
$k_i(t)$	: i-yinci eğrilik fonksiyonu
$H_i(t)$	: V_1 için harmonik eğrilik fonksiyonu
$G_i(t)$	: V_2 için harmonik eğrilik fonksiyonu
${H_i}^*(t)$	: V_n için harmonik eğrilik fonksiyonu
$M(t)$	: Frenet matrisinin çekirdeği

İÇİNDEKİLER

SLANT HELİSLER ÜZERİNE

Sayfa

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI ii

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI iii

KABUL VE ONAY SAYFASI iv

TEŞEKKÜR v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

SEMBOLLER viii

İÇİNDEKİLER ix

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Temel Kavramlar 3

2. BÖLÜM

GENEL HELİSLER

2.1 Genel Helisler 12

2.2 Genel Darboux Vektörü 19

3. BÖLÜM

SLANT HELİSLER

Slant Helisler 22

4. BÖLÜM

V_n- SLANT HELİSLER

4.1 V_n- Slant Helisler **30**

4.2 Genel Darboux Vektörü **43**

5. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Tartışma, Sonuç ve Öneriler **46**

KAYNAKLAR **47**

ÖZGEÇMİŞ

GİRİŞ

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında eğrilerin en ilginç olanlarından biri helislerdir. Helisler için günlük hayattan birçok örnek verilebilir. Örneğin; bir ağaca sarılarak çıkan sarmaşık, minaredeki merdiven veya bir vidanın üzerine işlenmiş yivler ve setler verilebilir. Diferensiyel geometride 3- boyutlu Öklid uzayında sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapan eğriler sabit eğimli eğri veya genel helis olarak adlandırılır. Bu klasik tanım 1802 yılında M.A. Lancret tarafından yapılmış ve ilk olarak 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ispatlanmıştır[1,2].

İlk olarak bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helis ele alınmış ve buna dairesel helis denilmiştir. Bu helislerde κ eğriliği ve τ burulmanın ayrı ayrı birer sabit olduğu ilk tesbit edilen karekterizasyonlardandır. n- boyutlu Öklid uzayında non- dejenere bir eğrinin harmonik eğrilikleri Özdamar ve Hacısalihoğlu tarafından tanımlandı[3]. Daha sonra bu eğriliklerin sabit olmamasına rağmen oranlarının sabit olduğu eğri bulunmuştur ki bu eğriye genel helis adı verilmiştir. Bulunan genel helis sayesinde bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helislerden başka helislerin de var olduğu ortaya çıkmıştır.

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında genel helisler Monterde tarafından çalışıldı [4]. Lancret teoremi Barros tarafından kullanılarak 3-boyutlu reel uzay formları verildi [5]. Aynı zamanda Arroyo, Barros ve Garay helislerin bir karakterizasyonunu verdiler ve cornu spirallerini tanımladılar.[6]

Son yıllarda, eğrinin asli normal vektör alanı ile sabit doğrultu arasındaki açının sabit olması halindeki eğriler $slant$ helis olarak adlandırıldı [7,8].

Bu tezde [10] da yapılanlar esas alınarak n- boyutlu Öklid uzayında genel helisler için verilen $Darboux$ vektörü incelenecektir. Ayrıca örnekler verilecektir. Daha sonra $slant$ helis tanımı verilecek ve V_n- $slant$ helisinin özellikleri araştırılacaktır.

1. BÖLÜM

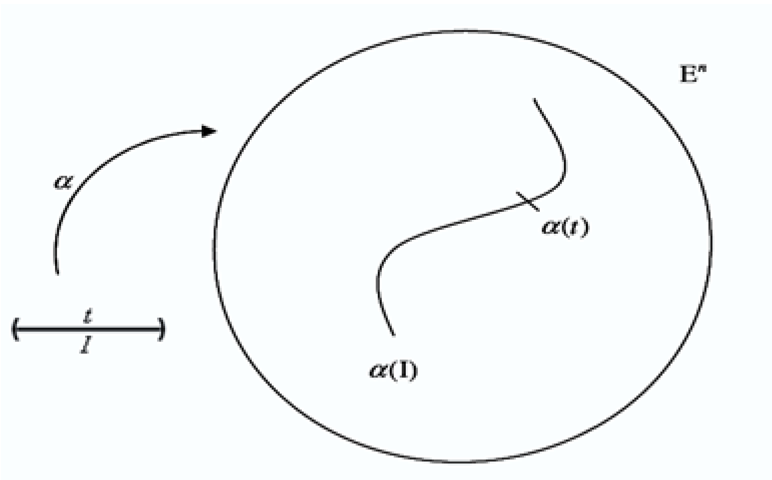
TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1(Eğri). $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere,

$$\alpha : \mathrm{I} \to E^n$$

$$t \to \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(\mathrm{t}),\ \alpha_2(\mathrm{t}), \ldots,\ \alpha_n(\mathrm{t}))$$

şeklinde tanımlı fonksiyon diferensiyellenebilirse $\alpha(\mathrm{I})$ ya E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir **eğri** adı verilir.



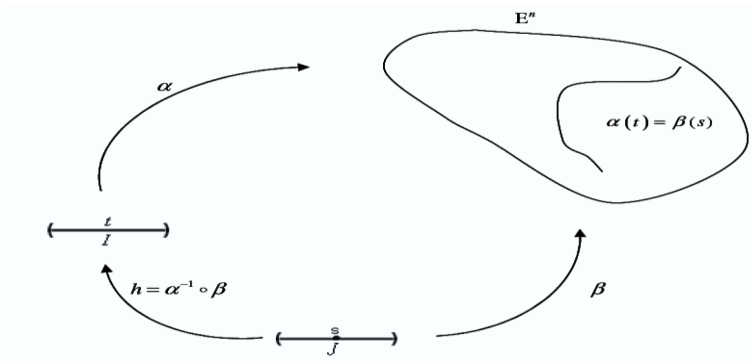
Şekil 1.1. Eğri

Tanım 1.1.2(Parametre Değişimi). E^n de M eğrisi (I, α) ve (J, β) koordinat fonksiyonları ile tanımlanmış olsun.

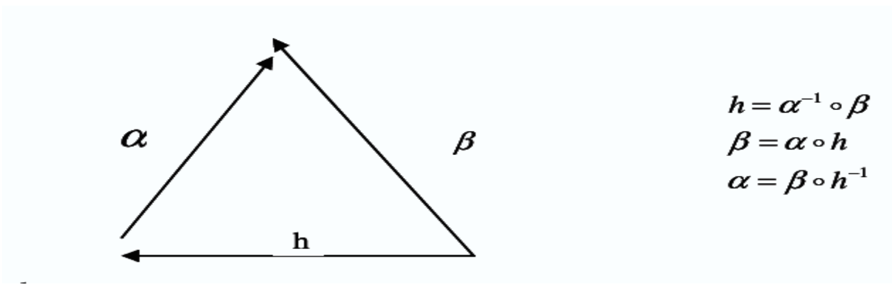
$$h = \alpha^{-1} \, o \, \beta : J \to \mathrm{I}$$

$$s \to h(s) = t$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir h fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir **[15].**



Şekil 1.2. Parametre değişimi



Buradan;

$$\beta(s) = (\alpha \; o \; h)\,(s)$$

$$=\alpha\big(h(s)\big)$$

$$=\alpha(t)$$

$$\alpha(t) = (\beta \; o \;\; h^{-1})\,(t)$$

$$= \beta\big(h^{-1}(t)\big)$$

$$=\beta(s)$$

olur.

Tanım 1.1.3 (Bir Eğrinin Hız Vektörü).

$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^n$

$t \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(\mathrm{t}),\ \alpha_2(\mathrm{t}), \dots ,\ \alpha_n(\mathrm{t}))$

eğrisi için ;

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

olmak üzere ; $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant vektörü ve $\alpha'(t)$ ye de hız vektörü adı verilir **[15].**

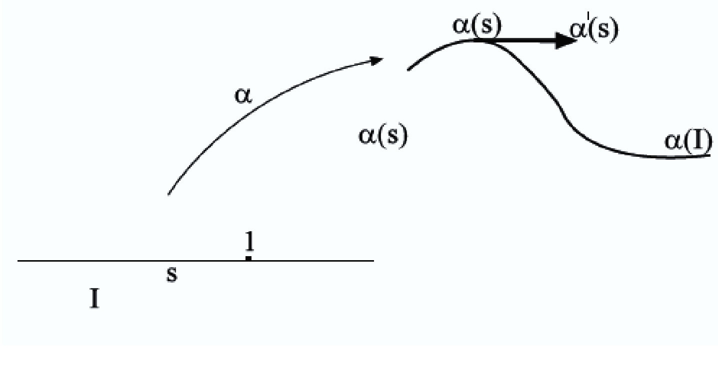
$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki vektörel ve paralel denkleminden

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{0\,\alpha(\mathrm{t})} + \lambda\alpha'(\mathrm{t})$$

$$= \overrightarrow{0\,\alpha(\mathrm{t})} + \lambda\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{dt}}$$

$$X = \alpha(t) + \lambda\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{dt}}$$

bulunur.



Şekil 1.3. Hız vektörü

Tanım 1.1.4 (Skaler Hız ve Skaler Hız Fonksiyonu). E^n de α eğrisi parametrik olarak,

$$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(\mathrm{t}),\ \alpha_2(\mathrm{t}), \dots ,\ \alpha_n(\mathrm{t}))$$

şeklinde tanımlansın.

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}\ , \dots , \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$$

için

$$\|\alpha'(t)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{dt}}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{i}}}{\mathrm{dt}}\right)^2}$$

olmak üzere ;

$$\alpha' : \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'\ (t)\|$$

$$\|\alpha'\ (t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{i}}}{\mathrm{dt}}\right)^2}\ \in\ \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona skalar hız fonksiyonu ve $t = t_o$ noktasındaki

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{i}}}{\mathrm{dt}}\right)\Big|_{t_0}^{2}}\ \in\ \mathbb{R}$$

reel sayısına da skalar hız denir **[15].**

Tanım 1.1.4 (Yay Uzunluğu).

$$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(\mathrm{t}),\ \alpha_2(\mathrm{t}), \dots ,\ \alpha_n(\mathrm{t}))$$

eğrisi verilmiş olsun. $t_1 , t_2 \in \mathrm{I}$ olmak üzere ,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\|\, dt$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

Tanım 1.1.5 (Birim Hızlı Eğri).

$$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(\mathrm{t}),\ \alpha_2(\mathrm{t}), \dots ,\ \alpha_n(\mathrm{t}))$$

eğrisi verilsin. Eğer ,

$$\|\alpha'(t)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{dt}}\right\| = 1$$

ise eğriye birim hızlı eğri, s parametresine de yay parametresi adı verilir **[15].**

Tanım 1.1.6 (Regüler Eğri).

$$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(\mathrm{t}) = (\alpha_1(\mathrm{t}),\ \alpha_2(\mathrm{t}), \dots ,\ \alpha_n(\mathrm{t}))$$

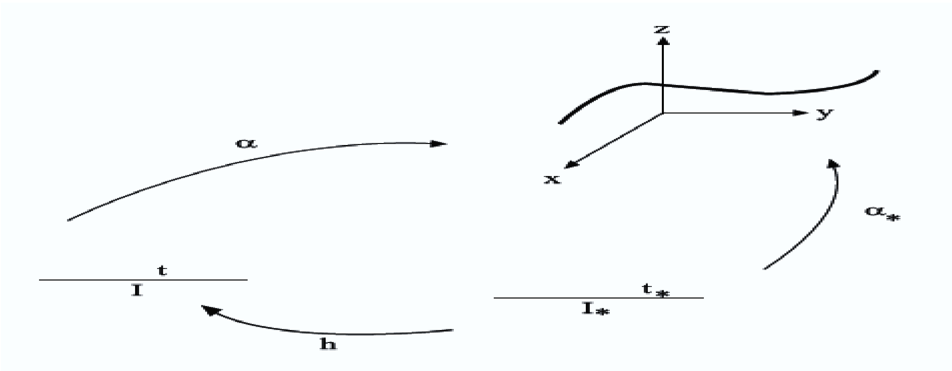
eğrisi için ,

$$\|\alpha'(t)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{dt}}\right\| \neq 0$$

ise eğriye regüler eğri denir.

Tanım 1.2.1 (Frenet Vektörleri). E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $S = \{\alpha'(t), \alpha''(t), \cdots, \alpha^r(t)\}$ lineer bağımsız sistemi gözönüne alınsın. Bu sisteme Gramm-Schmidth ortogonalleştirme ve ortonormalleştirme metodu uygulanırsa; elde edilen $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_r(t)\}$ $r \leq n$ sistemine Serret –Frenet r-ayaklısı veya r- ayaklı alanı, buradaki her bir $V_i(t)$, $1 \leq i \leq r$ vektörlerine de Frenet Vektörleri adı verilir.

Teorem 1.2.1. E^n bir α eğrisinin Frenet r- ayaklı alanı koordinat komşuluğunun seçilişinden bağımsızdır.



Şekil 1.4. Koordinat komşuluğu

Tanım 1.2.2. E^n uzayındaki birim hızlı bir eğri için

$$\langle V_i , V_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olacak şekilde elde edilen $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_r(t)\}$ çatısına

n- boyutlu Öklid Uzayındaki Frenet Çatısı denir.

Bu çatı için aşağıdaki önerme ile verilen Frenet denklemlerini ifade edebiliriz.

Önerme 1.2.1 E^n uzayındaki birim hızlı bir eğrinin $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_r(t)\}$ çatısı için;

$$V_1' = k_1V_2$$

$$V_i' = -k_{i-1}V_{i-1} + k_iV_{i+1}\,, \qquad 2 \leq i \leq r-1$$

$$V_r' = -k_{r-1}V_{r-1}$$

dır.

Burada, $k_i = k_i(t)$, $1 \leq i \leq r-1$, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliğidir.

Tanım 1.2.3. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuyla verilsin. $s \in \mathrm{I}$ ya karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet r – ayaklısı $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_r(t)\}$ olsun. Buna göre;

$$k_i : \mathrm{I} \to \mathbb{R}\,, 1 \leq \mathrm{i} < r$$

$$t \to k_i(t) = \langle V_i'(t)\,, V_{i+1}(t)\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i - yinci$ eğrilik fonksiyonu ve $t \in \mathrm{I}$ için $k_i(t)$ reel sayısına da $\alpha(t)$ noktasındaki $i - yinci$ eğriliği denir. Böylece, n – boyutlu Öklid uzayındaki $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_r(t)\}$ çatısının yay parametresine göre türevleri ile $k_i = k_i(t)$, $1 \leq i \leq r-1$ eğrilikleri

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. $n = 3$ özel halinde

$$V_1 = T\,,\ V_2 = N\,, V_3 = B$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu şekilde yazılan k_1 eğriliğine 1. eğrilik (sadece eğrilik) adı verilir ve κ ile gösterilir. k_2 ye ise torsiyon (burulma) adı verilir ve τ ile gösterilir. Buradan $T' = \kappa N,\ N' = -\kappa T + \tau B,\ B' = -\tau N$ yazılır.

Teorem 1.2.2(n=3 özel hali). α birim hızlı bir eğri olmak üzere , $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T\ ,\ N\ ,\ B\}$ olduğuna göre ;

$$V_1(t) = T(t) = \alpha'(t)$$

$$V_2(t) = N(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$

$$V_3(t) = B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$

dir [13].

Teorem 1.2.3. α birim hızlı olmayan bir eğri olmak üzere , $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T\ ,\ N\ ,\ B\}$ olduğuna göre;

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

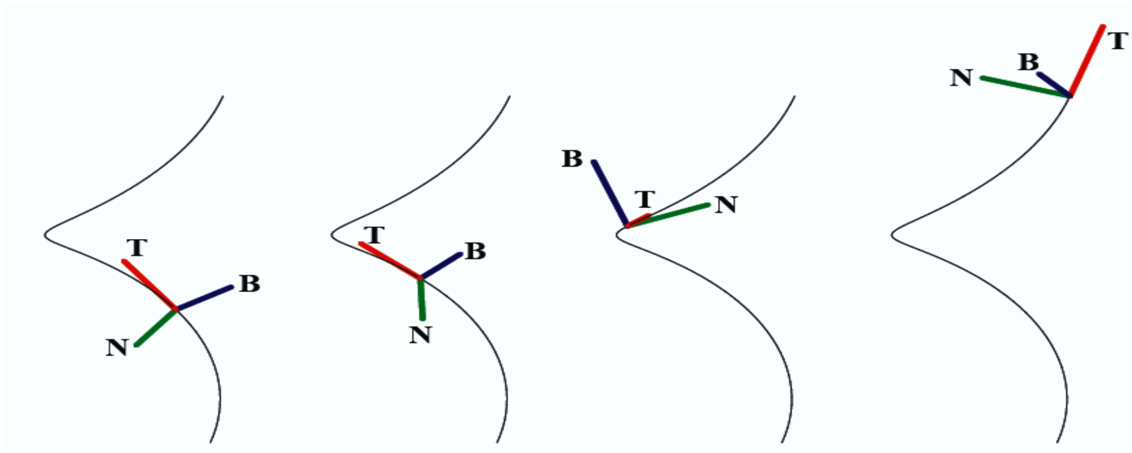
$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

dir **[13].**

$\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları $\kappa\ ,\tau$ olduğuna göre;

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad ve \quad \tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\ ,\alpha'''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

dir.



Şekil 1.5. Frenet vektörleri

2. BÖLÜM

GENEL HELİSLER

Tanım 2.1.1(Harmonik Eğrilikler). $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin harmonik eğrilikleri:

$$H_i : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-2$$

$$H_i = \begin{cases} 0 \ , & i = 0 \\ \dfrac{k_1}{k_2} \ , & i = 1 \\ \{V_1[H_{i-1}] + H_{i-2}k_i\}\dfrac{1}{k_{i+1}} \ , & i = 2, \cdots, n-2 \end{cases}$$

denir **[2].**

Teorem 2.1.1. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı genel helis olsun. $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1(t), H_2(t), \cdots, H_{n-2}(t)\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet çatısı ve yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri olsun.

$$\langle V_{i+2}, X \rangle = H_i \langle V_1, X \rangle \qquad 1 \le i \le n-1 \qquad (2.1)$$

dir. Burada X , α eğrisinin bir eksenidir [12].

Sonuç 2.1.1. Eğer X , α eğrisinin bir ekseni ise

$$X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$$

yazılabilir. Teorem 2.1.1. den;

$$\lambda_i = \langle V_i, X \rangle = H_{i-2} \langle V_1, X \rangle$$

olup, burada

$$\langle V_1, X \rangle = \cos\theta = \text{sabit}$$

dir. Harmonik eğrilik tanımından yararlanarak

$$X = \cos\theta\,(\mathrm{V}_1 + \mathrm{H}_1\mathrm{V}_3 + \cdots + \mathrm{H}_{\mathrm{n}-2}\mathrm{V}_{\mathrm{n}}) \tag{2.2}$$

dir. Aynı zamanda;

$$D = \mathrm{V}_1 + \mathrm{H}_1\mathrm{V}_3 + \cdots + \mathrm{H}_{\mathrm{n}-2}\mathrm{V}_{\mathrm{n}}$$

α helisinin eksenidir.

Tanım 2.1.2 (Genel Darboux Vektörü).

$\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir non-dejenere eğri olsun. $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1(t), H_2(t), \cdots, H_{n-2}(t)\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet çatısı ve yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri olsun.

$$D = \mathrm{V}_1 + \mathrm{H}_1\mathrm{V}_3 + \cdots + \mathrm{H}_{\mathrm{n}-2}\mathrm{V}_{\mathrm{n}} \tag{2.3}$$

vektörüne α eğrisinin genel Darboux vektörü denir.

Teorem 2.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı olsun. $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1(t), H_2(t), \cdots, H_{n-2}(t)\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet çatısı ve yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri olsun. α bir genel helistir ancak ve ancak D bir sabit vektördür.

İspat (⇒): α bir genel helis ve α helisinin ekseni X olsun.

Sonuç 2.1.1 den;

$$X = \cos\theta\,(\mathrm{V}_1 + \mathrm{H}_1\mathrm{V}_3 + \cdots + \mathrm{H}_{\mathrm{n}-2}\mathrm{V}_{\mathrm{n}}) \tag{2.4}$$

Burada $\cos\theta$ sabit olduğundan D nin sabit olduğu kolayca söylenebilir.

$(\Leftarrow)$ **:** Eğer D bir sabit vektör ise;

$$\langle D, V_1 \rangle = 1, \quad \cos\theta = \frac{1}{\|D\|}$$

şeklinde yazılabilir. Burada θ , D ile V_1 arasındaki sabit açıdır. Bu durumda helisin bir tek ekseni

$$X = \cos\theta \; (D)$$

olarak tanımlanabilir. O halde;

$$\langle X, V_1 \rangle = \cos\theta = \text{sabit}$$

olduğundan X sabittir.

Sonuç 2.1.2. 3-boyutlu Öklid uzayında, (2.3) denkleminden non-dejenere bir eğrinin ekseni

$$D = V_1 + H_1 V_3$$

olarak yazılır. Burada k_1 ve k_2, α eğrisinin eğrilikleridir. Eğer D nin eğri boyunca kovaryant türevi alınırsa,

$$\nabla_{V_1} D = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' V_3 \qquad (2.5)$$

elde edilir.

Eğer eğri bir genel helis ise, Teorem 2.1.2. den

$$\nabla_{V_1} D = 0$$

dır. Böylelikle $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabittir.

Tersine $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit ise, (2.5) den $\nabla_{V_1}D = 0$ ve D bir sabit vektördür. Teorem 2.1.2. den eğri bir genel helistir.

Bu Lancret teoreminin bir yeni ispatıdır.

Sonuç 2.1.3. 4 – boyutlu Öklid uzayında (3) denkleminden non-dejenere bir eğrinin ekseni

$$D = V_1 + \frac{k_1}{k_2} V_3 + \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' V_4$$

olup, k_1 , k_2 ve k_3 eğrinin eğrilikleridir.

Eğer eğrinin bütün eğrilikleri sabit ise, eğri bir W- eğrisidir. O halde, W- eğrisi için Sonuç 2.1.3. ifadesi

$$D = V_1 + \frac{k_1}{k_2} V_3 \tag{2.6}$$

olur. (2.6) nın türevi alınırsa

$$D' = \nabla_{V_1}D = \frac{k_1 . k_3}{k_2} V_4$$

elde edilir. $D' \neq 0$ olduğu kolayca görülür. O halde; D sabit bir vektör değildir.

Bu durumda Teorem 2.1.5. den eğri helis değildir.

Örnek 2.1.1. $\alpha : I \to E^3$

$$t \to \alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t , 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t , \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

eğrisi için;

$$\alpha'(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olup, $\|\alpha'(t)\| = 1$ olduğundan, eğri yay parametrelidir. Teorem 1.2.2. den

$$V_1(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$V_2(t) = (-\cos \mathrm{t}, -\sin t, 0)$$

$$V_3(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dir. O halde;

$D = V_1 + \frac{k_1}{k_2}V_3$ ifadesinde bulunan değerler yerine yazılırsa, $D = sabit$

dir. Dolayısıyla α eğrisi bir genel helistir.

Teorem 2.1.3. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1(t), H_2(t), \cdots, H_{n-2}(t)\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet çatısı ve yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri olmak üzere, α bir genel helis ise

$$\sum_{i=1}^{n-2} {H_i}^2 = sabit$$

dir [12].

Örnek 2.1.3. Teorem 2.1.3. ifadesinin tersinin doğru olmadığına ilişkin bir örnek verelim.

$$\alpha : \mathrm{I} \to E^4$$

$$t \to \alpha(t)$$

$$\alpha(t) = \left(a\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), a\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), b\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right)\right)$$

eğrisi için Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{-ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{a^2r^4+b^2}}{a^2r^2+b^2},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$k_2 = \frac{abr\,(r^2-1)}{(a^2r^2+b^2)\left(\sqrt{a^2r^4+b^2}\right)},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \frac{r}{\sqrt{a^2r^4+b^2}},$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix}.$$

Bu eğrinin genel Darboux vektörü:

$$D = V_1 + \frac{k_1}{k_2} V_3 + \frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)' V_4$$

olur. $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$ olduğundan; $D = V_1 + \frac{k_1}{k_2} V_3$ bulunur. O halde;

$$D' = \frac{k_1 k_3}{k_2} V_4 \neq 0$$

elde edilir. ${H_1}^2 + {H_2}^2 = sabit$ olmasına rağmen D sabit değildir. Teorem 2.1.5. den α bir genel helis değildir **[12]**.

Teorem 2.1.4. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı non-dejenere bir eğri olsun. $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1(t), H_2(t), \cdots, H_{n-2}(t)\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet çatısı ve yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri olmak üzere, α bir genel helistir ancak ve ancak

$$V_1 [H_{n-2}] + k_{n-1} H_{n-3} = 0$$

dır.

İspat $(\Rightarrow)$ **:** Eğer D nin α eğrisi boyunca kovaryant türevi alınırsa,

$$\nabla_{\mathrm{V}_1} \mathrm{D} = (V_1 [H_{n-2}] + k_{n-1} H_{n-3}) V_n$$

elde edilir. Burada ∇, E^n deki Levi-Civita konneksiyonudur. α bir genel helis olduğundan D sabit bir vektördür. O halde;

$$\nabla_{\mathrm{V}_1} \mathrm{D} = 0 \text{ ve } \qquad V_1 [H_{n-2}] + k_{n-1} H_{n-3} = 0$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$ **:** Kabul edelim ki,

$$V_1 [H_{n-2}] + k_{n-1} H_{n-3} = 0$$

olsun. D nin sabit olduğu kolayca görülür. Teorem 2.1.5. den α bir genel helistir.

D Genel Darboux Vektörünün Geometrik Anlamı

Bilindiği gibi 3-boyutlu Öklid uzayında bir nokta, α eğrisi boyunca hareket ettirildiğinde bu noktanın Frenet üçlüsü $\{T, N, B\}$ orijin etrafında hareket eder. Bu hareket Frenet hareketi olarak adlandırılır. Frenet hareketindeki ani değişimin olduğu eksene Darboux ekseni denir. Darboux vektörü

$$d = k_2 T + k_1 B$$

şeklindedir. Burada k_1 ve k_2 sırasıyla eğrinin eğrilik ve torsionudur.

Önerme 2.2.1. α eğrisi t keyfi parametresi ile verilsin. α eğrisinin Darboux ekseni $\{T, N_1, N_2, \cdots, N_{2k}\}$, $E^{2k+1} > 2$ bazına göre verilen $M(t)$ Frenet matrisinin çekirdeği olarak tanımlanır. E^{2k+1}, $k > 2$ için Darboux vektörü

$$d = a_0 T + a_1 N_2 + \cdots + a_k N_{2k}$$

dır. Burada

$$a_0 = k_2 k_4 \cdots k_{2k}, \qquad a_1 = \frac{k_1}{k_2} a_0$$

$$a_2 = \frac{k_3}{k_4} a_1 \qquad , \qquad a_i = \frac{k_{2i-1}}{k_{2i}} a_{i-1}$$

şeklindedir [12].

$\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı non-dejenere bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{k_1(t), k_2(t), \cdots, k_{n-1}(t)\}$ olmak üzere, $M(t)$ Frenet matrisi

$$M(t) = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan;

$$M(t)D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_1' \\ H_2' \\ \vdots \\ H_{n-2}' \end{bmatrix} - (H_{n-2}' + k_{n-1}H_{n-3}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi şu sorunun cevabını arayalım : Ne zaman D vektörü , $M(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatar ?

I. Durum : $n = 3$ $için$,

$$D = \mathrm{V}_1 + \mathrm{H}_1\mathrm{V}_3$$

dır. Buradan; $M(t)D = 0$ olduğu kolayca görülür.

Sonuç 2.2.1. 3- boyutlu Öklid uzayında herhangi bir birim hızlı non- dejenere α eğrisi için genel D vektörü $M(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatar. Başka bir ifadeyle,

$$D = \frac{1}{\mathrm{k}_2}\mathrm{d}$$

dir.

II. Durum : $n > 3$ ve $n = çift$ $için$**,**

$M(t)$ bir regüler matristir ve matrisin çekirdeği sadece sıfır vektörüdür. $D \neq 0$ olduğundan $M(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatmaz.

III. Durum : $n > 3 \; ve \; n = tek \;\; için$**,**

$$H_2 = H_4 = \cdots = H_{n-3} = 0$$

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2} = sabit \qquad H_3 = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_3}{k_4} = sabit$$

$$H_5 = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_3}{k_4} \cdot \frac{k_5}{k_6} = sabit \qquad H_{n-2} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_3}{k_4} \cdot \cdots \cdot \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} = sabit$$

dır. Böylelikle,

$$\frac{k_1}{k_2} = sabit \,, \quad \frac{k_3}{k_4} = sabit \,, \cdots, \quad \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} = sabit$$

olur. Bu ise; eğrinin Hayden' e göre bir genel helis olduğunu gösterir [9].

Sonuç 2.2.2. n - boyutlu Öklid uzayında $(n = tek \; iken)$ her birim hızlı non-dejenere α eğrisi için D vektörü, $M(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatar ancak ve ancak α eğrisi Hayden' e göre bir genel helistir yani;

$$D = \frac{1}{a_0} d \,, \qquad a_0 = k_2 \cdot k_4 \cdot k_6 \cdot \cdots \cdot k_{n-1}$$

dir.

3. BÖLÜM

SLANT HELİSLER

Tanım 3.1.1(Slant Helis). $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin normali olan V_2 bir sabit L doğrultusu ile sabit bir açı yapıyorsa α eğrisi bir slant helis adı verilir [12].

Teorem 3.1.1. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. $4 \leq i \leq n$ için;

$$G_1 = \int k_1(s)\, ds\,, \quad G_2 = 1\,, \quad G_3 = \frac{k_1}{k_2} G_1\,, \quad G_i = \frac{1}{k_{i-1}}\left[k_{i-2}G_{i-2} + G_{i-1}{}'\right] .$$

olmak üzere, α bir slant helistir ancak ve ancak

$$\sum_{i=1}^{n} G_i{}^2 = C$$

fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabittir. Üstelik, $C = \sec\theta^2$ ve θ sabit doğrultu L ile V_2 arasındaki açıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ **:** Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. Genelliği bozmadan $\langle L, L \rangle = 1$ alalım. a_i diferensiyellenebilir fonksiyonlar, $1 \leq i \leq n$ için,

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i(s) V_i(s) \quad , \quad s \in \mathrm{I} \tag{3.1}$$

$$a_i = \langle V_i, L \rangle \quad 1 \leq i \leq n$$

dır.

$$a_2 = \langle V_2, L \rangle = \cos\theta = sabit \quad (\forall s \in \mathrm{I}) \tag{3.2}$$

olur. L vektörü sabit olduğundan (3.1) in türevi alınırsa,

$$\begin{cases} a_1' - k_1 a_2 = 0 \\ k_1 a_1 - k_2 a_3 = 0 \\ a_i' + k_{i-1} a_{i-1} - k_i a_{i+1} = 0, \quad 3 \leq i \leq n \\ a_n' + k_{n-1} a_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

elde edilir.

I. $a_1 = \langle V_1, L \rangle \Rightarrow a_1' = \langle V_1', L \rangle$

dır. Önerme 1.2.1 ve (3.1) den yararlanarak,

$$a_1' = k_1 \langle V_2, L \rangle = k_1 \cdot a_2$$

ise,

$$a_1 = \left(\int k_1 ds \right) \cdot a_2 = G_1 a_2$$

olur.

II. $G_2 = 1$ olduğundan,

$$a_2 = G_2 a_2$$

dır.

$$\vdots$$

III. $a_{n-1} = \langle V_{n-1}, L \rangle$ ise,

$$a_{n-1}' = -k_{n-2} a_{n-2} + k_{n-1} a_n \Rightarrow a_n = G_n a_2$$

dır. O halde,

$$a_i(s) = G_i(s) \cdot a_2 \qquad 1 \leq i \leq n \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a_2 \neq 0$ dır. Eğer, $a_2 = 0$ alınırsa $a_i = 0$ ve $L = 0$ olur ki; $L \neq 0$ olduğundan çelişkidir. (3.3) den yararlanarak

$$\begin{aligned} G_1 &= \int k_1 \text{ (s) ds} \\ G_2 &= 1 \\ G_3 &= \frac{k_1}{k_2} G_1 \\ G_i &= \frac{1}{k_i} \left[k_{i-2}G_{i-2} + G_{i-1}{}'\right], \ 4 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.3) denkleminde $i = n$ alınırsa;

$$G_n{}' + k_{n-1}G_{n-1} = 0 \tag{3.6}$$

denklemi sağlanır. (3.6) Diferensiyel denkleminde değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$t(s) = \int k_{n-1}{}^{s}(u)du, \ \frac{dt}{ds} = k_{n-1}(s)$$

bulunur. (3.5) in son denkleminden

$$G_{n-1}{}'(t) = G_n(t) - \left(\frac{k_{n-2}(t)}{k_{n-1}(t)}\right) G_{n-2}(t) \tag{3.7}$$

elde edilir. Eğer α bir slant helis ise (3.7) ifadesi (3.6) da yerine yazılırsa

$$G_n{}''(t) + G_n(t) = \frac{k_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{k_{n-1}(t)} \tag{3.8}$$

bulunur. Parametrelerin değişimi metoduna göre bu denklemin bir genel çözümü

$$G_n(t) = \left(A - \int \frac{k_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{k_{n-1}(t)} \sin t\, dt\right) \cos t$$

$$+\left(B + \int \frac{k_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{k_{n-1}(t)} \cos t\, dt\right) \sin t \tag{3.9}$$

dir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. (3.9) denkleminde tekrar parametre değişimi yapılırsa,

$$G_n(s) = \left(A - \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \sin \int k_{n-1}(s)\ ds\right] ds\right) \cos \int k_{n-1}(s)ds$$

$$+\left(B + \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \cos \mathrm{s} \int k_{n-1}(s)\, ds\right] ds\right) \sin \mathrm{s} \int k_{n-1}(s)ds \tag{3.10}$$

bulunur. (3.6) den G_{n-1} fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$G_{n-1}(s) = \left(A - \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \sin \int k_{n-1}(s)\ ds\right] ds\right) \sin \mathrm{s} \int k_{n-1}(s)ds$$

$$+\left(B + \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \cos \mathrm{s} \int k_{n-1}(s)\, ds\right] ds\right) \cos \mathrm{s} \int k_{n-1}(s)ds \tag{3.11}$$

(3.5) den

$$\sum_{i=1}^{n-2} G_i G_i' = G_1 G_1' + G_2 G_2' + \sum_{i=3}^{n-2} G_i G_i'$$

$$= k_1 G_1 + \sum_{i=3}^{n-2} G_i [k_i G_{i+1} - k_{i-1} G_{i-1}]$$

$$= k_1 G_1 + \sum_{i=3}^{n-2} [k_i G_i G_{i+1} - k_{i-1} G_{i-1} G_i]$$

$$= k_1 G_1 + k_{n-2} G_{n-2} G_{n-1} - k_2 G_2 G_3$$

$$= k_{n-2} G_{n-2} G_{n-1}$$

dir. Bu ifade (3.11) de yerine yazılır ve integre edilirse,

$$\sum_{i=1}^{n-2} {G_i}^2 = C - \left(A - \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \sin \int k_{n-1}(s)\ ds\right] ds\right)^2$$

$$- \left(B + \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \cos \mathrm{s} \int k_{n-1}(s)\, ds\right] ds\right)^2 \quad (3.12)$$

elde edilir ki, C bir sabittir. (3.9) ve (3.10) denklemlerinden

$$ {G_n}^2 + {G_{n-1}}^2 = \left(A - \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \sin \int k_{n-1}(s)\ ds\right] ds\right)^2$$

$$+ \left(B + \left[\int \frac{k_{n-2}(s)G_{n-2}(s)}{k_{n-1}(s)} \cos \mathrm{s} \int k_{n-1}(s)\, ds\right] ds\right)^2 \quad (3.13)$$

bulunur. (3.12) ve (3.13) den

$$\sum_{i=3}^{n} {G_i}^2 = C$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olmak üzere α slant helisinin birim doğrultusu

$$L = \cos\theta_2 \left[\sum_{i=1}^{n} G_i V_i\right]$$

dir [12].

Teorem 3.1.3. $\beta : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olmak üzere β helisinin birim doğrultusu

$$X = \cos\theta_1 \left[{V_1}^* + H_1 {V_3}^* + H_2 {V_4}^* + \cdots + H_{n-2} {V_n}^*\right]$$

dır. Burada $\{{V_1}^*, {V_2}^*, \cdots, {V_n}^*\}$, $\{H_1, H_2, \cdots, H_{n-2}\}$ sırasıyla eğrinin Frenet çatısı ve harmonik eğrilikleridir [12].

Aşağıdaki teoremde $S^{n-1} \subset E^n$ de birim hiperküre üzerindeki spiral helisler ile E^n deki slant helisler arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Teorem 3.1.5. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri ve $\beta : \mathrm{I} \to S^{n-1} \subset E^n$, α eğrisinin teğetler göstergesi olmak üzere , α eğrisi L doğrultusuna göre bir slant helistir ancak ve ancak β eğrisi L doğrultusuna göre $S^{n-1} \subset E^n$ de bir genel helistir($spiral\ helistir$). Başka bir ifadeyle α ve β aynı L doğrultusuna sahiptir.

İspat ($\Rightarrow$): α eğrisinin teğetler göstergesi $\frac{d\alpha}{dt} = \beta(t)$ olarak tanımlanır.

Kabul edelim ki; β eğrisinin yay parametresi t_β olsun. O halde,

$$\frac{d\beta}{dt_\beta} = \frac{d\beta}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_\beta}$$

dır. Frenet formüllerinden

$$\frac{d\beta}{dt_\beta} = k_1(t)V_2(t)\frac{dt}{dt_\beta}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa

$$1 = k_1(t)\frac{dt}{dt_\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dt_\beta} = \frac{1}{k_1(t)}$$

bulunur. $k_1(t) \neq 0$ için

$$\frac{d\beta}{dt_\beta} = V_2(t)$$

elde edilir. α eğrisi bir slant helis olduğundan;

$$\langle V_2 , L \rangle = \cos\theta$$

ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\langle \frac{d\beta}{dt_\beta} , L \rangle = \cos\theta$$

dır. Böylece, β bir genel helistir.

(⇐): $\langle \frac{d\beta}{dt_\beta}, L \rangle = \cos\theta$

olsun . Burada t_β, β eğrisinin yay parametresidir. Diğer taraftan,

$$V_2(t) = \frac{d\beta}{dt_\beta}$$

olduğunu biliyoruz. O halde;

$$\langle V_2, L \rangle = \cos\theta$$

olup, α bir slant helistir.

Bu bölümde slant helisler ile helis hiperyüzeyleri arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Tanım 3.1.2. $M \subset E^n$ ve $d \neq 0$ bir birim vektör olsun. Eğer $\langle d, \xi \rangle$ M boyunca sabit fonksiyon ise M bir helis hiperyüzeyi adını alır. Burada ξ, M üzerindeki bir normal vektör alanıdır.

Teorem 3.1.6. M bir helis hiperyüzeyi ve $\alpha : \mathrm{I} \to M$ bir geodezik eğri olsun. O halde; α bir slant helistir [12].

İspat: ξ, M üzerindeki bir normal vektör alanı ve d bir sabit doğrultu olsun. M bir helis hiperyüzeyi olduğundan; $\langle d, \xi \rangle = sabit$ olur. Öyle ki; d ile ξ arasındaki açı M yüzeyinin her noktasında sabittir. α bir geodezik eğri olduğundan α boyunca

$$\alpha''(s) = \lambda\xi|_{\alpha(t)}$$

dır. Üstelik Frenet denklemlerini kullanarak

$$\alpha''(s) = k_1 V_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda\xi|_{\alpha(t)} = k_1 V_2$$

elde edilir. Burada k_1, α eğrisinin birinci eğriliğidir. Her iki tarafın normu alınırsa

$$\xi = V_2 \text{ veya } \xi = -V_2$$

bulunur. Buradan

$$\langle d, V_2 \rangle = sabit$$

dir. Başka bir deyişle d ile V_2 arasındaki açı, α eğrisi boyunca sabittir. O halde; α bir slant helistir.

Teorem 3.1.7. $\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^n$ birim hızlı bir geodezik eğri ve X sabit doğrultusu ile M bir helis hiperyüzeyi olsun. α eğrisinin teğetler göstergesi $S^{n-1} \subset E^n$ hiperküresi üzerinde bir spiral helistir.

İspat: Kabul edelim ki, α eğrisi M helis hiperyüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olsun. Teorem 3.3.1. den α bir slant helistir. Diğer taraftan Teorem 3.2.1. den α eğrisinin teğetler göstergesi bir spiral helistir.

Sonuç 3.3.3. $M \subset E^n$ bir helis hiperyüzeyi olsun. M hiperyüzeyi üzerindeki bütün geodezik eğrilerin teğetler göstergesi çakışık eksene sahip spiral helislerdir [12].

4. BÖLÜM

$V_n -$ *SLANT HELİSLER*

Tanım 4.1.1. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri, α nın Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{k_1(t), k_2(t), \cdots, k_{n-1}(t)\}$ olsun. X birim sabit doğrultu ve φ sabit bir açı olmak üzere;

$$\langle V_n , X \rangle = \cos\varphi \ , \ \varphi \neq \frac{\pi}{2} \ ,$$

ise α eğrisine V_n- slant helis denir.

Tanım 4.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri, $\{k_1(t), k_2(t), \cdots, k_{n-1}(t)\}$ α eğrisinin sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. V_n için harmonik eğrilik fonksiyonları

$$H_i{}^* : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-2$$

$$H_i{}^* = \begin{cases} 0 \ , & i = 0 \\ \dfrac{k_{n-1}}{k_{n-2}} \ , & i = 1 \\ \{k_{n-2} H_{i-2}{}^* - H_{i-1}{}'\} \dfrac{1}{k_{n-(i+1)}} \ , & i = 2, \cdots, n-2 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

şeklindedir [**13**].

Önerme 4.1.1. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonları $\{H_1{}^*, H_2{}^*, \cdots, H_{n-2}{}^*\}$ olsun. Harmonik eğrilik fonksiyonlarının türevleri

$$\begin{bmatrix} {H_1^*}' \\ {H_2^*}' \\ {H_3^*}' \\ \vdots \\ {H_{n-4}^*}' \\ {H_{n-3}^*}' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ k_{n-3} & 0 & -k_{n-4} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{n-4} & 0 & -k_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^* \\ H_2^* \\ H_3^* \\ \vdots \\ H_{n-4}^* \\ H_{n-3}^* \\ H_{n-2}^* \end{bmatrix}$$

dır.

İspat : Tanım 4.1.2. den kolayca görülür.

Önerme 4.1.2. $\alpha : I \to E^n$ birim hızlı bir eğri, α nın Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri sırasıyla $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1^*, H_2^*, \cdots, H_{n-2}^*\}$ olsun. X birim sabit doğrultusuna göre α bir V_n- slant helis ise

$$\langle V_{n-(i+1)}, X \rangle = H_i^* \langle V_n, X \rangle \tag{4.2}$$

dir.

İspat : $\boldsymbol{i = 1}$ **olması durumu:**

X birim sabit vektör alanı olduğundan $\forall s \in I$ için $\langle V_n, X \rangle = \cos\varphi$ olur. Buradan türev alınırsa

$$\langle V_n', X \rangle = 0$$

bulunur. Frenet formüllerinden

$$\langle -k_{n-1}, V_{n-1}, X \rangle = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada $(k_{n-1} \neq 0)$ olduğundan,

$$\langle V_{n-1}, X \rangle = 0 \tag{4.4}$$

dır. (4.4) den tekrar türev alınırsa,

$$\langle V_{n-1}', X \rangle = 0,$$

$$\langle -k_{n-2}\, V_{n-2} + k_{n-1}\, V_n, X \rangle = 0$$

$$-k_{n-2}\, \langle V_{n-2}, X \rangle + k_{n-1}\, \langle V_n, X \rangle = 0$$

ve Tanım 4.1.1. den

$$\langle V_{n-2}, X \rangle = \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} \langle V_n, X \rangle$$

$$= {H_1}^{*} \langle V_n, X \rangle \tag{4.5}$$

olur.

$i = 2$ olması durumu:

(4.5) denkleminde tekrar türev alınıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\langle {V_{n-2}}', X \rangle = {H_1}^{*'} \langle V_n, X \rangle$$

$$\langle -k_{n-3}\, V_{n-3} + k_{n-2}\, V_{n-1}, X \rangle = {H_1}^{*'} \langle V_n, X \rangle$$

$$-k_{n-3}\, \langle V_{n-3}, X \rangle + k_{n-2}\, \langle V_{n-1}, X \rangle = {H_1}^{*'} \langle V_n, X \rangle,$$

bulunur. Önerme 4.1.1. ve (4.4) ifadelerinden yararlanılarak

$$\langle V_{n-3}, X \rangle = {H_{i-1}}^{*} \langle V_n, X \rangle \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) ifadesinin türevi alınırsa

$$\langle {V_{n-i}}', X \rangle = {H_{i-1}}^{*'}$$

bulunur. Frenet formüllerinden

$$\langle -k_{n-i-1} V_{n-i-1} + k_{n-i} V_{n-i+1}, X \rangle = {H_{i-1}}^{*} \langle V_n, X \rangle$$

$$-k_{n-i-1} \langle V_{n-i-1}, X \rangle + k_{n-i} \langle V_{n-i+1}, X \rangle = {H_{i-1}}^{*} \langle V_n, X \rangle \tag{4.7}$$

olur. Kabul edelim ki, Önerme 4.1.2. $i - 2$ için doğru olsun. Buradan,

$$\langle V_{n-i+1}, X \rangle = H_{i-2}^{*} \langle V_n, X \rangle$$

dır. Eğer bu ifade (4.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\langle V_{n-(i+1)}, X \rangle = \frac{1}{k_{n-(i+1)}} \{k_{n-2} H_{i-2}^{*} - H_{i-1}{}'\} \langle V_n, X \rangle$$

ifadesi elde edilir. Buradan (4.1) denkleminden

$$\langle V_{n-(i+1)}, X \rangle = H_i^{*} \langle V_n, X \rangle$$

bulunur ki, bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.1. $\alpha : I \rightarrow E^n$ birim hızlı bir eğri, α nın Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri sırasıyla $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1{}^{*}, H_2{}^{*}, \cdots, H_{n-2}{}^{*}\}$ olsun. X birim sabit doğrultusuna göre α bir V_n- slant helis ise,

$$X = \{H_{n-2}{}^{*} V_1 + H_{n-3}{}^{*} V_2 + \cdots + H_1{}^{*} V_{n-2} + V_n\} \langle V_n, X \rangle$$

veya

$$X = \{H_{n-2}{}^{*} V_1 + H_{n-3}{}^{*} V_2 + \cdots + H_1{}^{*} V_{n-2} + V_n\} \cos\varphi$$

dir.

İspat : X bir birim sabit doğrultu olmak üzere, α bir V_n- slant helis ise

$$X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\lambda_i = \langle V_i, X \rangle$$

$$\lambda_1 = \langle V_1, X \rangle = H_{n-2}{}^{*} \langle V_n, X \rangle,$$

$$\lambda_2 = \langle V_2, X \rangle = H_{n-3}{}^{*} \langle V_n, X \rangle,$$

$$\vdots$$

$\lambda_{n-2} = \langle V_{n-2}, X \rangle = H_1^* \langle V_n, X \rangle,$

$\lambda_{n-1} = 0,$

$\lambda_n = \langle V_n, X \rangle$

şeklindedir. Böylece,

$$X = \{H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \cdots + H_1^* V_{n-2} + V_n\} \langle V_n, X \rangle$$

bulunur ki, bu ispatı tamamlar.

Tanım 4.1.3. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α bir V_n- slant helis olmak üzere, $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1^*, H_2^*, \cdots, H_{n-2}^*\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri olsun.

$$D = H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \cdots + H_1^* V_{n-2} + V_n$$

vektörüne α V_n- slant helisinin genel Darboux vektörü denir.

Teorem 4.1.2. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1^*, H_2^*, \cdots, H_{n-2}^*\}$ α eğrisinin Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri olsun. α bir V_n- slant helistir ancak ve ancak D bir sabit vektör alanıdır.

İspat (⇒): Kabul edelim ki, α bir V_n- slant helis ve X bir birim sabit doğrultu olsun. Buradan,

$$X = \{H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \cdots + H_1^* V_{n-2} + V_n\} \cos\varphi$$

dir. φ sabit bir açı olduğundan

$$D = sabit$$

olur.

(⇐): D bir sabit vektör alanı olsun. O halde,

$$D = H_{n-2}^* V_1 + H_{n-3}^* V_2 + \cdots + H_1^* V_{n-2} + V_n$$

şeklindedir. Buradan,

$$\langle D, V_n \rangle = 1,$$

bulunur. İç çarpımın tanımından,

$$\|D\| \|V_n\| \cos\varphi = 1,$$

ve

$$\|D\| \cos\varphi = 1.$$

olur. Burada φ , D ile V_n arasındaki sabit açı olup;

$$\cos\varphi = \frac{1}{\|D\|}$$

dir. O halde, V_n- slant helisin bir tek ekseni $X = \cos\varphi\, D$ olup,

$$\langle X, V_n \rangle = \frac{1}{\|D\|} = \cos\varphi$$

elde edilir. X bir sabit vektör ve α bir V_n- slant helistir. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. $\alpha : I \to E^n$ birim hızlı bir eğri, α nın Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri sırasıyla $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{H_1^*, H_2^*, \cdots, H_{n-2}^*\}$ olsun. α bir V_n- slant helistir ancak ve ancak

$$H_{n-2}^{*'} - k_1 H_{n-3}^{*} = 0 \tag{4.8}$$

dır.

İspat (⇒): α eğrisi boyunca D nin türevi alınırsa

$$D' = H_{n-2}^{*'} V_1 + H_{n-2}^{*} V_1' + H_{n-3}^{*'} V_2 + H_{n-3}^{*} V_2' + \cdots + H_1^{*'} V_{n-2} + H_1^{*} V_{n-2}' + V_n'$$

bulunur. α bir V_n- slant helis olduğundan, D sabit bir vektördür. Buradan

$$D' = 0 \text{ veya } H_{n-2}^{*'} - k_1 H_{n-3}^{*} = 0 \tag{4.9}$$

dır.

(⇐): (4.7) denkleminden

$$D' = 0 \text{ veya } D = sabit$$

olur. Teorem 4.1.2. den $D = sabit$ ise α bir V_n- slant helistir.

Sonuç 4.1.1. $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri, α nın Frenet vektörleri

$\{T, N, B\}$, ve $\{k_1, k_2\}$ sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. α bir B- slant helistir ancak ve ancak α bir genel helistir.

İspat (⇒): Teorem 4.1.3. den

$$H_1^{*'} - k_1 H_0^{*} = 0$$

dır. Tanım 4.1.3. ifadesinden

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0 \tag{4.10}$$

bulunur ki, α bir genel helistir.

(⇐): α bir genel helis olsun. Böylece, $\frac{k_1}{k_2}$ ve $\frac{k_2}{k_1} = sabit$ olur. Buradan,

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0 \quad \text{veya} \quad H_1^{*'} - k_1 H_0^{*} = 0$$

dır. Teorem 4.1.3. den α bir B- slant helistir.

Sonuç 4.1.2. $\alpha : I \rightarrow E^4$ birim hızlı bir eğri olsun. α nın Frenet vektörleri $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t)\}$ ve $\{k_1, k_2, k_3\}$ sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. α bir V_4- slant helis (B_2- slant helis) tir ancak ve ancak

$$\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]' + k_1 \frac{k_3}{k_2} = 0 \tag{4.11}$$

dır.

İspat (⇒): Teorem 4.1.3. den

$$H_2^{*'} - k_1 H_1^* = 0$$

dır. Tanım 4.1.6. ifadesinden,

$$\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]' + k_1\frac{k_3}{k_2} = 0$$

elde edilir.

(⇐): Kabul edelim ki,

$$\left[\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right]' + k_1\frac{k_3}{k_2} = 0$$

olsun. Teorem 4.1.3. ve Tanım 4.1.3. ifadesinden α eğrisinin bir V_4- slant helis olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.1.4. $\alpha : \mathrm{I} \to E^4$ birim hızlı bir eğri olsun. α nın Frenet vektörleri $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t)\}$ ve $\{k_1, k_2, k_3\}$ sıfırdan farklı eğrilikleri olsun. α bir V_4- slant helis (B_2- slant helis) ise

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2}\left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = \tan^2\varphi_3 = sabit,$$

dır. Burada φ_3 , V_4 ile U birim sabit doğrultusu arasındaki açıdır.

İspat (⇒): U bir birim sabit doğrultu olmak üzere,

$$\langle V_4 , U \rangle = \cos\theta = sabit \tag{4.12}$$

dır. (4.12) ifadesinin türevi alınır ve Frenet formülleri yerine yazılırsa,

$$\langle -k_3 V_3, U \rangle = 0$$

elde edilir. $U \in Sp\,\{V_1(t), V_2(t), V_4(t)\}$ olduğundan,

$$U = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_4 \tag{4.13}$$

şeklindedir. Burada

$a_1 = a_1(t) = \cos\theta_1(t)$, $a_2 = a_2(t) = \cos\theta_2\,(t)$ ve $a_3 = a_3(t) = \cos\theta_3\,(t)$

olup, (4.12) denkleminden $a_3(t) = \cos\theta_3\,(t) = sabit$ tir. U bir birim vektör olduğundan,

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = 1 \tag{4.14}$$

dır. (4.13) ifadesinin türevi alınırsa,

$$\left(\frac{da_1}{dt} - a_2k_1\right)V_1 + \left(\frac{da_2}{dt} + a_1k_1\right)V_2 + (a_2k_2 - a_3k_3)V_3 + \frac{da_3}{dt}V_4,$$

ve

$$a_2 = \frac{k_3}{k_2}a_3 = \frac{1}{k_1}\frac{da_1}{dt}, \; \frac{da_2}{dt} = -a_1k_1 \tag{4.15}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{da_2}{dt} = -a_1k_1 \text{ ve } \frac{da_2}{dt} = -\frac{k_1{}'}{k_1{}^2}\frac{da_1}{dt} + \frac{1}{k_1}\frac{d^2a_1}{dt^2},$$

olur. a_1 için aşağıdaki lineer diferensiyel denklemi elde edilir.

$$\frac{d^2a_1}{dt^2} - \frac{k_1{}'}{k_1}\frac{da_1}{dt} + a_1k_1{}^2 = 0 \tag{4.16}$$

(4.16) diferensiyel denkleminde $s = \int k_1(t)ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{d^2a_1}{ds^2} + a_1 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$a_1 = A\cos\int_0^t k_1(t)dt + B\sin\int_0^t k_1(t)dt \tag{4.17}$$

olup, burada $A\ ve\ B$ sabittir. (4.15.) ve (4.17.) denklemlerinden

$$a_2 = \frac{k_3}{k_2}a_3 = -A\sin\int_0^t k_1(t)dt + B\cos\int_0^t k_1(t)dt$$

$$a_1 = -\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' a_3 = A\;\cos\int_0^t k_1(t)dt + B\sin\int_0^t k_1(t)dt$$

elde edilir. Buradan,

$$A = -a_3\left(\frac{k_3}{k_2}\sin\int_0^t k_1(t)dt + \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\cos\int_0^t k_1(t)dt\right), \tag{4.18}$$

$$B = a_3\frac{k_3}{k_2}\cos\int_0^t k_1(t)dt - \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\sin\int_0^t k_1(t)dt \tag{4.19}$$

bulunur. (4.15), (4.16) ve (4.19) denklemlerinden

$$A^2 + B^2 = \left[\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{{k_1}^2}\left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2\right]\cos^2\theta_3 = \sin^2\theta_3,$$

veya

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{{k_1}^2}\left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = \tan^2\theta_3 = sabit \tag{4.20}$$

dir.

Örnek 4.1.1. Teorem 4.1.4. ifadesinin tersinin doğru olmadığına bir örnek verelim.

$$\alpha : \mathrm{I} \to E^4$$

$$t \to \alpha(t)$$

$$\alpha(t) = \left(a\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), a\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), b\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right)\right)$$

eğrisi için, Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{-ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{a^2r^4+b^2}}{a^2r^2 + b^2},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$k_2 = \frac{abr\,(r^2-1)}{(a^2r^2+b^2)\left(\sqrt{a^2r^4+b^2}\right)},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \frac{r}{\sqrt{a^2r^4+b^2}},$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \\ \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right), \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}t\right) \end{pmatrix}.$$

α eğrisinin genel Darboux vektörü

$$D = -\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\right]V_1 + \frac{k_3}{k_2}V_2 + V_4$$

olur. $\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' = 0$ olduğundan; $D = \frac{k_3}{k_2}V_1 + V_4$ bulunur. O halde;

$$D' = \frac{k_3}{k_2}V_2 + V_4 \neq 0$$

elde edilir.

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{{k_1}^2}\left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = sabit$$

olmasına rağmen D sabit değildir. Teorem 4.1.4. den α bir V_4- slant helis değildir [**13**].

Teorem 4.1.3. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı non-dejenere bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri ve harmonik eğrilikleri $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_n(t)\}$, $\{{H_1}^*, {H_2}^*, \cdots, {H_{n-2}}^*\}$ olsun. α bir V_n- slant helis ise

$$\sum_{i=1}^{n-2} {H_i^*}^2 = sabit$$

dir.

İspat : Teorem 4.1.1. den α eğrisinin birim vektör alanı için

$$\left\{{H_1}^{*2} + {H_2}^{*2} + \cdots + {H_{n-3}}^{*2} + {H_{n-1}}^{*2}\right\}\cos^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \tag{4.21}$$

dir. Buradan

$$\sum_{i=1}^{n-2} {H_i}^{*2} = \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \tan^2\varphi = sabit$$

elde edilir ki, bu ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.3. $\alpha : \mathrm{I} \to E^4$ birim hızlı bir eğri olsun. α nın Frenet vektörleri $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t)\}$ ve sıfırdan farklı eğrilikleri $\{k_1, k_2, k_3\}$ olmak üzere, α bir V_4- slant helis (B_2- slant helis) ise

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{{k_1}^2}\left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = \tan^2\varphi = sabit\ , \tag{4.22}$$

dir.

İspat : Teorem 4.1.3. den açıktır.

Teorem 4.1.4. $\alpha : \mathrm{I} \to E^{2m+1}$ birim hızlı bir eğri ve harmonik eğrilik fonksiyonları $\{{H_1}^*, {H_2}^*, \cdots, {H_{2m-1}}^*\}$ olsun. Eğer,

$$\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \frac{k_6}{k_5}, \cdots, \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}}, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$$

oranları sabit ise, ${H_{2i}}^* = 0\ , 1 \leq i \leq m$ için,

$${H_{2i-1}}^* = \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}} \cdot \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}} \cdot \frac{k_{2m-4}}{k_{2m-5}} \cdot \cdots \cdot \frac{k_{2m-(2i-3)}}{k_{2m+1-(2i-2)}} \cdot \frac{k_{2m+1-(2i-1)}}{k_{2m+1-2i}}$$

dir [13].

Sonuç 4.1.4. $\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^{2m+1}$ birim hızlı bir eğri olsun. α bir V_{2m+1}- slant helis ve α eğrisinin eğrilikleri $\{k_1, k_2, \cdots, k_{2m}\}$ olmak üzere,

$$\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \frac{k_6}{k_5}, \cdots, \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}}, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$$

oranları sabit ise, α, V_{2m+1}- slant helisinin ekseni

$$D = {H_{2m-1}}^* V_1 + {H_{2m-3}}^* V_3 + \cdots + {H_1}^* V_{2m-1} + V_{2m+1}$$

dir.

İspat : Tanım 4.1.3. ifadesinde $n = 2m + 1$ alınırsa

$$D = {H_{2m-1}}^* V_1 + {H_{2m-2}}^* V_2 + \cdots + {H_1}^* V_{2m-1} + V_{2m+1}$$

bulunur. Teorem 4.1.4. den

$$D = {H_{2m-1}}^* V_1 + {H_{2m-3}}^* V_3 + \cdots + {H_1}^* V_{2m-1} + V_{2m+1}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.5. $\alpha : \mathrm{I} \rightarrow E^{2m+1}$ birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin eğrilikleri $\{k_1, k_2, \cdots, k_{2m}\}$ olsun. Eğer

$$\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \frac{k_6}{k_5}, \cdots, \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}}, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$$

oranları sabit ise, α eğrisi bir V_{2m+1}- slant helistir.

İspat :

$$\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \frac{k_6}{k_5}, \cdots, \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}}, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$$

oranları sabit olsun. Teorem 4.1.4. den $1 \leq i \leq m$ için ${H_{2i-1}}^*$ sabittir. Sonuç 4.1.4. dan D sabit bir vektör alanıdır. Teorem 4.1.2. den α bir V_{2m+1}- slant helistir.

D Genel Darboux Vektörünün Geometrik Anlamı

Önerme 4.2.1. $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin $\{T, N, B\}$ bazına göre Frenet matrisinin çekirdeği $M_3(t)$

$$M_3(t) = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_3^3,$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.1. $\alpha : \mathrm{I} \to E^n$ birim hızlı bir eğri $(n = tek)$ ve α eğrisinin eğrilikleri $\{k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}\}$ olsun. $M_n(t)$ Frenet matrisi

$$M_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_n^n$$

olmak üzere, α bir V_n- slant helistir ancak ve ancak

$$D = [H_{n-2}{}^*,\ H_{n-3}{}^*, \cdots\ H_1{}^*, H_0{}^*, 1] \in \mathbb{R}^n$$

için, aşağıdaki denklem sağlanır.

$$\frac{d}{ds}[H_{n-2}{}^*,\ H_{n-3}{}^*, \cdots\ H_1{}^*, H_0{}^*, 1]^T = M_n(t)[H_{n-2}{}^*,\ H_{n-3}{}^*, \cdots\ H_1{}^*, H_0{}^*, 1]^T \quad (4.1)$$

Şimdi şu sorunun cevabını arayalım: Ne zaman D vektörü , $M(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatar ?

I. Durum : $\mathbb{R}^3$ de

$$\frac{d}{ds}[H_1{}^*, H_0{}^*, 1]^T = \frac{d}{ds}\left[\frac{k_2}{k_1}, 0, 1\right]^T = 0$$

olup, D vektörü $M(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatar.

II. Durum $\mathbb{R}^3$ de Örnek 4.1.1. den V_n- slant helistir. O halde; D vektörü $M_4(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatmaz.

III. Durum $\mathbb{R}^n$ $(n = tek)$ deki bir eğri için,

$\frac{k_i}{k_{i-1}}$ (her $i = 2, 3, \cdots, n-1$) oranı sağlanıyor ise,

$$\frac{d}{ds}[H_{n-2}{}^*, \ H_{n-3}{}^*, \cdots \ H_1{}^*, H_0{}^*, 1]^T = 0$$

dır. Buradan D vektörü $M_n(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatar.

IV. Durum $\mathbb{R}^n$ $(n = çift)$ de $M_n(t)$ regüler bir matristir ve matrisin çekirdeğinde sadece sıfır vektörü bulunur. O halde D vektörü sıfırdan farklı olup, $M_n(t)$ matrisinin çekirdeğinde yatmaz.

Önerme 4.2.2. $\mathbb{R}^{2m+1}$ de $m > 2$ için $\{V_1(t), V_2(t), \cdots, V_{2m+1}(t)\}$ bazına göre $M_{2m+1}(t)$ Frenet matrisinin çekirdeğinden yararlanarak D vektörü aşağıdaki gibi verilir.

$$D = a_0 V_1 + a_1 V_3 + \cdots + a_m V_{2m+1},$$

olup,

$$a_0 = k_2 k_4 \cdots k_{2m}, \ a_1 = \frac{k_1}{k_2} a_0,$$

$$a_2 = \frac{k_3}{k_4} a_1, \cdots, a_i = \frac{k_{2i-1}}{k_{2i}} a_{i-1}, \cdots, a_m = \frac{k_{2m-1}}{k_m}, a_{m-1} = k_1 k_3 \cdots k_{2m-1}$$

dir [13].

Tanım 4.2.1. $\alpha : \mathrm{I} \to E^{2m+1}$de non-dejenere bir eğri ve α eğrisinin eğrilikleri $\{k_1, k_2, \cdots, k_{2m}\}$ olsun. Eğer

$$\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_4}{k_3}, \frac{k_6}{k_5}, \cdots, \frac{k_{2m-2}}{k_{2m-3}}, \frac{k_{2m}}{k_{2m-1}}$$

oranları sabit ise, α eğrisi Hayden'e göre bir V_{2m+1}- slant helistir.

Önerme 4.2.3. $d = a_0 V_1 + a_1 V_3 + \cdots + a_m V_{2m+1}$ vektörü $M_{2m+1}(t)$ Frenet matrisinin çekirdeğinde yatar. Burada $m > 2$ dir

Önerme 4.2.4. $\alpha : \mathrm{I} \to E^{2m+1}$ birim hızlı bir eğri olsun. D Darboux vektörü $M_{2m+1}(t)$ Frenet matrisinin çekirdeğinde yatar ancak ve ancak α eğrisi Hayden'e göre bir V_{2m+1}- slant helistir [13].

Sonuç 4.2.1. $\alpha : \mathrm{I} \to E^{2m+1}$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi Hayden'e göre bir V_{2m+1}- slant helistir ancak ve ancak α eğrisi Hayden'e göre bir genel helistir.

5. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Tartışma

Helis eğrilerinin belirlenmesinde D vektörünün kolaylığı tartışıldı. Uzayın boyutu artıkça D vektörünün zorlaşacağı tartışıldı.

Helislerin 'boyu'nun nasıl hesaplandığı incelendi. Dik dairesel silindir dışında hangi yüzeyler üzerinde çizilebileceği üzerinde duruldu.

5.2. Sonuç ve Öneriler

Yapılan bu çalışmanın Öklid uzayı dışındaki uzaylarda araştırılmasına ve farklı çatılar için D vektörünün araştırılabileceği önerildi.

KAYNAKLAR

1. Lancret, M.A., 1806. Mémoire surless courbes a` double courbure. **Mémoires présentés a` Institut**1, 416-454
2. Struik, D. J. ,1961. Lectures on Classical Diferential Geometry. **Dover Publication, Inc., New York, 2end edition,**
3. Özdamar, E., Hacısalihoglu, H.H., 1975 . A characterization of Inclined curves in Euclidean n- space. **Comm Fac Sci Univ Ankara, Se**r A1 , 24:15–23.
4. Monterde, J., 2004. **Curves with constant curvature ratios. arXiv:math.DG/0412323 vol.** 16.
5. Barros, M,. 1997. General Helices and a theorem of Lancert. **Proc AMS,** 125:1503–9.
6. Arrayo, J., Barros, M. and Garay, J.O., 1997. A characterisation of helices and cornu spirals in real space forms. **Bull. Austral. Math. Soc. 56, no.1,** 37-49
7. Izumiya, S. Takeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces. **Turk J Math 28,** 153-163.
8. Yaylı, Y. and Kula, L. ,2005. On slant helix and its spherical indicatrix. **Apple Math. and Comp. Vol.** (1), 600-607.
9. Hayden, H.A., 1931. On a general helix in a Riemannian n-space. **Proc London Math Soc** (2);32:37–45.
10. Ali, A.T., López, R., 2010. Some characterizations of inclined curves in Euclidean E^n space. **Novi Sad J. Math., Vol**. 40, No. 1, 9-17.
11. Ali, A.T., Turgut, M., Apr 2009. Some characterizations of slant helices in the Euclidean space E^n. **arXiv: 0904.1187v1 [math.DG].**
12. Camcı, Ç., İlarslan, K., Kula, L., Hacısalihoglu, H.H., 2009. Harmonic curvatures and generalized helices in E^n. **Chaos, Solitions & Fractals 40,** 2590-2596.
13. Gök, I., Camcı, Ç., Hacısalihoglu, H.H., 2009. V_n- slant helices in Euclidean *n* –space E^n. **Math. Commun., Vol.** 14, No. 2, pp. 317-329.
14. Turgut, M. and Yilmaz, S., 2008. Contributions to classical diferential geometry of the curves in E^3**. Scientia Magna 4**, 5-9.
15. Hacısalihoglu, H. H., 1993. Diferential Geometry Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
16. Spivak, M., 1965. Calculus On Manifolds, W.A. Benjamin. Inc. New York.

17. Onder , M., Kazaz, M., Kocayigit, H., Kilic, O., 2008. B_2 - slant helix in Euclidean 4-space E^4. **Int. J. Cont. Math. Sci.** 3, 1433-1440.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Hasibe İKİZ
Uyruğu: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri:7 Ekim 1988, Niğde
Medeni Durumu: Evli
Tel: +90 535 610 26 20
email: goksu.51@hotmail.com
Yazışma Adresi: Erciyes Üniversitesi Talas/KAYSERİ

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	EÜ Fen Bilimler Enstitüsü	2012
Lisans	Ahi Evran Üni. Matematik	2010
Lise	Niğde Anadolu Lisesi	2006

İŞ DENEYİMLERİ

YABANCI DİL

İngilizce, Almanca

YAYINLAR