İKİ BOYUTLU SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Fatma TOYOĞLU

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Gabil YAGUBOV
Doç. Dr. Murat SUBAŞI
2012

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İKİ BOYUTLU SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Fatma TOYOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2012

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

İki Boyutlu Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Nümerik Çözümü

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV ve Doç. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Fatma TOYOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 09/04/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Murat SUBAŞI	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Ercan ÇELİK	*İmza*	:

(imza)
Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ BOYUTLU SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ONLARIN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Fatma TOYOĞLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat SUBAŞI
Ortak Danışman: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

Bu tezde, iki boyutlu Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. İlk bölümde optimal kontrol teorisi hakkında genel bir giriş yapıldıktan sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan teoremler, lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, iki boyutlu Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu problem için olası kontroller kümesi, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu problem için, başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış, optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olması için gerekli olan sorular incelenmiş, fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiş ve optimal kontrol probleminin çözümü için bir gerek şart elde edilmiştir. Daha sonra, bu bölümde ele alınan optimal kontrol problemine sonlu farklar yöntemi uygulanmış ve sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde elde edilen bulgular verilmiş olup, beşinci bölümde bu tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2012, 110 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, optimal kontrol, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı, sonlu farklar metodu, kontrol.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR THE TWO-DIMENSIONAL SCHRÖDINGER EQUATION AND THEIR NUMERICAL SOLUTIONS

Fatma TOYOĞLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat SUBAŞI
Co-Supervisor: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

In this thesis, the optimal control problems for two-dimensional Schrödinger equation are considered. In the first chapter, after giving a general introduction about the optimal control theory, in the second chapter, theorems, lemmas and some mathematical concepts used in this thesis are presented. In the third chapter, a optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation is considered. For this problem, set of probable controls is space of measurable squarel integrable functions. For this problem, the existence and uniqueness of the solution of initial boundary value problem is proved, the questions which are necessary for checking whether optimal control problems are well posed are investigated, it is showed that functional is differentiable and a necessary condition for the solution of optimal control problems is obtained. Then, respectively, the finite difference method is applied to this optimal control problem considered in this chapter and the convergence of the finite difference approximation according to the functional is proved. In the fourth chapter, obtained findings are given and it is emphasized that this thesis different from the former studying in the fifth chapter.

2012, 110 Pages

Keywords: Schrödinger equation, optimal control, the space of measurable squarel integrable functions, the finite differences method, control.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV ve Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Murat SUBAŞI danışman hocalarıma en içten şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olan canım aileme, özellikle de annem Safinaz TOYOĞLU ve babam H. İbrahim TOYOĞLU’ na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Fatma TOYOĞLU
Mart 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{\circ}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$i=\sqrt{-1}$	Sanal birim
$T>0$	Verilen sayı
$D\subset R^2$	Verilen bölge
$\Omega = D\times(0,T)$	Verilen bölge
$\Omega_t = D\times(0,t)$	Verilen bölge
$\delta_{\bar{t}}\phi_{j_1j_2k} = \left(\phi_{j_1j_2k}-\phi_{j_1j_2k-1}\right)/\tau$	t ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}_1}\phi_{j_1j_2k} = \left(\phi_{j_1j_2k}-\phi_{j_1-1\,j_2k}\right)/h_1$	x_1 e göre sol fark
$\delta_{\bar{x}_2}\phi_{j_1j_2k} = \left(\phi_{j_1j_2k}-\phi_{j_1j_2-1k}\right)/h_2$	x_2 ye göre sol fark
$\delta_{x_1}\phi_{j_1j_2k} = \left(\phi_{j_1+1\,j_2k}-\phi_{j_1j_2k}\right)/h_1$	x_1 e göre sağ fark
$\delta_{x_2}\phi_{j_1j_2k} = \left(\phi_{j_1j_2+1k}-\phi_{j_1j_2k}\right)/h_2$	x_2 ye göre sağ fark
$\delta_{x_1\bar{x}_1}\phi_{j_1j_2k} = \left(\phi_{j_1+1\,j_2k}-2\phi_{j_1j_2k}+\phi_{j_1-1\,j_2k}\right)/h_1^2$	x_1 e göre ikinci mertebeden fark
$\delta_{x_2\bar{x}_2}\phi_{j_1j_2k} = \left(\phi_{j_1j_2+1k}-2\phi_{j_1j_2k}+\phi_{j_1j_2-1k}\right)/h_2^2$	x_2 ye göre ikinci mertebeden fark

1. GİRİŞ

Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri kuantum mekaniğin, nükleer fiziğin, lineer olmayan optiğin, çağdaş fiziğin ve tekniğin çeşitli alanlarında ortaya çıkan çeşitli süreçleri ifade etmektedir. Bu süreçler içerisinde kuantum mekanik süreçler önem taşımaktadır ve bu süreçlerin optimal kontrolü dağılmış parametreli sistemler için optimal kontrol problemlerinden olup bu tür problemlerin araştırılması ve incelenmesi gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşımaktadır. Böyle problemlerden biri kuantum mekaniğinde ortaya çıkan yüklü parçacıkların kontrolüdür. Bu problem şöyledir: Farz edelim ki; yüklü parçacık homojen sabit manyetik alanında hareket ediyor olsun. Manyetik alanın yönünü z-ekseni boyunca seçersek bu takdirde, kütlesi ve yükü 1'e eşit olan yüklü parçacığın R^2 düzleminde hareketi $\hbar = c = 1$ için aşağıdaki iki boyutlu Schrödinger denklemiyle ifade edilebilir:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)\psi + i\frac{\omega}{2}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \left(\mathrm{E}_1 x + \mathrm{E}_2 y\right)\psi$$

Burada $\omega = \omega(t)$ yüklü parçacığın frekansı, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_1(t), \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_2(t)$ fonksiyonları $(0,T)$ aralığında etkileyen değişken elektrik alanının bileşenleri olup kontroller rolünü oynar. $(0,T)$ aralığının dışında elektrik alanı sıfıra eşittir. $\psi = \psi(x,y,t)$ dalga fonksiyonudur. Eğer yüklü parçacığın hareketi Γ sınırına sahip D sınırlı bölgesinde gerçekleşiyor ise ve yüklü parçacığın başlangıç durumu $\psi_0(x,y)$ ile ifade ediliyor ise bu takdirde üstteki denkleme belli başlangıç ve sınır şartlarını ekleyerek Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleriyle ifade edilen kuantum kontrol sistemini elde ederiz. Bu tür kuantum sistemlerin kontrolü şöyle ifade edilebilir: $\omega = \omega(t), \mathrm{E}(t) = \left(\mathrm{E}_1(t), \mathrm{E}_2(t)\right)$ kontrollerini öyle seçmemiz gerekir ki sistem $t = T$ anında en büyük olasılıkla $\psi_1 = \psi_1(x,y)$ durumunda olsun. Başka bir deyişle,

$$J(\omega,\mathrm{E}) = \left|a(T)\right|^2 = \left|\int_D \psi(x,y,T)\overline{\psi}_1(x,y)\,dxdy\right|^2$$

fonksiyoneli en büyük değere ve ya

$$J\left(\omega,\mathrm{E}\right)=\int_D\left|\psi\left(x,y,T\right)-\psi_1\left(x,y\right)\right|^2 dxdy$$

fonksiyoneli en küçük değere sahip olsun. Görüldüğü üzere, bu ifade edilen problem iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemidir.

Optimal kontrol problemleri incelenirken bir takım soruların cevapları aranır. Bunlar,
1. Optimal kontrol probleminin iyi konulup konulmadığıdır. Bu araştırılırken, optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı, amaç fonksiyonelinin alttan sınırlı olup olmadığı ve herhangi minimalleştirici dizinin minimum noktalar kümesine yakınsayıp yakınsamadığı incelenir.
2. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeter şartlar nelerdir?
3. Optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için hangi hesaplama metodlarının kullanılacağıdır.

Söylemek gerekir ki; üstte gösterilen Schrödinger denklemi kuantum mekaniğinde klasik biçimde olan Schrödinger denkleminden farklıdır. Çünkü bu denklem gradient tipli terim içermektedir. Şimdiye kadar öğrenilen problemlerin çoğunluğunda gerek lineer gerek lineer olmayan Schrödinger denklemleri için optimal kontrol problemlerinde Schrödinger denkleminin bu özel terimi bulunmamaktadır. Bu tür terimlerin varoluşu öğrenilen problemlerin konulmasını ilk önce öğrenilen problemlerden ciddi bir biçimde farklı yapar ve böyle problemlerin öğrenilmesi teorik açıdan bilimsel ilgi taşımaktadır.

Belirtmek gerekir ki, üstteki biçimde özel terim içermeyen lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri için optimal kontrol problemleri ilk önce A. D. İskenderov, A. G. Butkovskiy, Yu. İ. Samoylenko, F. P. Vasilyev, M. A. Vorontsov, V. I. Shmalgauzen, G. Ya. Yagubov, M. M. Potapov, A. V. Razgulin, Dın Nıo Hao, N. Silla, B. Yıldız, M. A. Musayeva, N. M. Mahmudov, M. Subaşı, H. Yetişkin, L. Baudouin, J. Solomon, N. Yıldırım, N. S. İbrahimov ve diğer bilim adamlarının çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol teorisini geliştiren sonuçlar elde edilmiştir. Buna rağmen üstte gösterilen biçimde optimal kontrol problemi ve onun nümerik çözümü gösterilen halde az incelenmiştir.

Bu söylenenleri göz önünde bulundurarak sunulan tez çalışmasında üstte söylediğimiz optimal kontrol problemini özel hal olarak içeren optimal kontrol problemleri ve onların nümerik çözümüne ait olan soruların incelenmesiyle ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Tezin ilerleyen bölümlerinde ilk olarak, 2. bölümünde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan L_p uzayları ve Sobolev uzaylarının yanı sıra bir sonraki bölümde kullanacağımız teoremler ve lemmalar ile bazı kavramların tanımları verilmiştir.

3.1. bölümde iki boyutlu Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi göz önüne alınmıştır. Bu problem için ilk olarak, optimal kontrol problemi konulmuş ve daha sonra iki boyutlu Schrödinger denklemiyle ifade edilen başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği, optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği araştırılmış ve optimal kontrol probleminin çözümü için bir gerek şart elde edilmeye çalışılmıştır.

3.2. bölümde 3.1. bölümde göz önüne aldığımız optimal kontrol probleminin bir özel haline nümerik çözüm metodlarından sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Bu amaçla öncelikle optimal kontrol problemi diskritleştirilmiş, daha sonra fark şemasının kararlılığı ve fark şemasının hatası ile fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı araştırılmıştır.

4. bölümde, yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bulgular verilmiş olup, tezi sonlandıran 5. bölümde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya koyulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız teoremler, lemmalar ile bazı uzayların ve kavramların tanımlarını vereceğiz:

Tanım 2.1: $L_2(D)$ Hilbert uzayı olup elemanları D bölgesinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u,v\rangle_{L_2(D)} = \int_D u(x)\overline{v}(x)dx,$$
$$\|u\|_{L_2(D)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{L_2(D)}}.$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.2: $L_\infty(D)$ Banach uzayı olup, D bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(D)} = vrai\sup_{x\in(D)}|u(x)| = ess\sup\{|u(x)| : x\in D\}$$
$$= \inf\left\{c \geq 0 : \overset{o}{\forall}\, x \in D \text{ için } |u(x)| \leq c\right\}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.3: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω silindirinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)dxdt,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.4: $C^k([0,T],B)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlanmış k. mertebeden sürekli türevlere sahip ve değerleri B-Banach uzayına ait fonksiyonların uzayıdır. Burada norm

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)} = \sum_{m=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \left\| \frac{d^m u(t)}{dt^m} \right\| < +\infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.5: $L_2([0,T],B)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left(\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2 dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

Tanım 2.6: $W_2^1(D)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(D)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(D)} = \int_D \left(\psi(x)\overline{\phi}(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\phi}(x)}{\partial x_j} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(D)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(D)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(D)$ uzayı $W_2^1(D)$ uzayının alt uzayı olup D bölgesinde sürekli türevlenebilir ve bu bölgenin sınırının yakın civarında sıfıra dönüşen fonksiyonlar, bu uzayda her yerde yoğundur.

Tanım 2.7: $W_2^2(D)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(D)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^2(D)}=\int\limits_D\left(\psi(x)\overline{\phi}(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{\phi}(x)}{\partial x_j}+\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial^2\overline{\phi}(x)}{\partial x_j\partial x_k}\right)dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(D)}=\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^2(D)}};$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(D)\equiv W_2^2(D)\cap\overset{0}{W}{}_2^1(D).$$

Tanım 2.8: $W_2^{1,0}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve x değişkenine göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}=\int\limits_\Omega\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial x_j}\right)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}=\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup Ω silindirinde sürekli türevlenebilir ve Ω nın yan yüzeyinin yakın civarında sıfıra dönüşen fonksiyonlar, bu uzayda yoğundur.

Tanım 2.9: $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve t değişkenine göre genelleştirilmiş türevi $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}=\int\limits_\Omega\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial t}\right)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}=\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.10: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi, x değişkenine göre ikinci mertebeye kadar ve t değişkenine göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x_j} + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 \overline{\phi}(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}};$$
$$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,1}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega).$$

Tanım 2.11: $\{x_n\}$, H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için $\lim_{n\to\infty}(x_n, y)_H = (x, y)_H$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyordur denir.

Tanım 2.12: $\{x_n\}$, $(X, \|\ \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına normda ya da kuvvetli yakınsar denir.

Tanım 2.13: $\{f_n\}$, bir X uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer hemen hemen bütün $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n(x)\}$ dizisi bir $f(x)$ fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsar denir. Yani, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ eşitliğini sağlamayan noktaların kümesinin ölçümü sıfırdır.

Tanım 2.14: Sürekli fonksiyonların uzayı üzerinde

$$\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

olarak tanımlanan norm düzgün ya da sup normu olarak adlandırılır. $\{f_n\}$, bir X metrik uzayı üzerinde sınırlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ oluyorsa $\{f_n\}$ dizisi $f \in X$ fonksiyonuna düzgün yakınsar denir. Burada norm sup normudur.

Tanım 2.15: V , X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in V$ oluyorsa, V kümesine X de konveks (dışbükey) küme denir.

Tanım 2.16: f konveks bir X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

oluyorsa f ye konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.17: $\left(X, \|\ \|\right)$ bir normlu uzay olsun. $0 < \varepsilon \le 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için, eğer $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x - y\| \ge \varepsilon$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\left(X, \|\ \|\right)$ uzayına düzgün konveks uzay denir. $1 < p < \infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks uzaydır.

Tanım 2.18: $\left(X, \|\ \|\right)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E de bir limit noktası varsa E kümesine X de kompakt küme denir.

Tanım 2.19: E, $\left(X, \|\ \|\right)$ Banach uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer E içindeki her $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine $\left(X, \|\ \|\right)$ de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.20: X normlu uzayında bir E kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E deyse E kümesine X de kapalı küme denir.

Tanım 2.21: X , Banach uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir x elemanına zayıf yakınsadığında $x \in E$ ise E kümesine X de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 2.22: X , bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X in her bir x elemanı, E nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise E ye X de yoğundur denir.

Tanım 2.23: X bir vektör uzayı olmak üzere, $l : X \to R$ (veya C) lineer operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X in duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.24: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 2.25: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı süreklidir denir.

Tanım 2.26: F , bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1,\ t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda

$\left| f(t_1) - f(t_2) \right| \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa F ye I üzerinde aynı dereceden sürekli (eş sürekli) dir denir.

Tanım 2.27: F, bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $f \in F$ için $\left| f(t) \right| \le M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa F ye I üzerinde sınırlıdır denir.

Teorem 2.1 (Arzela-Ascoli): Sınırlı bir I aralığı üzerinde F, $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer F, sonsuz, sınırlı ve aynı dereceden sürekli ise F, I üzerinde düzgün yakınsak olan bir dizi içerir (Hsieh and Sibuya 1999).

Tanım 2.28: B herhangi bir Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \left\{ v : v \in B,\ \left\| v - u \right\| < \gamma \right\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \left(J'(u), h \right)_B + o(h,u)$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.29: $D \subset R^n$ bir bölge olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\left| z \right| < \sigma$ şartını sağlayan tüm z ler için $1 \le p < \infty$ iken $\left\| f(x+z) - f(x) \right\|_{L_p(D)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna L_p normu anlamında süreklidir denir.

Teorem 2.2: $1 \le p < \infty$ iken $L_p(D)$ den olan her fonksiyon L_p normu anlamında süreklidir (Mikhailov 1983).

Teorem 2.3 (Weierstrass Teoremi): U , B Banach uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J(u)$ ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu takdirde $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \varnothing$ zayıf kompakttır ve U dan alınan herhangi minimalleştirici dizi, minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar (Vasilyev 1981).

Teorem 2.4: Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır **(**Goebel 1979).

Teorem 2.5: U, B-Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_* = \left\{u \in U : J(u) = J_* = \inf_U J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\left(J'(u_*), u - u_*\right)_B \geq 0$ şartı sağlanır (Vasilyev 1981).

Teorem 2.6 (Fubini): Q_n, R^n nin sınırlı bir bölgesi ve Q_m, R^m in sınırlı bir bölgesi olmak üzere $Q_n \times Q_m$ bölgesinde $f(x, y)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Farz edelim ki $f(x, y)$ fonksiyonu $Q_{n+m} = Q_n \times Q_m$ bölgesinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(x, y)$ fonksiyonu hemen hemen $x \in Q_n$ için $y \in Q_m$ ye göre, hemen hemen $y \in Q_m$ için $x \in Q_n$ ye göre integrallenebilirdir. Ayrıca

$$\int_{Q_m} f(x, y)dy \text{ ve } \int_{Q_n} f(x, y)dx$$

fonksiyonları sırasıyla x ve y ye göre integrallenebilir olup

$$\int_{Q_{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{Q_n} dx \int_{Q_m} f(x,y)dy = \int_{Q_m} dy \int_{Q_n} f(x,y)dx$$

eşitliği geçerlidir (Mikhailov 1983).

Lemma 2.1: $D \subset R^n$ herhangi bir bölge olsun. Eğer $\{u_k(x)\}$ fonksiyonlar dizisi $L_q(D)$ $(q \geq 1)$ uzayında bir $u(x)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyor ise bu takdirde $\{u_k(x)\}$ dizisinden $u(x)$ fonksiyonuna D de hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Ayrıca $\{u_k(x)\}$ dizisinin D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsaması, D üzerinde hemen hemen düzgün yakınsamayı gerektirir (Ladyzenskaja *et al.* 1967).

Lemma 2.2: $\{u_k(x)\}$ bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere, eğer $q > 1$ ve $k = 1,2,...$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k(x)\}$ den $L_q(D)$ de zayıf yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Eğer $k = 1,2,...$ için $\{u_k(x)\}$, D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q > 1$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k\}$ dizisi $q^* < q$ için $L_{q^*}(D)$ de u ya kuvvetli yakınsar; $L_q(D)$ de ise u ya zayıf yakınsar (Ladyzenskaja *et al.* 1968).

Lemma 2.3: $f(x,t,u)$ fonksiyonu $\{(x,t) \in \Omega,\ u \in (-\infty,\infty)\}$ kümesinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ve hemen hemen $(x,t) \in \Omega$ için u ya göre sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $L_1(\Omega)$ dan olan $\{u_k(x,t)\}$ dizisi, $L_1(\Omega)$ dan olan $u(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q > 1$ için $\| f(.,.,u_k(.,.))\|_{L_q(\Omega)} \leq c$ ise bu durumda $q^* < q$ için $f(x,t,u_k(x,t))$ fonksiyonlar dizisi $L_{q^*}(\Omega)$ normunda $f(x,t,u(x,t))$ fonksiyonuna yakınsar; $L_q(\Omega)$ da ise zayıf yakınsar. Eğer $\{u_k(x,t)\}$

dizisi $L_1(\Omega)$ da u fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|u_k\|_{L_q(\Omega)} \le c$ ise bu takdirde $\{u_k(x,t)\}$ dizisi u ya $q^* < q$ için $L_{q^*}(\Omega)$ da kuvvetli yakınsar (Ladyzenskaja *et al.* 1967).

Lemma 2.4 (T. H. Gronwall): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K\exp\left(L(t-t_0)\right)$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir (Hsieh and Sibuya 1999).

Lemma 2.5 (Gronwall Lemmasının ayrık aynısı): Eğer $a \ge 0,\ b \ge 0$ olmak üzere $\varphi_j,\ j=\overline{0,N}$ sayıları

$$0 \le \varphi_0 \le a,\ 0 \le \varphi_{j+1} \le a + b\sum_{m=0}^{j} \varphi_m,\ \ j=\overline{0,N-1}$$

şartlarını sağlıyor ise bu takdirde

$$0 \le \varphi_j \le a(1+b)^j,\ \ j=\overline{0,N}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \le \varphi_{j-1} \le a + b\sum_{m=j}^{N-1} \varphi_m,\ \ j=\overline{0,N-1},\ \ 0 \le \varphi_{N-1} \le a,$$

şartları sağlanıyor ise bu takdirde

$$0 \le \varphi_j \le a(1+b)^{N-j-1},\ \ j=\overline{0,N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir (Vasilyev 1981).

Lemma 2.6 (Cauchy-Bunjakovskii Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_{\Omega} u\bar{v}\,dx\,d\tau \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2\, dx\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2\, dx\,d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzenskaja *et al.* 1968).

Lemma 2.7 (ε-Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzenskaja *et al.* 1968).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İki Boyutlu Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi

Bu bölümde iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi ele alınmıştır.

3.1.1. Optimal kontrol probleminin konulması

$T>0$ verilen sayı; $D\subset R^2$ olan sınırlı konveks bölge; Γ ise bu bölgenin yeteri kadar düzgün sınırıdır. $0\le t\le T$; $x=(x_1,x_2)\in D$ olan herhangi bir nokta; $\Omega_t=D\times(0,t)$; $\Omega=\Omega_T$; $S=\Gamma\times(0,T)$ olmak üzere iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi ile ifade edilen sistemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\Delta\psi+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\psi-a(x)\psi=f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega \tag{3.1}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in D,\ \psi(x,t)|_S=0. \tag{3.2}$$

Burada $\psi=\psi(x,t)$ dalga fonksiyonu; $i^2=-1$; $a_0>0$, verilen reel sayı; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ Laplace operatörü; $a(x)\in L_\infty(D)$, $a_j(x)\in L_\infty(D)$, $b_j(x)\in L_\infty(D)$, $j=1,2$ verilen fonksiyonlar olup

$$0\le a(x)\le\mu_0,\ \left|\frac{\partial a(x)}{\partial x_k}\right|\le\mu_1,\ \left|\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_k\partial x_p}\right|\le\mu_2,\ k,p=1,2,\ \forall x\in \overset{0}{D},\quad \mu_0,\mu_1,\mu_2=sabit>0 \tag{3.3}$$

$$0 \le a_j(x) \le \upsilon_0, \quad \left|\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\right| \le \upsilon_1, \quad \left|\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k \partial x_p}\right| \le \upsilon_2, \quad j,p,k = 1,2, \quad \forall x \in \overset{0}{D}, \tag{3.4}$$
$$\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2 = sabit > 0$$

$$0 \le b_j(x) \le \eta_0, \quad \left|\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\right| \le \eta_1, \quad \left|\frac{\partial^2 b_j(x)}{\partial x_k \partial x_p}\right| \le \eta_2, \quad j,p,k = 1,2, \quad \forall x \in \overset{0}{D}, \tag{3.5}$$
$$\eta_0, \eta_1, \eta_2 = sabit > 0$$

şartlarını sağlar. $\varphi(x)$, $f(x,t)$ verilen fonksiyonlar olup

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(D), \quad f \in \overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega) \tag{3.6}$$

şartını sağlar. $v = v(t)$ ise kontrol fonksiyonu olup $\tilde{v}_k > 0,\ k = \overline{0,2}$ verilen sayılar olmak üzere

$$V = \Big\{ v = v(t) = \big(v_0(t), v_1(t), v_2(t)\big),\ v_k \in L_2(0,T),\ k = \overline{0,2},$$
$$|v_0(t)| \le \tilde{v}_0,\ \|v_k\|_{L_2(0,T)} \le \tilde{v}_k,\ k = 1,2 \Big\}$$

kümesinden seçilir.

Şimdi aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v) = \int_D |\psi(x,T) - y(x)|^2\, dx + \alpha \|v - \omega\|^2_{L_2^{(3)}(0,T)} \tag{3.7}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde (3.1)-(3.2) şartları altında minimumunun bulunması gerekir. Burada $\alpha \ge 0$-verilen sayı; $\omega(t) \in L_2^{(3)}(0,T)$, $y(x) \in L_2(D)$, verilen fonksiyonlardır. Bu optimal kontrol problemini kısaca (3.1)-(3.2), (3.7) problemi olarak adlandıracağız.

Her bir $v \in V = \Big\{ v = v(t) = \big(v_0(t), v_1(t), v_2(t)\big),\ v_k \in L_2(0,T),\ k = \overline{0,2},\ |v_0(t)| \le \tilde{v}_0,$ $\|v_k\|_{L_2(0,T)} \le \tilde{v}_k,\ k = 1,2 \Big\}$ için (3.1)-(3.2) şartları altında $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için 1. tip başlangıç sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan ve

$\forall\left(x,t\right)\in\overset{0}{\Omega}$ için (3.1)-(3.2) şartlarını sağlayan $\psi=\psi\left(x,t\right)\equiv\psi\left(x,t;v\right)$ fonksiyonu anlaşılır.

3.1.2. İki boyutlu Schrödinger denklemi için 1. tip başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

$\forall v\in V$ için (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım. Bu problem için aşağıdaki hüküm geçerlidir:

Teorem 3.1: Farz edelim ki, $a\left(x\right),\ a_j\left(x\right),\ b_j\left(x\right),\ j=1,2,\ \varphi\left(x\right),\ f\left(x,t\right)$ fonksiyonları (3.3)-(3.6) şartlarını sağlasın. Bu takdirde, (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin her bir $v\in V$ için $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayından olan çözümü vardır, çözüm tektir ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\psi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_0\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)}+\left\|f\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right) \tag{3.8}$$

Burada $c_0>0$ sayısı φ ve f den bağımsızdır.

İspat: Teoremin ispatı için Galerkin yöntemi uygulanacaktır. Temel fonksiyonlar sistemi olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2}\left(D\right)$ uzayından olan ve

$$Lu_k=-a_0\Delta u_k+a\left(x\right)u_k=\lambda_k u_k,\ x\in D \tag{3.9}$$

$$u_k\left(x\right)\Big|_{\Gamma}=0 \tag{3.10}$$

özdeğer probleminin $\lambda_k,\ k=1,2,...$ özdeğerlerine karşılık gelen çözümler sistemi kullanılacaktır. Ladyzhenskaya and Ural'tseva (1973) çalışmasından bilindiği üzere verilen şartlar altında (3.9)-(3.10) probleminin özdeğerleri reeldir, negatif değildir ve $k\to\infty$ için $\lambda_k\to+\infty$ şartlarını sağlar. Özfonksiyonlar ise reel fonksiyonlardır.

Bunların yanı sıra özfonksiyonlar $L_2(D)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$, $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ uzaylarında ortogonallik şartlarını sağlar.

Farz edelim ki $u_k = u_k(x)$, $k = 1,2,...$ fonksiyonları $L_2(D)$ de ortonormal olsunlar. Yani

$$(u_k, u_m)_{L_2(D)} = \int_D u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m, \; k, m = 1,2,... \tag{3.11}$$

şartını sağlasın. Burada δ_k^m sabitleri Kronecker sabitleridir. Yani

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \qquad k, m = 1,2,...$$

dir.

$\overset{0}{W}{}_2^1(D)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ uzaylarında ortogonallik aşağıdaki biçimde anlaşılır:

$$(u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)} = \int_D \left(a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right) dx = \lambda_k \delta_k^m \tag{3.12}$$

$$(u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} = \int_D (Lu_k Lu_m) dx = \lambda_k^2 \delta_k^m. \tag{3.13}$$

Farz edelim ki, $u_k = u_k(x)$ fonksiyonları için

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} \leq d_k < +\infty, \quad k = 1,2,... \tag{3.14}$$

şartı sağlansın. Burada $d_k > 0$ belirli sayılardır. Galerkin yöntemine göre (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Galerkin yaklaşımları

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x) \tag{3.15}$$

biçiminde aranır. Burada $C_k^N(t)$ katsayıları $C_k^N(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(D)}$ formülü ile tanımlanıp

$$
\begin{aligned}
i\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right)_{L_2(D)} &= \left(a_0\nabla\psi^N,\nabla u_k\right)_{L_2(D)} - i\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j},u_k\right)_{L_2(D)} - \\
&-\left(\sum_{j=1}^{2}b_j v_j(t)\psi^N,u_k\right)_{L_2(D)} + \left(a\psi^N,u_k\right)_{L_2(D)} + f_k(t),\quad k=\overline{1,N}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$
C_k^N(0) = (\varphi,u_k)_{L_2(D)} = \varphi_k,\quad k=\overline{1,N} \tag{3.17}
$$

Cauchy probleminin çözümüdür. Burada $f_k(t) = \left(f(.,t),u_k\right)_{L_2(D)},\quad k=\overline{1,N}$ dir.

Görüldüğü üzere (3.16)-(3.17) Cauchy problemi 1. mertebeden adi diferensiyel denklemler sistemi için Cauchy problemidir. Denklemlerin katsayıları ve sağ tarafı karesiyle integrallenebilir fonksiyonlardır. Pontryagin (1976) ve Vasilyev (1980) çalışmalarından bilindiği üzere, verilen şartlar altında (3.16)-(3.17) Cauchy probleminin çözümü vardır ve çözüm tektir.

Şimdi öncelikle Cauchy probleminin çözümü için $(0,T)$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösteren kestirimi elde edelim:

Lemma 3.1: (3.16)-(3.17) Cauchy probleminin çözümü için

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le \\
\le c_0\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)} + \left\|f\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_0 > 0$ sayısı φ ve f den bağımsızdır.

İspat: (3.16) sistemindeki k. denklem $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpılıp k üzerinden 1 den N ye kadar toplandıktan sonra $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - a_0\left|\nabla \psi^N\right|^2 + i\sum_{j=1}^{2} a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial \psi^N}{\partial x_J}\overline{\psi}^N + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\left|\psi^N\right|^2 - a(x)\left|\psi^N\right|^2 \right] dxd\tau = \int_{\Omega_t} f\overline{\psi}^N dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N + \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)v_0(\tau)\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x_j}\overline{\psi}^N + \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial x_j}\psi^N\right)dxd\tau =$$
$$= 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)v_0(\tau)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau = 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxd\tau$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\right)v_0(\tau)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau$$

terimi eklenirse

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxd\tau \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. $\psi^N(x,t)$ fonksiyonu için olan formül kullanılıp $u_k\big|_\Gamma = 0$ şartı göz önünde bulundurulursa

$$\psi^N(x,t)\big|_\Gamma = 0 \tag{3.20}$$

şartı elde edilir. Bu şart kullanılarak kısmi integrasyon formülü uygulanırsa (3.19) eşitliğinin sol tarafındaki ikinci terimin sıfıra eşit olduğu kolaylıkla görülür. Bu sebepten (3.19) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau = \int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(f\overline{\psi}^N\right)dxd\tau.$$

Buradan da kolaylıkla

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 + \int_{\Omega_t} \left|v_0(\tau)\right| \sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\right| \left|\psi^N\right|^2 dx d\tau + $$
$$+2\int_{\Omega_t} \left|f(x,\tau)\right| \left|\psi^N(x,\tau)\right| dx d\tau \tag{3.21}$$

eşitsizliği elde edilir. $\psi^N(x,t)$ için olan formül kullanılırsa

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{k=1}^{N} \left|C_k^N(0)\right|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left|\varphi_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_k\right|^2 = \left\|\varphi\right\|_{L_2(D)}^2 \tag{3.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ve $a_j(x)$ ve $v_0(t)$ fonksiyonları üzerine konulan şartlar kullanılarak (3.21) eşitsizliği aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le \left\|\varphi\right\|_{L_2(D)}^2 + \left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left(1+2\upsilon_1\tilde{v}_0\right)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau,\ \forall t \in [0,T].$$

Burada Gronwall lemması uygulanırsa aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu elde edilir:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_1\left(\left\|\varphi\right\|_{L_2(D)}^2 + \left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right),\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.23}$$

Burada $c_1 > 0$ sayısı N ve t den bağımsızdır.

Şimdi ψ^N yaklaşımlarının x e göre 1. mertebeden türevlerini değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla (3.16) sistemini kısmi integrasyon formülünü uygulayarak aşağıdaki biçimde yazalım:

$$i\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k\right)_{L_2(D)} - \left(L\psi^N, u_k\right)_{L_2(D)} + i\left(\sum_{j=1}^{2} a_j(x) v_0(t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j}, u_k\right)_{L_2(D)} + $$
$$+\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x) v_j(t) \psi^N, u_k\right)_{L_2(D)} = f_k(t),\ k = \overline{1,N}. \tag{3.24}$$

Bu sistemdeki k. denklem $\lambda_k \overline{C}_k^N(t)$ ile çarpılıp k üzerinden 1 den N ye kadar toplandıktan sonra $[0,t]$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}L\overline{\psi}^N-\left|L\psi^N\right|^2+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}L\overline{\psi}^N+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau=\int_{\Omega_t}\left(fL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau \tag{3.25}$$

eşitliği elde edilir. $u_k\big|_\Gamma=0$ sınır şartı ve $\psi^N(x,t)$ için olan formül kullanılırsa

$$\left.\frac{\partial\psi^N(x,t)}{\partial t}\right|_\Gamma=0,\ t\in[0,T] \tag{3.26}$$

sınır şartı elde edilir. Bu şart ve kısmi integrasyon formülü (3.25) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terime uygulanırsa

$$\int_{\Omega_t}ia(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N dxd\tau+\int_{\Omega_t}\left[ia_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\psi^N\right)\nabla\overline{\psi}^N-\left|L\psi^N\right|^2+\right.$$
$$\left.+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}L\overline{\psi}^N+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\psi^N L\overline{\psi}^N\right]dxd\tau=\int_{\Omega_t}fL\overline{\psi}^N dxd\tau$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\int_{\Omega_t}\left[a_0 i\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\psi^N\right)\nabla\overline{\psi}^N+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\overline{\psi}^N\right)\nabla\psi^N\right)\right]dxd\tau+i\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau+2i\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\mathrm{Im}\left(\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau=$$
$$=2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(fL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau.$$

Buradan da

$$a_0\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla\psi^N\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\mathrm{Im}\left(\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau=2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(fL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten kolaylıkla

$$a_0\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le a_0\left\|\nabla\psi^N(.,0)\right\|_{L_2((D))}^2 + 2\upsilon_0\tilde{v}_0\int\limits_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau +$$

$$+2\eta_0\int\limits_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\left|v_j(\tau)\right|\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau + 2\int\limits_{\Omega_t}|f|\left|L\psi^N\right|dxd\tau + \int\limits_D a(x)\left|\psi^N(x,0)\right|^2 dx$$

eşitsizliği elde edilir. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa sağ taraftaki terimler kestirilerek

$$a_0\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le a_0\left\|\nabla\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 + \sqrt{2}\upsilon_0\tilde{v}_0\int\limits_0^t\left\|\nabla\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau +$$

$$+\left(1+\eta_0+\sqrt{2}\upsilon_0\tilde{v}_0\right)\int\limits_0^t\left\|L\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \mu_0\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 + \quad (3.27)$$

$$+\eta_0\int\limits_{\Omega_t}\left|\sum_{j=1}^{2}v_j(\tau)\psi^N(x,\tau)\right|^2 dxd\tau + \int\limits_{\Omega_t}|f(x,\tau)|^2 dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilebilir.

$v_j(t),\ j=1,2$ fonksiyonlarının üzerine konulan şartlar ve Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği kullanılırsa eşitsizliğin sağ tarafındaki 5. terim aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$\eta_0\int\limits_{\Omega_t}\left|\sum_{j=1}^{2}v_j(\tau)\psi^N(x,\tau)\right|^2 dxd\tau \le 2\eta_0\int\limits_{\Omega_t}\left(\sum_{j=1}^{2}\left|v_j(\tau)\right|^2\right)\left|\psi^N(x,\tau)\right|^2 dxd\tau$$

$$\le 2\eta_0\max_{0\le\tau\le t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2\int\limits_0^T\sum_{j=1}^{2}\left|v_j(t)\right|^2 dt \le 2\eta_0\left(\tilde{v}_1^2+\tilde{v}_2^2\right)\max_{0\le\tau\le t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2.$$

Bu eşitsizlik, (3.27) eşitsizliğinde dikkate alınırsa ve (3.23) kestirimi kullanılırsa

$$a_0\left\|\nabla\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le a_0\left\|\nabla\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 + \sqrt{2}\upsilon_0\tilde{v}_0\int\limits_0^t\left\|\nabla\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau +$$

$$+\left(1+\eta_0+\sqrt{2}\upsilon_0\tilde{v}_0\right)\int\limits_0^t\left\|L\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \mu_0\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 + \quad (3.28)$$

$$+2\eta_0\left(\tilde{v}_1^2+\tilde{v}_2^2\right)c_1\left(\|\varphi\|_{L_2(D)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2\right) + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2,\ \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.22) ve

$$\left\|\nabla \psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_2 \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}^2 \tag{3.29}$$

eşitsizliği uygulanırsa, (3.28) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğu elde edilir:

$$\begin{aligned}\left\|\nabla \psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_3\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2\right) + c_4\int_0^t \left\|\nabla \psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \\ + c_5\int_0^t \left\|L\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau,\ \forall t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.30}$$

Burada $c_3 > 0,\ c_4 > 0,\ c_5 > 0$ sayıları N ve t den bağımsızdır.

Şimdi, (3.30) eşitsizliğinin sağ tarafındaki sonuncu terimi değerlendirmeye çalışalım. Bunun için (3.24) sistemindeki k. denklem $\lambda_k^2 \overline{C}_k^N(t)$ fonksiyonu ile çarpılıp k üzerinden 1 den N ye kadar toplandıktan sonra $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallenirse, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial}{\partial t}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N - L\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N + iL\left(\sum_{j=1}^2 a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}\right)L\overline{\psi}^N + \\ + L\left(\sum_{j=1}^2 b_j(x)v_j(\tau)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N\Bigg]dxd\tau = \int_{\Omega_t}\left(LfL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Bu eşitliğin sol tarafındaki 2. terim, kısmi integrasyon formülü yardımıyla ve

$$L\psi^N(x,t)\big|_\Gamma = 0,\ t\in[0,T] \tag{3.32}$$

sınır şartı altında

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t} L\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau = -\int_{\Omega_t} a_0\sum_{k=1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau + \int_{\Omega_t} a(x)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau = \\ = \int_{\Omega_t} a_0\sum_{k=1}^2\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\left(L\psi^N\right)\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} a(x)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik ve L operatörünün formülü kullanılarak (3.31) eşitliği

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_t} i\frac{\partial}{\partial t}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau-\int\limits_{\Omega_t} a_0\sum_{k=1}^{2}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\left(L\psi^N\right)\right|^2 dxd\tau-\\
&-\int\limits_{\Omega_t} a(x)\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau-i\int\limits_{\Omega_t} a_0\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau+\\
&+\int\limits_{\Omega_t} L\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N dxd\tau+\\
&+i\int\limits_{\Omega_t} a(x)\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}L\overline{\psi}^N dxd\tau=\int\limits_{\Omega_t}\left(LfL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

şeklinde yazılabilir.

Bu eşitliğin sol tarafındaki 4. terimi dönüştürmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki işlemleri yapalım:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}\right)=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}\right)\right)=\\
&=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}+a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_k\partial x_j}\right)\right)=\\
&=\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}+a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_k\partial x_j}\right)=\\
&=\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}v_0(\tau)\left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}+2\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_k\partial x_j}+a_j(x)\frac{\partial^3\psi^N}{\partial x_k^2\partial x_j}\right).
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Bu eşitlikten yararlanılarak

$$\int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\sum_{j=1}^{2} a_j(x) v_0(\tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} \right) L\overline{\psi}^N dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) \left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j} + a_j(x) \frac{\partial^3 \psi^N}{\partial x_k^2 \partial x_j} \right) \times$$

$$\times L\overline{\psi}^N dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) \left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j} \right) L\overline{\psi}^N dx d\tau +$$

$$+ \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) a_j(x) \frac{\partial^3 \psi^N}{\partial x_k^2 \partial x_j} \left(-a_0 \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x_k^2} + a(x) \overline{\psi}^N \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) \left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j} \right) L\overline{\psi}^N dx d\tau -$$

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega_t} a_0^2 v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} a_j(x) \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k^2} \right) \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x_k^2} dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k^2} \right) a(x) \overline{\psi}^N dx d\tau \end{aligned} \tag{3.35}$$

eşitliği yazılabilir. (3.35) eşitliği (3.33) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega_t} i \frac{\partial}{\partial t} \left(L\psi^N \right) L\overline{\psi}^N dx d\tau - \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \left(L\psi^N \right) \right|^2 dx d\tau - \int_{\Omega_t} a(x) \left| L\psi^N \right|^2 dx d\tau -$$

$$- i \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) \left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j} \right) L\overline{\psi}^N dx d\tau +$$

$$+ i \int_{\Omega_t} a_0^2 v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} a_j(x) \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k^2} \right) \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x_k^2} dx d\tau -$$

$$- i \int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k^2} \right) a(x) \overline{\psi}^N dx d\tau +$$

$$+ \int_{\Omega_t} L \left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x) v_j(\tau) \psi^N \right) L\overline{\psi}^N dx d\tau +$$

$$+ i \int_{\Omega_t} a(x) \sum_{j=1}^{2} a_j(x) v_0(\tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} L\overline{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(Lf L\overline{\psi}^N \right) dx d\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa

$$\int_{\Omega_t} i\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(L\psi^N\right)L\overline{\psi}^N+\frac{\partial}{\partial t}\left(L\overline{\psi}^N\right)L\psi^N\right)dxd\tau-$$

$$-2i\int_{\Omega_t} a_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}v_0(\tau)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}+2\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_k\partial x_j}\right)L\overline{\psi}^N\right]dxd\tau+$$

$$+i\int_{\Omega_t} a_0^2 v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Delta\psi^N\right)\Delta\overline{\psi}^N+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Delta\overline{\psi}^N\right)\Delta\psi^N\right)dxd\tau-$$

$$-i\int_{\Omega_t} a_0 v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Delta\psi^N\right)a(x)\overline{\psi}^N+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Delta\overline{\psi}^N\right)a(x)\psi^N\right)dxd\tau+$$

$$+2i\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(L\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau$$

$$+i\int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}a(x)a_j(x)\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}L\overline{\psi}^N+\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x_j}L\psi^N\right)dxd\tau=2i\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(LfL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Burada L için olan formül kullanılırsa

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t} a_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}v_0(\tau)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2}\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}+2\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_k\partial x_j}\right)L\overline{\psi}^N\right]dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-a_0\Delta\psi^N\right)L\overline{\psi}^N+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-a_0\Delta\overline{\psi}^N\right)L\psi^N\right]dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left[L\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N\right]dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}a(x)a_j(x)\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}L\overline{\psi}^N+\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x_j}L\psi^N\right)dxd\tau=2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(LfL\overline{\psi}^N\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafına

$$\int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}a_j(x)\left(\psi^N L\overline{\psi}^N+\overline{\psi}^N L\psi^N\right)dxd\tau$$

terimi eklenip çıkarılırsa

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left| L\psi^N \right|^2 dx d\tau -$$
$$-2\int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} + 2\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j}\right) L\overline{\psi}^N\right] dx d\tau +$$
$$+\int_{\Omega_t} v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} a_j(x)\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(L\psi^N\right) L\overline{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(L\overline{\psi}^N\right) L\psi^N\right] dx d\tau +$$
$$+2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left[L\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x) v_j(\tau)\psi^N\right) L\overline{\psi}^N\right] dx d\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a(x)}{\partial x_j} a_j(x)\left(\psi^N L\overline{\psi}^N + \overline{\psi}^N L\psi^N\right) dx d\tau + 2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(LfL\overline{\psi}^N\right) dx d\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafına

$$\int_{\Omega_t} v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \left| L\psi^N \right|^2 dx d\tau$$

terimi eklenip çıkarılsın. Bu takdirde

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left| L\psi^N \right|^2 dx d\tau -$$
$$-2\int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_0(\tau) \operatorname{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} + 2\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j}\right) L\psi^N\right] dx d\tau +$$
$$+2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left[L\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x) v_j(\tau)\psi^N\right) L\overline{\psi}^N\right] dx d\tau +$$
$$+\int_{\Omega_t} v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\left| L\psi^N \right|^2\right) dx d\tau =$$
$$= \int_{\Omega_t} v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a(x)}{\partial x_j} a_j(x)\left(\psi^N L\overline{\psi}^N + \overline{\psi}^N L\psi^N\right) dx d\tau +$$
$$+2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(LfL\overline{\psi}^N\right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} v_0(\tau) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \left| L\psi^N \right|^2 dx d\tau \qquad (3.36)$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitliğin sol tarafındaki 3. terimi dönüştürmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki eşitliği yazalım:

$$L\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N = -a_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_j(\tau)\left(\frac{\partial^2 b_j(x)}{\partial x_k^2}\psi^N + 2\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_k}\right)L\overline{\psi}^N -$$

$$-a_0\sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x_k^2}L\overline{\psi}^N + a(x)\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N =$$

$$= -a_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_j(\tau)\left(\frac{\partial^2 b_j(x)}{\partial x_k^2}\psi^N + 2\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_k}\right)L\overline{\psi}^N +$$

$$+\sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\left(-a_0\Delta\psi^N + a(x)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N =$$

$$= -a_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_j(\tau)\left(\frac{\partial^2 b_j(x)}{\partial x_k^2}\psi^N + 2\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_k}\right)L\overline{\psi}^N + \sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\left|L\psi^N\right|^2.$$

Bu eşitlik kullanılırsa

$$2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left[L\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\psi^N\right)L\overline{\psi}^N\right]dxd\tau =$$

$$= 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left[\left(-a_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_j(\tau)\left(\frac{\partial^2 b_j(x)}{\partial x_k^2}\psi^N + 2\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_k}\right)\right)L\overline{\psi}^N\right]dxd\tau \qquad (3.37)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.36) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau =$$

$$= 2\int_{\Omega_t} a_0 \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_0(\tau)\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} + 2\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j}\right) L\overline{\psi}^N\right] dxd\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left[\left(-a_0 \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} v_j(\tau)\left(\frac{\partial^2 b_j(x)}{\partial x_k^2}\psi^N + 2\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial \psi^N}{\partial x_k}\right)\right) L\overline{\psi}^N\right] dxd\tau -$$

$$-\int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\left|L\psi^N\right|^2\right) dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a(x)}{\partial x_j} a_j(x)\left(\psi^N L\overline{\psi}^N + \overline{\psi}^N L\psi^N\right) dxd\tau +$$

$$+2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left(LfL\overline{\psi}^N\right) dxd\tau + \int_{\Omega_t} v_0(\tau)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau \tag{3.38}$$

eşitliği elde edilir. Kısmi integrasyon formülü ve

$$L\psi^N(x,t)\big|_{\Gamma} = 0,\ \ \forall t \in [0,T]$$

sınır şartı kullanılarak (3.38) eşitliğinin sağ tarafındaki 3. terimin sıfıra eşit olduğu ispatlanabilir. Bu sebeple, (3.36) eşitliğinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left\|L\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le \left\|L\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 +$$

$$+2a_0\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left|v_0(\tau)\right|\left(\left|\frac{\partial^2 a_j(x)}{\partial x_k^2}\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x_j}\right| + 2\left|\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j}\right|\right)\left|L\psi^N\right| dxd\tau +$$

$$+2a_0\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left|v_j(\tau)\right|\left(\left|\frac{\partial^2 b_j(x)}{\partial x_k^2}\right|\left|\psi^N\right| + 2\left|\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x_k}\right|\right)\left|L\psi^N\right| dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left|v_0(\tau)\right|\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\right|\left|a_j(x)\right|\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right| dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\left|v_0(\tau)\right|\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\right|\left|a_j(x)\right|\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right| dxd\tau$$

$$+\int_{\Omega_t}\left|v_0(\tau)\right|\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\right|\left|L\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\left|Lf\right|\left|L\psi^N\right| dxd\tau.$$

Denklemin katsayıları üzerine konulan şartlar kullanılarak

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le \left\| L\psi^N(.,0) \right\|_{L_2(D)}^2 + 4a_0\tilde{v}_0\upsilon_2 \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} \right| \left| L\psi^N \right| dxd\tau +$$
$$+4a_0\tilde{v}_0\upsilon_1 \int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j} \right| \left| L\psi^N \right| dxd\tau + 4a_0\eta_2 \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} \left| v_j(\tau) \right| \left| \psi^N \right| \left| L\psi^N \right| dxd\tau +$$
$$+4a_0\eta_1 \int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \left| v_j(\tau) \right| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x_k} \right| \left| L\psi^N \right| dxd\tau + 4\tilde{v}_0\upsilon_0\mu_1 \int_{\Omega_t} \left| \psi^N \right| \left| L\psi^N \right| dxd\tau +$$
$$+\left(1+2\tilde{v}_0\upsilon_1\right) \int_{\Omega_t} \left| L\psi^N \right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} \left| Lf \right|^2 dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le \left\| L\psi^N(.,0) \right\|_{L_2(D)}^2 + 2a_0\tilde{v}_0\upsilon_2 \int_{\Omega_t} \left(\sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x_j} \right| \right)^2 dxd\tau +$$
$$+2a_0\tilde{v}_0\upsilon_1 \int_{\Omega_t} \left(\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j} \right| \right)^2 dxd\tau + 2a_0\eta_2 \int_{\Omega_t} \left(\sum_{j=1}^{2} \left| v_j(\tau) \right| \left| \psi^N \right| \right)^2 dxd\tau +$$
$$+2a_0\eta_1 \int_{\Omega_t} \left(\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \left| v_j(\tau) \right| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x_k} \right| \right)^2 dxd\tau + 2\tilde{v}_0\upsilon_0\mu_1 \int_{\Omega_t} \left| \psi^N \right|^2 dxd\tau + \tag{3.39}$$
$$+\left(2a_0\tilde{v}_0\upsilon_2 + 2a_0\tilde{v}_0\upsilon_1 + 2a_0\eta_2 + 2a_0\eta_1 + 2\tilde{v}_0\upsilon_0\mu_1 + 1 + 2\tilde{v}_0\upsilon_1\right) \times$$
$$\times \int_{\Omega_t} \left| L\psi^N \right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} \left| Lf \right|^2 dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kolaylıkla aşağıdaki biçime dönüştürülebilir:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le \left\| L\psi^N(.,0) \right\|_{L_2(D)}^2 + 4a_0\tilde{v}_0\upsilon_2 \int_0^t \left\| \nabla \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau +$$
$$+\left(2\tilde{v}_0\upsilon_0\mu_1 + 4a_0\eta_2\left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2\right)\right) \max_{0\le\tau\le t} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 +$$
$$+8a_0\eta_1\left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2\right) \max_{0\le\tau\le t} \left\| \nabla \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 + c_6 \int_{\Omega_t} \left| L\psi^N \right|^2 dxd\tau + \tag{3.40}$$
$$+\int_{\Omega_t} \left| Lf \right|^2 dxd\tau + 8a_0\tilde{v}_0\upsilon_1 \int_{\Omega_t} \left(\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=}^{2} \left| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_k \partial x_j} \right|^2 \right) dxd\tau.$$

Burada

$$\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial^2 \psi^N (x,\tau)}{\partial x_k \partial x_j} \right|^2 dx d\tau = \int_0^t \left\| \psi_{xx}^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \tag{3.41}$$

dır.

Ladyzhenskaya (1973) çalışmasından, D bölgesi konveks sınırlı bölge olduğundan

$$\int_0^t \left\| \psi_{xx}^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \le \int_0^t \left\| \Delta \psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \tag{3.42}$$

yazılır. (3.41) eşitliği ve (3.42) eşitsizliği kullanılarak, (3.40) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \left\| L\psi^N (.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le{}& \left\| L\psi^N (.,0) \right\|_{L_2(D)}^2 + c_7 \int_0^t \left\| \nabla \psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \\ &+ c_8 \max_{0 \le \tau \le t} \left\| \psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 + c_9 \max_{0 \le \tau \le t} \left\| \nabla \psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 + \\ &+ c_6 \int_0^t \left\| L\psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + c_{10} \int_0^t \left\| \Delta \psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \\ &+ \int_0^t \left\| Lf (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \end{aligned} \tag{3.43}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$\int_0^t \left\| Lf (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \le c_{11} \left\| f \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2 \tag{3.44}$$

$$\left\| L\psi^N (.,0) \right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{12} \left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)}^2 \tag{3.45}$$

eşitsizlikleri, (3.23) kestirimi ve (3.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\| L\psi^N (.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \le{}& c_{13} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)}^2 + \left\| f \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right) + c_{14} \int_0^t \left\| \nabla \psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \\ &+ c_{15} \int_0^t \left\| L\psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + c_{10} \int_0^t \left\| \Delta \psi^N (.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \end{aligned} \tag{3.46}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{10},\ c_{13},\ c_{14},\ c_{15} > 0$ sabitleri N ve t den bağımsızdır.

Açıktır ki,

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} \geq \left\| a_0 \Delta \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} - \left\| a(x)\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}$$

olup

$$\left\| a_0 \Delta \psi^N(,t) \right\|_{L_2(D)} \leq \left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)} + \left\| a(x)\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}$$

dir. $a(x)$ için olan şart kullanılırsa

$$\int_0^t \left\| \Delta \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \leq \int_0^t \frac{2}{a_0^2} \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \int_0^t \frac{2\mu_0^2}{a_0^2} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau \quad (3.47)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik (3.46) eşitsizliğinde kullanılıp (3.23) kestirimi uygulanırsa, bu takdirde

$$\begin{aligned} \left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{16} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right) + c_{14} \int_0^t \left\| \nabla \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau + \\ + c_{17} \int_0^t \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 d\tau, \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned} \quad (3.48)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (3.30) eşitsizliğiyle taraf tarafa toplanırsa bu takdirde

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 + \left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{18} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right) + \\ + c_{19} \int_0^t \left(\left\| \nabla \psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 + \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|_{L_2(D)}^2 \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.49)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$g(t) = \left\| \nabla \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 + \left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2$$

ile gösterilip (3.49) eşitsizliğinde Gronwall lemması uygulanırsa

$$g(t) \leq c_{19} \int_0^t g(\tau) d\tau + c_{18} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right)$$

eşitsizliğinden

$$\left\| \nabla \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 + \left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(D)}^2 \leq c_{20} \left(\left\| \varphi \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \left\| f \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2 \right), \quad \forall t \in [0,T] \quad (3.50)$$

kestiriminin geçerli olduğu elde edilir. Burada $c_{20} > 0$ sabiti N ve t den bağımsızdır.

Ladyzhenskaya (1973) çalışmasından

$$\left\|\psi_{xx}^{N}(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{21}\left\|L\psi^{N}(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 + c_{22}\left\|\psi^{N}(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}^2,\quad t\in[0,T] \tag{3.51}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$\left\|\psi^{N}(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}^2 = \left\|\psi^{N}(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 + \left\|\nabla\psi^{N}(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \tag{3.52}$$

dir. (3.23) kestirimi ve (3.50) kestirimi kullanılırsa

$$\left\|\psi^{N}(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}^2 \le c_{23}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \|f\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2\right) \tag{3.53}$$

kestirimi elde edilir. Bu kestirim ve (3.50) kestirimi kullanılırsa

$$\left\|\psi_{xx}^{N}(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{24}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \|f\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2\right) \tag{3.54}$$

kestirimi elde edilir. (3.53) ve (3.54) kestirimleri taraf tarafa toplanırsa

$$\left\|\psi^{N}(.,t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 \le c_{25}\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}^2 + \|f\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2\right),\quad \forall t\in[0,T] \tag{3.55}$$

kestirimi elde edilir.

Şimdi $\dfrac{\partial\psi^N}{\partial t}$ türevini değerlendirmeye çalışalım. Bunun için (3.24) sistemindeki k. denklem $\dfrac{\partial\overline{C}_k^N(t)}{\partial t}$ ile çarpılıp k üzerinden 1 den N ye kadar toplandıktan sonra $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t} i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau = \int_{\Omega_t}\left(-a_0\Delta\psi^N - i\sum_{j=1}^{2} a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j(\tau)\psi^N + \right.$$

$$\left. + a(x)\psi^N + f(x,\tau)\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} d\tau \le 4\int_0^t \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(D)} d\tau +$$
$$+4\int_0^t \int_D \left(\sum_{j=1}^2 \left| a_j(x) \right| \left| v_0(\tau) \right| \left| \frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial x_j} \right| \right)^2 dxd\tau +$$
$$+4\int_0^t \int_D \left(\sum_{j=1}^2 \left| b_j(x) \right| \left| v_j(\tau) \right| \left| \psi^N(x,\tau) \right| \right)^2 dxd\tau + 4\int_0^t \int_D \left| f(x,\tau) \right|^2 dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Burada denklemin katsayıları ve sağ tarafı üzerine konulan şartlar kullanılarak

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial \tau} \right\|^2_{L_2(D)} d\tau \le 4\int_0^t \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(D)} d\tau + 8\tilde{v}_0^2 \upsilon_0^2 \int_0^t \left\| \nabla \psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(D)} d\tau +$$
$$+4\eta_0^2 \int_0^t \left(\sum_{j=1}^2 \left| v_j(\tau) \right| \right)^2 d\tau \max_{0\le\tau\le t} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(D)} + 4\int_o^t \left\| f(.,\tau) \right\|^2_{L_2(D)} d\tau$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada

$$\int_0^t \left(\sum_{j=1}^2 \left| v_j(\tau) \right| \right)^2 d\tau \le 2\int_0^t \sum_{j=1}^2 \left| v_j(\tau) \right|^2 d\tau \le 2\left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 \right)$$

olduğu dikkate alınıp (3.23) ve (3.50) kestirimleri uygulanırsa

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial \tau} \right\|^2_{L_2(D)} d\tau \le c_{26} \left(\left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\| f \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)} \right), \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.56}$$

kestirimi elde edilir. (3.55) kestirimi $(0,T)$ aralığı üzerinden integrallenip (3.56) kestiriminde $t = T$ için elde edilen kestirimle toplanırsa

$$\left\| \psi^N \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{27} \left(\left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\| f \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)} \right) \tag{3.57}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{27} > 0$ sayısı N den bağımsızdır.

Aşağıdaki

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt = \left\|\psi^N\right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt = \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa ve

$$\left\|\psi^N\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \le \left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}^2$$

eşitsizliği kullanılırsa, $c_0 = c_{27}$ kabul edilerek (3.57) kestiriminden Lemma 3.1'de yer alan

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}^2 \le$$
$$\le c_{27}\left(\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)}^2 + \left\|f\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}^2\right)$$

kestiriminin geçerli olduğu elde edilir. Böylece Lemma 3.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi teoremin ispatını devam ettirelim. Bu amaçla öncelikle $l_{N,k}(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(D)}$, $k; N = 1,2,...$ biçiminde $l_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesini tanımlayalım. (3.18) kestirimi kullanılırsa $l_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesi için, $[0,T]$ aralığında

$$\max_{0\le t\le T}\left|l_{N,k}(t)\right| \le c_{28}, \quad N; k = 1,2,... \tag{3.58}$$

biçiminde olan düzgün sınırlılık şartı elde edilebilir.

Her bir tespit edilmiş k ve keyfi $N \ge k$ için $l_{N,k}(t)$, $N; k = 1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğunu göstermek amacıyla, (3.16) sistemi $[t, t+\Delta t]$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$i\int_t^{t+\Delta t}\int_D \frac{\partial\psi^N(x,\tau)}{\partial t}u_k(x)\,dxd\tau = \int_t^{t+\Delta t}\int_D a_0\nabla\psi^N(x,\tau)\nabla u_k(x)\,dxd\tau -$$

$$-i\int_t^{t+\Delta t}\int_D\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(\tau)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}u_k(x)\,dxd\tau - \int_t^{t+\Delta t}\int_D\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(\tau)\psi^N u_k(x)\,dxd\tau +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_D a(x)\psi^N(x,\tau)u_k(x)\,dxd\tau + \int_t^{t+\Delta t}\int_D f(x,\tau)u_k(x)\,dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Buradan $l_{N,k}(t)$ fonksiyonlar ailesi için olan formül kullanılırsa, Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned}\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le a_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\nabla\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|\nabla u_k\right\|_{L_2(D)} + \\ +\sqrt{2}\tilde{v}_0\upsilon_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\nabla\psi^N\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(D)} + \\ +\eta_0\int_t^{t+\Delta t}\sum_{j=1}^{2}\left|v_j(\tau)\right|d\tau\max_{0\le t\le T}\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(D)}\left\|u_k\right\|_{L_2(D)} + \\ +\mu_0\int_t^{t+\Delta t}\left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(D)} + \int_t^{t+\Delta t}\left\|f(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}d\tau\left\|u_k\right\|_{L_2(D)}\end{aligned} \tag{3.59}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulansın. Ayrıca (3.18) kestirimi ve u_k lar için varsayılan (3.14) şartı kullanılırsa

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le c_{29}d_k(\Delta t)^{1/2},\quad N;k=1,2,...,\ t\in[0,T] \tag{3.60}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{29}>0$ sabiti N ve k dan bağımsızdır.

Böylece $l_{N,k}(t)$, $N;k=1,2,...$ fonksiyonlar ailesinin $[0,T]$ aralığında düzgün sınırlı olduğu ve (3.60) eşitsizliğinden tespit edilmiş her bir k için $[0,T]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğu ispatlandı. Bu takdirde düzgün sınırlı ve aynı dereceden sürekli $\{l_{N,k}(t)\}$ dizisinden tespit edilmiş k için Ascoli-Arzela teoreminden (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.1), $l_k(t)$ fonksiyonuna $[0,T]$ aralığında düzgün yakınsayan $\{l_{N_m,k}(t)\}$, $m=1,2,...$ alt dizisini seçilebilir.

Şimdi

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} l_k(t)u_k(x) \qquad (3.61)$$

fonksiyonu oluşturulsun. $\{l_{N_m,k}(t)\}$ fonksiyonlar ailesinin düzgün yakınsaması kullanılarak, $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ alt dizisinin $t\in[0,T]$ ye göre düzgün olarak $L_2(D)$ uzayında (3.61) biçiminde tanımlanan $\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığı elde edilir. Gerçekten, $\forall g\in L_2(D)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),g\right)_{L_2(D)} &= \sum_{k=1}^{s}(g,u_k)_{L_2(D)}\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),u_k\right)_{L_2(D)}+\\ &+\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),\sum_{k=s+1}^{\infty}(g,u_k)_{L_2(D)}u_k\right)_{L_2(D)}, \quad \forall t\in[0,T]\end{aligned} \qquad (3.62)$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}\left|\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),\sum_{k=s+1}^{\infty}(g,u_k)_{L_2(D)}u_k\right)_{L_2(D)}\right| &\le c_{30}\left(\sum_{k=s+1}^{\infty}\left|(g,u_k)_{L_2(D)}\right|^2\right)^{1/2}\equiv\\ &\equiv c_{31}R(s)\end{aligned} \qquad (3.63)$$

dir. $c_{31}>0$ sabiti N_m den bağımsızdır. s numarası, $c_{31}R(s)$ miktarı önceden verilen herhangi bir $\frac{\varepsilon}{2}>0$ sayısından küçük olacak şekilde yeteri kadar büyük seçilebilir. Yukarıda ispat edildiği gibi belirlenmiş bir m için N_m numarasının yeteri kadar büyük değerlerinde tüm $t\in[0,T]$ için (3.62) eşitliğinin sağ tarafındaki 1. terim $\frac{\varepsilon}{2}>0$ sayısından küçük olacaktır. Bu takdirde (3.62) eşitliği ve (3.63) eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\left(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),g\right)_{L_2(D)}\right|<\varepsilon,\ \forall t\in[0,T]$$

elde edilir. Buradan da, gereken hüküm yani $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ alt dizisinin $t\in[0,T]$ ye göre düzgün olarak $L_2(D)$ uzayında $\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığı elde edilir.

(3.18) kestirimine göre, $N=N_m$ için $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ dizisinden $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında $\psi(x,t)$

fonksiyonuna zayıf yakınsayan bir alt dizi seçilebilir. Kolaylık olması için zayıf yakınsayan bu alt dizi de $\left\{\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$ ile gösterilsin. Bu takdirde, $\left\{\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$, $\left\{\nabla\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$, $\left\{\Delta\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial\psi^{N_m}\left(x,t\right)}{\partial t}\right\}$ dizileri $L_2\left(\Omega\right)$ uzayında sırasıyla $\psi\left(x,t\right)$, $\nabla\psi\left(x,t\right)$, $\Delta\psi\left(x,t\right)$, $\dfrac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial t}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsar. Bu zayıf yakınsama kullanılarak (3.18) kestiriminde $N=N_m$ için $m\to\infty$ iken alt limite geçilirse $\psi\left(x,t\right)$ limit fonksiyonu için, teoremin hükmünde yer alan (3.8) kestiriminin geçerli olduğu elde edilebilir. Böylece $\psi\left(x,t\right)$ limit fonksiyonunun $W_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayına ait olduğu elde edilir.

Şimdi bu limit fonksiyonunun (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla ilk önce $\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonunun (3.1) denklemini $\forall\left(x,t\right)\in\overset{0}{\Omega}$ için sağladığını ispatlayalım. Bunun için (3.24) sisteminin k. denklemi $\forall\,\overline{\eta}_k\left(t\right)$ fonksiyonu ile çarpılarak, k üzerinden 1 den $N'\leq N$ ye kadar toplandıktan sonra, elde edilen eşitlik $\left[0,T\right]$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg[i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}+a_0\Delta\psi^N+i\sum_{j=1}^{2}a_j\left(x\right)v_0\left(t\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{2}b_j\left(x\right)v_j\left(t\right)\psi^N- \\ -a\left(x\right)\psi^N-f\left(x,t\right)\Bigg]\overline{\eta}^{N'}\left(x,t\right)dxdt=0 \tag{3.64}$$

integral özdeşliği elde edilir. Burada

$$\eta^{N'}\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{N'}\eta_k\left(t\right)u_k\left(x\right) \tag{3.65}$$

herhangi fonksiyondur.

Bu integral özdeşliğinden $\overline{\eta}^{N'}\left(x,t\right)$ fonksiyonu belirlenmiş bir fonksiyon farz edilerek $N=N_m,\ m=1,2,...$ alt dizisi üzerinden limite geçilebilir. Gerçekten $\left\{\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$ dizisinin $W_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayında zayıf yakınsadığı ve bu dizinin $L_2\left(D\right)$ uzayında $\left[0,T\right]$

aralığında düzgün olarak zayıf yakınsadığı göz önünde bulundurularak (3.64) integral özdeşliğinde $N = N_m$ için $m \to \infty$ iken limite geçilirse,

$$\int_{\Omega} \left[i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \Delta \psi + i\sum_{j=1}^{2} a_j(x) v_0(t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} b_j(x) v_j(t) \psi - \right.$$
$$\left. -a(x)\psi - f(x,t) \right] \overline{\eta}^{N'}(x,t)\,dxdt = 0$$

integral özdeşliği elde edilir.

Burada $\eta^{N'}(x,t)$ fonksiyonları (3.65) biçiminde tanımlanan herhangi deney fonksiyonlarıdır. $\eta_k(t)$ ve $u_k(x)$ fonksiyonlarının özelliği kullanılırsa, bu deney fonksiyonlarının $L_2(\Omega)$ uzayında her yerde yoğun olduğu ispatlanabilir. Bu sebeple sonuncu integral özdeşliği $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} \left[i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \Delta \psi + i\sum_{j=1}^{2} a_j(x) v_0(t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} b_j(x) v_j(t) \psi - \right.$$
$$\left. -a(x)\psi - f(x,t) \right] \overline{\eta}(x,t)\,dxdt = 0 \tag{3.66}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\eta(x,t)$ fonksiyonu $L_2(\Omega)$ uzayından olan herhangi bir fonksiyon olduğundan $\overset{0}{\forall}(x,t)$ için $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1) denklemini sağladığı elde edilir.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.2) başlangıç ve sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı, gömme teoremine göre $L_2(S)$ uzayına kompakt gömüldüğünden ve $\psi^{N_m}(.,0) \in W_2^1(D)$ olup $W_2^1(D)$ uzayı $L_2(D)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntıları yazılabilir. $m \to \infty$ için

$$\left\| \psi^{N_m}(.,0) - \psi(.,0) \right\|_{L_2(D)} \longrightarrow 0 \tag{3.67}$$

$$\left\| \psi^{N_m} - \psi \right\|_{L_2(S)} \longrightarrow 0 \tag{3.68}$$

bağıntıları geçerlidir.

$\psi^{N_m}(x,0)=\varphi(x),\ x\in D$ şartı ve (3.67) limit bağıntısı kullanılıp

$$\int_D \left|\psi(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx \le 2\int_D \left|\psi(x,0)-\psi^{N_m}(x,0)\right|^2 dx + 2\int_D \left|\psi^{N_m}(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $m\to\infty$ için limite geçilirse

$$\int_D \left|\psi(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx = 0$$

elde edilir. Buradan da, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun başlangıç şartını sağladığı elde edilir. Aynı biçimde $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun sınır şartını sağladığı gösterilebilir. Gerçekten $\psi^{N_m}\big|_S=0$ sınır şartı ve (3.68) limit bağıntısı kullanılıp

$$\int_S \left|\psi(\xi,t)\right|^2 d\xi dt \le 2\int_S \left|\psi(\xi,t)-\psi^{N_m}(\xi,t)\right|^2 d\xi dt + 2\int_S \left|\psi^{N_m}(\xi,t)\right|^2 d\xi dt$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $m\to\infty$ için limite geçilirse

$$\int_S \left|\psi(\xi,t)\right|^2 d\xi dt = 0$$

elde edilir. Buradan da $\psi(\xi,t)=0,\ \overset{0}{\forall}(\xi,t)\in S$ olduğu yani limit fonksiyonunun sınır şartını sağladığı elde edilir.

Böylece, $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan hemen hemen her yerde çözümünün olduğu ispatlandı ve bu fonksiyon için (3.8) kestiriminin geçerli olduğu gösterildi. Bu fonksiyonun bir tek olması yani çözümün bir tek olması direkt olarak (3.8) kestirimi kullanılarak ispatlanabilir. Böylece Teorem 3.1 ispatlandı.

Teorem 3.1'in ispatından bir sonuç olarak (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün $L_\infty\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayına ait olduğu ve çözüm için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu elde edilebilir:

$$\left\| \psi(.,t) \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \tilde{c}_0 \left(\left\| \varphi \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\| f \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)} \right), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.69}$$

3.1.3. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Şimdi optimal kontrol probleminin iyi konulmasıyla ilgili olan, dolayısıyla çözümün varlığı ve tekliğiyle ilgili olan sorular cevaplandırılmaya çalışılacaktır. Bu amaçla önce $\alpha > 0$ hali için (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyelim.

Teorem 3.2: Farz edelim ki, Teorem 3.1'in şartları sağlansın ve $y \in L_2(D)$, $\omega \in L_2^{(3)}(0,T)$ verilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde, $L_2^{(3)}(0,T)$ uzayında her yerde yoğun olan G altkümesi vardır ki $\forall \omega \in G$ için ve $\alpha > 0$ için (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahiptir.

İspat: Öncelikle

$$J_0(v) = \int_D \left| \psi(x,T) - y(x) \right|^2 dx \tag{3.70}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Farz edelim ki, $\delta v \in L_2^{(3)}(0,T)$ fonksiyonu $v + \delta v \in V$ olacak biçimde $\forall v \in V$ elemanına verilen artış olsun. Bu takdirde, (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ ye karşılık gelen $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ çözümü $\delta\psi = \delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v) - \psi(x,t;v) = \psi_\delta - \psi$ artışına sahip olacaktır. Burada $\psi_\delta = \psi_\delta(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v)$ fonksiyonu (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin $v + \delta v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. (3.1)-(3.2) şartlarından $\delta\psi = \delta\psi(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu kolaylıkla elde edilebilir:

$$i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\Delta\delta\psi+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\big(v_0(t)+\delta v_0(t)\big)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\big(v_j(t)+\delta v_j(t)\big)\delta\psi-a(x)\delta\psi= \tag{3.71}$$

$$=-i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(t)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(t)\psi,\ (x,t)\in\Omega$$

$$\delta\psi(x,0)=0,\ x\in D,\ \ \delta\psi(x,t)\big|_S=0. \tag{3.72}$$

Şimdi bu başlangıç sınır değer probleminin çözümü için kestirim elde edelim. Bu amaçla, (3.71) denkleminin her iki tarafı $\delta\overline{\psi}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpılıp $\Omega_t=D\times(0,t)$ bölgesi üzerinden integrallensin. (3.72) sınır şartları kullanılırsa, kolaylıkla

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\delta\overline{\psi}-a_0|\nabla\delta\psi|^2+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\big(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\big)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\delta\overline{\psi}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\big(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\big)|\delta\psi|^2-a(x)|\delta\psi|^2\Bigg]dxd\tau=$$

$$=-\int_{\Omega_t}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\delta\overline{\psi}dxd\tau-\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\psi\delta\overline{\psi}dxd\tau$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa, aşağıdaki

$$\int_{\Omega_t}i\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial t}\delta\psi\right)dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\big(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\big)\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_j}\delta\psi\right)dxd\tau=$$

$$=-2i\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau- \tag{3.73}$$

$$-2i\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\,\mathrm{Im}\big(\psi\delta\overline{\psi}\big)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafına

$$\int_{\Omega_t} i\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau$$

terimi eklenip çıkarılsın. Bu takdirde, (3.73) eşitliğinden aşağıdaki

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\delta\psi|^2\, dxd\tau+\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)|\delta\psi|^2\right)dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau-2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\operatorname{Im}\left(\psi\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau$$

eşitliğinin geçerli olduğu elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafında (3.72) sınır şartı kullanılırsa sol tarafta yer alan 2. integralin sıfıra eşit olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Bu nedenle, sonuncu eşitlikten

$$\|\delta\psi(.,t)\|_{L_2(D)}^2=\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\operatorname{Im}\left(\psi\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau,\quad\forall t\in[0,T]$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı değerlendirilirse,

$$\|\delta\psi(.,t)\|_{L_2(D)}^2\le\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial a_j}{\partial x_j}\right|\left|v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right||\delta\psi|^2 dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}|a_j(x)||\delta v_0(\tau)|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right||\delta\psi|dxd\tau++2\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}|b_j(x)||\delta v_j(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte $a_j(x)$ ve $b_j(x)$ fonksiyonları üzerine konulan (3.4)-(3.5) şartları kullanılırsa

$$\|\delta\psi(.,t)\|_{L_2(D)}^2\le 2\upsilon_1\int_{\Omega_t}\left|v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right||\delta\psi|^2\, dxd\tau+$$

$$+2\upsilon_0\int_{\Omega_t}|\delta v_0(\tau)|\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right||\delta\psi|dxd\tau+2\eta_0\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2}|\delta v_j(\tau)||\psi||\delta\psi|dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $v_0+\delta v_0 \in V,\ \delta v_0 \in L_\infty(0,T)$ olduğu göz önünde bulundurulursa sonuncu eşitsizlikten kolaylıkla

$$\|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(D)} \le 2\upsilon_1\tilde{v}_0 \int_{\Omega_t} |\delta\psi|^2\,dxd\tau + 2\upsilon_0 \|\delta v_0\|_{L_\infty(0,T)} \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right| |\delta\psi| dxd\tau +$$
$$+2\eta_0 \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} |\delta v_j(\tau)||\psi||\delta\psi| dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilebilir. Elde edilen bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki 2. ve 3. terimlerde Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(D)} \le 2\upsilon_1\tilde{v}_0 \int_{\Omega_t} |\delta\psi|^2\,dxd\tau +$$
$$+2\sqrt{2}\upsilon_0 \|\delta v_0\|_{L_\infty(0,T)} \left(\int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right|^2 dxd\tau \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} |\delta\psi|^2\,dxd\tau \right)^{1/2} + \tag{3.74}$$
$$+2\sqrt{2}\eta_0 \left(\int_0^T \sum_{j=1}^{2} |\delta v_j(t)|^2 dt \right)^{1/2} \max_{0\le\tau\le t} \|\psi(.,\tau)\|_{L_2(D)} \left(\int_{\Omega_t} |\delta\psi|^2\,dxd\tau \right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(D))$ uzayına gömüldüğünden gömme teoremine göre

$$\|\psi\|_{C^0([0,T],L_2(D))} \le c_{32} \|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \tag{3.75}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $c_{32} > 0$ sayısı verilen sayıdır.

Bu eşitsizlik ve (3.8) kestirimi (3.74) eşitsizliğinde dikkate alınırsa, kolaylıkla

$$\|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(D)} \le c_{33} \left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,T)} + \sum_{k=1}^{2} \|\delta v_k\|^2_{L_2(0,T)} \right) +$$
$$+c_{34} \int_0^T \|\delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(D)} d\tau,\ \forall t \in [0,T]$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $c_{33} > 0$ ve $c_{34} > 0$ sabitleri δv den bağımsızdır.

Burada Gronwall lemması uygulanırsa ve $B \equiv L_\infty(0,T)\times\left(L_2(0,T)\right)^2$ olarak gösterilirse

$$\left\|\delta\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{35}\left\|\delta v\right\|_B^2,\ \forall t\in[0,T] \tag{3.76}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{35}>0$ sayısı δv ve t den bağımsızdır.

Şimdi bu kestirimi kullanarak $J_0(v)$ fonksiyonelinin $\forall v\in V$ elemanı üzerinde artışını değerlendirmeye çalışalım. (3.70) formülü kullanılırsa, fonksiyonelin artışı için

$$\begin{aligned}\delta J_0(v) &= J_0(v+\delta v)-J_0(v)=\\ &=2\int_D \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx+\left\|\delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(D)}^2\end{aligned} \tag{3.77}$$

formülü yazılabilir. Burada Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanıp (3.8) ve (3.76) kestirimleri kullanılırsa

$$\left|\delta J_0(v)\right|\le c_{36}\left(\left\|\delta v\right\|_B+\left\|\delta v\right\|_B^2\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $c_{36}>0$ sayısı δv den bağımsızdır.

Böylece bu eşitsizlikten $J_0(v)$ fonksiyonelinin $\forall v\in V$ elemanı üzerinde yani V kümesi üzerinde sürekli olduğu elde edilir. Diğer taraftan, V kümesi kapalı, sınırlı, konveks küme; $L_2^{(3)}(0,T)$ uzayı ise düzgün konveks uzaydır (Yosida 1980). İspata göre $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde süreklidir ve $\forall v\in V$ için $J_0(v)\ge 0$ dır. Yani alttan sınırlıdır. Bu takdirde Goebel (1979) çalışmasındaki fonksiyonelin minimumunun varlığına ait olan teoreme (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.4) göre $L_2^{(3)}(0,T)$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall\omega\in G$ ve $\alpha>0$ için (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahip olur. Böylece Teorem 3.2 ispatlanmış oldu.

Şimdi $\alpha\ge 0$ için (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3.3: Farz edelim ki, Teorem 3.2'nin şartları sağlansın ve $\alpha \geq 0$ olsun. Bu takdirde, $\forall \omega \in L_2^{(3)}(0,T)$ için (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat: $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için $\forall \{v^m\} \subset V$ minimalleştirici diziyi göz önüne alalım:

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v)$$

dir. Her bir $m = 1,2,...$ için $v^m \in V$ olduğundan ve Teorem 3.1'in şartları sağlandığından, bu teoreme göre (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin $\psi_m = \psi_m(x,t) \equiv \psi(x,t;v^m)$ bir tek çözümüne sahip olduğu ve çözüm için

$$\|\psi_m\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)} + \|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right) = c_{37},\; m = 1,2,... \tag{3.78}$$

kestiriminin geçerli olduğu elde edilir. Burada $c_{37} > 0$ sayısı m den bağımsızdır.

V kümesi $B \equiv L_\infty(0,T) \times (L_2(0,T))^2$ uzayının kapalı, sınırlı, konveks kümesi olduğundan $\{v^m\}$ dizisinden $v \in B$ ye $(*)$-zayıf yakınsayan $\{v^{m_k}\}$ alt dizisi seçilebilir. Kolaylık olması için bu alt dizi de $\{v^m\}$ ile gösterilsin. Bu takdirde, $\{v^m\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntıları yazılabilir. $m \to \infty$, $\forall q_0 \in L_1(0,T)$, $q_k \in L_2(0,T)$, $k = 1,2$ için

$$\int_0^T v_0^m(t) q_0(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T v_0(t) q_0(t)\,dt \tag{3.79}$$

$$\int_0^T v_k^m(t) q_k(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T v_k(t) q_k(t)\,dt,\quad k = 1,2 \tag{3.80}$$

dir.

V kümesi B uzayında kapalı, sınırlı, konveks küme olduğundan Kolmogorov ve Fomin (1989) çalışmasındaki teoreme göre V kümesi $(*)$-zayıf kapalı küme olacaktır.

Yani $v \in V$ olacaktır. (3.78) kestirimine göre, $\{v^m\}$ alt dizisine karşılık gelen ve (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin çözümler dizisi olan $\{\psi_m(x,t)\}$ dizisi kapalı küreden $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında olan bir kapalı küreye tanımlıdır. Bu nedenle $\{\psi_m\}$ dizisinden $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında $\psi(x,t)$ elemanına zayıf yakınsayan $\{\psi_{m_k}(x,t)\}$ alt dizisi seçilebilir. Kolaylık olması için, söylenen anlamda zayıf yakınsayan alt dizi de $\{\psi_m(x,t)\}$ ile gösterilsin. Bu takdirde, aşağıdaki limit bağıntıları geçerlidir. $m \to \infty$ için,

$$\psi_m \longrightarrow \psi,\ L_2(\Omega)\ da\ zayıf \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_j},\ j=1,2,\ L_2(\Omega)\ da\ zayıf \tag{3.82}$$

$$\Delta\psi_m \longrightarrow \Delta\psi,\ L_2(\Omega)\ da\ zayıf \tag{3.83}$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t},\ L_2(\Omega)\ da\ zayıf \tag{3.84}$$

dir.

$W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T],L_2(D))$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\|\psi_m - \psi\|_{C^0([0,T],L_2(D))} \longrightarrow 0 \tag{3.85}$$

olur. Dolayısıyla $\forall t \in [0,T]$ için t ye göre düzgün olarak $m \to \infty$ için

$$\psi_m(.,t) \longrightarrow \psi(.,t),\ L_2(D)\ de\ kuvvetli \tag{3.86}$$

limit bağıntısı geçerlidir.

Her bir $m = 1,2,...$ için $\psi_m(x,t)$ fonksiyonu (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan hemen hemen her yerde çözümü olduğundan $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\Bigg[i\frac{\partial \psi_m}{\partial t}+a_0\Delta\psi_m+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0^m(t)\frac{\partial \psi_m}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j^m(t)\psi_m- \\ -a(x)\psi_m\Bigg]\overline{\eta}(x,t)\,dxdt=\int_{\Omega}f(x,t)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt \tag{3.87}$$

integral özdeşliği yazılabilir.

(3.81), (3.83) ve (3.84) limit bağıntıları kullanılırsa $m\to\infty$ için

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial \psi_m}{\partial t}+a_0\Delta\psi_m-a(x)\psi_m\right)\overline{\eta}\,dxdt\longrightarrow\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial \psi}{\partial t}+a_0\Delta\psi-a(x)\psi\right)\overline{\eta}\,dxdt \tag{3.88}$$

limit bağıntısı elde edilir. Şimdi

$$\int_{\Omega}\left(i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0^m(t)\frac{\partial \psi_m}{\partial x_j}\right)\overline{\eta}\,dxdt\longrightarrow\int_{\Omega}\left(i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)\overline{\eta}\,dxdt \tag{3.89}$$

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j^m(t)\psi_m\right)\overline{\eta}\,dxdt\longrightarrow\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\psi\right)\overline{\eta}\,dxdt \tag{3.90}$$

limit bağıntılarının geçerli olduğunu ispatlamaya çalışalım. Öncelikle (3.90) limit bağıntısı ispatlansın. Aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıktır:

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j^m(t)\psi_m\right)\overline{\eta}\,dxdt=\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\left(v_j^m(t)-v_j(t)\right)\psi\right)\overline{\eta}\,dxdt+ \\ +\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\right)\overline{\eta}\,dxdt+ \\ +\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\psi(x,t)\right)\overline{\eta}\,dxdt. \tag{3.91}$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki 1. ve 2. terimlerin limitlerini bulalım. $b_j\in L_\infty(D),\ j=1,2,\ \eta\in L_2(\Omega),\ \psi\in C^0\left([0,T],L_2(D)\right)$ olduğundan $\forall t\in[0,T]$ için $\int_D b_j(x)\psi\overline{\eta}\,dx\in L_2(0,T)$ olduğu elde edilir. Bu takdirde, $q_j(t)=\int_D b_j(x)\psi\overline{\eta}\,dx$ seçilerek, (3.80) limit bağıntısı kullanılırsa, $m\to\infty$ için

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\left(v_j^m(t)-v_j(t)\right)\psi(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt \longrightarrow 0 \tag{3.92}$$

limit bağıntısı elde edilir.

Şimdi (3.91) nin sağ tarafındaki 2. terimi değerlendirelim. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt\right| \le$$

$$\le \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}\left|b_j(x)\right|\left|v_j^m(t)\right|\left|\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right|\left|\eta\right| dxdt \le$$

$$\le \sqrt{2}\eta_0\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|v_j^m\right\|_{L_2(0,T)}^2\right)^{1/2}\left\|\eta\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_m-\psi\right\|_{C^0([0,T],L_2(D))}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece, $v^m \in V$ olduğu için sonuncu eşitsizlikten

$$\left|\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{2} b_j(x)v_j^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\right)\overline{\eta}(x,t)\,dxdt\right| \le \tag{3.93}$$
$$\le c_{38}\left\|\psi_m-\psi\right\|_{C^0([0,T],L_2(D))}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafında (3.85) limit bağıntısı kullanılarak $m \to \infty$ için limite geçilirse (3.91) eşitliğinin sağ tarafındaki 2. terimin limitinin sıfır olduğu elde edilir. Böylece son söylenen ve (3.92) limit bağıntısı kullanılıp, (3.91) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçilirse (3.90) limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir.

Şimdi (3.89) limit bağıntısının geçerli olduğunu elde etmeye çalışalım. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden (Lions 1987), $m \to \infty$ için

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_j},\ j=1,2,\ L_2(\Omega)\ da\ kuvvetli \tag{3.94}$$

limit bağıntısı elde edilir. Bu limit bağıntısını kullanarak (3.89) limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla

$$\int_{\Omega}\left(i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0^m(t)\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}\right)\overline{\eta}\,dxdt=\int_{\Omega}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(v_0^m(t)-v_0(t)\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\overline{\eta}\,dxdt+$$
$$+\int_{\Omega}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0^m(t)\left(\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial x_j}-\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\right)\overline{\eta}\,dxdt+ \tag{3.95}$$
$$+\int_{\Omega}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\overline{\eta}\,dxdt$$

eşitliğini yazalım.

Bu eşitliğin sağ tarafındaki 1. ve 2. terimlerin limitlerini bulalım. $a_j(x)\in L_\infty(D)$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_j}\in L_2(\Omega)$ ve $\eta\in L_2(\Omega)$ olduğundan

$$\int_D a_j(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\overline{\eta}\,dx\in L_1(0,T)$$

elde edilir. Bu takdirde, $q_0(t)$ fonksiyonu

$$q_0(t)=\int_D\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\overline{\eta}\,dx$$

şeklinde seçilirse, (3.79) limit bağıntısından yararlanılarak $m\to\infty$ için

$$\int_{\Omega}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(v_0^m(t)-v_0(t)\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\overline{\eta}\,dxdt\longrightarrow 0 \tag{3.96}$$

limit bağıntısı elde edilir.

(3.95) eşitliğinin sağ tarafındaki 2. terim değerlendirilirse

$$\left|\int_{\Omega}i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0^m(t)\left(\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial x_j}-\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\right)\overline{\eta}\,dxdt\right|\le$$
$$\le\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}\left|a_j(x)\right|\left|v_0^m(t)\right|\left|\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial x_j}-\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\right|\left|\eta\right|dxdt\le \tag{3.97}$$
$$\le\sqrt{2}\upsilon_0\tilde{v}_0\left\|\eta\right\|_{L_2(\Omega)}\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial x_j}-\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

elde edilir.

(3.94) limit bağıntısı kullanılıp $m \to \infty$ için (3.97) eşitsizliğinin her iki tarafında limite geçilirse (3.95) eşitliğinin sağ tarafındaki 2. terimin de limitinin sıfır olduğu elde edilir. Böylece, söylenen ve (3.96) limit bağıntısı kullanılıp, (3.95) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçilirse, (3.89) limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir. (3.88)-(3.90) limit bağıntıları kullanılarak (3.87) integral özdeşliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçilirse $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\begin{gathered}\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \Delta \psi + i\sum_{j=1}^{2} a_j(x) v_0(t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} b_j(x) v_j(t)\psi - \right. \\ \left. -a(x)\psi - f(x,t) \right] \overline{\eta}(x,t)\, dxdt = 0 \end{gathered} \tag{3.98}$$

integral özdeşliğinin geçerli olduğu elde edilir. Buradan, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1) denklemini hemen hemen $(x,t) \in \Omega$ için sağladığı görülür.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.2) başlangıç ve sınır şartlarını sağladığını gösterelim. $\psi_m(x,0) = \varphi(x)$, $x \in D$ başlangıç şartı, $t = 0$ için (3.86) limit bağıntısı ve

$$\int_D |\psi(x,0) - \varphi(x)|^2\, dx \le 2\int_D |\psi(x,0) - \psi_m(x,0)|^2\, dx + 2\int_D |\psi_m(x,0) - \varphi(x)|^2\, dx$$

eşitsizliği kullanılarak, kolaylıkla $\psi(x,0) = \varphi(x)$, $\forall x \in \overset{0}{D}$ başlangıç şartı elde edilir. Diğer bir deyişle, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu (3.2) başlangıç şartını sağlar.

$W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(S)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\psi_m|_S \longrightarrow \psi|_S \tag{3.99}$$

limit bağıntısı elde edilir. Bu limit bağıntısı, $\psi_m|_S = 0$ sınır şartı ve

$$\int_S |\psi(\xi,t)|^2\, d\xi dt \le 2\int_S |\psi(\xi,t) - \psi_m(\xi,t)|^2\, d\xi dt + 2\int_S |\psi_m(\xi,t)|^2\, d\xi dt$$

eşitsizliği kullanılarak kolaylıkla $\psi(\xi,t)=0,\ \forall(\xi,t)\in \overset{0}{S}$ sınır şartının geçerli olduğu elde edilir. Dolayısıyla, limit fonksiyonu (3.2) sınır şartını da sağlar. Böylece $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından hemen hemen çözümü olduğu elde edilir. Yani $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ dir.

Diğer taraftan, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının normunun alttan zayıf yarı sürekli olduğu dikkate alınıp (3.78) kestiriminin her iki tarafında alt limite geçilirse limit fonksiyonu için (3.8) kestirimini sağladığı elde edilir.

$t=T$ için (3.86) limit bağıntısı kullanılırsa $m\to\infty$ için

$$\psi_m(.,T)\longrightarrow\psi(.,T),\ L_2(D)\ de\ zayıf \tag{3.100}$$

limit bağıntısı yazılabilir. $\{v^m\}\subset V$ dizisinin $L_2^{(3)}(0,T)$ uzayında zayıf yakınsadığı, $L_2(D)$, $L_2^{(3)}(0,T)$ uzaylarının normlarının alttan zayıf yarı sürekli olduğu ve $\alpha\geq 0$ olduğu dikkate alınıp, (3.100) limit bağıntısının yardımıyla kolaylıkla

$$J_{\alpha*}\leq J_\alpha(v)\leq \underline{\lim}_{m\to\infty} J_\alpha(v^m)=J_{\alpha*}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan, $J_\alpha(v)=J_{\alpha*}$ yani $v\in V$ nin $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minimum noktası olduğu, dolayısıyla (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol probleminin çözümü olduğu elde edilir. Teorem 3.3 ispatlandı.

3.1.4. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi

Bu bölümde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla eşlenik problem olarak adlandırılan aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}+a_0\Delta\phi+i\sum_{j=1}^{2}v_0(t)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\phi\right)+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\phi-a(x)\phi=0,\quad (x,t)\in\Omega \tag{3.101}$$

$$\phi(x,T)=-2i\left(\psi(x,T)-y(x)\right),\ x\in D,\ \phi|_S=0. \tag{3.102}$$

Burada $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonu (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin $v\in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. Bu problemin çözümü olarak, $C^0\left([0,T],L_2(D)\right)$ uzayına ait olan, $\forall\gamma\in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega\phi\left(-i\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t}+a_0\Delta\overline{\gamma}-i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\overline{\gamma}-\right.$$
$$\left.-a(x)\overline{\gamma}\right)dxdt=\int_D i\phi(x,0)\overline{\gamma}(x,0)dx-2\int_D\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\overline{\gamma}(x,T)dx \tag{3.103}$$

integral özdeşliğini sağlayan $\phi=\phi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

Teorem 3.4: Farz edelim ki, Teorem 3.1'in şartları sağlansın. $y\in L_2(D)$ verilen fonksiyon olsun. Bu takdirde, (3.101)-(3.102) eşlenik probleminin $C^0\left([0,T],L_2(D)\right)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left\|\phi(.,t)\right\|^2_{L_2(D)}\le c_{39}\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)}+\left\|f\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}+\left\|y\right\|^2_{L_2(D)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.104}$$

Burada $c_{39}>0$ sayısı $\varphi,\ f$ ve y den bağımsızdır.

Bu teorem, Teorem 3.1'in ispatında olduğu gibi Galerkin yöntemiyle ispatlanabilir.

Aşağıdaki şekilde bir fonksiyon tanımlansın:

$$H\left(t,\psi(.,t),v(t),\overline{\phi}(.,t)\right)=\int_D\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\overline{\phi}(x,t)\right)dx-$$
$$-\int_D\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\,\mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)dx-\alpha\sum_{k=0}^{2}\left(v_k(t)-\omega_k(t)\right)^2. \tag{3.105}$$

Bu fonksiyona, (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir.

Teorem 3.5: Farz edelim ki, Teorem 3.4'ün şartları sağlansın. $\alpha \geq 0$ verilen sayı $\omega \in L_2^{(3)}(0,T)$ verilen fonksiyon olsun. Bunların yanı sıra $a_j(x),\ j=1,2$ fonksiyonları $a_j(x)\big|_\Gamma = 0,\ j=1,2$ şartını sağlasın. Bu takdirde, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferensiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} = \left(-\frac{\partial H}{\partial v_0}, -\frac{\partial H}{\partial v_1}, -\frac{\partial H}{\partial v_2}\right). \tag{3.106}$$

Burada $H = H\left(t,\psi,v,\overline{\phi}\right)$ fonksiyonu (3.105) formülüyle tanımlanır.

İspat: $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışı için olan (3.77) formülü kullanılarak $\forall v \in V$ noktasında $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışı

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) = \\ &= 2\int_D \operatorname{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx + \\ &+ 2\alpha\int_0^T \left\langle v(t) - \omega(t), \delta v(t)\right\rangle_{R^3} dt + \left\|\delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(D)} + \alpha\left\|\delta v\right\|^2_{L_2^{(3)}(0,T)} \end{aligned} \tag{3.107}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\delta\psi = \delta\psi(x,t)$ fonksiyonu (3.71)-(3.72) başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür.

Şimdi, (3.107) eşitliğinin sağ tarafındaki 1. terimi dönüştürmeye çalışalım. $\delta\psi \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Bigg(& i\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} + a_0\Delta\delta\psi + i\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\left(v_0(t) + \delta v_0(t)\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j} + \\ & + \sum_{j=1}^{2} b_j(x)\left(v_j(t) + \delta v_j(t)\right)\delta\psi - a(x)\delta\psi \Bigg)\overline{\eta}\,dxdt = \end{aligned}$$

$$=-i\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(t)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\overline{\eta}\,dxdt-\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(t)\psi\overline{\eta}\,dxdt \tag{3.108}$$

integral özdeşliği yazılabilir. $\phi\in C^0([0,T],L_2(D))$ olduğundan bu integral özdeşliğinde $\eta\in L_2(\Omega)$ nın yerine $\phi(x,t)$ fonksiyonu alınırsa

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\Delta\delta\psi+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(v_0(t)+\delta v_0(t)\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\left(v_j(t)+\delta v_j(t)\right)\delta\psi-a(x)\delta\psi\right)\overline{\phi}\,dxdt= \tag{3.109}$$
$$=-i\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(t)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\overline{\phi}\,dxdt-\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(t)\psi\overline{\phi}\,dxdt$$

eşitliği yazılabilir.

$\delta\psi\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan, (3.103) integral özdeşliğinde γ nın yerine $\delta\psi(x,t)$ alınırsa ve $\delta\psi(x,0)=0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\int_{\Omega}\phi\left(-i\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial t}+a_0\Delta\delta\overline{\psi}-i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\delta\overline{\psi}-a(x)\delta\overline{\psi}\right)dxdt=-2\int_{D}\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\,dx$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin kompleks eşleniği yazılırsa

$$\int_{\Omega}\overline{\phi}\left(i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\Delta\delta\psi+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x)v_0(t)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{2}b_j(x)v_j(t)\delta\psi-a(x)\delta\psi\right)dxdt=-2\int_{D}\left(\overline{\psi}(x,T)-y(x)\right)\delta\psi(x,T)\,dx \tag{3.110}$$

eşitliği elde edilir. (3.109) eşitliğinden (3.110) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa

$$2\int_{D}\left(\overline{\psi}(x,T)-y(x)\right)\delta\psi(x,T)\,dx=i\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(t)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\overline{\phi}\,dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\psi\bar{\phi}dxdt + i\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\bar{\phi}dxdt +$$
$$+\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\delta\psi\bar{\phi}dxdt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, onun kompleks eşleniğiyle toplanırsa

$$2\int_{D}\mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx = \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\mathrm{Re}\left(\psi\bar{\phi}\right)dxdt -$$
$$-\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\bar{\phi}\right)dxdt + \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\mathrm{Re}\left(\delta\psi\bar{\phi}\right)dxdt - \quad (3.111)$$
$$-\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\bar{\phi}\right)dxdt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, (3.107) formülünde dikkate alınırsa fonksiyonelin artışı için

$$\delta J_\alpha(v) = -\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\bar{\phi}\right)dxdt +$$
$$+\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\mathrm{Re}\left(\psi\bar{\phi}\right)dxdt + 2\alpha\int_0^T \left\langle v(t)-\omega(t), \delta v(t)\right\rangle_{R^3} dt + R(\delta v) \quad (3.112)$$

formülü yazılabilir. Burada $R(\delta v)$

$$R(\delta v) = \left\|\delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(D)}^2 + \alpha\left\|\delta v\right\|_{L_2^{(3)}(0,T)}^2 -$$
$$-\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\bar{\phi}\right)dxdt + \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\mathrm{Re}\left(\delta\psi\bar{\phi}\right)dxdt \quad (3.113)$$

formülüyle tanımlanır.

Şimdi $R(\delta v)$ nin 4. terimini kestirelim. Bu amaçla

$$\left|\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\mathrm{Re}\left(\delta\psi\bar{\phi}\right)dxdt\right| \le \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}\left|b_j(x)\right|\left|\delta v_j(t)\right|\left|\delta\psi\right|\left|\phi\right|dxdt \le$$
$$\le \sqrt{2}\eta_0 \max_{0\le t\le T}\left\|\phi(.,t)\right\|_{L_2(D)} \max_{0\le t\le T}\left\|\delta\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\delta v_j\right\|_{L_2(0,T)}^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte (3.76) ve (3.104) kestirimleri kullanılırsa

$$\left|\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\operatorname{Re}\left(\delta\psi\bar{\phi}\right)dxdt\right| \le c_{40}\|\delta v\|_B^2 \tag{3.114}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{40} > 0$ sayısı δv den bağımsızdır.

Şimdi $R(\delta v)$ nin 3. terimini değerlendirelim. Bu takdirde,

$$\left|\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\operatorname{Im}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\bar{\phi}\right)dxdt\right| \le \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}\left|a_j(x)\right|\left|\delta v_0(t)\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\right|\left|\phi\right|dxdt \le$$

$$\le \sqrt{2}\upsilon_0 \max_{0\le t\le T}\|\phi(.,t)\|_{L_2(D)}\|\delta v_0\|_{L_2(0,T)}\left(\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\right|^2 dxdt\right)^{1/2}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.104) kestirimi kullanılırsa sonuncu eşitsizlikten

$$\left|\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\operatorname{Im}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\bar{\phi}\right)dxdt\right| \le c_{41}\|\delta v_0\|_{L_2(0,T)}\|\nabla\delta\psi\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.115}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi $\|\nabla\delta\psi\|_{L_2(\Omega)}$ normunu değerlendirelim. Bu amaçla, (3.71) denkleminin her iki tarafı $\Delta\delta\bar{\psi}$ ile çarpılıp Ω_t bölgesi üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\Delta\delta\bar{\psi} + a_0\left|\Delta\delta\psi\right|^2 + i\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\big(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\big)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\Delta\delta\bar{\psi} +$$

$$+\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\big(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\big)\delta\psi\Delta\delta\bar{\psi} - a(x)\delta\psi\Delta\delta\bar{\psi}\Bigg]dxd\tau =$$

$$= -i\int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\Delta\delta\bar{\psi}dxd\tau - \int_{\Omega_t}\sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(\tau)\psi\Delta\delta\bar{\psi}dxd\tau$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte $\delta\psi(\xi,t)=0,\ (\xi,t)\in S$ sınır şartı kullanılıp kısmi integrasyon formülü uygulanarak elde edilen eşitlikten onun kompleks eşleniği taraf tarafa çıkarılırsa kolaylıkla

$$
\begin{aligned}
&-i\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla\delta\psi\right|^2 dxd\tau - \\
&-i\int_{\Omega_t}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}+\right. \\
&\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right]dxd\tau - \\
&-\int_{\Omega_t}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\left(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\right)\delta\psi\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}-\right. \\
&\left.-\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\left(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\right)\delta\overline{\psi}\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right]dxd\tau + \\
&+\int_{\Omega_t}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a(x)\delta\psi\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}-\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a(x)\delta\overline{\psi}\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right]dxd\tau = \\
&=i\int_{\Omega_t}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}+\right. \\
&\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right]dxd\tau + \\
&+\int_{\Omega_t}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\psi\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}-\right. \\
&\left.-\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\overline{\psi}\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right]dxd\tau
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

eşitliği elde edilebilir.

Aşağıdaki eşitliklerin geçerli olduğu açıktır:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}= \\
&=\sum_{j=1}^{2}\left(a_j(x)\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right)+ \\
&+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right]
\end{aligned}
\tag{3.117}
$$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\big(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\big)\delta\psi\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}=$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\big(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\big)\delta\psi\,\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right]+ \tag{3.118}$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\big(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\big)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|^2$$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\big(a(x)\delta\psi\big)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial a(x)}{\partial x_k}\delta\psi\,\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{2}a(x)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|^2 \tag{3.119}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\delta v_0(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k\partial x_j}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \tag{3.120}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\psi\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\delta v_j(\tau)\psi\,\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}. \tag{3.121}$$

(3.117)-(3.121) eşitlikleri (3.116) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla\delta\psi\right|^2dxd\tau+$$
$$+\int_{\Omega_t}\left[\sum_{j=1}^{2}\Big(a_j(x)\big(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\big)\Big)\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}+\frac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right)\right]dxd\tau+$$
$$+\int_{\Omega_t}\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\big(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\big)\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_j}\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right)\right]dxd\tau+$$
$$+2\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k}\big(v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)\big)\right)\mathrm{Im}\left(\delta\psi\,\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right)dxd\tau-$$
$$-2\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial a(x)}{\partial x_k}\mathrm{Im}\left(\delta\psi\,\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right)dxd\tau=$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} \delta v_0(\tau) \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_j(x) \delta v_0(\tau) \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k} \delta v_j(\tau) \operatorname{Im}\left(\psi \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_j(x) \delta v_j(\tau) \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau
\end{aligned}
\qquad (3.122)
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafına

$$
\int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \big(v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)\big) \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx d\tau
$$

terimi eklenip çıkarılsın. Bu takdirde, (3.122) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \delta\psi|^2 \, dx d\tau + \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Big(a_j(x) \big(v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)\big) \Big) \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x_k} \right|^2 \right] dx d\tau = \\
&= \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} \big(v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)\big) \sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} \big(v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)\big) \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \delta\psi}{\partial x_j} \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k} \big(v_j(\tau) + \delta v_j(\tau)\big) \operatorname{Im}\left(\delta\psi \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau + \\
&+2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial a(x)}{\partial x_k} \operatorname{Im}\left(\delta\psi \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} \delta v_0(\tau) \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_j(x) \delta v_0(\tau) \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau - \\
&-2\int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial b_j(x)}{\partial x_k} \delta v_j(\tau) \operatorname{Im}\left(\psi \frac{\partial \delta\overline{\psi}}{\partial x_k} \right) dx d\tau -
\end{aligned}
$$

$$-2\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(\tau)\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right)dxd\tau \qquad (3.123)$$

eşitliği yazılabilir.

$a_j(x)\big|_{\Gamma}=0,\ j=1,2$ sınır şartı kullanılırsa (3.123) eşitliğinin sol tarafındaki 2. integralin sıfır olduğu elde edilir. Bu takdirde, $\delta\psi(x,0)=0$ eşitliğinden $\nabla\delta\psi(x,0)=0$ eşitliği elde edilerek (3.123) eşitliğinden ve $a(x),\ a_j(x),\ b_j(x)$ fonksiyonları üzerine konulan şartlardan yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\|\nabla\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(D)} \le{}& 2\upsilon_1\int_{\Omega_t}|v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)||\nabla\delta\psi|^2\,dxd\tau+\\
&+2\upsilon_1\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|dxd\tau+\\
&+2\eta_1\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|v_j(\tau)+\delta v_j(\tau)||\delta\psi|\left|\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x_k}\right|dxd\tau+\\
&+2\mu_1\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}|\delta\psi|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|dxd\tau+2\upsilon_1\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|\delta v_0(\tau)|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|dxd\tau+\\
&+2\upsilon_0\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|\delta v_0(\tau)|\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|dxd\tau+\\
&+2\eta_1\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|\delta v_j(\tau)||\psi|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|dxd\tau+\\
&+2\eta_0\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|\delta v_j(\tau)|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k}\right|dxd\tau
\end{aligned} \qquad (3.124)$$

eşitsizliği elde edilir.

$v+\delta v$ nin V kümesinden olduğu dikkate alınırsa ve Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa (3.124) eşitsizliğinden

$$\left\|\nabla\delta\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le \left(2\upsilon_1\tilde{v}_0+4\upsilon_1\tilde{v}_0\right)\int_{\Omega_t}\left|\nabla\delta\psi(x,\tau)\right|^2 dxd\tau +$$

$$+\left(4\eta_1\left(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2\right)+2\sqrt{2}\mu_1\right)\left(\int_{\Omega_t}\left|\nabla\delta\psi(x,\tau)\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2}\max_{0\le t\le T}\left\|\delta\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}+$$

$$+4\upsilon_1\left\|\delta v_0\right\|_{L_\infty(0,T)}\left(\int_{\Omega_t}\left|\nabla\psi(x,\tau)\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left|\nabla\delta\psi(x,\tau)\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2}+$$

$$+4\sqrt{2}\upsilon_0\left\|\delta v_0\right\|_{L_\infty(0,T)}\left(\int_{\Omega_t}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_k}\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left|\nabla\delta\psi(x,\tau)\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2}+$$

$$+4\eta_1\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\delta v_j\right\|_{L_2(0,T)}^2\right)^{1/2}\max_{0\le t\le T}\left\|\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}\left(\int_{\Omega_t}\left|\nabla\delta\psi(x,\tau)\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2}+$$

$$+4\sqrt{2}\eta_0\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\delta v_j\right\|_{L_2(0,T)}^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left|\nabla\delta\psi(x,\tau)\right|^2 dxd\tau\right)^{1/2}\times$$

$$\times vrai\max_{0\le t\le T}\left\|\nabla\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)} \tag{3.125}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.8), (3.69) ve (3.76) kestirimleri kullanılırsa

$$\left\|\nabla\delta\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{42}\left\|\delta v\right\|_B^2 + c_{43}\int_0^t\left\|\nabla\delta\psi(.,\tau)\right\|_{L_2(D)}^2 d\tau,\ \forall t\in[0,T] \tag{3.126}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{42}>0,\ c_{43}>0$ sabitleri δv den bağımsızdır.

Bu eşitsizlikte Gronwall lemması uygulanırsa,

$$\left\|\nabla\delta\psi(.,t)\right\|_{L_2(D)}^2 \le c_{44}\left\|\delta v\right\|_B^2,\ \forall t\in[0,T] \tag{3.127}$$

kestiriminin geçerli olduğu elde edilir. Burada $c_{44}>0$ sayısı δv den bağımsızdır.

(3.127) kestirimi (3.115) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\left|\int_\Omega\sum_{j=1}^{2}a_j(x)\delta v_0(t)\operatorname{Im}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\overline{\phi}\right)dxdt\right| \le c_{45}\left\|\delta v\right\|_B^2 \tag{3.128}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{45}>0$ sayısı δv den bağımsızdır.

(3.76), (3.114) ve (3.128) kestirimleri kullanılırsa $R(\delta v)$ için

$$\left|R(\delta v)\right| \leq c_{46}\left\|\delta v\right\|_B^2 \tag{3.129}$$

bağıntısı elde edilir.

(3.129) bağıntısı kullanılarak fonksiyonelin artışı için olan (3.112) formülü

$$\delta J_\alpha(v) = -\int_\Omega \sum_{j=1}^{2} a_j(x)\delta v_0(t)\operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\bar{\phi}\right)dxdt +$$

$$+\int_\Omega \sum_{j=1}^{2} b_j(x)\delta v_j(t)\operatorname{Re}\left(\psi\bar{\phi}\right)dxdt + 2\alpha\int_0^T \left\langle v(t)-\omega(t), \delta v(t)\right\rangle_{R^3} dt + \circ\left(\left\|\delta v\right\|_B\right)$$

biçiminde yazılabilir. Burada Hamilton-Pontryagin fonksiyonunun ifadesi dikkate alınırsa

$$\delta J_\alpha(v) = \int_0^T \left\langle -\frac{\partial H}{\partial v}, \delta v\right\rangle_{R^3} dt + \circ\left(\left\|\delta v\right\|_B\right)$$

elde edilir. Burada fonksiyonellerin Frechet anlamında türevinin tanımı kullanılırsa teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Teorem 3.5 ispatlandı.

3.1.5. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart

Şimdi, (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde edelim. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 3.6: Farz edelim ki, Teorem 3.5'in şartları sağlansın, $y \in \overset{0}{W}{}_2^1(D)$ olsun ve $v^* \in V$ (3.1)-(3.2), (3.7) probleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde, $\forall v \in V$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\int_0^T \left\{ \left[-\int_D \sum_{j=1}^{2} a_j(x) \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial x_j} \overline{\phi}^*(x,t) \right) dx + 2\alpha\left(v_0^*(t) - \omega_0(t)\right) \right] \times \right.$$

$$\times\left(v_0(t) - v_0^*(t)\right) + \sum_{j=1}^{2} \left[\int_D b_j(x) \operatorname{Re}\left(\psi^*(x,t)\overline{\phi}^*(x,t)\right) dx + \right. \tag{3.130}$$

$$\left. \left. + 2\alpha\left(v_j^*(t) - \omega_j(t)\right) \right] \left(v_j(t) - v_j^*(t)\right) \right\} dt \geq 0.$$

Burada $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\phi^*(x,t) \equiv \phi(x,t;v^*)$ fonksiyonları $v^* \in V$ için sırasıyla (3.1)-(3.2) başlangıç sınır değer probleminin ve (3.71)-(3.72) eşlenik probleminin çözümleridir.

İspat: Tanımına göre V kümesi $B \equiv L_\infty(0,T) \times \left(L_2(0,T)\right)^2$ uzayında konveks kümedir. Bu kümede, Teorem 3.5'e göre $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli diferensiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için (3.106) formülü yani

$$J'_\alpha(v) = \left(J'_{\alpha 0}(v), J'_{\alpha 1}(v), J'_{\alpha 2}(v)\right) \tag{3.131}$$

$$J'_{\alpha 0}(v) = -\int_D \sum_{j=1}^{2} a_j(x) \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_j} \overline{\phi}(x,t) \right) dx + 2\alpha\left(v_0(t) - \omega_0(t)\right) \tag{3.132}$$

$$J'_{\alpha 1}(v) = \int_D b_1(x) \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right) dx + 2\alpha\left(v_1(t) - \omega_1(t)\right) \tag{3.133}$$

$$J'_{\alpha 2}(v) = \int_D b_2(x) \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right) dx + 2\alpha\left(v_2(t) - \omega_2(t)\right) \tag{3.134}$$

formülleri geçerlidir.

Bu formülleri kullanarak $\forall v \in V$ elemanı üzerinde $J'_\alpha(v)$ nin sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla

$$\left\| J'_\alpha(v + \delta v) - J'_\alpha(v) \right\|_{B^*} \leq c_{47} \left\| \delta v \right\|_B \tag{3.135}$$

eşitsizliğinin ispatlanması yeterlidir. Burada $B^* = L_1(0,T) \times \left(L_2(0,T)\right)^2$ dir.

(3.135) eşitsizliğinin ispatlanması için $J'_{\alpha j}(v)$ bileşenlerinin her birinin $v \in V$ elemanı üzerinde artışlarını değerlendirmek gerekir. (3.132) formülü kullanılırsa

$$J'_{\alpha 0}(v+\delta v) - J'_{\alpha 0}(v) =$$
$$= -\int_D \sum_{j=1}^{2} a_j(x) \left[\operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi_\delta(x,t)}{\partial x_j} \overline{\phi_\delta}(x,t) \right) - \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_j} \overline{\phi}(x,t) \right) \right] dx +$$
$$+2\alpha \delta v_0(t)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $\psi_\delta(x,t) = \psi(x,t;v+\delta v)$, $\phi_\delta(x,t) = \phi(x,t;v+\delta v)$ dir. Sonuncu formülden kolaylıkla

$$J'_{\alpha 0}(v+\delta v) - J'_{\alpha 0}(v) =$$
$$= -\int_D \sum_{j=1}^{2} a_j(x) \operatorname{Im}\left(\frac{\partial \psi_\delta(x,t)}{\partial x_j} \delta\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \delta\psi(x,t)}{\partial x_j} \overline{\phi}(x,t) \right) dx + \tag{3.136}$$
$$+2\alpha \delta v_0(t)$$

eşitliği yazılabilir. Benzer biçimde $J'_{\alpha 1}(v)$ ve $J'_{\alpha 2}(v)$ için

$$J'_{\alpha 1}(v+\delta v) - J'_{\alpha 1}(v) =$$
$$= \int_D b_1(x) \operatorname{Re}\left(\psi_\delta(x,t) \delta\overline{\phi}(x,t) + \delta\psi(x,t) \overline{\phi}(x,t) \right) dx + \tag{3.137}$$
$$+2\alpha \delta v_1(t)$$

$$J'_{\alpha 2}(v+\delta v) - J'_{\alpha 2}(v) =$$
$$= \int_D b_2(x) \operatorname{Re}\left(\psi_\delta(x,t) \delta\overline{\phi}(x,t) + \delta\psi(x,t) \overline{\phi}(x,t) \right) dx + \tag{3.138}$$
$$+2\alpha \delta v_2(t)$$

artışları yazılabilir. Burada (3.136)-(3.138) formüllerinde yer alan

$$\delta\phi(x,t) = \phi_\delta(x,t) - \phi(x,t) = \phi(x,t;v+\delta v) - \phi(x,t;v)$$

fonksiyonu aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial \delta\phi}{\partial t} + a_0 \Delta\delta\phi + i\sum_{j=1}^{2} \left(v_0(t) + \delta v_0(t) \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_j(x) \delta\phi \right) +$$
$$+\sum_{j=1}^{2} b_j(x) \left(v_j(t) + \delta v_j(t) \right) \delta\phi - a(x)\delta\phi =$$

$$= -i\sum_{j=1}^{2}\delta v_0(t)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x)\phi\right)-\sum_{j=1}^{2}b_j(x)\delta v_j(t)\phi,\ (x,t)\in\Omega \quad (3.139)$$

$$\delta\phi(x,T)=-2i\delta\psi(x,T),\ x\in D,\ \delta\phi|_S=0. \quad (3.140)$$

Teoremin şartına göre, $y\in \overset{0}{W}{}_2^1(D)$ dir. Gömme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(D)\right)$ uzayına sürekli gömüldüğünden $\psi(.,T)\in \overset{0}{W}{}_2^1(D)$ şartı sağlanır. Bu takdirde, (3.101)-(3.102) eşlenik probleminde $-2i\left(\psi(x,T)-y(x)\right)$ fonksiyonu $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$ uzayının elemanı olduğundan Teorem 3.1'in ispatı kullanılarak eşlenik problemin $C^0\left([0,T],L_2(D)\right)$ uzayına ait olan çözümünün $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayına ait olduğu ve çözüm için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu ispatlanabilir:

$$\|\phi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}\le c_{48}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)}+\|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}+\|y\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(D)}\right). \quad (3.141)$$

Burada $c_{48}>0$ sayısı belirli bir sabittir.

Bu kestirim ve veriler üzerine konulan şartlar kullanılırsa (3.139) denkleminin sağ tarafının $L_2(\Omega)$ dan olan fonksiyon olduğu elde edilir. (3.139)-(3.140) problemine dikkat edilirse, bu problem eşlenik problem tipinden olan bir başlangıç sınır değer problemidir. Ancak burada eşlenik problemin sağ tarafının sıfır olmasından farklı olarak bu problemde, denklemin sağ tarafı sıfırdan farklı $L_2(\Omega)$ dan olan bir fonksiyondur. Buna rağmen (3.139)-(3.140) probleminin çözümünün de $C^0\left([0,T],L_2(D)\right)$ uzayına ait olduğu ve çözüm için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu ispatlanabilir:

$$\|\delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(D)}\le c_{49}\left(\|F\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(D)}\right),\ \forall t\in[0,T]. \quad (3.142)$$

Burada $F(x,t)$ fonksiyonu

$$F\left(x,t\right)=-i\sum_{j=1}^{2}\delta v_0\left(t\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j\left(x\right)\phi\right)-\sum_{j=1}^{2}b_j\left(x\right)\delta v_j\left(t\right)\phi \qquad (3.143)$$

formülüyle tanımlanır.

(3.143) formülü ve $a_j\left(x\right)$, $b_j\left(x\right)$ fonksiyonları üzerine konulan şartlar, bunların yanı sıra ϕ fonksiyonu için (3.141) kestiriminin geçerli olduğu dikkate alınırsa kolaylıkla F için

$$\left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le c_{50}\left\|\delta v\right\|^2_B \qquad (3.144)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.76) kestirimi kullanılarak, (3.142) kestiriminden ve (3.144) eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\left\|\delta\phi\left(.,t\right)\right\|^2_{L_2(D)}\le c_{51}\left\|\delta v\right\|^2_B \qquad (3.145)$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{51}>0$ sayısı δv den bağımsızdır.

(3.8) kestirimi, $v+\delta v\in V$ elemanına karşılık gelen $\psi_\delta\left(x,t\right)$ çözümü için yazılırsa

$$\left\|\psi_\delta\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_0\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(D)}+\left\|f\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right) \qquad (3.146)$$

kestirimi yazılabilir.

Bu kestirim, (3.104), (3.127) ve (3.145) kestirimleri kullanılarak (3.136)-(3.138) formülünün yardımıyla $J'_\alpha\left(v\right)$ gradiyentinin bileşenlerinin artışı değerlendirilebilir. Gerçekten (3.136) formülü kullanılırsa

$$\int_0^T\left|J'_{\alpha 0}\left(v+\delta v\right)-J'_{\alpha 0}\left(v\right)\right|dt\le\int_0^T\int_D\sum_{j=1}^{2}\left|a_j\left(x\right)\right|\left(\left|\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x_j}\right|\left|\delta\phi\right|+\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\right|\left|\phi\right|\right)dxdt+$$

$$+2\alpha\int_0^T\left|\delta v_0\left(t\right)\right|dt\le\sqrt{2}\upsilon_0\left(\left\|\nabla\psi_\delta\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\delta\phi\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|\nabla\delta\psi\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\phi\right\|_{L_2(\Omega)}\right)+2\alpha T\left\|\delta v_0\right\|_{L_\infty(0,T)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.104), (3.127), (3.145) ve (3.146) kestirimleri kullanılarak

$$\left\| J'_{\alpha 0}\left(v+\delta v\right)-J'_{\alpha 0}\left(v\right)\right\|_{L_1(0,T)} \le c_{52}\left\|\delta v\right\|_B \qquad (3.147)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{52}>0$ sayısı δv den bağımsızdır.

Şimdi $J'_{\alpha 1}\left(v\right)$ yi kestirelim. (3.137) formülü kullanılırsa

$$\left|J'_{\alpha 1}\left(v+\delta v\right)-J'_{\alpha 1}\left(v\right)\right| \le \int_D \left|b_1\left(x\right)\right|\left(\left|\psi_\delta\right|\left|\delta\phi\right|+\left|\delta\psi\right|\left|\phi\right|\right)dx+2\alpha\left|\delta v_1\left(t\right)\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa sonuncu eşitsizlikten

$$\begin{aligned}&\left|J'_{\alpha 1}\left(v+\delta v\right)-J'_{\alpha 1}\left(v\right)\right| \le \\ &\qquad \le \eta_0\left(\left\|\psi_\delta\left(.,t\right)\right\|_{L_2(D)}\left\|\delta\phi\left(.,t\right)\right\|_{L_2(D)}+\left\|\delta\psi\left(.,t\right)\right\|_{L_2(D)}\left\|\phi\left(.,t\right)\right\|_{L_2(D)}\right)+ \\ &\qquad +2\alpha\left|\delta v_1\left(t\right)\right|,\ \forall t\in\left[0,T\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin her tarafının karesi alınıp $\left(0,T\right)$ aralığı üzerinden integrallenirse kolaylıkla

$$\begin{aligned}\left\|J'_{\alpha 1}\left(v+\delta v\right)-J'_{\alpha 1}\left(v\right)\right\|^2_{L_2(0,T)} &\le 3\eta_0^2\left\|\psi_\delta\right\|^2_{L_2(\Omega)}\max_{0\le t\le T}\left(\left\|\delta\phi\left(.,t\right)\right\|^2_{L_2(D)}\right)+ \\ &+3\eta_0^2\left\|\phi\right\|^2_{L_2(\Omega)}\max_{0\le t\le T}\left(\left\|\delta\psi\left(.,t\right)\right\|^2_{L_2(D)}\right)+12\alpha^2\left\|\delta v_1\right\|^2_{L_2(0,T)}\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte (3.76), (3.104), (3.145) ve (3.146) kestirimleri kullanılarak

$$\left\| J'_{\alpha 1}\left(v+\delta v\right)-J'_{\alpha 1}\left(v\right)\right\|_{L_2(0,T)} \le c_{53}\left\|\delta v\right\|_B \qquad (3.148)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{53}>0$ sayısı δv den bağımsızdır.

(3.148) kestiriminin elde edilmesine benzer olarak $J'_{\alpha 2}\left(v\right)$ bileşeninin artışı için

$$\left\| J'_{\alpha 2}\left(v+\delta v\right)-J'_{\alpha 2}\left(v\right)\right\|_{L_2(0,T)} \le c_{54}\left\|\delta v\right\|_B \qquad (3.149)$$

eşitsizliği elde edilebilir. Burada $c_{54}>0$ sayısı δv den bağımsızdır.

Böylece $B^* = L_1\left(0,T\right)\times\left(L_2\left(0,T\right)\right)^2$ olduğu göz önünde bulundurulursa, (3.147)-(3.149) eşitsizliklerinin yardımıyla

$$\left\| J'_\alpha\left(v+\delta v\right) - J'_\alpha\left(v\right)\right\|_{B^*} \le c_{55}\left\|\delta v\right\|_B \tag{3.150}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{55} > 0$ sayısı δv den bağımsızdır.

$c_{47} = c_{55}$ seçilerek (3.135) eşitsizliğinin yani gereken eşitsizliğin geçerli olduğu elde edildi. Böylece $J'_\alpha\left(v\right)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu, daha da fazlası $c_{55} > 0$ sayısıyla Lipschitz şartını sağladığı elde edildi. İspat edildiğine göre, $J_\alpha\left(v\right)$ fonksiyoneli Frechet anlamında sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonel olduğundan, tanıma göre V kümesi konveks olduğundan Vasilyev (1981) çalışmasından bilinen teoremin (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.5) şartları sağlanır. Eğer $v^* \in V$ elemanı $J_\alpha\left(v\right)$ fonksiyonelinin minimum noktası ise yani (3.1)-(3.2), (3.7) probleminin çözümü ise

$$\left\langle J'_\alpha\left(v^*\right), v - v^*\right\rangle_B \ge 0,\ \ \forall v \in V \tag{3.151}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Burada (3.132)-(3.134) formülleri kullanılarak teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilebilir. Teorem 3.6 ispatlandı.

3.2. İki Boyutlu Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde, 3.1. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin özel bir hali için sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. Bu amaçla önce sonlu farklı aynısı yazılan optimal kontrol probleminin fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi ispatlanmıştır. Daha sonra bu kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası için bir kestirim elde edilmiş olup sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlanmıştır.

Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinin sonlu farklar metoduyla çözümü daha önce Potapov (1987), Yagubov (1990), Silla (1991), Yagubov and Musayeva (1995), Yıldız and Yagubov (1997), Mahmudov (1997), Yagubov (2001), Yetişkin (2005), Yıldırım (2009) çalışmalarında incelenmiştir.

3.2.1. Optimal kontrol probleminin diskritleştirilmesi

$$J(v)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left|\psi(x_1,x_2,T)-y(x_1,x_2)\right|^2 dx_2dx_1 \tag{3.152}$$

fonksiyonelinin

$$V=\left\{v=v(t)=(v_1(t),v_2(t)),\ v_p\in L_2(0,T),\ \mathrm{p}=1,2,\ \|v_p\|_{L_2(0,T)}\le b_p,\ \mathrm{p}=1,2\right\}$$

kümesi üzerinde

$$\begin{gathered} i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)+i\sum_{j=1}^{2}a_j(x_1,x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{2}b_j(x_1,x_2)v_j(t)\psi- \\ -a(x_1,x_2)\psi=f(x_1,x_2,t),\ (x_1,x_2,t)\in\Omega \end{gathered} \tag{3.153}$$

$$\psi(x_1,x_2,0)=\varphi(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in D \tag{3.154}$$

$$\psi(0,x_2,t)=\psi(l_1,x_2,t)=\psi(x_1,0,t)=\psi(x_1,l_2,t)=0 \tag{3.155}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $i^2=-1$; $a_0>0,\quad T>0$ verilen reel sayılar; $b_p>0,\ p=1,2$ verilen sayılar; $D=(0,l_1)\times(0,l_2)\subset R^2$; $\Omega_t=D\times(0,t)$; $\Omega=\Omega_T$; $y\in W_2^1(D)$ verilen fonksiyon; $a,\ a_j,\ b_j\in L_\infty(D),\ j=1,2$ verilen fonksiyonlar olup (3.3)-(3.5) şartlarını sağlar. Ayrıca a_j fonksiyonu

$$a_j(0,x_2)=a_j(l_1,x_2)=a_j(x_1,0)=a_j(x_1,l_2)=0,\ j=1,2 \tag{3.156}$$

şartını sağlar. $\varphi(x_1,x_2)$ ve $f(x_1,x_2,t)$ fonksiyonları ise verilen fonksiyonlar olup (3.6) şartını sağlarlar.

Gözüktüğü gibi (3.152)-(3.155) optimal kontrol problemi (3.1)-(3.2), (3.7) optimal kontrol probleminin $\alpha = 0$ haline karşılık gelen özel bir halidir. Teorem 3.3'den (3.152)-(3.155) optimal kontrol probleminin kabul edilen şartlar altında en az bir çözümü vardır. Yani

$$V_* \equiv \left\{ v^* \in V : J\left(v^*\right) = J_* = \inf_{v \in V} J\left(v\right) \right\} \neq \varnothing$$

dır.

Şimdi (3.152)-(3.155) optimal kontrol problemini diskritleştirelim. Yani bu problemin sonlu farklı aynısını yazalım. Bu amaçla önce $\overline{\Omega} = \left[0, l_1\right] \times \left[0, l_2\right] \times \left[0, T\right]$ bölgesini aşağıdaki ağlar dizisine dönüştürelim:

$$\left\{ \left(x_{1j_1}, x_{2j_2}, t_k \right)_n \right\},\ n = 1, 2, ...,\ x_{1j_1} = j_1 h_{1n} - h_{1n} / 2,\ j_1 = \overline{1, M_{1n} - 1},$$

$$x_{2j_2} = j_2 h_{2n} - h_{2n} / 2,\ j_2 = \overline{1, M_{2n} - 1},\ x_{11} \text{-} \frac{h_{1n}}{2} = 0,\ x_{1M_{1n}-1} + \frac{h_{1n}}{2} = \ell_1,$$

$$x_{21} \text{-} \frac{h_{2n}}{2} = 0,\ x_{2M_{2n}-1} + \frac{h_{2n}}{2} = \ell_2,\ t_k = k\tau_n,\ k = \overline{0, N_n},$$

$$h_1 = h_{1n} = \ell_1 / \left(M_{1n} - 1\right),\ h_2 = h_{2n} = \ell_2 / \left(M_{2n} - 1\right),\ \tau = \tau_n = T / N_n,$$

$$M_1 = M_{1n},\ M_2 = M_{2n},\ N = N_n.$$

(3.153) denkleminin içerdiği türevlere karşılık gelen sonlu farkları ise

$$\delta_{\overline{t}} \phi_{j_1 j_2 k} = \left(\phi_{j_1 j_2 k} - \phi_{j_1 j_2 k-1} \right) / \tau,$$

$$\delta_{\overline{x_1}} \phi_{j_1 j_2 k} = \left(\phi_{j_1 j_2 k} - \phi_{j_1 - 1 j_2 k} \right) / h_1,\ \delta_{\overline{x_2}} \phi_{j_1 j_2 k} = \left(\phi_{j_1 j_2 k} - \phi_{j_1 j_2 - 1 k} \right) / h_2,$$

$$\delta_{x_1} \phi_{j_1 j_2 k} = \left(\phi_{j_1 + 1 j_2 k} - \phi_{j_1 j_2 k} \right) / h_1,\ \delta_{x_2} \phi_{j_1 j_2 k} = \left(\phi_{j_1 j_2 + 1 k} - \phi_{j_1 j_2 k} \right) / h_2,$$

$$\delta_{x_1 \overline{x_1}} \phi_{j_1 j_2 k} = \left(\phi_{j_1 + 1 j_2 k} - 2\phi_{j_1 j_2 k} + \phi_{j_1 - 1 j_2 k} \right) / h_1^2,$$

$$\delta_{x_2 \overline{x_2}} \phi_{j_1 j_2 k} = \left(\phi_{j_1 j_2 + 1 k} - 2\phi_{j_1 j_2 k} + \phi_{j_1 j_2 - 1 k} \right) / h_2^2,$$

$$\delta_{\overline{x_1}} \phi_{1 j_2 k} = \delta_{x_1} \phi_{0 j_2 k} = \frac{\left(\phi_{1 j_2 k} - \phi_{0 j_2 k} \right)}{\left(h_1 / 2 \right)},\ \delta_{\overline{x_1}} \phi_{M_1 j_2 k} = \delta_{x_1} \phi_{M_1 - 1 j_2 k} = \frac{\left(\phi_{M_1 j_2 k} - \phi_{M_1 - 1 j_2 k} \right)}{\left(h_1 / 2 \right)},$$

$$\delta_{\overline{x_2}} \phi_{j_1 1 k} = \delta_{x_2} \phi_{j_1 0 k} = \frac{\left(\phi_{j_1 1 k} - \phi_{j_1 0 k} \right)}{\left(h_2 / 2 \right)},\ \delta_{\overline{x_2}} \phi_{j_1 M_2 k} = \delta_{x_2} \phi_{j_1 M_2 - 1 k} = \frac{\left(\phi_{j_1 M_2 k} - \phi_{j_1 M_2 - 1 k} \right)}{\left(h_2 / 2 \right)}$$

biçiminde gösterelim. Bu durumda (3.152)-(3.155) optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısını her bir $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$I_n\left(\left[v\right]_n\right)=h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2N}-y_{j_1j_2}\right|^2 \tag{3.157}$$

fonksiyonunun

$$V_n\equiv\left\{\left[v\right]_n:\left[v\right]_n=\left(\left[v_1\right]_n,\left[v_2\right]_n\right),\ \left[v_p\right]_n=\left(v_{p1},v_{p2},...,v_{pN}\right),\ p=1,2,\right.$$
$$\left.\left(\tau\sum_{k=1}^{N}\left|v_{pk}\right|^2\right)^{1/2}\le b_p,\ p=1,2,\ k=\overline{1,N}\right\}$$

kümesi üzerinde

$$\begin{gathered}i\delta_{\bar t}\phi_{j_1j_2k}+a_0\left(\delta_{x_1\bar x_1}\phi_{j_1j_2k}+\delta_{x_2\bar x_2}\phi_{j_1j_2k}\right)+i\sum_{j=1}^{2}a_j^{j_1j_2}\delta_{\bar x_j}\phi_{j_1j_2k}+\sum_{j=1}^{2}b_j^{j_1j_2}v_{jk}\phi_{j_1j_2k}-\\-a^{j_1j_2}\phi_{j_1j_2k}=f_{j_1j_2k},\ j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N},\end{gathered} \tag{3.158}$$

$$\phi_{j_1j_20}=\varphi_{j_1j_2},\ j_1=\overline{0,M_1},\ j_2=\overline{0,M_2}, \tag{3.159}$$

$$\phi_{0j_2k}=\phi_{M_1j_2k}=0,\ j_2=\overline{0,M_2},\ k=\overline{1,N}, \tag{3.160}$$

$$\phi_{j_10k}=\phi_{j_1M_2k}=0,\ j_1=\overline{0,M_1},\ k=\overline{1,N} \tag{3.161}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemi olarak ifade edebiliriz. Burada $a_j^{j_1j_2}$, $b_j^{j_1j_2}$, $a^{j_1j_2}$, $y_{j_1j_2}$, $\varphi_{j_1j_2}$, $f_{j_1j_2k}$ fonksiyonları ağ fonksiyonları olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{gathered}a_j^{j_1j_2}=\frac{1}{h_1h_2}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a_j\left(x_1,x_2\right)dx_2dx_1,\ j=1,2,\\j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\end{gathered} \tag{3.162}$$

$$\begin{gathered}b_j^{j_1j_2}=\frac{1}{h_1h_2}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}b_j\left(x_1,x_2\right)dx_2dx_1,\\j=1,2,\ j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\end{gathered} \tag{3.163}$$

$$a^{j_1j_2}=\frac{1}{h_1h_2}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a\left(x_1,x_2\right)dx_2dx_1,\ j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1}, \tag{3.164}$$

$$\begin{gathered}\varphi_{j_1j_2}=\frac{1}{h_1h_2}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\varphi\left(x_1,x_2\right)dx_2dx_1,\ j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\\\varphi_{00}=\varphi_{0M_2}=\varphi_{M_10}=\varphi_{M_1M_2}=0,\end{gathered} \tag{3.165}$$

$$f_{j_1 j_2 k} = \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} f\left(x_1, x_2, t\right) dx_2 dx_1 dt, \tag{3.166}$$
$$j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N},$$

$$y_{j_1 j_2} = \frac{1}{h_1 h_2} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} y\left(x_1, x_2\right) dx_2 dx_1,\ j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1}. \tag{3.167}$$

Bu formüller ve $a,\ a_j,\ b_j$ fonksiyonları için olan şartlar kullanılarak

$$0 \le a^{j_1 j_2} \le \mu_0,\ \left|\delta_{\overline{x_k}} a^{j_1 j_2}\right| \le \mu_1,\ \left|\delta_{x_k \overline{x_p}} a^{j_1 j_2}\right| \le \mu_2,\ \ k, p = 1, 2, \tag{3.168}$$

$$0 \le a_j^{j_1 j_2} \le \upsilon_0,\ \left|\delta_{\overline{x_k}} a_j^{j_1 j_2}\right| \le \upsilon_1,\ \left|\delta_{x_k \overline{x_p}} a_j^{j_1 j_2}\right| \le \upsilon_2,\ \ j, k, p = 1, 2, \tag{3.169}$$
$$a_j^{0 j_2} = a_j^{M_1 j_2} = 0,\ a_j^{j_1 0} = a_j^{j_1 M_2} = 0,$$

$$0 \le b_j^{j_1 j_2} \le \eta_0,\ \left|\delta_{\overline{x_k}} b_j^{j_1 j_2}\right| \le \eta_1,\ \left|\delta_{x_k \overline{x_p}} b_j^{j_1 j_2}\right| \le \eta_2,\ \ j, k, p = 1, 2 \tag{3.170}$$

şartları elde edilebilir.

3.2.2. Fark şemasının kararlılığı

Her bir $\left[v\right]_n \in V_n$ için (3.158)-(3.161) şartlarından $\phi_{j_1 j_2 k}$ ağ fonksiyonunun bulunması problemi (3.153)-(3.155) sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasıdır. Önce bu fark şemasının çözümünün kararlı olup olmadığını inceleyelim:

Teorem 3.7: τ adımının $0 < \tau \le \frac{1}{8}\left(\upsilon_1\right)^{-1}$ şartını sağladığını kabul edelim. Bu takdirde her bir $\left[v\right]_n \in V_n$ için (3.158)-(3.161) fark şemasının çözümü aşağıdaki kestirimi sağlar:

$$h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left|\phi_{j_1 j_2 m}\right|^2 \le c_{56} \left(h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left|\varphi_{j_1 j_2}\right|^2 + h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| f_{j_1 j_2 k} \right|^2 \right), \tag{3.171}$$
$$m \in \left\{1, 2, ..., N\right\}.$$

Burada $c_{56} > 0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır.

İspat: Her bir $t = t_k$ için (3.156)-(3.159) şeması

$$
\begin{aligned}
&h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(i\delta_{\bar{t}}\phi_{j_1j_2k}\overline{\eta}_{j_1j_2k}\right)-a_0h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(\delta_{\overline{x_1}}\phi_{j_1j_2k}\delta_{\overline{x_1}}\overline{\eta}_{j_1j_2k}\right)-\\
&-a_0h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2}\left(\delta_{\overline{x_2}}\phi_{j_1j_2k}\delta_{\overline{x_2}}\overline{\eta}_{j_1j_2k}\right)+h_1h_2\sum_{j=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(ia_j^{j_1j_2}\delta_{\overline{x_j}}\phi_{j_1j_2k}\overline{\eta}_{j_1j_2k}\right)+\\
&+h_1h_2\sum_{j=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(b_j^{j_1j_2}v_{jk}\phi_{j_1j_2k}\overline{\eta}_{j_1j_2k}\right)-h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(a^{j_1j_2}\phi_{j_1j_2k}\overline{\eta}_{j_1j_2k}\right)=\\
&=h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(f_{j_1j_2k}\overline{\eta}_{j_1j_2k}\right),\ k=\overline{1,N}
\end{aligned}
\tag{3.172}
$$

toplam özdeşliğine denktir. Burada $\overline{\eta}_{j_1j_2k}$ ağ fonksiyonu $\eta_{0j_2k}=\eta_{M_1j_2k}=0,\ \eta_{j_10k}=\eta_{j_1M_2k}=0,\ j_1=\overline{0,M_1},\ j_2=\overline{0,M_2},\ \mathrm{k}=\overline{1,N}$ şartlarını sağlayan $\left\{\left(x_{1j_1},x_{2j_2},t_k\right)_n\right\}$ ağlar dizisinde tanımlı herhangi $\eta_{j_1j_2k}$ ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliğinde $\overline{\eta}_{j_1j_2k}$ ağ fonksiyonunun yerine $\tau\overline{\phi}_{j_1j_2k}$ ağ fonksiyonu alınıp elde edilen eşitliklerden onların kompleks eşlenikleri taraf taraf çıkarılırsa

$$
\begin{aligned}
&h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{j_1j_2k}\overline{\phi}_{j_1j_2k}+\delta_{\bar{t}}\overline{\phi}_{j_1j_2k}\phi_{j_1j_2k}\right)+\\
&+h_1h_2\tau\sum_{j=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left[a_j^{j_1j_2}\left(\delta_{\overline{x_j}}\phi_{j_1j_2k}\overline{\phi}_{j_1j_2k}+\delta_{\overline{x_j}}\overline{\phi}_{j_1j_2k}\phi_{j_1j_2k}\right)\right]=\\
&=2h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\mathrm{Im}\left(f_{j_1j_2k}\overline{\phi}_{j_1j_2k}\right),\ \forall k\in\{1,2,...,N\}
\end{aligned}
\tag{3.173}
$$

eşitliği elde edilir. (3.173) eşitliğinde

$$
\tau\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{j_1j_2k}\overline{\phi}_{j_1j_2k}+\delta_{\bar{t}}\overline{\phi}_{j_1j_2k}\phi_{j_1j_2k}\right)=\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2-\left|\phi_{j_1j_2k-1}\right|^2+\left|\phi_{j_1j_2k}-\phi_{j_1j_2k-1}\right|^2 \tag{3.174}
$$

$$
h_1\left(\delta_{\overline{x_1}}\phi_{j_1j_2k}\overline{\phi}_{j_1j_2k}+\delta_{\overline{x_1}}\overline{\phi}_{j_1j_2k}\phi_{j_1j_2k}\right)=\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2-\left|\phi_{j_1-1j_2k}\right|^2+\left|\phi_{j_1j_2k}-\phi_{j_1-1j_2k}\right|^2 \tag{3.175}
$$

$$
h_2\left(\delta_{\overline{x_2}}\phi_{j_1j_2k}\overline{\phi}_{j_1j_2k}+\delta_{\overline{x_2}}\overline{\phi}_{j_1j_2k}\phi_{j_1j_2k}\right)=\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2-\left|\phi_{j_1j_2-1k}\right|^2+\left|\phi_{j_1j_2k}-\phi_{j_1j_2-1k}\right|^2 \tag{3.176}
$$

eşitlikleri dikkate alınıp k indisi üzerinden 1 den $m\le N$ ye kadar toplanarak her iki tarafın mutlak değeri alınırsa ayrıca (3.169) şartı kullanılırsa

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2m}\right|^2 \le h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\varphi_{j_1j_2}\right|^2 + h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=2}^{M_1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\delta_{\bar{x}_1}a_1^{j_1j_2}\right|\left|\phi_{j_1-1j_2k}\right|^2 +$$
$$+h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=2}^{M_2}\left|\delta_{\bar{x}_2}a_2^{j_1j_2}\right|\left|\phi_{j_1j_2-1k}\right|^2 + 2h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|f_{j_1j_2k}\right|\left|\phi_{j_1j_2k}\right| \le$$
$$\le h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\varphi_{j_1j_2}\right|^2 + 2\upsilon_1h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2 +$$
$$+2h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|f_{j_1j_2k}\right|\left|\phi_{j_1j_2k}\right|,\ \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki son ifadenin $m.$ terimini ayırıp $m.$terime $\varepsilon-$Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin de yardımıyla

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2m}\right|^2 \le h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\varphi_{j_1j_2}\right|^2 + 2\upsilon_1h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2 +$$
$$+\varepsilon h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|f_{j_1j_2m}\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon}h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2m}\right|^2 + h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|f_{j_1j_2k}\right|^2 + \qquad (3.177)$$
$$+h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2,\ \forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\varepsilon = 2\tau$ seçilirse

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2m}\right|^2 \le 2h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\varphi_{j_1j_2}\right|^2 +$$
$$+\left(4T+2\right)h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|f_{j_1j_2k}\right|^2 + 4\upsilon_1h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2 + \qquad (3.178)$$
$$+2h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2,\ m=\overline{1,N}$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ taraftaki üçüncü ifadenin $m.$ terimi ayrılıp τ adımı için $0<\tau\le\frac{1}{8}\left(\upsilon_1\right)^{-1}$ şartı kullanılırsa

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2m}\right|^2 \le 4h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\varphi_{j_1j_2}\right|^2 + \left(8T+4\right)h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|f_{j_1j_2k}\right|^2 +$$

$$+\left(8\upsilon_1+4\right)h_1h_2\tau\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2k}\right|^2,\ m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte Gronwall lemmasının diskrit aynısı (Vasilyev 1981) kullanılırsa

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\phi_{j_1j_2m}\right|^2\le c_{57}\left(h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\varphi_{j_1j_2}\right|^2+h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|f_{j_1j_2k}\right|^2\right), \tag{3.179}$$
$$m\in\{1,2,...,N\}$$

elde edilir. Burada $c_{57}>0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır. Böylece $c_{57}=c_{56}$ seçilirse Teorem 3.7 ispatlandı.

3.2.3. Fark şemasının hatası için kestirim

Şimdi fark şemasının hatasını değerlendirelim. Bu amaçla önce (3.152)-(3.155) optimal kontrol probleminin her bir $v\in V$ için $\psi=\psi(x,t;v)$ çözümünün Steklov anlamında ortalamasını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{gathered}
\left[\psi\left(x_1,x_2,t;v\right)\right]_n=\left\{\psi_{j_1j_2k}\right\},\\
\psi_{j_1j_2k}=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\psi\left(x_1,x_2,t\right)dx_2dx_1dt,\\
j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N},\\
\psi_{j_1j_20}=\varphi_{j_1j_2},\ j_1=\overline{0,M_1},\ j_2=\overline{0,M_2},\\
\psi_{0j_2k}=\psi_{M_1j_2k}=0,\ j_2=\overline{0,M_2},\ k=\overline{1,N},\\
\psi_{j_10k}=\psi_{j_1M_2k}=0,\ j_1=\overline{0,M_1},\ k=\overline{1,N}.
\end{gathered} \tag{3.180}$$

Bunun yanı sıra $\forall v\in V$ için V kümesi üzerinde

$$\begin{gathered}
Q_n\left(v\right):V\to V_n,\ Q_n\left(v\right)=\left[w\right]_n=\left(\left[w_1\right]_n,\left[w_2\right]_n\right),\\
Q_n\left(v\right)=\left(w_{p1},w_{p2},...,w_{pN}\right),\ p=1,2,\\
w_{pk}=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}v_p\left(t\right)dt,\ p=1,2,\ k=\overline{1,N}
\end{gathered} \tag{3.181}$$

biçiminde Q_n operatörünü tanımlayalım. $[Z]_n = \{Z_{j_1 j_2 k}\} = \{\phi_{j_1 j_2 k} - \psi_{j_1 j_2 k}\}$ ile fark şemasının hatasını gösterelim. Bu $\{Z_{j_1 j_2 k}\}$ ağ fonksiyonunun aşağıdaki sistemi sağladığı açıktır:

$$\begin{gathered} i\delta_{\bar{t}} Z_{j_1 j_2 k} + a_0 \left(\delta_{x_1 \bar{x}_1} Z_{j_1 j_2 k} + \delta_{x_2 \bar{x}_2} Z_{j_1 j_2 k} \right) + i \sum_{j=1}^{2} a_j^{j_1 j_2} \delta_{\bar{x}_j} Z_{j_1 j_2 k} + \\ + \sum_{j=1}^{2} b_j^{j_1 j_2} v_{jk} Z_{j_1 j_2 k} - a^{j_1 j_2} Z_{j_1 j_2 k} = F_{j_1 j_2 k}, \quad j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N}, \end{gathered} \tag{3.182}$$

$$Z_{j_1 j_2 0} = 0,\ j_1 = \overline{0, M_1},\ j_2 = \overline{0, M_2}, \tag{3.183}$$

$$\begin{gathered} Z_{0 j_2 k} = Z_{M_1 j_2 k} = 0,\ j_2 = \overline{0, M_2},\ k = \overline{1, N}, \\ Z_{j_1 0 k} = Z_{j_1 M_2 k} = 0,\ j_1 = \overline{0, M_1},\ k = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{3.184}$$

Burada $F_{j_1 j_2 k}$ aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır:

$$\begin{gathered} F_{j_1 j_2 k} = \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \left[i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) + \right. \\ \left. + i \sum_{j=1}^{2} a_j (x_1, x_2) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} b_j (x_1, x_2) v_j(t) \psi - a(x_1, x_2) \psi \right] dx_2 dx_1 dt - \\ - i\delta_{\bar{t}} \psi_{j_1 j_2 k} - a_0 \left(\delta_{x_1 \bar{x}_1} \psi_{j_1 j_2 k} + \delta_{x_2 \bar{x}_2} \psi_{j_1 j_2 k} \right) - i \sum_{j=1}^{2} a_j^{j_1 j_2} \delta_{\bar{x}_j} \psi_{j_1 j_2 k} - \\ - \sum_{j=1}^{2} b_j^{j_1 j_2} v_{jk} \psi_{j_1 j_2 k} + a^{j_1 j_2} \psi_{j_1 j_2 k},\ j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{3.185}$$

Teorem 3.8: Farz edelim ki $\tau > 0$ adımı $0 < \tau \le \frac{1}{8} (\upsilon_1)^{-1}$ şartını ve $\tau,\ h_1$ ve h_2 adımları $c_{58} \le \frac{h_1}{\tau} \le c_{59},\ c_{60} \le \frac{h_2}{\tau} \le c_{61}$ uyum şartlarını sağlasın. Burada $c_{58} > 0,\ c_{59} > 0,\ c_{60} > 0,\ c_{61} > 0$ sayıları $\tau,\ h_1$ ve h_2 den bağımsızdır. Bu takdirde

$$h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| Z_{j_1 j_2 m} \right|^2 \le c_{62} \left(\beta_{\tau h_1 h_2} + \left\| Q_n(v) - [v]_n \right\|^2 \right),\ \forall m \in \{1, 2, ..., N\} \tag{3.186}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{62} > 0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır. $\beta_{\tau h_1 h_2} > 0$, $\tau \to 0$, $h_1 \to 0$ ve $h_2 \to 0$ için $\beta_{\tau h_1 h_2} \to 0$ dır. Ayrıca

$$\left\| Q_n(v) - [v]_n \right\|^2 = \left(\tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=1}^{2} \left| w_{pk} - v_{pk} \right|^2 \right)$$

dır.

İspat: Her bir $t = t_k$ için (3.182)-(3.184) sistemi aşağıdaki toplam özdeşliğine denktir:

$$\begin{aligned} & h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} i\delta_{\bar{t}} Z_{j_1 j_2 k} \bar{\eta}_{j_1 j_2 k} - a_0 h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \delta_{\bar{x}_1} Z_{j_1 j_2 k} \delta_{\bar{x}_1} \bar{\eta}_{j_1 j_2 k} - \\ & - a_0 h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2} \delta_{\bar{x}_2} Z_{j_1 j_2 k} \delta_{\bar{x}_2} \bar{\eta}_{j_1 j_2 k} + i h_1 h_2 \sum_{j=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} a_j^{j_1 j_2} \delta_{\bar{x}_j} Z_{j_1 j_2 k} \bar{\eta}_{j_1 j_2 k} + \\ & + h_1 h_2 \sum_{j=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} b_j^{j_1 j_2} v_{jk} Z_{j_1 j_2 k} \bar{\eta}_{j_1 j_2 k} - h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} a^{j_1 j_2} Z_{j_1 j_2 k} \bar{\eta}_{j_1 j_2 k} = \\ & = h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} F_{j_1 j_2 k} \bar{\eta}_{j_1 j_2 k}, \; k = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{3.187}$$

Burada $\bar{\eta}_{j_1 j_2 k}$ ağ fonksiyonu

$$\eta_{0 j_2 k} = \eta_{M_1 j_2 k} = 0, \; \eta_{j_1 0 k} = \eta_{j_1 M_2 k} = 0, \; j_1 = \overline{0, M_1}, \; j_2 = \overline{0, M_2}, \; \mathrm{k} = \overline{1, N}$$

şartlarını sağlayan $\left\{ \left(x_{1 j_1}, x_{2 j_2}, t_k \right)_n \right\}$ ağlar dizisinde tanımlı herhangi $\eta_{j_1 j_2 k}$ ağ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliğinde $\bar{\eta}_{j_1 j_2 k}$ ağ fonksiyonunun yerine $\tau \bar{Z}_{j_1 j_2 k}$ ağ fonksiyonu alınırsa

$$\begin{aligned} & i h_1 h_2 \tau \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \delta_{\bar{t}} Z_{j_1 j_2 k} \bar{Z}_{j_1 j_2 k} - a_0 h_1 h_2 \tau \sum_{j_1=1}^{M_1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| \delta_{\bar{x}_1} Z_{j_1 j_2 k} \right|^2 - a_0 h_1 h_2 \tau \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2} \left| \delta_{\bar{x}_2} Z_{j_1 j_2 k} \right|^2 + \\ & i h_1 h_2 \tau \sum_{j=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} a_j^{j_1 j_2} \delta_{\bar{x}_j} Z_{j_1 j_2 k} \bar{Z}_{j_1 j_2 k} + h_1 h_2 \tau \sum_{j=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} b_j^{j_1 j_2} v_{jk} \left| Z_{j_1 j_2 k} \right|^2 - \\ & - h_1 h_2 \tau \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} a^{j_1 j_2} \left| Z_{j_1 j_2 k} \right|^2 = h_1 h_2 \tau \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} F_{j_1 j_2 k} \bar{Z}_{j_1 j_2 k}, \; k = \overline{1, N} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa

$$h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left(\delta_{\bar{t}}Z_{j_1j_2k}\overline{Z}_{j_1j_2k}+\delta_{\bar{t}}\overline{Z}_{j_1j_2k}Z_{j_1j_2k}\right)+$$

$$+h_1h_2\tau\sum_{j=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left[a_j^{j_1j_2}\left(\delta_{\overline{x_j}}Z_{j_1j_2k}\overline{Z}_{j_1j_2k}+\delta_{\overline{x_j}}\overline{Z}_{j_1j_2k}Z_{j_1j_2k}\right)\right]=$$

$$=2h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\mathrm{Im}\left(F_{j_1j_2k}\overline{Z}_{j_1j_2k}\right),\ \forall k\in\{1,2,...,N\}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$\tau\left(\delta_{\bar{t}}Z_{j_1j_2k}\overline{Z}_{j_1j_2k}+\delta_{\bar{t}}\overline{Z}_{j_1j_2k}Z_{j_1j_2k}\right)=\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2-\left|Z_{j_1j_2k-1}\right|^2+\left|Z_{j_1j_2k}-Z_{j_1j_2k-1}\right|^2 \quad (3.188)$$

$$h_1\left(\delta_{\overline{x_1}}Z_{j_1j_2k}\overline{Z}_{j_1j_2k}+\delta_{\overline{x_1}}\overline{Z}_{j_1j_2k}Z_{j_1j_2k}\right)=\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2-\left|Z_{j_1-1j_2k}\right|^2+\left|Z_{j_1j_2k}-Z_{j_1-1j_2k}\right|^2 \quad (3.189)$$

$$h_2\left(\delta_{\overline{x_2}}Z_{j_1j_2k}\overline{Z}_{j_1j_2k}+\delta_{\overline{x_2}}\overline{Z}_{j_1j_2k}Z_{j_1j_2k}\right)=\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2-\left|Z_{j_1j_2-1k}\right|^2+\left|Z_{j_1j_2k}-Z_{j_1j_2-1k}\right|^2 \quad (3.190)$$

eşitlikleri dikkate alınıp k indisi üzerinden 1 den $m\le N$ ye kadar toplanarak her iki tarafın mutlak değeri alınırsa ayrıca $Z_{j_1j_20}=0$ ve (3.169) şartı kullanılırsa

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2m}\right|^2\le h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=2}^{M_1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|\delta_{\overline{x}_1}a_1^{j_1j_2}\right|\left|Z_{j_1-1j_2k}\right|^2+$$

$$+h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=2}^{M_2}\left|\delta_{\overline{x}_2}a_2^{j_1j_2}\right|\left|Z_{j_1j_2-1k}\right|^2+2h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}\right|\left|Z_{j_1j_2k}\right|\le$$

$$\le 2\upsilon_1h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2+2h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}\right|\left|Z_{j_1j_2k}\right|,$$

$$\forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki son ifadenin m. terimini ayırıp m.terime $\varepsilon-$Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin de yardımıyla

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2m}\right|^2\le 2\upsilon_1h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2+\varepsilon h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2m}\right|^2+$$

$$\frac{1}{\varepsilon}h_1h_2\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2m}\right|^2+h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}\right|^2+h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2,\quad (3.191)$$

$$\forall m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\varepsilon=2\tau$ seçilirse

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2m}\right|^2 \le (4T+2)h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}\right|^2 + \\ +4\upsilon_1h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2 + 2h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2,\ m=\overline{1,N} \tag{3.192}$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ taraftaki ikinci ifadenin $m.$ terimini ayıralım ve τ adımı için $0<\tau\le\frac{1}{8}(\upsilon_1)^{-1}$ şartı kullanılırsa

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2m}\right|^2 \le (8T+4)h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}\right|^2 + \\ +(8\upsilon_1+4)h_1h_2\tau\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2k}\right|^2,\ m\in\{1,2,...,N\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte Gronwall lemmasının diskrit aynısı (Vasilyev 1981) kullanılırsa

$$h_1h_2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|Z_{j_1j_2m}\right|^2 \le c_{63}\left(h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}\right|^2\right),\ m\in\{1,2,...,N\} \tag{3.193}$$

elde edilir. Burada $c_{63}>0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır.

Şimdi (3.193) eşitsizliğinin sağ tarafını değerlendirelim. Bu amaçla $F_{j_1j_2k}$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$F_{j_1j_2k}=F^1_{j_1j_2k}+F^2_{j_1j_2k}+F^3_{j_1j_2k}+F^4_{j_1j_2k}+F^5_{j_1j_2k}, \\ j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}. \tag{3.194}$$

Burada

$$F^1_{j_1j_2k}=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dx_2dx_1dt-i\delta_{\bar{t}}\psi_{j_1j_2k}, \tag{3.195}$$

$$F^2_{j_1j_2k}=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} a_0\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right)dx_2dx_1dt- \\ -a_0\left(\delta_{x_1\bar{x}_1}\psi_{j_1j_2k}+\delta_{x_2\bar{x}_2}\psi_{j_1j_2k}\right), \tag{3.196}$$

$$F_{j_1 j_2 k}^{3} = \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} i \sum_{j=1}^{2} a_j(x_1, x_2) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_2 dx_1 dt - i \sum_{j=1}^{2} a_j^{j_1 j_2} \delta_{\bar{x}_j} \psi_{j_1 j_2 k}, \quad (3.197)$$

$$F_{j_1 j_2 k}^{4} = \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \sum_{j=1}^{2} b_j(x_1, x_2) v_j(t) \psi dx_2 dx_1 dt -$$
$$- \sum_{j=1}^{2} b_j^{j_1 j_2} v_{jk} \psi_{j_1 j_2 k}, \quad (3.198)$$

$$F_{j_1 j_2 k}^{5} = -\frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} a(x_1, x_2) \psi dx_2 dx_1 dt + a^{j_1 j_2} \psi_{j_1 j_2 k}, \quad (3.199)$$
$$j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N}$$

şeklindedir.

Şimdi $F_{j_1 j_2 k}$ fonksiyonlarının her birini değerlendirelim. Önce $F_{j_1 j_2 k}^{1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. (3.180) ve (3.195) formülleri kullanılırsa

$$F_{j_1 j_2 k}^{1} = \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} i \frac{\partial \psi}{\partial t} dx_2 dx_1 dt - i \delta_{\bar{t}} \psi_{j_1 j_2 k} =$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} i \frac{\partial \psi}{\partial t} dx_2 dx_1 dt -$$
$$- \frac{i}{h_1 h_2 \tau^2} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left(\psi(x_1, x_2, t) - \psi(x_1, x_2, t - \tau) \right) dx_2 dx_1 dt =$$
$$= \frac{i}{h_1 h_2 \tau^2} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \int\limits_{-\tau}^{0} \left(\frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t + \theta)}{\partial t} \right) d\theta dx_2 dx_1 dt,$$
$$j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{2, N}$$

elde edilir. Burada Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|F^1_{j_1j_2k}\right|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{h_1h_2\tau^2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t+\theta)}{\partial t}\right|^2 d\theta dx_2dx_1dt, \quad (3.200)$$

$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{2,N}$$

eşitsizliği elde edilir. $F^1_{j_1j_21},\ j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1}$ için

$$F^1_{j_1j_21}=\frac{i}{h_1h_2\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial t}dx_2dx_1dt-$$

$$-\frac{i}{h_1h_2\tau^2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi(x_1,x_2,\theta)}{\partial\theta}d\theta dx_2dx_1dt$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\left|F^1_{j_1j_21}\right|^2\le\frac{4}{h_1h_2\tau}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial t}\right|^2dx_2dx_1dt, \quad (3.201)$$

$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde (3.180) ve (3.196) formülleri kullanılarak $F^2_{j_1j_2k}=F^{21}_{j_1j_2k}+F^{22}_{j_1j_2k}$ için

$$F^{21}_{j_1j_2k}=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a_0\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}dx_2dx_1dt-a_0\left(\delta_{x_1\bar{x}_1}\psi_{j_1j_2k}\right)=$$

$$=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a_0\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}dx_2dx_1dt-$$

$$-\frac{1}{h_1^3h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a_0\Big[\big(\psi(x_1+h_1,x_2,t)-\psi(x_1,x_2,t)\big)-$$

$$-\big(\psi(x_1,x_2,t)-\psi(x_1-h_1,x_2,t)\big)\Big]dx_2dx_1dt=$$

$$=\frac{a_0}{h_1^3h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int_{0}^{h_1}\int_{-h_1}^{0}\left(\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\psi(x_1+\eta_1+\xi_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}\right)\times$$

$$\times d\eta_1d\xi_1dx_2dx_1dt$$

$$j_1=\overline{2,M_1-2},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N},$$

ve

$$F_{j_1 j_2 k}^{22} = \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} dx_2 dx_1 dt - a_0 \left(\delta_{x_2 \bar{x}_2} \psi_{j_1 j_2 k}\right) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} a_0 \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} dx_2 dx_1 dt -$$

$$- \frac{1}{h_1 h_2^3 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} a_0 \Big[\big(\psi(x_1, x_2 + h_2, t) - \psi(x_1, x_2, t) \big) -$$

$$- \big(\psi(x_1, x_2, t) - \psi(x_1, x_2 - h_2, t) \big) \Big] dx_2 dx_1 dt =$$

$$= \frac{a_0}{h_1 h_2^3 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \int\limits_{0}^{h_2} \int\limits_{-h_2}^{0} \left(\frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2 + \eta_2 + \xi_2, t)}{\partial x_2^2} \right) \times$$

$$\times d\eta_2 d\xi_2 dx_2 dx_1 dt,$$

$$j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{2, M_2 - 2},\ k = \overline{1, N}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| F_{j_1 j_2 k}^{21} \right|^2 \le$$

$$\le \frac{a_0^2}{h_1^3 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \int\limits_{0}^{h_1} \int\limits_{-h_1}^{0} \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(x_1 + \eta_1 + \xi_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|^2 \times$$

$$\times d\eta_1 d\xi_1 dx_2 dx_1 dt,$$

$$j_1 = \overline{2, M_1 - 2},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N},$$

(3.202)

$$\left| F_{j_1 j_2 k}^{22} \right|^2 \le$$

$$\le \frac{a_0^2}{h_1 h_2^3 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \int\limits_{0}^{h_2} \int\limits_{-h_2}^{0} \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2 + \eta_2 + \xi_2, t)}{\partial x_2^2} \right|^2 \times$$

$$\times d\eta_2 d\xi_2 dx_2 dx_1 dt,$$

$$j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{2, M_2 - 2},\ k = \overline{1, N}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi F_{11k}^2 ve $F_{M_1 - 1 M_2 - 1 k}^2,\ k = \overline{1, N}$ fonksiyonlarını değerlendirelim. (3.180) ve (3.196) formülleri kullanılırsa

$$F_{11k}^{21}=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}a_0\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}dx_2dx_1dt-a_0\left(\delta_{x_1\bar{x}_1}\psi_{11k}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\left[\frac{\partial\psi(x_{11}+h_1/2,x_2,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi(x_{11}-h_1/2,x_2,t)}{\partial x_1}\right]dx_2dt-$$

$$-\frac{1}{h_1^3h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}a_0\Big[\big(\psi(x_1+h_1,x_2,t)-\psi(x_1,x_2,t)\big)-$$

$$-2\big(\psi(x_1,x_2,t)-\psi(x_{11}-h_1/2,x_2,t)\big)\Big]dx_2dx_1dt=$$

$$=\frac{a_0}{h_1^3h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\int\limits_{x_1}^{x_1+h_1}\int\limits_{\xi_1}^{x_{11}+h_1/2}\frac{\partial^2\psi(\eta_1,x_2,t)}{\partial\eta_1^2}d\eta_1d\xi_1dx_2dx_1dt+$$

$$+\frac{2a_0}{h_1^3h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_1}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{\xi_1}\frac{\partial^2\psi(\eta_1,x_2,t)}{\partial\eta_1^2}d\eta_1d\xi_1dx_2dx_1dt,\ k=\overline{1,N}$$

ve

$$F_{11k}^{22}=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}a_0\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}dx_2dx_1dt-a_0\left(\delta_{x_2\bar{x}_2}\psi_{11k}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\left[\frac{\partial\psi(x_1,x_{21}+h_2/2,t)}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi(x_1,x_{21}-h_2/2,t)}{\partial x_2}\right]dx_1dt-$$

$$-\frac{1}{h_1h_2^3\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}a_0\Big[\big(\psi(x_1,x_2+h_2,t)-\psi(x_1,x_2,t)\big)-$$

$$-2\big(\psi(x_1,x_2,t)-\psi(x_1,x_{21}-h_2/2,t)\big)\Big]dx_2dx_1dt=$$

$$=\frac{a_0}{h_1h_2^3\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\int\limits_{x_2}^{x_2+h_2}\int\limits_{\xi_2}^{x_{21}+h_2/2}\frac{\partial^2\psi(x_1,\eta_2,t)}{\partial\eta_2^2}d\eta_2d\xi_2dx_2dx_1dt+$$

$$+\frac{2a_0}{h_1h_2^3\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{\xi_2}\frac{\partial^2\psi(x_1,\eta_2,t)}{\partial\eta_2^2}d\eta_2d\xi_2dx_2dx_1dt,\ k=\overline{1,N}$$

eşitlikleri yazılır. Buradan Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned}\left|F_{11k}^2\right|^2\le\frac{18a_0^2}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}\right|^2dx_2dx_1dt+\\+\frac{18a_0^2}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}\right|^2dx_2dx_1dt,\ k=\overline{1,N}\end{aligned}\tag{3.203}$$

eşitsizliği yazılır. Benzer şekilde

$$\left|F^2_{M_1-1M_2-1k}\right|^2 \le \frac{18a_0^2}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1M_1-1}-h_1/2}^{x_{1M_1-1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2M_2-1}-h_2/2}^{x_{2M_2-1}+h_2/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}\right|^2 dx_2dx_1dt + \\ +\frac{18a_0^2}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1M_1-1}-h_1/2}^{x_{1M_1-1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2M_2-1}-h_2/2}^{x_{2M_2-1}+h_2/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}\right|^2 dx_2dx_1dt,\ k=\overline{1,N} \tag{3.204}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.180) ve (3.197) formülleri kullanılırsa $F^3_{j_1j_2k} = F^{31}_{j_1j_2k} + F^{32}_{j_1j_2k}$ için

$$F^{31}_{j_1j_2k} = \frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} ia_1(x_1,x_2)\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}dx_2dx_1dt - a_1^{j_1j_2}\delta_{\bar{x}_1}\psi_{j_1j_2k} =$$

$$= \frac{i}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left(a_1(x_1,x_2)-a_1^{j_1j_2}\right)\delta_{\bar{x}_1}\psi_{j_1j_2k}dx_2dx_1dt +$$

$$+\frac{i}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} a_1(x_1,x_2)\left(\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}-\delta_{\bar{x}_1}\psi_{j_1j_2k}\right)dx_2dx_1dt,$$

$$j_1=\overline{2,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}$$

$$F^{32}_{j_1j_2k} = \frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} ia_2(x_1,x_2)\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}dx_2dx_1dt - a_2^{j_1j_2}\delta_{\bar{x}_2}\psi_{j_1j_2k} =$$

$$= \frac{i}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left(a_2(x_1,x_2)-a_2^{j_1j_2}\right)\delta_{\bar{x}_2}\psi_{j_1j_2k}dx_2dx_1dt +$$

$$+\frac{i}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} a_2(x_1,x_2)\left(\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}-\delta_{\bar{x}_2}\psi_{j_1j_2k}\right)dx_2dx_1dt,$$

$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{2,M_2-1},\ k=\overline{1,N}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $a_j^{j_1j_2}$ ve $a_j(x_1,x_2)$ için olan formül kullanılırsa

$$\left|F_{j_1 j_2 k}^{31}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \left|a_1(x_1, x_2)\right| \left| \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - \delta_{\bar{x}_1} \psi_{j_1 j_2 k} \right| dx_2 dx_1 dt \le$$

$$\le \frac{\upsilon_0}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \left| \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - \delta_{\bar{x}_1} \psi_{j_1 j_2 k} \right| dx_2 dx_1 dt,$$

$$j_1 = \overline{2, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N},$$

$$\left|F_{j_1 j_2 k}^{32}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \left|a_2(x_1, x_2)\right| \left| \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} - \delta_{\bar{x}_2} \psi_{j_1 j_2 k} \right| dx_2 dx_1 dt \le$$

$$\le \frac{\upsilon_0}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \left| \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} - \delta_{\bar{x}_2} \psi_{j_1 j_2 k} \right| dx_2 dx_1 dt,$$

$$j_1 = \overline{1, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{2, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N} \qquad (3.205)$$

elde edilir. Burada

$$\left| \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - \delta_{\bar{x}_1} \psi_{j_1 j_2 k} \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - \frac{1}{h_1^2 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \int\limits_{\xi_1 - h_1}^{\xi_1} \frac{\partial \psi(\gamma_1, \xi_2, \theta)}{\partial \gamma_1} d\gamma_1 d\xi_2 d\xi_1 d\theta \right| \le$$

$$\le \frac{1}{h_1^2 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \int\limits_{\xi_1 - h_1}^{\xi_1} \int\limits_{\gamma_1}^{x_1} \left| \frac{\partial^2 \psi(\eta_1, x_2, t)}{\partial \eta_1^2} \right| d\eta_1 d\gamma_1 d\xi_2 d\xi_1 d\theta +$$

$$+ \frac{1}{h_1^2 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1} - t}^{t_k - t} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - h_2/2}^{x_{2 j_2} + h_2/2} \int\limits_{\xi_1 - h_1}^{\xi_1} \left| \frac{\partial \psi(\gamma_1, \xi_2, t)}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial \psi(\gamma_1, \xi_2, t + \sigma)}{\partial \gamma_1} \right| d\gamma_1 d\xi_2 d\xi_1 d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{h_1^2 h_2 \tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_{1 j_1} - h_1/2}^{x_{1 j_1} + h_1/2} \int\limits_{x_{2 j_2} - (h_2/2) - x_2}^{x_{2 j_2} + (h_2/2) - x_2} \int\limits_{\xi_1 - h_1}^{\xi_1} \left| \frac{\partial \psi(\gamma_1, x_2, t)}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial \psi(\gamma_1, x_2 + \kappa_2, t)}{\partial \gamma_1} \right| d\gamma_1 d\kappa_2 d\xi_1 d\theta,$$

$$j_1 = \overline{2, M_1 - 1},\ j_2 = \overline{1, M_2 - 1},\ k = \overline{1, N}$$

ve

$$\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_2}-\delta_{\bar{x}_2}\psi_{j_1j_2k}\right|=$$

$$=\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_2}-\frac{1}{h_1h_2^2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{\xi_2-h_2}^{\xi_2}\frac{\partial\psi\left(\xi_1,\gamma_2,\theta\right)}{\partial\gamma_2}d\gamma_2d\xi_2d\xi_1d\theta\right|\le$$

$$\le\frac{1}{h_1h_2^2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{\xi_2-h_2}^{\xi_2}\int\limits_{\gamma_2}^{x_2}\left|\frac{\partial^2\psi\left(x_1,\eta_2,t\right)}{\partial\eta_2^2}\right|d\eta_2d\gamma_2d\xi_2d\xi_1d\theta+$$

$$+\frac{1}{h_1h_2^2\tau}\int\limits_{t_{k-1}-t}^{t_k-t}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{\xi_2-h_2}^{\xi_2}\left|\frac{\partial\psi\left(\xi_1,\gamma_2,t\right)}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\psi\left(\xi_1,\gamma_2,t+\sigma\right)}{\partial\gamma_2}\right|d\gamma_2d\xi_2d\xi_1d\sigma+$$

$$+\frac{1}{h_1h_2^2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-(h_1/2)-x_1}^{x_{1j_1}+(h_1/2)-x_1}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{\xi_2-h_2}^{\xi_2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,\gamma_2,t\right)}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\psi\left(x_1+\kappa_1,\gamma_2,,t\right)}{\partial\gamma_2}\right|d\gamma_2d\kappa_1d\xi_1d\theta,$$

$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{2,M_2-1},\ k=\overline{1,N}$$

ifadeleri kullanılırsa

$$\left|F_{j_1j_2k}^{31}\right|^2\le\frac{12\upsilon_0^2h_1}{h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial^2\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_1^2}\right|dx_2dx_1dt+$$

$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1h_2\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left|\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,\xi_2,t\right)}{\partial\gamma_1}-\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,\xi_2,t+\sigma\right)}{\partial\gamma_1}\right|^2d\sigma d\xi_2d\gamma_1dt+$$

$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1h_2\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1-1}-h_1/2}^{x_{1j_1-1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left|\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,\xi_2,t\right)}{\partial\gamma_1}-\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,\xi_2,t+\sigma\right)}{\partial\gamma_1}\right|^2d\sigma d\xi_2d\gamma_1dt+$$

$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1h_2^2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{-h_2}^{h_2}\left|\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,x_2,t\right)}{\partial\gamma_1}-\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,x_2+\kappa_2,t\right)}{\partial\gamma_1}\right|^2d\kappa_2dx_2d\gamma_1dt+$$

$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1h_2^2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1-1}-h_1/2}^{x_{1j_1-1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{-h_2}^{h_2}\left|\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,x_2,t\right)}{\partial\gamma_1}-\frac{\partial\psi\left(\gamma_1,x_2+\kappa_2,t\right)}{\partial\gamma_1}\right|^2d\kappa_2dx_2d\gamma_1dt,$$

$$j_1=\overline{2,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N},$$

$$\left|F_{j_1j_2k}^{32}\right|^2\le\frac{12\upsilon_0^2h_2}{h_1\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial^2\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_2^2}\right|dx_2dx_1dt+$$

$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1h_2\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left|\frac{\partial\psi(\xi_1,\gamma_2,t)}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\psi(\xi_1,\gamma_2,t+\sigma)}{\partial\gamma_2}\right|^2 d\sigma d\gamma_2 d\xi_1 dt+$$
$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1h_2\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2-1}-h_2/2}^{x_{2j_2-1}+h_2/2}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\left|\frac{\partial\psi(\xi_1,\gamma_2,t)}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\psi(\xi_1,\gamma_2,t+\sigma)}{\partial\gamma_2}\right|^2 d\sigma d\gamma_2 d\xi_1 dt+$$
$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1^2h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\int\limits_{-h_1}^{h_1}\left|\frac{\partial\psi(x_1,\gamma_2,t)}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\psi(x_1+\kappa_1,\gamma_2,t)}{\partial\gamma_2}\right|^2 d\kappa_1 d\gamma_2 dx_1 dt+ \quad (3.206)$$
$$\frac{12\upsilon_0^2}{h_1^2h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2-1}-h_2/2}^{x_{2j_2-1}+h_2/2}\int\limits_{-h_1}^{h_1}\left|\frac{\partial\psi(x_1,\gamma_2,t)}{\partial\gamma_2}-\frac{\partial\psi(x_1+\kappa_1,\gamma_2,t)}{\partial\gamma_2}\right|^2 d\kappa_1 d\gamma_2 dx_1 dt,$$
$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{2,M_2-1},\ k=\overline{1,N}$$

elde edilir. $F_{11k}^{3}=F_{11k}^{31}+F_{11k}^{32}$ terimi için

$$\left|F_{11k}^{31}\right|\le\frac{\upsilon_0}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\right|dx_2dx_1dt+$$
$$+\frac{2\upsilon_0}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\int\limits_{0}^{h_1}\left|\frac{\partial\psi(\gamma_1,\xi_2,\theta)}{\partial\gamma_1}\right|d\gamma_1d\xi_2d\theta,\ k=\overline{1,N}$$

$$\left|F_{11k}^{32}\right|\le\frac{\upsilon_0}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\right|dx_2dx_1dt+$$
$$+\frac{2\upsilon_0}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{0}^{h_2}\left|\frac{\partial\psi(\xi_1,\gamma_2,\theta)}{\partial\gamma_2}\right|d\gamma_2d\xi_1d\theta,\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliği yazılır. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|F_{11k}^{3}\right|^2\le\frac{4\upsilon_0^2}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\right|^2 dx_2dx_1dt+$$
$$+\frac{16\upsilon_0^2}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\int\limits_{0}^{h_1}\left|\frac{\partial\psi(\gamma_1,\xi_2,\theta)}{\partial\gamma_1}\right|^2 d\gamma_1d\xi_2d\theta+$$
$$+\frac{4\upsilon_0^2}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{x_{21}-h_2/2}^{x_{21}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\right|^2 dx_2dx_1dt+$$

$$+\frac{16\upsilon_0^2}{h_1 h_2 \tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{11}-h_1/2}^{x_{11}+h_1/2}\int\limits_{0}^{h_2}\left|\frac{\partial\psi\left(\xi_1,\gamma_2,\theta\right)}{\partial\gamma_2}\right|d\xi_1 d\gamma_2 d\theta,\ k=\overline{1,N} \tag{3.207}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $F_{j_1 j_2 k}^4$ terimini kestirelim. (3.180) ve (3.198) formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&F_{j_1 j_2 k}^4 = \\
&=\frac{1}{h_1 h_2 \tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\sum_{j=1}^{2} b_j\left(x_1,x_2\right)v_j\left(t\right)\psi dx_2 dx_1 dt-\sum_{j=1}^{2} b_j^{j_1 j_2} v_{jk}\psi_{j_1 j_2 k} = \\
&=\frac{1}{h_1 h_2 \tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\sum_{j=1}^{2}\left(b_j\left(x_1,x_2\right)-b_j^{j_1 j_2}\right)v_{jk}\psi_{j_1 j_2 k}dx_2 dx_1 dt+ \\
&+\frac{1}{h_1 h_2 \tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\sum_{j=1}^{2} b_j\left(x_1,x_2\right)v_j\left(t\right)\left(\psi\left(x_1,x_2,t\right)-\psi_{j_1 j_2 k}\right)dx_2 dx_1 dt+ \\
&+\frac{1}{h_1 h_2 \tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\sum_{j=1}^{2} b_j\left(x_1,x_2\right)\left(v_j\left(t\right)-v_{jk}\right)\psi_{j_1 j_2 k}dx_2 dx_1 dt, \\
&j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}
\end{aligned} \tag{3.208}$$

elde edilir. Burada $b_j^{j_1 j_2}$ için olan formül kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&F_{j_1 j_2 k}^4 = \\
&=\frac{1}{h_1 h_2 \tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{j_1}-h_1/2}^{x_{j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{j_2}-h_2/2}^{x_{j_2}+h_2/2}\sum_{j=1}^{2} b_j\left(x_1,x_2\right)v_j\left(t\right)\left(\psi\left(x_1,x_2,t\right)-\psi_{j_1 j_2 k}\right)dx_2 dx_1 dt+ \\
&+\frac{1}{h_1 h_2 \tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{j_1}-h_1/2}^{x_{j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{j_2}-h_2/2}^{x_{j_2}+h_2/2}\sum_{j=1}^{2} b_j\left(x_1,x_2\right)\left(v_j\left(t\right)-v_{jk}\right)\psi_{j_1 j_2 k}dx_2 dx_1 dt, \\
&j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}
\end{aligned} \tag{3.209}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (3.5) şartı kullanılırsa

$$\left|F^4_{j_1j_2k}\right| \le \frac{\sqrt{2}\eta_0}{\sqrt{h_1}\sqrt{h_2}\tau}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sum_{j=1}^{2}\left|v_j(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j_1}-h_1/2}^{x_{j_1}+h_1/2}\int_{x_{j_2}-h_2/2}^{x_{j_2}+h_2/2}\left|\psi(x_1,x_2,t)-\psi_{j_1j_2k}\right|^2 dx_2dx_1dt\right)^{1/2} + \eta_0\left|\psi_{j_1j_2k}\right|\sum_{p=1}^{2}\left|v_{pk}-w_{pk}\right| \tag{3.210}$$

elde edilir. Burada

$$\left|\psi_{j_1j_2k}\right|^2 \le \frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\psi(x_1,x_2,t)\right|^2 dx_2dx_1dt \tag{3.211}$$

şeklindedir.

Şimdi $\psi_{j_1j_2k}-\psi(x_1,x_2,t)$ farkına bakalım:

$$\psi_{j_1j_2k}-\psi(x_1,x_2,t)=$$

$$=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j_1}-h_1/2}^{x_{j_1}+h_1/2}\int_{x_{j_2}-h_2/2}^{x_{j_2}+h_2/2}\left(\psi(\xi_1,\xi_2,\theta)-\psi(x_1,x_2,t)\right)d\xi_2d\xi_1d\theta=$$

$$=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j_1}-h_1/2}^{x_{j_1}+h_1/2}\int_{x_{j_2}-h_2/2}^{x_{j_2}+h_2/2}\left[\int_{x_1}^{\xi_1}\frac{\partial\psi(\eta_1,\xi_2,\theta)}{\partial\eta_1}d\eta_1+\int_{x_2}^{\xi_2}\frac{\partial\psi(x_1,\eta_2,\theta)}{\partial\eta_2}d\eta_2+\right. \tag{3.212}$$

$$\left.+\int_{t}^{\theta}\frac{\partial\psi(x_1,x_2,\gamma)}{\partial\gamma}d\gamma\right]d\xi_2d\xi_1d\theta.$$

Buradan

$$\left|\psi_{j_1j_2k}-\psi(x_1,x_2,t)\right|\le\frac{1}{h_2\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j_1}-h_1/2}^{x_{j_1}+h_1/2}\int_{x_{j_2}-h_2/2}^{x_{j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi(\eta_1,\xi_2,\theta)}{\partial\eta_1}\right|d\xi_2d\eta_1d\theta+$$

$$+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j_2}-h_2/2}^{x_{j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi(x_1,\eta_2,\theta)}{\partial\eta_2}\right|d\eta_2d\theta+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,\gamma)}{\partial\gamma}\right|d\gamma \tag{3.213}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.213) eşitsizliği ve

$$\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sum_{j=1}^{2}\left|v_j(t)\right|^2dt\right)^{1/2}\le\left\|v_j\right\|_{L_2(0,T)}\le b_j,\ \forall k\in\{1,2,...,N\}$$

ifadesi (3.210) eşitsizliğinde kullanılırsa Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla

$$\left|F_{j_1j_2k}^4\right|^2 \le \frac{4\eta_0^2\left(b_1^2+b_2^2\right)}{h_1h_2\tau^2}\left[3h_1^2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(\eta_1,\xi_2,\theta\right)}{\partial\eta_1}\right|^2 d\xi_2 d\eta_1 d\theta+\right.$$

$$+3h_2^2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,\eta_2,\theta\right)}{\partial\eta_2}\right|^2 d\eta_2 dx_1 d\theta+$$

$$\left.+3\tau^2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,\gamma\right)}{\partial\gamma}\right|^2 dx_2 dx_1 d\gamma\right]+$$

$$+2\eta_0^2\left|\psi_{j_1j_2k}\right|^2\left(\sum_{p=1}^{2}\left|v_{pk}-w_{pk}\right|\right)^2$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left|F_{j_1j_2k}^4\right|^2 \le{}& \frac{12\eta_0^2\left(b_1^2+b_2^2\right)h_1}{h_2\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_1}\right|^2 dx_2 dx_1 dt+\\
&+\frac{12\eta_0^2\left(b_1^2+b_2^2\right)h_2}{h_1\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_2}\right|^2 dx_2 dx_1 dt+\\
&+\frac{12\eta_0^2\left(b_1^2+b_2^2\right)}{h_1h_2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial t}\right|^2 dx_2 dx_1 dt+\\
&+2\eta_0^2\left|\psi_{j_1j_2k}\right|^2\left(\sum_{p=1}^{2}\left|v_{pk}-w_{pk}\right|\right)^2,\ j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}
\end{aligned} \tag{3.214}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $F_{j_1j_2k}^5$ terimini kestirelim. (3.180) ve (3.199) formülleri kullanılırsa

$$F_{j_1j_2k}^5=-\frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a\left(x_1,x_2\right)\psi\left(x_1,x_2,t\right)dx_2dx_1dt+a^{j_1j_2}\psi_{j_1j_2k}=$$

$$=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\psi_{j_1j_2k}\left(a^{j_1j_2}-a\left(x_1,x_2\right)\right)dx_2dx_1dt+$$

$$+\frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a\left(x_1,x_2\right)\left(\psi_{j_1j_2k}-\psi\left(x_1,x_2,t\right)\right)dx_2dx_1dt, \tag{3.215}$$

$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}$$

eşitliği elde edilir. Burada $a^{j_1j_2}$ için olan formül kullanılırsa

$$F_{j_1j_2k}^5=\frac{1}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}a\left(x_1,x_2\right)\left(\psi_{j_1j_2k}-\psi\left(x_1,x_2,t\right)\right)dx_2dx_1dt\leq$$

$$\leq\frac{\mu_0}{h_1h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left(\psi_{j_1j_2k}-\psi\left(x_1,x_2,t\right)\right)dx_2dx_1dt,$$

$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}$$

elde edilir. Burada (3.213) eşitsizliği kullanılarak Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin de yardımıyla

$$\left|F_{j_1j_2k}^5\right|^2\leq\frac{3\mu_0^2h_1}{h_2\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_1}\right|^2dx_2dx_1dt+$$

$$+\frac{3\mu_0^2h_2}{h_1\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_2}\right|^2dx_2dx_1dt+ \tag{3.216}$$

$$+\frac{3\mu_0^2\tau}{h_1h_2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial t}\right|^2dx_2dx_1dt,$$

$$j_1=\overline{1,M_1-1},\ j_2=\overline{1,M_2-1},\ k=\overline{1,N}$$

eşitsizliği elde edilir.

Fubini teoremi (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.6) kullanılırsa (3.198) eşitsizliğinden,

$$h_1h_2\tau\sum_{k=2}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^1\right|^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}\left(\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial t}-\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t+\theta\right)}{\partial t}\right|^2dx_2dx_1dt\right)d\theta \tag{3.217}$$

eşitsizliği elde edilir. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı alalım. $L_2(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonların sürekliliği ile ilgili teoreme göre (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.2), $|\theta| \le \tau < \delta$ için

$$\left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x_1, x_2, t+\theta)}{\partial t} \right|^2 dx_2 dx_1 dt \right)^{1/2} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buna göre $|\theta| \le \tau < \delta$ şartını sağlayan τ değerleri için

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=2}^{N} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 k}^{1} \right|^2 \le \omega_\tau^0 \tag{3.218}$$

olduğu elde edilir. Burada $\omega_\tau^0 > 0,\ \tau \to 0$ için $\omega_\tau^0 \to 0$ dır. (3.201) eşitsizliğine göre

$$h_1 h_2 \tau \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 1}^{1} \right|^2 \le 4 \int_0^{\tau} \left\| \frac{\partial \psi(.,.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(D)}^2 dt \le c_{64} \tau$$

olup bu eşitsizlik ile (3.218) eşitsizliği birleştirilirse

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 k}^{1} \right|^2 \le \omega_\tau^0 + c_{64} \tau \tag{3.219}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{64} > 0$ sayısı $h_1,\ h_2$ ve τ dan bağımsızdır.

Benzer şekilde (3.202) eşitsizliğinden

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=2}^{M_1-2} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 k}^{21} \right|^2 \le$$

$$\le \frac{a_0^2}{h_1^2} \int_0^{h_1} \int_{-h_1}^{0} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(x_1 + \eta_1 + \xi_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|^2 dx_2 dx_1 dt \right) d\eta_1 d\xi_1,$$

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=2}^{M_2-2} \left| F_{j_1 j_2 k}^{22} \right|^2 \le$$

$$\le \frac{a_0^2}{h_2^2} \int_0^{h_2} \int_{-h_2}^{0} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2 + \eta_2 + \xi_2, t)}{\partial x_2^2} \right|^2 dx_2 dx_1 dt \right) d\eta_2 d\xi_2$$

elde edilir. Herhangi $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ sayılarını alalım. $L_2(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonların sürekliliği ile ilgili teoreme göre (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.2) $|\eta_1 + \xi_1| \le h_1 < \delta_1,\ |\eta_2 + \xi_2| \le h_2 < \delta_2$ için

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi(x_1 + \eta_1 + \xi_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|^2 dx_2 dx_1 dt \right)^{1/2} < \varepsilon_1,$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2 + \eta_2 + \xi_2, t)}{\partial x_2^2} \right|^2 dx_2 dx_1 dt \right)^{1/2} < \varepsilon_2$$

olacak şekilde $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$ sayıları vardır. Buna göre böyle $h_1,\ h_2$ ler için

$$\begin{gathered} h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=2}^{M_1-2} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 k}^{21} \right|^2 \le \omega_{h_1}^0 \\ h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=2}^{M_2-2} \left| F_{j_1 j_2 k}^{22} \right|^2 \le \omega_{h_2}^0 \end{gathered} \tag{3.220}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. (3.203)-(3.204) eşitsizliklerinden

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \left| F_{11k}^2 \right|^2 \le 18 a_0^2 \int_0^T \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \left(\left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|^2 \right) dx_2 dx_1 dt \le \omega_h^0,$$

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \left| F_{M_1-1 M_2-1 k}^2 \right|^2 \le 18 a_0^2 \int_0^T \int_{l_1-h_1}^{l_1} \int_{l_2-h_2}^{l_2} \left(\left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|^2 \right) dx_2 dx_1 dt \le \omega_h^1,$$

olup (3.220) eşitsizliğiyle taraf tarafa toplanırsa

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 k}^2 \right|^2 \le \omega_{h_1}^0 + \omega_{h_2}^0 + \omega_h^0 + \omega_h^1 \le \tilde{\omega}_h^0 \tag{3.221}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\omega}_h^0 > 0$ dır. $h_1 \to 0$ ve $h_2 \to 0$ için $\tilde{\omega}_h^0 \to 0$ dır.

(3.206) eşitsizliğinden

$$h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=2}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 k}^{31} \right|^2 \le 12 \upsilon_0^2 h_1^2 \left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 +$$

$$+\frac{24\upsilon_0^2}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t+\sigma)}{\partial x_1}\right|^2 dx_2dx_1dt\right)d\sigma+$$

$$+\frac{24\upsilon_0^2}{h_2}\int_{-h_2}^{h_2}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi(x_1,x_2+\kappa_2,t)}{\partial x_1}\right|^2 dx_2dx_1dt\right)d\kappa_2$$

ve

$$h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=2}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^{32}\right|^2\le 12\upsilon_0^2h_2^2\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+$$

$$+\frac{24\upsilon_0^2}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t+\sigma)}{\partial x_2}\right|^2 dx_2dx_1dt\right)d\sigma+$$

$$+\frac{24\upsilon_0^2}{h_1}\int_{-h_1}^{h_1}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi(x_1+\kappa_1,x_2,t)}{\partial x_1}\right|^2 dx_2dx_1dt\right)d\kappa_1$$

elde edilir. (3.218) eşitsizliğinin elde edilmesine benzer olarak

$$h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=2}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^{31}\right|^2+h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=2}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^{32}\right|^2\le c_{65}\left(h_1^2+h_2^2\right)+\omega_{h_1}^1+\omega_{h_2}^1 \quad (3.222)$$

yazılır. Ayrıca (3.207) eşitsizliğinden

$$h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\left|F_{11k}^3\right|^2\le 20\upsilon_0^2\sum_{k=1}^{N}\int_0^T\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\left(\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\right|^2\right)dx_2dx_1dt\le c_{66}\omega_{h_1h_2}$$

yazılır. Bu eşitsizlik, (3.222) eşitsizliği ile taraf tarafa toplanırsa

$$h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^{3}\right|^2\le c_{67}\left(\tilde{\omega}_h^1+h_1^2+h_2^2\right) \quad (3.223)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. $\omega_{h_1h_2}+\omega_{h_1}^1+\omega_{h_2}^1=\tilde{\omega}_h^1>0,\ h_1\to 0$ ve $h_2\to 0$ için $\tilde{\omega}_h^1\to 0$ dir. Burada $c_{67}>0$ sayısı $h_1,\ h_2$ ve τ dan bağımsızdır.

(3.214) eşitsizliğinden

$$h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^{4}\right|^2\le\frac{12\eta_0^2\left(b_1+b_2\right)^2h_1^2}{\tau}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^2dx_1dx_2dt\right)+$$

$$+\frac{12\eta_0^2\left(b_1+b_2\right)^2 h_2^2}{\tau}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|^2 dx_1dx_2dt\right)+$$

$$+12\eta_0^2\left(b_1+b_2\right)^2\tau\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 dx_1dx_2dt\right)+ \tag{3.224}$$

$$+c_{68}\,vrai\max_{0\le t\le T}\left\|\psi\left(.,t\right)\right\|_{L_2(D)}^2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{2}\left|v_{pk}-w_{pk}\right|^2$$

yazılır. Burada $c_{58}\le\frac{h_1}{\tau}\le c_{59}$, $c_{60}\le\frac{h_2}{\tau}\le c_{61}$ uyum şartları ve

$$\|\psi\|_{L_\infty((0,T);L_2(D))}\le c_{69}\,\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{70}$$

olduğu kullanılırsa

$$h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^4\right|^2\le c_{71}\left(h_1+h_2+\tau+\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{2}\left|v_{pk}-w_{pk}\right|^2\right) \tag{3.225}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{71}>0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır.

(3.216) eşitsizliğinden

$$h_1h_2\tau\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\left|F_{j_1j_2k}^5\right|^2\le$$

$$\le 3h_1^2\mu_0^2\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^2 dx_1dx_2dt+3h_2^2\mu_0^2\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|^2 dx_1dx_2dt+ \tag{3.226}$$

$$+3\tau^2\mu_0^2\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 dx_1dx_2dt\le c_{72}\left(h_1^2+h_2^2+\tau^2\right)\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}^2\le$$

$$\le c_{73}\left(h_1^2+h_2^2+\tau^2\right)$$

elde edilir. Burada $c_{73}>0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır.

Böylece (3.219), (3.221), (3.223), (3.225) ve (3.226) eşitsizlikleri (3.193) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| Z_{j_1 j_2 m} \right|^2 \le c_{63} \left(h_1 h_2 \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| F_{j_1 j_2 k} \right|^2 \right) \le$$

$$\le c_{74} \left(h_1 + h_2 + \tau + h_1^2 + h_2^2 + \tau^2 + \omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_h^0 + \tilde{\omega}_h^1 + \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=1}^{2} \left| v_{pk} - w_{pk} \right|^2 \right), \qquad (3.227)$$

$$m \in \{1, 2, ..., N\}$$

elde edilir. Burada $c_{74} > 0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır. Bu eşitsizlikte

$$\beta_{h_1 h_2 \tau} = h_1 + h_2 + \tau + h_1^2 + h_2^2 + \tau^2 + \omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_h^0 + \tilde{\omega}_h^1$$

ve

$$\left\| Q_n(v) - [v]_n \right\| = \left(\tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=1}^{2} \left| v_{pk} - w_{pk} \right|^2 \right)^{1/2}$$

olarak tanımlanırsa

$$h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| Z_{j_1 j_2 m} \right|^2 \le c_{74} \left(\beta_{h_1 h_2 \tau} + \left\| Q_n(v) - [v]_n \right\|^2 \right), \; m \in \{1, 2, ..., N\} \qquad (3.228)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{74} = c_{62}$ kabul edilirse teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Teorem 3.8 ispatlandı.

3.2.4. Fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı

Bu kısımda fark şemasının hatası için olan kestirimi kullanarak fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle $J(v)$ ve $I_n([v]_n)$ fonksiyonellerinin farkını göz önüne alıp bu farkı kestirelim. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.9: Farz edelim ki Teorem 3.8'in şartları sağlansın. Bu takdirde $\forall v \in V$ ve $\forall [v]_n \in V_n$ için

$$\left| J(v) - I_n([v]_n) \right| \le c_{75} \left(\sqrt{\beta_{h_1 h_2 \tau}} + \left\| Q_n(v) - [v]_n \right\| \right) \qquad (3.229)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{75} > 0$ sayısı $h_1,\ h_2$ ve τ dan bağımsızdır.

İspat: $J(v) - I_n([v]_n)$ farkını göz önüne alalım. (3.152) ve (3.157) formülleri kullanılırsa

$$J(v) - I_n([v]_n) =$$

$$= \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \left|\psi(x_1,x_2,T) - y(x_1,x_2)\right|^2 dx_2 dx_1 - h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left|\phi_{j_1 j_2 N} - y_{j_1 j_2}\right|^2 =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \Big[\Big(\left|\psi(x_1,x_2,T) - y(x_1,x_2)\right| + \left|\phi_{j_1 j_2 N} - y_{j_1 j_2}\right|\Big)\times$$

$$\times\Big(\left|\psi(x_1,x_2,T) - y(x_1,x_2)\right| - \left|\phi_{j_1 j_2 N} - y_{j_1 j_2}\right|\Big)\Big] dx_2 dx_1$$

eşitliği yazılabilir. Buradan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\left|J(v) - I_n([v]_n)\right| \le$$

$$\le \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \Big[\Big(\left|\psi(x_1,x_2,T) - y(x_1,x_2)\right| + \left|\phi_{j_1 j_2 N} - y_{j_1 j_2}\right|\Big)\times$$

$$\times\Big\|\psi(x_1,x_2,T) - y(x_1,x_2)\big| - \left|\phi_{j_1 j_2 N} - y_{j_1 j_2}\right|\Big|\Big] dx_2 dx_1 \le$$

$$\le \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \Big[\Big(\left|\psi(x_1,x_2,T) - y(x_1,x_2)\right| + \left|\phi_{j_1 j_2 N} - y_{j_1 j_2}\right|\Big)\times$$

$$\times\left|\psi(x_1,x_2,T) - y(x_1,x_2) - \phi_{j_1 j_2 N} + y_{j_1 j_2}\right|\Big] dx_2 dx_1 \le$$

$$\le \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \Big[\Big(\left|\psi(x_1,x_2,T)\right| + \left|y(x_1,x_2)\right| + \left|\phi_{j_1 j_2 N}\right| + \left|y_{j_1 j_2}\right|\Big)\times$$

$$\times\Big(\left|\psi(x_1,x_2,T) - \phi_{j_1 j_2 N}\right| + \left|y(x_1,x_2) - y_{j_1 j_2}\right|\Big)\Big] dx_2 dx_1.$$

Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği, (3.8) ve (3.171) kestirimleri kullanılırsa sonuncu eşitsizlikten

$$\left| J\left(v\right) - I_n\left(\left[v\right]_n\right) \right| \le$$

$$\le c_{78} \left[\left(\sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left| \psi\left(x_1, x_2, T\right) - \phi_{j_1 j_2 N} \right|^2 dx_2 dx_1 \right)^{1/2} + \right. \tag{3.230}$$

$$\left. + \left(\sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left| y\left(x_1, x_2\right) - y_{j_1 j_2} \right|^2 dx_2 dx_1 \right)^{1/2} \right] = c_{76}\left[J_1 + J_2\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{76} > 0$ sayısı $h_1,\ h_2$ ve τ dan bağımsızdır.

J_1 için olan formül kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J_1^2 = \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left| \psi\left(x_1, x_2, T\right) - \phi_{j_1 j_2 N} \right|^2 dx_2 dx_1 =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left| \psi\left(x_1, x_2, T\right) - \psi_{j_1 j_2 N} + \psi_{j_1 j_2 N} - \phi_{j_1 j_2 N} \right|^2 dx_2 dx_1 \le$$

$$\le 2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left| \psi\left(x_1, x_2, T\right) - \psi_{j_1 j_2 N} \right|^2 dx_2 dx_1 +$$

$$+ 2h_1 h_2 \sum_{j_1=1}^{M_1-1} \sum_{j_2=1}^{M_2-1} \left| \phi_{j_1 j_2 N} - \psi_{j_1 j_2 N} \right|^2 = J_{11} + J_{12}. \tag{3.231}$$

J_{11} için olan formül ve (3.180) formülü kullanılırsa

$$\psi\left(x_1, x_2, T\right) - \psi_{j_1 j_2 N} =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left(\psi\left(x_1, x_2, T\right) - \psi\left(\xi_1, \xi_2, \theta\right) \right) d\xi_2 d\xi_1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 \tau} \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} \int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2} \int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2} \left[\int\limits_{\xi_1}^{x_1} \frac{\partial \psi\left(\eta_1, \xi_2, \theta\right)}{\partial \eta_1} d\eta_1 + \int\limits_{\xi_2}^{x_2} \frac{\partial \psi\left(x_1, \eta_2, \theta\right)}{\partial \eta_2} d\eta_2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\theta}^{T} \frac{\partial \psi\left(x_1, x_2, \sigma\right)}{\partial \sigma} d\sigma \right] d\xi_2 d\xi_1 d\theta$$

eşitliği, buradan da

$$\left|\psi\left(x_1,x_2,T\right)-\psi_{j_1 j_2 N}\right|^2 \le \frac{3h_1}{h_2\tau}\int\limits_{t_{N-1}}^{t_N}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(\eta_1,\xi_2,\theta\right)}{\partial\eta_1}\right|^2 d\xi_2 d\eta_1 d\theta +$$

$$+\frac{3h_2}{\tau}\int\limits_{t_{N-1}}^{t_N}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,\eta_2,\theta\right)}{\partial\eta_2}\right|^2 d\eta_2 d\theta + 3\tau\int\limits_{t_{N-1}}^{t_N}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,\sigma\right)}{\partial\sigma}\right|^2 d\sigma$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade J_{11} için olan formülde dikkate alınırsa

$$J_{11} \le \frac{6h_1^2}{\tau}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int\limits_{t_{N-1}}^{t_N}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_1}\right|^2 dx_2 dx_1 dt +$$

$$+\frac{6h_2^2}{\tau}\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int\limits_{t_{N-1}}^{t_N}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial x_2}\right|^2 dx_2 dx_1 dt +$$

$$+6\tau\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int\limits_{t_{N-1}}^{t_N}\int\limits_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int\limits_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial\psi\left(x_1,x_2,t\right)}{\partial t}\right|^2 dx_2 dx_1 dt$$

eşitsizliği elde edilir. Burada uyum şartları ve (3.8) kestirimi kullanılırsa

$$J_{11} \le c_{77}\left(h_1+h_2+\tau\right) \tag{3.232}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{77}>0$ sayısı $h_1,\ h_2$ ve τ dan bağımsızdır.

$Z_{j_1 j_2 N} = \phi_{j_1 j_2 N} - \psi_{j_1 j_2 N}$ olduğundan (3.186) kestirimine göre

$$J_{12} \le c_{78}\left(\beta_{\tau h_1 h_2} + \left\|Q_n\left(v\right)-\left[v\right]_n\right\|^2\right) \tag{3.233}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{78}>0$ sayısı $h_1,\ h_2$ ve τ dan bağımsızdır.

Şimdi J_2 terimini kestirelim. $y_{j_1 j_2}$ için olan formül göz önüne alınırsa

$$J_2^2 = \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|y(x_1,x_2)-y_{j_1j_2}\right|^2 dx_2dx_1 =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{1}{h_1h_2}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left(y(x_1,x_2)-y(\xi_1,\xi_2)\right)d\xi_2d\xi_1\right|^2 \times$$

$$\times dx_2dx_1 = \sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{1}{h_1h_2}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left(\int_{\xi_1}^{x_1}\frac{\partial y(\eta_1,\xi_2)}{\partial\eta_1}d\eta_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\xi_2}^{x_2}\frac{\partial y(x_1,\eta_2)}{\partial\eta_2}d\eta_2\right)d\xi_2d\xi_1\right|^2 dx_2dx_1$$

olup Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$J_2^2 \le 2h_1^2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|^2 dx_2dx_1 +$$

$$+2h_2^2\sum_{j_1=1}^{M_1-1}\sum_{j_2=1}^{M_2-1}\int_{x_{1j_1}-h_1/2}^{x_{1j_1}+h_1/2}\int_{x_{2j_2}-h_2/2}^{x_{2j_2}+h_2/2}\left|\frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|^2 dx_2dx_1$$

elde edilir. Son ifadeden

$$J_2^2 \le c_{79}\left(h_1^2+h_2^2\right) \tag{3.234}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{79} > 0$ sayısı h_1 ve h_2 den bağımsızdır.

Böylece

$$\left|J(v)-I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{76}\left[J_1+J_2\right] \le c_{80}\left(\sqrt{\beta_{\tau h_1h_2}} + \left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|\right) \tag{3.235}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{80} > 0$ sayısı h_1, h_2 ve τ dan bağımsızdır. Burada $c_{80} = c_{75}$ kabul edilirse teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Teorem 3.9 ispatlandı.

Şimdi fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını gösterelim. Ancak bunu göstermeden önce ispatta kullanacağımız iki yardımcı lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.2: Teorem 3.9'un şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bunun yanı sıra $Q_n(v)$ operatörü (3.181) formülü ile tanımlansın. Bu takdirde $\forall v \in V$ için $Q_n(v) \in V_n$ dir ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left| J(v) - I_n\left(Q_n(v)\right)\right| \le c_{75}\sqrt{\beta_{\tau h_1 h_2}}. \tag{3.236}$$

İspat: Farz edelim ki $v \in V$ herhangi bir mümkün kontroldür. (3.181) formülünden

$$Q_n(v) = \left(w_{p1}, w_{p2}, ..., w_{pN}\right),\ p = 1,2,$$

$$w_{pk} = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_p(t)\,dt,\ p = 1,2,\ k = \overline{1,N}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$\left(\tau\sum_{k=1}^{N}\left|w_{pk}\right|^2\right)^{1/2} = \left(\tau\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} v_p(t)\,dt\right|^2\right)^{1/2} \le \left(\tau\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left|v_p(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left|v_p(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} = \left\|v_p\right\|_{L_2(0,T)} \le b_p,\ p = 1,2$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece V_n kümesinin tanımına göre $Q_n(v) \in V_n$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.9'da $[v]_n \in V_n$ yerine $Q_n(v) \in V_n$ alınırsa

$$\left|J(v) - I_n\left(Q_n(v)\right)\right| \le c_{75}\left(\sqrt{\beta_{h_1 h_2 \tau}} + \left\|Q_n(v) - Q_n(v)\right\|\right) = c_{77}\sqrt{\beta_{h_1 h_2 \tau}}$$

elde edilir. Lemma 3.2 ispatlandı.

Lemma 3.3: Farz edelim ki Teorem 3.9'un şartları sağlansın ve P_n operatörü

$$\begin{gathered} P_n\left([v]_n\right) = \tilde{v}(t) = \left(\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)\right),\ \tilde{v}_p(t) = v_{pk}, \\ t_{k-1} \le t \le t_k,\ k = \overline{1,N},\ p = 1,2 \end{gathered} \tag{3.237}$$

formülü ile tanımlansın. Bu takdirde $\forall [v]_n \in V_n$ iken $P_n\left([v]_n\right) \in V$ olup

$$\left|J\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{75}\sqrt{\beta_{h_1 h_2 \tau}} \tag{3.238}$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: Farz edelim ki $[v]_n \in V_n$ herhangi olası diskrit kontrol olsun. Önce $P_n\left([v]_n\right) \in V$ yani $P_n : V_n \to V$ olduğunu gösterelim. Bu durumda

$$\left\|\tilde{v}_p\right\|_{L_2(0,T)} = \left(\int_0^T \left|\tilde{v}_p(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|\tilde{v}_p(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|v_{pk}\right|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\tau \sum_{k=1}^{N} \left|v_{pk}\right|^2\right)^{1/2} \le b_p,\ p = 1,2$$

elde edilir. Böylece $\tilde{v}(t) \in V$ yani $P_n\left([v]_n\right) \in V$ olduğu elde edilir. Bu takdirde Teorem 3.9'da $\forall v \in V$ yerine $\tilde{v}(t) = P_n\left([v]_n\right) \in V$ alınırsa

$$\left|J\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{75}\left(\sqrt{\beta_{\tau h_1 h_2}} + \left\|Q_n\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - [v]_n\right\|\right) \tag{3.239}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $\left\|Q_n\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - [v]_n\right\|$ normunu değerlendirelim:

$$\left\|Q_n\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - [v]_n\right\|^2 = \tau \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=1}^{2} \left|\tilde{v}_p^k - v_{pk}\right|^2 = \tau \sum_{k=1}^{N} \left|\tilde{v}_1^k - v_{1k}\right|^2 + \tau \sum_{k=1}^{N} \left|\tilde{v}_2^k - v_{2k}\right|^2 =$$

$$= \tau \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \tilde{v}_1(t)\, dt - v_{1k}\right|^2 + \tau \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \tilde{v}_2(t)\, dt - v_{2k}\right|^2 =$$

$$= \tau \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_{1k}\, dt - v_{1k}\right|^2 + \tau \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} v_{2k}\, dt - v_{2k}\right|^2 =$$

$$= \tau \sum_{k=1}^{N} \left|v_{1k} - v_{1k}\right|^2 + \tau \sum_{k=1}^{N} \left|v_{2k} - v_{2k}\right|^2 = 0.$$

Bu son ifade (3.239) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|J\left(P_n\left([v]_n\right)\right) - I_n\left([v]_n\right)\right| \le c_{75}\sqrt{\beta_{h_1 h_2 \tau}} \tag{3.240}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.3 ispatlandı.

Şimdi fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını gösteren teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.10: Lemma 3.2 ve Lemma 3.3'ün şartları sağlansın. Bunun yanı sıra $v^* \in V$ ve $[v]_n^* \in V_n$ sırasıyla (3.152)-(3.155) ve (3.157)-(3.161) problemlerinin çözümleri olsun. Yani

$$J\left(v^*\right) = J_* = \inf_{v \in V} J\left(v\right) \text{ ve } I_{n*} = I_n\left(\left[v\right]_n^*\right) = \inf_{[v]_n \in V_n} I_n\left(\left[v\right]_n\right)$$

olsun. Bu takdirde (3.157)-(3.161) problemler dizisi (3.152)-(3.155) optimal kontrol probleminin yaklaşımıdır. Yani

$$\lim_{n \to \infty} I_{n*} = J_* \qquad (3.241)$$

şartı sağlanır ve fonksiyonele göre yakınsama için

$$\left|I_{n*} - J_*\right| \le c_{75}\sqrt{\beta_{h_1 h_2 \tau}} \qquad (3.242)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: Teoremi ispatlamak için Vasilyev (1981) çalışmasındaki yöntem kullanılacaktır. $v^* \in V$ (3.152)-(3.155) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. Lemma 3.2'ye göre $Q_n\left(v^*\right) \in V_n$ ve $\left|I_n\left(Q_n\left(v^*\right)\right) - J\left(v^*\right)\right| \le c_{75}\sqrt{\beta_{\tau h_1 h_2}}$, $n = 1, 2, ...$ dır. Bu eşitsizlikten

$$I_{n*} \le I_n\left(Q_n\left(v^*\right)\right) \le J\left(v^*\right) + c_{75}\sqrt{\beta_{\tau h_1 h_2}} = J_* + c_{75}\sqrt{\beta_{\tau h_1 h_2}}, \ n = 1, 2, ...$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$I_{n*} - J_* \le c_{75}\sqrt{\beta_{\tau h_1 h_2}}, \ n = 1, 2, ... \qquad (3.243)$$

yazılır.

$[v]_n^* \in V_n$ kontrolü (3.157)-(3.161) probleminin herhangi bir çözümü olsun. Lemma 3.3'e göre $P_n\left(\left[v\right]_n^*\right) \in V$ olur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| J\left(P_n\left([v]_n^*\right)\right) - I_n\left([v]_n^*\right) \right| \le c_{75}\sqrt{\beta_{h_1h_2\tau}},\ n = 1,2,...$$

Buradan

$$J_* \le J\left(P_n\left([v]_n^*\right)\right) \le I_n\left([v]_n^*\right) + c_{75}\sqrt{\beta_{h_1h_2\tau}} = I_{n*} + c_{75}\sqrt{\beta_{h_1h_2\tau}},\ n = 1,2,...$$

elde edilir. Son eşitsizlikten

$$I_{n*} - J_* \ge -c_{75}\sqrt{\beta_{h_1h_2\tau}},\ n = 1,2,... \tag{3.244}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. Böylece (3.243) ve (3.244) eşitsizliklerinden

$$\left| I_{n*} - J_* \right| \le c_{75}\sqrt{\beta_{h_1h_2\tau}},\ n = 1,2,...$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\tau = \tau_n,\ h_1 = h_{1n},\ h_2 = h_{2n}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty}h_{1n} = 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}h_{2n} = 0$ olduğunu dikkate alırsak $\beta_{h_1h_2\tau}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_{h_{1n}h_{2n}\tau_n} = 0$ elde edilir. Bunu (3.242) kestiriminde dikkate alarak $n \to \infty$ için limite geçersek $\lim\limits_{n\to\infty} I_{n*} = J_*$ olduğu elde edilir. Teorem 3.10 ispatlandı.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada iki boyutlu lineer Schrödinger denklemiyle ifade edilen 1. tip başlangıç-sınır değer problemi için optimal kontrol problemi ve nümerik çözümü ele alınmıştır.

Yaptığımız çalışmaların yer aldığı 3. bölümde ilk olarak, 3.1. bölümde, kontrolün ölçülebilir, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda iki boyutlu lineer Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle, başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış, daha sonra optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olması için gerekli olan sorular incelenmiş ve fonksiyonelin diferensiyellenebilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için bir de gerek şart elde edilmiştir.

Tezin 3.2. bölümünde, 3.1. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin nümerik çözümü incelenmiştir. Bu amaçla, 3.1. bölümde incelenen optimal kontrol probleminin özel bir haline sonlu farklar yöntemi uygulanmıştır. İlk olarak, ele alınan optimal kontrol problemi diskritleştirilmiş ve elde edilen fark şeması için kararlılık kestirimi ispatlanmıştır. Daha sonra, fark şemasının hatası değerlendirilmiş ve fonksiyonele göre yakınsama ispatlanmıştır.

5. SONUÇ

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri daha önce A. G. Butkovskiy, Yu. İ. Samoilenko, A. D. İskenderov, F. P. Vasilyev, M. A. Vorontsov, V. I. Shmalgauzen, G. Ya. Yagubov, M. M. Potapov, A. V. Razgulin, Dın Nıo Hao, N. Silla, B. Yıldız, M. A. Musayeva, N. M. Mahmudov, M. Subaşı, H. Yetişkin, L. Baudouin, J. Solomon, O. Kılıçoğlu, N. Yıldırım, N. S. İbrahimov ve diğer bilim adamlarının çalışmalarında incelenmiştir. Ayrıca Schrödinger denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyelin ölçülebilir, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda, optimal kontrol problemleri ilk olarak İskenderov (2001), Cances *et al.* (2000), Baundoin *et al.* (2005) çalışmalarında, Yetişkin (2005) ve Yıldırım (2009)'ın doktora tezlerinde, Kılıçoğlu vd. (2009), Subaşı vd. (2010) çalışmalarında incelenmiştir. Ancak, İskenderov (2001)'un çalışmasında lineer Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemi, Cances *et al.* (2000) ve Baundoin *et al.* (2005) çalışmalarında durumu Schrödinger denklemi için Cauchy problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri, Yetişkin (2005)' in doktora tezinde kompleks potansiyelli lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ve Yıldırım (2009)'ın doktora tezinde lineer olmayan Schrödinger denkleminin sınırsız katsayısıyla optimal kontrol problemleri incelendiğinden, bu tezde incelenen optimal kontrol problemleri konulma açısından daha önce incelenen optimal kontrol problemlerinden farklıdır. Çünkü bu çalışmada, durumu lineer olan ve gradient tipli terim içeren Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. Bu nedenle, bu çalışmadan elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmaların sonuçlarından farklı olup, önceki çalışmalara göre daha günceldir ve hem teorik hem de pratik bir öneme sahiptir.

KAYNAKLAR

Adams, R. A., 1978. Sobolev spaces. Academic Press Inc., 268 s, California.

Ahmedov, G. T., Ahiyev, S. S., 1972. Optimal kontrol teorisinin bazı problemleri için gerekli optimallık şartları. Azerbaycan Bilimler Akademisi Bildirileri, 28 (25), 12-15.

Baudouin, L., Kavian, O., Puel, J. P., 2005. Regularity for a Schrödinger equation with singuler potentials and application to bilinear optimal control. Journal Differential Equations, 216, 188-222.

Baudouin, L., Solomon, J., 2008. Constructive solution a bilinear optimal control problem for a Schrödinger equation. Systems and Control Letters, 57, 453-464.

Bidaut, M. G.,1973. These Universite de Paris. –VI.

Butkovskiy, A.G., Samoilenko Yu.İ., 1984. Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. Nauka, 256 s, Moscow.

Cances, E., Le Bris, G., Pilot, M., 2000. Controle optimal bilineare d'una equation de Schrödinger. C. R. Acad. Sci., t.330, serie 1,567-571/ Controle optimal.

Cavadov, A. V., İskenderov, A. D., 1965. Gartinhouse tipli potansiyele sahip çekirdeğin kararlı durumunun araştırılması. Azerbaycan Devlet Üniversitesinin bilim haberleri, Fizik ve Matematik serisi, 2, 77-84.

Dın Nıo Hao, 1986. Kuantum objektlerinin optimal kontrolü. Nauka, Moscow, N. 2, 14-20.

Egorov, Yu. V., 1963. Optimal kontrolün bazı problemleri. Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik Dergisi, 3(5), 887-904.

Goebel, M., 1979. On existence of optimal control. Math. Nachr., Vol 93, 67-73.

Hsieh, P. F., Sibuya, Y., 1999. Basic theory of ordinary differential equations. Springer Verlag, 468 s, New york.

Hunter, J. K., Nachtergaele, B., 2000. Applied analysis. 438 s, California.

İbrahimov, N. S., 2011. Kuazioptiğin bir boyutlu lineer olmayan durgun denklemi için identificasyon probleminde gerek şart. Kontrolün ve İnformatiğin Problemleri, 4, 51-62.

İskenderov, A. D., Tagiev, R. G., 1983. Parabolik denklemlerin katsayılarında olan kontrolörle optimizasyon problemi. Diferansiyel Denklemler, 19 (8), 1324-1334.

İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., 1989. A variational method for solving the inverse problem of determining the quantum-mechanical potential. Soviet Math. Dok1., 38 (3), 637-641.

İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., 1989. Lineer olmayan kuantum mekanik sistemlerin optimal kontrolü.Otomatik ve Telemekanik, 12, 27-38.

İskenderov, A.D., 2001. Durgun olamayan Schrödinger denkleminde potansiyelin bulunması. Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri Dergisi, Baku, 6-36.

İskenderov, A. D., Tagiev, R. G., Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleştirme metodları. Çaşıoğlu, 400 s, Bakü.

Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1975. Introductory real analysis. Dover Pub., 403 s, New york.

Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1989. Fonksiyonlar teorisinin ve fonksiyonel analizin elemanları. Nauka, 624 s, Moscow.

Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N., 1967. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, 736 s, Moscow.

Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N., 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Math. Soc., 646 s, ABD.

Ladyzenskaja, O. A., Ural'ceva, N. N., 1973. Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type. Nauka, Moscow.

Lions, J.L., Magenes, E. 1972. Non homegeneous boundary value problems and applications. Springer-Verlag, vol. 2, 307 s, Berlin.

Lions, J.L., Magenes, E. 1972. Non homegeneous boundary value problems and applications. Springer-Verlag, vol. 1, Berlin.

Lions, J.L., 1971. Optimal control for systems governed by partial differential equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 400 s, New York.

Lurye, K. A., 1975. Matematiksel Fiziğin Problemlerinde Optimal Kontrol. Nauka, 478 s, Moskova.

Mahmudov, N. M., 1997. Lions fonksiyonelli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin farklar metoduyla çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82.

Mikhailov, V. P., 1983. Kısmi türevli diferansiyel denklemler. Nauka,424 s, Moskova.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel analiz. 470 s, Kütahya.

Plotnikov, V. İ., 1976. Optimal kontrol teorisinde varyasyon ve eşlenik problem hakkında. Fonksiyonel Analiz ve onun uygulamaları, 10 (4), 95-96.

Pontryagin, L. S., 1976. Adi diferansiyel denklemler. Nauka, 332 s, Moskova.

Pontryagin, L. S., Boltyansky, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mişenko, E. F., 1969. Optimal süreçlerin matematik teorisi. Nauka, 384 s, Moskova.

Potapov, M. M., Razgulin, A. V. ve Şameeva, T. Y., 1987. Schrödinger tipli optimal kontrol probleminin yaklaşımı ve regülarizasyonu. Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik", 15(1), 8-13.

Pozzi, G. A., 1968, 1969. Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazione de evoluzine del tipo di Schrödinger lineari e nonlineary. I,II. Ann. Mat. Pura appl. I. Vol 78, II. Vol81.

Razgulin, A. V., 1998. Lineer olmayan Schrödinger denklemi için kontrol problemlerinin yaklaşımları. Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik", 15(2), 28-33.

Reddy, B. D., 1998. Introductory functional analysis. Springer Verlag, 471 s, New york.

Samarskii, A. A., Lazarov, R. D., Makarov, V. L., 1987. Genelleşmiş çözümlü diferansiyel denklemler için fark şemaları. Vısşaya Şkola, 296 s, Moskova.

Silla, N., 1991. Schrödinger tipli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin nümerik çözümü. Doktora Tezi, Bakü devlet üniversitesi, 165 s, Bakü.

Sobolev, S. L., 1988. Matematiksel fizikte fonksiyonel analizin bazı uygulamaları. Nauka, 334 s, Moskova.

Sokolowski, J., 1978. Remarks on existence of optimization problems for partial differential equations of parabolic type. Control and Cybernetics, 7 (2), 47-61.

Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya., 1979. İll-posed problemlerin çözüm metodları. Nauka, 288 s, Moskova.

Vasilyev, F. P., 1980. Ekstremal problemlerin nümerik çözüm metodları. Nauka, 388 s, Moskova.

Vasilyev, F. P., 1981. Ekstremal problemlerin çözüm metodları. Nauka, 400 s, Moskova.

Vorontsov, M. A., Shmalgauzen, V. I., 1985. Adaptiv optiğin prensipleri. Nauka, 336 s, Moskova.

Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., 1997. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için İdentifikasyon Problemi Hakkında. Diferansiyel Denklemler, 33 (12), 1691-1698.

Yagubov, G.Ya., 1990. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Fark Yöntemi. Matematik Modelleme ve Otomatik Sistemler Dergisi, 53-60, Baku.

Yagubov, G.Ya., 1994. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol, Kiev, 318 s.

Yagubov, G.Ya., 2001. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Bölgenin Sınırı Üzerinden İntegralle verilen Kritere Sahip Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Fark Yöntemi. Matematik Modellemenin Temelleri ve Optimal Kontrol Dergisi, 37-48, Baku.

Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., 1995. Finite-difference method solution of variation formulation of an inverse problem for nonlinear Schrodinger equation. Izv. AN Azerb.-Ser. Physictex.matem.nauk, vol.16, No 1-2,46-51.

Yakupov, S. Ya., 1970. Evolusyon Denklemler için Cauchy Probleminin İyi Konulması ve Onun Uygulamaları. Moskova Matematik Derneği Eserleri, 4(3), 86-94.

Yegorov, A. İ., 1978. Isı ve difüzyon süreçlerinin optimal kontrolü. Nauka, 463 s, Moskova.

Yetişkin, H., 2005. Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Yetişkin, H., Subaşı, M., 2010. On the optimal control problem for Schrödinger equation with complex potential. Applied Mathematics and Computation, 216, 1896-1902.

Yıldırım, N., 2009. Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Yıldız, B., Kılıçoğlu, O., Yagubov, G., 2009. Optimal control problem for non stationary Schrödinger equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 25, 1195-1203.

Yıldız, B., Yagubov, G.Ya., 1997. On an optimal control problem. Journal of computational and applied mathematics, vol 88 , 275-287.

Yıldız, B., Subaşı, M., 2001. On the optimal control problem for linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 121, 373-381.

Yosida, K., 1980. Functional Analysis. Springer-Verlag, 624 s, New York.

Zeidler, E., 1995. Applied functional analysis. Springer Verlag, 404 s, New york.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Sivas'ın Şarkışla ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Mersin'de tamamladı. 1999 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2004 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde direkt doktora eğitimine başladı.