K-FİBONACCİ DİZİSİ, POLİNOMLARI VE BUNLARIN TÜREVLERİ

Tuba ÇAKMAK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Erdal KARADUMAN
2012

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-FİBONACCİ DİZİSİ, POLİNOMLARI VE BUNLARIN TÜREVLERİ

Tuba ÇAKMAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2012

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

K- FİBONACCİ DİZİSİ, POLİNOMLARI VE BUNLARIN TÜREVLERİ

Prof. Dr. Erdal KARADUMAN danışmanlığında, Tuba ÇAKMAK tarafından hazırlanan bu çalışma 13 / 08 / 2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Erdal KARADUMAN *İmza* :

Üye : Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

k-FİBONACCİ DİZİSİ, POLİNOMLARI VE BUNLARIN TÜREVLERİ

Tuba ÇAKMAK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

Bu çalışmada ilk olarak Fibonacci dizisinin en son genelleştirmesi olan k-Fibonacci dizileri tanımlanmıştır. Daha sonra bu diziler yardımı ile elde edilen Fibonacci polinomları ve bu polinomların türevleri ele alınmıştır. Son olarak Fibonacci tipi polinomların genelleştirmelerinden biri olan iki değişkenli Fibonacci polinomları incelenmiş ve iki değişkenli Fibonacci polinomlarının türevleri ile bu polinomlar arasında bazı eşitlikler elde edilmiştir.

2012, 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: k-Fibonacci dizisi, Fibonacci polinomları, Fibonacci polinomlarının türevleri, İki değişkenli Fibonacci polinomları, İki değişkenli Fibonacci polinomlarının türevleri.

ABSTRACT

Master Thesis

k-FIBONACCI SEQUENCE, POLYNOMIALS AND THEIR DERIVATIVES

Tuba ÇAKMAK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

In this study, firstly the k-Fibonacci sequence defined which is the last generalization of Fibonacci sequence. Then Fibonacci polynomials which are obtained from k-Fibonacci sequence and their derivatives searched. Finally, bivariate Fibonacci polynomials which are generalization one of the Fibonacci-type polynomials investigated and some equatios obtained between bivariate Fibonacci polynomials and their derivatives.

2012, 74 pages

Keywords: k-Fibonacci sequence, Fibonacci polynomials, Derivatives of Fibonacci polynomials, Bivariate Fibonacci polynomials, Derivatives of bivariate Fibonacci polynomials.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Erdal KARADUMAN'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN'a, Sayın Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĞLU'na, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya ve Sayın Arş. Gör. Sait TAŞ'a ve Matematik Bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına;

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Tuba ÇAKMAK
Temmuz 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$F_n n.$	Fibonacci Sayısı
$F_{k,n} k$-	Fibonacci Sayıları
$F_{k,n} \; {}_{n\in\mathbb{N}}$	k-Fibonacci Dizisi
$F_n(x)$	$n.$ Fibonacci Polinomu
$F_n^{(r)}(x)$	Fibonacci Polinomlarının $r.$ Mertebeden Türevi
$F_n(x,y)$	İki Değişkenli Fibonacci Polinomları
$G_n(x,y)$	Genelleştirilmiş İki Değişkenli Fibonacci Polinomları
$Q^n(x)$	Fibonacci Polinomu Matrisi
	Tam Değer

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Pisa'lı Leonardo Fibonacci Rönesans öncesi Avrupası'nın en önde gelen matematikçisidir. Fibonacci için, "Matematiği Araplar'dan alıp, Avrupa'ya aktaran kişi" denilebilir.

Fibonacci'nin yaşamı hakkında matematik yazıları dışında pek az şey bilinmektedir. İlk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 dolayında doğmuş olabileceği sanılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olması olasılığı vardır. Fibonacci henüz çocuk yaştayken, Pisa'lı bir tüccar olan babası Guglielmo, Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanır. Babası burada oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Fibonacci daha sonra Liber Abaci isimli kitabında hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatacaktır.

Fibonacci'nin Liber Abaci adlı kitabının yayınlandığı yıllarda, Hindu-Arap sayıları, Avrupa'da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın eserlerinin çevirilerini okuyabilmiş bir kaç "aydın" haricinde bilinmiyordu. Fibonacci, kitabında bu rakamlar anlatmaya şöyle başlar:

Dokuz Hint Rakamı 9 8 7 6 5 4 3 2 1 dir. Bu dokuz rakama "0" işaretinin de eklenmesiyle, herhangi bir sayı yazılabilir.

Liber Abaci, 13.yy. Avrupa'sında büyük ilgi görür, çok sayıda kopya edilir ve kilisenin yasaklamasına karşın Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılır. Kitap Kutsal Roma İmparatoru II. Frederick'in dikkatini çeker. Frederick bilime düşkün ve bilim adamlarını koruyan bir imparatordur. Bu nedenle kendisine Stupor Mudi (Dünya Harikası) denilmektedir. 1220 yılında Fibonacci huzura çağrılır ve Frederick'in bilim adamlarından biri tarafından sınava tabi tutulur. Sonunda Fibonacci göze girer. Yıllarca hem imparatorla, hem de imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225 yılında yazdığı

Liber Quadratornum’u (Kare Sayıların Kitabı) imparatora ithaf eder. Diyofantus Denklemleri’ne ayrılan bu kitap Fibonacci’nin başyapıtıdır. Her ne kadar Liber Abaci’ye göre çok daha dar bir çevrenin ilgisini çekse de kitap sayılar kuramına büyük katkı getirmiştir.

Leonardo Fibonacci, Arap Matematik'ini kullanışlı Hindu-Arap sayılarını Batı'ya tanıtmakla çok büyük bir katkıda bulundu. Ancak ilginçtir, çağımız matematikçileri Fibonacci’nin adını daha çok, Liber Abaci'de yer alan bir problemde ortaya çıkan bir sayı dizisi nedeniyle bilirler.

Liber Abaci'de yer alan problemin metni aşağı yukarı şöyledir:

-Adamın biri, dört bir yanı duvarla çevrili yere bir çift tavşan koymuş. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan doğurduğu, her yeni çiftin de ergenleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği var sayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?-

Fibonacci bu problemi, kitabına biyoloji biliminde bir uygulama olsun diye ya da nüfus patlaması sorununa bir çözüm getirsin diye koymamış; probleme, bir toplama alıştırması olarak bakmıştır. Buradan,

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144, \ldots$$

sayı dizisini elde etmiştir. Bu sayı dizisinin her bir elemanına *“Fibonacci sayısı”* denir. Bu sayı dizisi, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç değerleri ile

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,, n \geq 1$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Fibonacci sayıları;

Çizelge 1.1. Fibonacci Sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

şeklinde verilebilir. Ayrıca Fibonacci sayıları geriye doğru $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$ olmak üzere

Çizelge 1.2. Negatif İndisli Fibonacci Sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	$\cdots$

şeklinde tanımlanır (Vajda 1989).

Fibonacci sayıları ailesi üç ayrı nedenle, yüzyıllardan bu yana yoğun bir ilgi odağı olmuştur.

- Birincisi; dizinin daha küçük elemalarının doğada, beklenmedik yerlerde tekrar tekrar karşımıza çıkmasıdır; bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde vb.
- İkincisi; $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = Altın\ oran$ sayısının çok önemli bir sayı olmasıdır. Bu sayı, oyun kartlarının biçiminden Mısır'daki piramitlere kadar birçok şeyin matematiksel temelini oluşturmaktadır.
- Üçüncüsü; daha çok sayıların kendilerinin, sayılar teorisinde beklenmedik biçimde farklı birçok kullanımı olan ilginç özellikleriyle ilgilidir.

Önce doğada küçük Fibonacci sayılarıyla ne şekilde karşılaşıldığına bir bakalım. İlk olarak bir bitkinin sapındaki yaprakların, bir ağacın dallarının düzeninde hemen her zaman Fibonacci sayılarını bulursunuz. Eğer yapraklardan biri başlangıç noktası olarak alınmışsa ve bundan başlayarak, aşağıya veya yukarıya doğru, başlangıç noktasının tam olarak altında veya üstünde olan bir yaprak bulunana kadar yapraklar sayılırsa (sap çevresinde birden fazla dönmeye gerek olabilir) bulunan yaprak sayısı, farklı bitkiler, fidanlar ve ağaçlar için farklıdır, ancak her zaman bir Fibonacci sayısıdır. Dahası yaprakları sayarken süreç kendini tamamlamadan önce yapılan devir sayısı da bir Fibonacci sayısıdır. Bir papatyanın yaprak sayısı genelde Fibonacci sayılarından $21, 34, 55$ ve $89'$ dur.

Bir çok matematikçi ve bilim insanının yıllar boyu ilgisini çeken ve araştırmalara konu olan bu rakama “Altın oran”, “Kutsal oran”, “Mükemmel oran” gibi isimler atfedilmektedir. Bunun nedeni bu orana göre yapılan ve oluşturulan resimlerin, mimari eserlerin, bir dikdörtgenin veya doğada bulunan bir çiçeğin yapraklarının insanın algılayabildiği en güzel göz nizamı olmasındandır. Altın Oran ile doğada hemen hemen her yerde karşılaşmaktayız;

- Sanatta ve mimaride Altın Oranı veren birçok eser bulabilmekteyiz. Eski Yunan Mimarisinden Leonardo Da Vinci, Raphael, Rubens, Boticelli gibi ünlü ressamlar da resimlerinde Altın Oran’ı kullananların başında gelmektedir.
- Bunun dışında Fibonacci sayı dizisinin ve altın oranın; şiir, müzik notaları, ekonomi gibi değişik ve birçok kullanım alanı bulunmaktadır. Bunlardan birisi de mimari alanındandır. Altın Oran’a özellikle eski Yunan mimarisinde sıkça rastlamaktayız.
- Mısır’daki piramitlerde de bu orana rastlanmaktadır. Piramitler hem kendi içlerinde bu kurala uymakta hem de birbirleri arasında bu orana uyan spiral içinde belli noktalarda konuşlandırıldıkları görülmektedir
- Ayrıca Altın Oran bir takım firmalarca ürün dizaynı aşamasında da kullanılmaktadır. Bunlar sigara paketleri, kredi kartları, bazı ambalajlar ve benzerleridir (Livio 2002).

Bu çalışmada ise Fibonacci sayılarının daha genel hali olan k-Fibonacci sayılarından hareketle verilen Fibonacci polinomları ve türevleri dikkate alınarak iki değişkenli Fibonacci polinomlarının türev dizileri ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Fibonacci polinomları ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi E.Charles Catalan ve Alman matematikçi E.Jacobsthal tarafından çalışıldı. Catalan tarafından çalışılan Fibonacci polinomları daha sonra 1966 yılında M.N.S.Swamy tarafından geliştirildi. Ayrıca 1963 yılında P.F.Bryd tarafından Fibonacci tipi polinomların bir yenisi literature eklendi. P.F.Bryd tarafından tanımlanan polinom bugün Pell polinomu olarak adlandırılmaktadır. Fibonacci polinomu olarak kabul edilen polinom ise Catalan tarafından tanımlanmış olan polinomdur. Daha sonra tüm bu farklı tanımlamalar Fibonacci ve Lucas tipi polinomlar olarak adlandırıldı.

Catalan tarafından tanımlanan Fibonacci polinomlarının üzerine yapılan çalışmalar sonucunda bu polinomların farklı genelleştirmeleri tanımlandı (Garth *et al.* 2007; Shattuck and Wagner 2007; Prodinger 2009; Ambderhan 2010).

Bu anlamda sunduğumuz tezin 3. bölümünde Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak verilen k-Fibonacci sayıları ele alındı ve k-Fibonacci sayıları ile ilgili Falcon ve Plaza tarafından verilen bilgiler incelendi. Falcon ve Plaza 2007 yılında k-Fibonacci sayılarını geometrik dönüşümler yardımı ile tanımlayan bir çalışma yaptılar ve bu sayıların birçok özelliğini matris cebiri sayesinde elde ettiler. 2007 ve 2008 yıllarında ise Falcon ve Plaza en genel haliyle k-Fibonacci dizilerini tanımladılar. Bu dizilerin birtakım yeni özelliklerini ve Pascal-2 üçgeni ile olan bağıntılarını incelediler ve k-Fibonacci dizileri için üreteç fonksiyonunu tanımladılar.

Daha sonra 2009 yılunda Falcon ve Plaza tarafından k-Fibonacci sayılarından hareketle tanımlanan Fibonacci polinomları ele alındı. Fibonacci polinomları ile ilgili bir çok özellik sunulmuş ayrıca yine aynı yıl Falcon ve Plaza'nın Fibonacci polinomlarının türevleri ile ilgili birtakım yeni özellikler ortaya koyularak türev dizisi ile ilgili elde ettikleri farklı özdeşliklere yer verildi. Elde edilen türev dizilerinin bazılarının 2006 yılında Sloane tarafından verilen tamsayı dizileri ile ilgili bir kaynakta (Sloane 2006) yer alan özel dizilerden olduğu gözlendi.

Son olarak Fibonacci tipi polinomların çeşitli genelleştirilmelerinden birisi olan iki değişkenli Fibonacci polinomları incelendi ve bu polinomlarla ilgili 1980 yılında Frei, 1999 yılında Swamy, 2004 yılında Catalani ve 2008 yılında Belbachir ve Bencherif, 2009 yılında Abbas tarafından sunulan özelliklere yer verildi. İki değişkenli Fibonacci polinomları Catalan tarafından tanımlanan Fibonacci polinomlarının genelleştirilmiş halidir. Ayrıca Catalan tarafından verilen polinomlar genelleştirilerek Tan and Zhang (2005), Machenry (2000), Tuğlu vd (2011) tarafından verilmiştir. Ek olarak Swamy ve Falcon tarafından verilen türev polinomlarının dizisi ele alınıp iki değişkenli Fibonacci polinomlarının türev dizileri ile ilgili yeni sonuçlara yer verilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. *k*-Fibonacci Sayıları

Herhangi bir $k \in \mathbb{R}$ için *k*-Fibonacci sayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1: Herhangi bir $k \in \mathbb{R}$ için, $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ olmak üzere

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}\,, n \geq 1 \tag{3.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan diziye *k*-Fibonacci dizisi denir ve $F_{k,n}\ {}_{n\in\mathbb{N}}$ şeklinde gösterilir (Falcon and Plaza 2007).

k-Fibonacci dizisinin her bir elemanına, *k*-Fibonacci sayısı denir. Bu şekildeki birkaç k-Fibonacci sayısı,

Çizelge 3.1 İlk k-Fibonacci sayıları

n	$F_{k,n}$
0	0
1	1
2	k
3	$k^2 + 1$
4	$k^3 + 2k$
5	$k^4 + 3k^2 + 1$
6	$k^5 + 4k^3 + 3k$
7	$k^6 + 5k^4 + 6k^2 + 1$
8	$k^7 + 6k^5 + 10k^3 + 4k$
...	...

şeklindedir. k'nın bazı özel tamsayı değerleri için, $F_{k,n}\ {}_{n\in\mathbb{N}}$ *k*-Fibonacci dizisi, sayılar teorisinde önemli yere sahip olan tamsayı dizilerine dönüşmektedir.

Örneğin; $\left(F_{k,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ k-Fibonacci dizisinde;

$k=1$ alınırsa $\left(F_n\right)_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots\}$ Fibonacci dizisi;

$k=2$ alınırsa $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,2,5,12,29,70,169,\ldots\}$ Pell dizisi elde edilir.

(3.1) ile verilen denklem, sabit katsayılı II. mertebeden bir fark denklemi olup karakteristik denklemi

$$r^2=kr+1 \tag{3.2}$$

şeklindedir. r_1 ve r_2; $r_1>r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere,

i. $\mathrm{r}_1=\frac{\mathrm{k}+\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}{2}, \mathrm{r}_2=\frac{\mathrm{k}-\sqrt{\mathrm{k}^2+4}}{2}$ (3.3)

ii. $\mathrm{r}_2<0<\mathrm{r}_1,\ |\mathrm{r}_2|<\mathrm{r}_1$

iii. $\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2=\mathrm{k},\ \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2=-1,\ \mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2=\sqrt{\mathrm{k}^2+4}$

bağıntıları mevcuttur (Stakhov and Rozin 2006).

3.1 Bölüm boyunca $F_{k,n}$ n-inci k-Fibonacci sayısını, r_1 ve r_2 ise (3.3) ile verilen ifadeleri gösterecektir.

3.1.1. *k*-Fibonacci sayıları için bazı özdeşlikler

Teorem 3.1.1.1: (Catalan Özelliği)

$$F_{k,n-r}F_{k,n+r}-F_{k,r}^2=(-1)^{n-r+1}F_{k,r}^2$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.2:

$$F_{k,r+s} = F_{k,r+1}F_{k,s} + F_{k,r}F_{k,s-1}$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.3: (d’Ocagne Özelliği) $m > n$ olmak üzere

$$F_{k,m}F_{k,n+1} - F_{k,m+1}F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.4: Eğer $\sigma = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} = r_1$ ise, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{k,n+1}}{F_{k,n}} = \sigma$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.5:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,i} = \frac{1}{k}\ F_{k,n+1} + F_{k,n} - 1$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.6:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{k,j}}{p^{j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_{k,j}}{p^{j}} = \frac{p}{p^{2} - kp - 1}, p > r_1$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.7:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,2i} = \frac{1}{k} \; F_{k,2n+1} - 1$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.8:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,2i+1} = \frac{1}{k} F_{k,2n+2}$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.9:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,4i+1} = \frac{1}{k} F_{k,2n+1} F_{k,2n+2}$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.10:

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} \left(k^2+4\right)^i, n \geq 1$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

Teorem 3.1.1.11:

$$F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i}, n \geq 1$$

dir. (Falcon and Plaza 2007)

3.1.2. k-Fibonacci sayıları için binet benzeri formül

Bilindiği üzere herhangi bir Fibonacci sayısını kendinden önceki terimleri bilmeksizin elde edebileceğimiz bir Binet formülü vardı ve bu formül sayesinde Fibonacci sayıları için birtakım yeni özdeşlikler elde edilmişti. Bu kısımda k-Fibonacci sayıları için genelleştirilmiş Binet formulü verilecektir.

Lemma 3.1.2.1: $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

- **i.** $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$
- **ii.** $(1-\varphi)^{n+2} = (1-\varphi)^{n+1} + (1-\varphi)^n$

dir (Stakhov and Rozin 2006).

Lemma 3.1.2.2: Her $n \in \mathbb{N}$ için

i. $\mathrm{r}_1{}^{n+2} = k\mathrm{r}_1{}^{n+1} + \mathrm{r}_1{}^{n}$

ii. $\mathrm{r}_2{}^{n+2} = k\mathrm{r}_2{}^{n+1} + \mathrm{r}_2{}^{n}$

dir (Falcon and Plaza 2007).

İspat: r_1 ve r_2

$$r^2 = kr + 1$$

karakteristik denkleminin kökleri olduğundan,

$$\mathrm{r}_1{}^2 = k\mathrm{r}_1 + 1$$

$$\mathrm{r}_2{}^2 = k\mathrm{r}_2 + 1$$

olacaktır. Verilen denklemlerin her iki yanının sırasıyla $\mathrm{r}_1{}^{n}$ ve $\mathrm{r}_2{}^{n}$ ile çarpılması ile i. ve ii. özdeşlikleri elde edilir.

Teorem 3.1.2.3: (Genelleştirilmiş Binet Formülü)

$$F_{k,n} = \frac{\mathrm{r}_1{}^{n} - \mathrm{r}_2{}^{n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} \qquad 3.4$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

İspat: İspatımızı matematiksel tümevarım yöntemi ile yapalım. İlk olarak $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\frac{1}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}\ \ \mathrm{r}_1{}^0-\mathrm{r}_2{}^0\ \ =\frac{1}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}\ \ 1-1\ \ =0=F_{k,0}$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}\ \ \mathrm{r}_1{}^1-\mathrm{r}_2{}^1\ \ =\frac{1}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}\ \ \mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2\ \ =1=F_{k,1}$$

olup verilen özdeşlik $n=0$ ve $n=1$ için doğrudur. $0\leq i\leq 1+l$ aralığındaki her i için

$$F_{k,i}=\frac{1}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}\ \ \mathrm{r}_1{}^i-\mathrm{r}_2{}^i$$

olsun. (3.1) eşitliği ve Lemma 1 den

$$F_{k,l+2}=kF_{k,l+1}+F_{k,l}$$

$$=\frac{k}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}\ \ \mathrm{r}_1{}^{l+1}-\mathrm{r}_2{}^{l+1}\ \ +\frac{1}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}\ \ \mathrm{r}_1{}^l-\mathrm{r}_2{}^l$$

$$=\frac{\mathrm{kr}_1{}^{l+1}-\mathrm{kr}_2{}^{l+1}+\mathrm{r}_1{}^l-\mathrm{r}_2{}^l}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}$$

$$=\frac{\mathrm{r}_1{}^l\ \ \mathrm{kr}_1+1\ \ -\mathrm{r}_2{}^l\ \ \mathrm{kr}_2+1}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}$$

$$=\frac{\mathrm{r}_1{}^{l+2}-\mathrm{r}_2{}^{l+2}}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}$$

bulunur. O halde verilen özdeşlik her $n\in\mathbb{N}$ için doğrudur.

Teorem 3.1.2.4:

$$F_{k,2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i F_{k,i}\,, \quad n \geq 0$$

dır (Falcon and Plaza 2007).

İspat: (3.4) eşitliğinden hareketle,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i F_{k,i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i \frac{\mathrm{r}_1{}^i - \mathrm{r}_2{}^i}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (k\mathrm{r}_1)^i - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (k\mathrm{r}_2)^i \right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} \left((1 + k\mathrm{r}_1)^n - (1 + k\mathrm{r}_2)^n \right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} \left(\mathrm{r}_1{}^{2n} - \mathrm{r}_2{}^{2n} \right)$$

$$= F_{k,2n}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2.5:

$$k \sum_{i=1}^{n} F_{k,i} = F_{k,n+1} + F_{k,n-1} - 1$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

İspat: k-Fibonacci dizisinin genel indirgeme bağıntısı olan

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, n \geq 1$$

ifadesinden yararlanılarak

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,i+1} = k \sum_{i=1}^{n} F_{k,i} + \sum_{i=1}^{n} F_{k,i-1}$$

$$F_{k,n} + F_{k,n+1} = k \sum_{i=1}^{n} F_{k,i} + F_{k,0} + F_{k,1}$$

elde edilir ve $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ olduğundan

$$k \sum_{i=1}^{n} F_{k,i} = F_{k,n+1} + F_{k,n-1} - 1$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.2.6:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,mi} = \frac{F_{k,mn+m} - (-1)^m F_{k,mn} - F_{k,m}}{\mathrm{r}_1{}^m + \mathrm{r}_2{}^m - (-1)^m - 1}$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

İspat: (3.4) eşitliği dikkate alınarak

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,mi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_1^{mi} - r_2^{mi}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_1^{mi} - \sum_{i=1}^{n} r_2^{mi}\right)$$

yazılır. Geometrik toplam formülü ve $r_1 - r_2 = k$, $r_1 r_2 = -1$ özelliklerinden

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,mi} = \frac{F_{k,mn+m} - (-1)^m F_{k,mn} - F_{k,m}}{r_1^m + r_2^m - (-1)^m - 1}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2.7:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,mi+j} = \frac{F_{k,mn+m+j} - (-1)^m F_{k,mn+j} + (-1)^m F_{k,j-m} - F_{k,j}}{r_1^m + r_2^m - (-1)^m - 1}$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

İspat: (3.4) eşitliği dikkate alınarak

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,mi+j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{r_1^{mi+j} - r_2^{mi+j}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1^{j} \sum_{i=0}^{n} r_1^{mi} - r_2^{j} \sum_{i=0}^{n} r_2^{mi}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1^{j} \sum_{i=0}^{n} \frac{r_1^{m(i+1)} - 1}{r_1^m - 1} - r_2^{j} \sum_{i=0}^{n} \frac{r_2^{m(i+1)} - 1}{r_2^m - 1}\right)$$

olup gerekli işlemler yapıldığında

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,mi+j} = \frac{F_{k,mn+m+j} - (-1)^{m} F_{k,mn+j} + (-1)^{m} F_{k,j-m} - F_{k,j}}{r_1^{m} + r_2^{m} - (-1)^{m} - 1}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.2.8:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,i+j} = -\frac{1}{k}\left(-F_{k,n+j} - F_{k,n+j+1} + F_{k,j} + F_{k,j-1}\right)$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

İspat: Bu teoremin ispatı genelleştirilmiş Binet formülünden açıkça görülebilir.

Teorem 3.1.2.9:

$$F_{k,-n} = (-1)^{n+1} F_{k,n} \quad n \geq 1$$

dir (Falcon and Plaza 2007).

İspat: İspatı k-Fibonacci sayıları için Binet benzeri formülden yararlanılarak yapılacaktır.

$$F_{k,-n} = \frac{r_1^{-n} - r_2^{-n}}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{1}{r_1^{n}} - \frac{1}{r_2^{n}}}{r_1 - r_2}, r_1 r_2 = -1$$

$$=\frac{\dfrac{\mathrm{r}_2{}^{n}-\mathrm{r}_1{}^{n}}{\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2{}^{\ \ n}}}{\mathrm{r}_1-\mathrm{r}_2}=\frac{(-1)\mathrm{r}_1{}^{n}-\mathrm{r}_2{}^{n}}{-1^{\ \mathrm{n}}}$$

$$=\ -1^{\ n+1}F_{k,n}$$

olup ispat tamamlanır. Verilen özdeşlikte $F_{k,-n}=F_{k,n}$ olması için gerek ve yeter şart n nin tek sayı olmasıdır.

Lemma 3.1.2.10:

$$\mathrm{r}_1{}^{n}=\mathrm{r}_1F_{k,n}+F_{k,n-1}\,,n\geq 1$$

dir (Stakhov and Rozin 2006).

İspat: Tanım 3.1.1 de verilen indirgeme bağıntısının karakteristik denklemini r_1 ve r_2 köklerinin r_1+$\mathrm{r}_2=\mathrm{k}$ ve $\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2=-1$ özelliklerinden yaralanılarak

$$\mathrm{r}_1{}^{2}=\mathrm{r}_1\ \ \mathrm{k}-\mathrm{r}_2\ \ =\mathrm{r}_1\mathrm{k}-\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2=\mathrm{r}_1\mathrm{k}+1$$

$$\mathrm{r}_1{}^{3}=\mathrm{r}_1\ \ \mathrm{r}_1\mathrm{k}+1\ \ =\mathrm{r}_1{}^{2}\mathrm{k}+\mathrm{r}_1=\mathrm{r}_1\ \ \mathrm{k}^2+1\ \ +k$$

$$\vdots$$

şeklinde devam edilirse;

$$\mathrm{r}_1{}^{n}=\mathrm{r}_1F_n+F_{n-1}\,,n\geq 1$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.2.11: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $F_{k,a+b-1} = F_{k,a}F_{k,b} + F_{k,a-1}F_{k,b-1}$

ii. $F_{k,a+b-2} = \frac{1}{k}\ F_{k,a}F_{k,b} + F_{k,a-2}F_{k,b-2}$

iii. $F_{k,a+b-3} = \frac{1}{k}\ F_{k,a}F_{k,b}F_{k,c} + kF_{k,a-1}F_{k,b-1}F_{k,c-1} - F_{k,a-2}F_{k,b-2}F_{k,c-2}$

(Falcon and Plaza 2007)

İspat:

i. $F_{k,a+b-1} = F_{k,a}F_{k,b} + F_{k,a-1}F_{k,b-1}$ olduğu Teorem 3.1.1.2 den açıktır.

ii. k- Fibonacci dizisinin genel tanımından yararlanarak,

$$F_{k,a+b-2} = F_{k,a}F_{k,b-1} + F_{k,a-1}F_{k,b-2}$$

$$= F_{k,a}\ \frac{F_{k,b} - F_{k,b-2}}{k}\ + \ \frac{F_{k,a} - F_{k,a-2}}{k}\ F_{k,b-2}$$

$$= \frac{1}{k}\ F_{k,a}F_{k,b} + F_{k,a-2}F_{k,b-2}$$

elde edilir.

iii. (3.1) eşitliğinden yararlanarak

$$F_{k,a+b-3} = F_{k,a-1}F_{k,b+c-3} + F_{k,a}F_{k,b+c-2}$$
$$= F_{k,a-1}\ F_{k,b-2}F_{k,c-2} + F_{k,b-1}F_{k,c-1}\ + F_{k,a}\ \frac{F_{k,b}F_{k,c} - F_{k,b-2}F_{k,c-2}}{k}$$

olup gerekli düzenlemeler sonucunda verilen özdeşlik elde edilir.

3.2. Fibonacci Polinomları

Tanım 3.2.1: k-Fibonacci sayılarındaki $k \in \mathbb{R}^+$ sayısını x reel değişkeni olarak seçersek $F_{k,n} = F_{x,n}$ olur ve

$$F_{n+1}\ x \ = \begin{array}{ll} 1, & n = 0 \\ x, & n = 1 \\ xF_n\ x\ + F_{n-1}\ x\ , & n \geq 2 \end{array}$$

şeklinde tanımlanan Fibonacci polinomları elde edilir. Bir kaç Fibonacci polinomu,

Çizelge 3.2. Bir Kaç Fibonacci Polinomları

n	$F_n(x)$
0	0
1	1
2	x
3	$x^2 + 1$
4	$x^3 + 2x$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$
6	$x^5 + 4x^3 + 3x$
7	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$
8	$x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$
...	...

şeklindedir (Falcon and Plaza 2009).

Fibonacci polinomları için

$$F_{n+1}\ x\ = xF_n\ x\ + F_{n-1}\ x$$

şeklindeki indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$r^2 - xr - 1 = 0$$

olup, karakteristik denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, r_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

şeklindedir (Falcon and Plaza 2009).

$F_n(x)$ polinomunu derecesi $n \geq 1$ için $n - 1$ dir. Fibonacci polinomları ve Fibonacci sayıları arasında $n \geq 1$ olmak üzere $F_n(1) = F_n$ ilişkisi vardır. Örneğin; $F_4(1) = F_4$ şeklindedir. Ayrıca $F_1(2) = 1$ ve $F_2(2) = 2$ ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$F_n(2) = 2F_{n-1}(2) + F_{n-2}(2)$$

eşitliği söz konusudur. Bu eşitlikten elde edilen sayılar

$$P_n = F_n(2)$$

biçimindeki Pell sayılarıdır. Pell sayıları $1, 2, 5, 12, 29, \ldots$ şeklindedir. (Falcon, Plaza 2009)

Tanım 3.2.2: $F_0(x) = 0$ olmak üzere

$$F_{-n}(x) = (-1)^{n+1} F_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara negatif indisli Fibonacci polinomları denir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.2.3: $n \in \mathbb{Z}$ ve $Q(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$Q^n\ x\ = \begin{matrix} F_{n+1}\ x & F_n\ x \\ F_n\ x & F_{n-1}\ x \end{matrix}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: İlk olarak her n doğal sayısı için

$$Q^n\ x\ = \begin{matrix} F_{n+1}\ x & F_n\ x \\ F_n\ x & F_{n-1}\ x \end{matrix}$$

olduğunu gösterelim. Tümevarım prensibi kullanılırsa iddianın $n = 1$ için

$$Q\ x\ = \begin{matrix} F_2\ x & F_1\ x \\ F_1\ x & F_0\ x \end{matrix}\ = \begin{matrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = Q\ x$$

şeklinde olup doğru olduğu görülür. İddianın n için doğru yani,

$$Q^n\ x\ = \begin{matrix} F_{n+1}\ x & F_n\ x \\ F_n\ x & F_{n-1}\ x \end{matrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. O halde

$$Q^n\ x\ Q\ x\ = \begin{matrix} F_{n+1}\ x & F_n\ x \\ F_n\ x & F_{n-1}\ x \end{matrix}\ \begin{matrix} F_2\ x & F_1\ x \\ F_1\ x & F_0\ x \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} F_{n+1}\ x\ x + F_n\ x & F_{n+1}\ x \\ F_n\ x\ x + F_{n-1}\ x & F_n\ x \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} F_{n+2}\ x & F_{n+1}\ x \\ F_{n+1}\ x & F_n\ x \end{matrix} = Q^{n+1}\ x$$

bulunur ki bu da iddianın $n + 1$ için doğru olduğunu gösterir. $n = 0$ iken teoremin doğru olduğunu görmek kolaydır. Benzer şekilde $n \in \mathbb{N}$ için

$$Q^{-n}(x) = \begin{pmatrix} F_{-n+1}(x) & F_{-n}(x) \\ F_{-n}(x) & F_{-n-1}(x) \end{pmatrix}$$

olduğu ispatlanabilir.

Teorem 3.2.4: (Cassini veya Simon özelliği): $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n^{\,2}(x) = (-1)^n$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: $Q(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Q^n(x) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ olduğu göz önüne alınıp bu matrislerin determinantları alınırsa

$$detQ(x) = -1$$

ve

$$detQ^n(x) = (-1)^n$$

elde edilir. Buradan

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n^{\,2}(x) = (-1)^n$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.5: (Catalan özelliği) $\forall\, n, r \in \mathbb{Z}$ ve $n > r$ için

$$F_{n-r}(x)\,F_{n+r}(x) - F_n^{\,2}(x) = (-1)^{n-r-1} F_r^{\,2}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Catalan özelliğinden elde edilen bazı sonuçlar:

- $r = 1$ alınırsa

$$F_{n+1}(x)\,F_{n-1}(x) - F_n^{\,2}(x) = (-1)^n$$

şeklindeki Cassini (Simon) özelliği elde edilir.

- n yerine $4n$ ve r yerine $2n$ alınırsa

$$F_{2n}(x)\left(F_{2n}(x) + F_{6n}(x)\right) = F_{4n}^{\,2}(x)$$

eşitliği elde edilir.

- n yerine $2n + r$ alınırsa

$$F_{2n}(x)\,F_{2n+2r}(x) + F_r^2(x) = F_{2n+r}^2(x)$$

elde edilir. Eğer $x = 1$ ise $F_n(x) = F_n$ olur ki buradan $F_1(1) = F_2(1) = 1$ olur ve

$$F_{2n}, F_{2n+2}, F_{2n+4}, 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}$$

kümesi bir Diophantine dörtlüsüdür (Falcon and Plaza 2009). Yani bu kümeden alınan herhangi iki elemanın çarpımının bir fazlası tam karedir. Örneğin;

$$F_{2n}F_{2n+2} + 1 = F_{2n+1}^2$$

$$F_{2n}F_{2n+4}+1=F_{2n+2}^2$$

$$F_{2n}4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}+1=(2F_{2n+1}F_{2n+2}-1)^2$$

$$F_{2n+2}F_{2n+4}+1=F_{2n+3}^2$$

$$F_{2n+2}4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}+1=(F_{2n+2}^2+1)^2$$

$$F_{2n+4}4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}+1=(2F_{2n+2}F_{2n+3}+1)^2$$

dir.

Teorem 3.2.6: (Honsberger Formülü) $\forall\, m,n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{m+n}(x)=F_m(x)F_{n+1}(x)+F_{m-1}(x)F_n(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Fibonacci polinomlarının matris gösterimi dikkate alınarak $Q^{m+n}(x)$ matrisi

$$Q^{m+n}(x)=\begin{pmatrix} F_{m+n+1}(x) & F_{m+n}(x) \\ F_{m+n}(x) & F_{m+n-1}(x) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Q^{m+n}(x) &= Q^m(x)\,Q^n(x) \\ &= \begin{pmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{m+1}(x)F_{n+1}(x)+F_m(x)F_n(x) & F_{m+1}(x)F_n(x)+F_m(x)F_{n-1}(x) \\ F_m(x)F_{n+1}(x)+F_{m-1}(x)F_n(x) & F_m(x)F_n(x)+F_{m-1}(x)F_{n-1}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.6}$$

olup (3.5) ve (3.6) eşit olduğundan

$$F_{m+n}(x) = F_m(x)F_{n+1}(x) + F_{m-1}(x)F_n(x)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.7: $\forall\, m,n \in \mathbb{Z}$ için

$$(-1)^n F_{m-n}(x) = F_m(x)F_{n-1}(x) - F_{m-1}(x)F_n(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Fibonacci polinomlarının matris gösterimi dikkate alınarak $Q^{m-n}(x)$ matrisi

$$Q^{m-n}(x) = \begin{pmatrix} F_{m-n+1}(x) & F_{m-n}(x) \\ F_{m-n}(x) & F_{m-n-1}(x) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

şeklinde olup

$$Q^{m-n}(x) = Q^m(x)\,Q^{-n}(x)$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-n+1}(x) & F_{-n}(x) \\ F_{-n}(x) & F_{-n-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n F_{n-1}(x) & (-1)^{n+1} F_n(x) \\ (-1)^{n+1} F_n(x) & (-1)^n F_{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1}(x) & -F_n(x) \\ -F_n(x) & F_{n+1}(x) \end{pmatrix} (-1)^n$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix} F_{m+1}(x)F_{n-1}(x) - F_m(x)F_n(x) & F_m(x)F_{n+1}(x) - F_{m+1}(x)F_n(x) \\ F_m(x)F_{n-1}(x) - F_{m-1}(x)F_n(x) & F_{m-1}(x)F_{n+1}(x) - F_m(x)F_n(x) \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

yazılır. (3.7) ile (3.8) eşit olduğundan

$$(-1)^n F_{m-n}(x) = F_m(x)F_{n-1}(x) - F_{m-1}(x)F_n(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8: $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{2m-1}(x) = F_m^{\ 2}(x) + F_{m-1}^{\ 2}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Teorem 3.2.6 da

$$F_{m+n}(x) = F_m(x)F_{n+1}(x) + F_{m-1}(x)F_n(x)$$

şeklinde verilen Honsberger formülünde $n = m - 1$ alınırsa

$$F_{m+(m-1)}(x) = F_m(x)F_{(m-1)+1}(x) + F_{m-1}(x)F_{(m-1)}(x)$$

$$F_{2m-1}(x) = F_m^{\ 2}(x) + F_{m-1}^{\ 2}(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.9: $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{2m}(x) = F_m(x)\left(F_{m+1}(x) + F_{m-1}(x)\right)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Teorem 3.2.6 da

$$F_{m+n}(x) = F_m(x)F_{n+1}(x) + F_{m-1}(x)F_n(x)$$

şeklinde verilen Honsberger formülünde $n = m$ alınırsa

$$F_{m+m}(x) = F_m(x)F_{m+1}(x) + F_{m-1}(x)F_m(x)$$

$$F_{2m}(x) = F_m(x)\left(F_{m+1}(x) + F_{m-1}(x)\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.10: $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{2m}(x) = \frac{F_{m+1}^{\,2}(x) - F_{m-1}^{\,2}(x)}{x}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.2.11: $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$EBOB\left(F_m(x), F_n(x)\right) = F_{EBOB(m,n)}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Honsberger formülünde $n = 2m, 3m, 4m, \ldots$ alınırsa $(r.n)$. Fibonacci polinomunun n. Fibonacci polinomunun katı olduğu görülür. O halde m. Fibonacci polinomu ile n. Fibonacci polinomunun en büyük ortak böleni m ile n nin en büyük ortak bölenine karşılık gelen Fibonacci polinomudur.

Teorem 3.2.12: (Genel Bilineer Formül) $a, b, c, d, r \in \mathbb{Z}$ ve $a + b = c + d$ olsun. Bu takdirde

$$F_a(x)F_b(x) - F_c(x)F_d(x) = (-1)^r\left(F_{a-r}(x)F_{b-r}(x) - F_{c-r}(x)F_{d-r}(x)\right)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Q bir kare matris ve $a, b, c, d, r \in \mathbb{Z}$ ve $a + b = c + d$ olacak şekildeki tam sayılar ise o zaman $Q^{a+b} = Q^{c+d}$ dir. ; $(R^{k-1}.L)^n$ kare matris olsun. Fibonacci polinomları için Q matrisi

$$(R^{k-1}.L)^n = \begin{pmatrix} F_{n+1(x)} - F_n(x) & F_n(x) \\ xF_n(x) & F_n(x) - F_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bu matriste $Q^a.Q^{b-1} = Q^c.Q^{d-1}$ ifadesi uygulanırsa

$$F_a(x)F_b(x) - F_c(x)F_d(x) = (-1)\left(F_{a-1}(x)F_{b-1}(x) - F_{c-1}(x)F_{d-1}(x)\right)$$

bulunur. Bu işlem r kez tekrarlanırsa

$$F_a(x)F_b(x) - F_c(x)F_d(x) = (-1)^r\left(F_{a-r}(x)F_{b-r}(x) - F_{c-r}(x)F_{d-r}(x)\right)$$

özdeşliği elde edilir.

Teorem 3.2.13: (d'Ocagne özelliği) $n \leq m$ tamsayıları için

$$F_{n+1}(x)F_m(x) - F_n(x)F_{m+1}(x) = (-1)^{n-1}F_{m-n}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Teorem 3.2.12 de verilen Genel Bilineer formülde $a = n + 1,\ b = m,\ c = n,$ $d = m + 1$ ve $r = n - 1$ alınırsa

$$F_{n+1}(x)\,F_m(x) - F_n(x)\,F_{m+1}(x) = (-1)^{n-1}F_{m-n}(x)$$

eşitliği kolaylıkla görülebilir.

3.2.1. Fibonacci Polinomları İçin Binet Formülü

Herhangi bir k-Fibonacci sayısı kendinden önceki terimler bilinmeden de elde edebilirdi. Benzer şekilde herhangi bir Fibonacci polinomu kendinden önceki polinomlar bilinmeksizin elde edilebilmektedir. Bu durum aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.1.1: (Binet Formülü) $r_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, n. Fibonacci polinomu

$$F_n(x) = \frac{r_1^{\,n} - r_2^{\,n}}{r_1 - r_2} \tag{3.9}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: $r_1 - r_2 = \sqrt{x^2 + 4}$ olduğu kullanarak $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(x) = \frac{r_1^{\,n} - r_2^{\,n}}{r_1 - r_2}$$

olduğunu tümevarım ile gösterelim. İddia $n = 1$ için

$$F_1\ x\ \ = \frac{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = 1$$

olup doğrudur. İddia n için doğru, yani

$$F_n\ x\ \ = \frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olsun. İddianın $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Fibonacci polinomlarının tanımından

$$F_{n+1}\ x\ \ = xF_n\ x\ \ + F_{n-1}\ x$$

yazılır. Bu eşitlikte $F_n\ x$ ve $F_{n-1}\ x$ değerleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$F_{n+1}\ x\ \ = xF_n\ x\ \ + F_{n-1}\ x$$

$$F_{n+1}\ x\ \ = x\ \ \frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}\ \ + \ \ \frac{\mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= x\ \ \frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\overline{x^2+4}}\ \ + \ \ \frac{\mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\overline{x^2+4}}$$

$$= \frac{1}{\overline{x^2+4}}\ \ x\mathrm{r}_1{}^n - x\mathrm{r}_2{}^n + \mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\overline{x^2+4}}\ \ \mathrm{r}_1{}^{n-1}\ \ 1 + x\mathrm{r}_1\ \ - \mathrm{r}_2{}^{n-1}\ \ 1 + x\mathrm{r}_2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}\right)-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x^2-x\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n}\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n}\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n}\left(\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n}\left(\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)\right]$$

bulunur. Ayrıca $\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}$ ve $\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}$ ifadeleri paydalarının eşlenikleri ile çarpılıp düzenlenirse

$$\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$$

ve

$$\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$$

bulunur. Böylece

$$F_{n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n}\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n}\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$F_{n+1}\ x\ = \frac{\mathrm{r}_1{}^{n}\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} - \frac{\mathrm{r}_2{}^{n}\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = \frac{\mathrm{r}_1{}^{n+1} - \mathrm{r}_2{}^{n+1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olur. O halde iddia $n + 1$ için doğrudur. Diğer yandan $n = 0$ için

$$F_0\ x\ = \frac{\mathrm{r}_1{}^{0} - \mathrm{r}_2{}^{0}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = 0$$

olup iddia doğrudur. Şimdi de $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$F_{-n}\ x\ = \frac{\mathrm{r}_1{}^{-n} - \mathrm{r}_2{}^{-n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olduğunu gösterelim.

$$F_{-n}\ x\ = \frac{\mathrm{r}_1{}^{-n} - \mathrm{r}_2{}^{-n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = \frac{\frac{1}{\mathrm{r}_1{}^{n}} - \frac{1}{\mathrm{r}_2{}^{n}}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{r}_2{}^{n} - \mathrm{r}_1{}^{n}}{-1\ ^{n}}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{-1\ ^{n}\ \mathrm{r}_2{}^{n} - \mathrm{r}_1{}^{n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{-1\ ^{n+1}\ \mathrm{r}_1{}^{n} - \mathrm{r}_2{}^{n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \ -1\ ^{n+1} F_n\ x$$

elde edilir. O halde her $n \in \mathbb{Z}$ için iddia doğrudur.

Teorem 3.2.1.2: $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{r}_1{}^n = \mathrm{r}_1 F_n(x) + F_{n-1}(x)$$

dir.

İspat: (3.9) eşitliği dikkate alınarak

$$\mathrm{r}_1 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \mathrm{r}_1\left(\frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}\right) + \frac{\mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\mathrm{r}_1{}^{n+1} - \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2{}^n + \mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\mathrm{r}_1{}^n\left(\mathrm{r}_1 + \frac{1}{\mathrm{r}_1}\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} - \frac{\mathrm{r}_2{}^n\left(\mathrm{r}_1 + \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olur. Burada $\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 = -1$ ve $\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2 = \sqrt{x^2 + 4}$ olduğu kullanılırsa

$$\mathrm{r}_1 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^n(\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = \mathrm{r}_1{}^n$$

olup eşitlik doğrulanır.

Teorem 3.2.1.3: $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{r}_2{}^n = \mathrm{r}_2 F_n(x) + F_{n-1}(x)$$

dir.

İspat: Yine (3.9) eşitliği dikkate alınarak

$$\mathrm{r}_2 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \mathrm{r}_2\left(\frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}\right) + \frac{\mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{-\mathrm{r}_2{}^{n+1} - \mathrm{r}_1{}^n \mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\mathrm{r}_1{}^n\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \mathrm{r}_2\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} - \frac{\mathrm{r}_2{}^n\left(\mathrm{r}_2 + \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olur. Burada $\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 = -1$ ve $\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2 = \sqrt{x^2+4}$ olduğu kullanılırsa

$$\mathrm{r}_2 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \frac{-\mathrm{r}_2{}^n(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = \mathrm{r}_2{}^n$$

olup eşitlik doğrulanır.

Teorem 3.2.1.4: $\mathrm{r}_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}(x)}{F_n(x)} = \mathrm{r}_1$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: $\left|\frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}\right| < 1$ olduğu dikkate alınarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}(x)}{F_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{r}_1{}^{n+1}-\mathrm{r}_2{}^{n+1}}{\mathrm{r}_1{}^{n}-\mathrm{r}_2{}^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{r}_1{}^{n+1}\left(1-\left(\frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}\right)^{n+1}\right)}{\mathrm{r}_1{}^{n}\left(1-\left(\frac{\mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1}\right)^{n}\right)}=\mathrm{r}_1$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

Teorem 3.2.1.5: (İlk n Fibonacci Polinomunun Toplamı)

$n\geq 1$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere ilk n Fibonacci polinomunun toplamı

$$\sum_{i=1}^{n}F_i(x)=\frac{F_{n+1}(x)+F_n(x)-1}{x}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. $n=1$ için

$$\frac{F_2(x)+F_1(x)-1}{x}=\frac{x+1-1}{x}=1=F_1(x)$$

olup eşitlik doğrudur. $k\leq n$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. O halde $n+1$ için

$$\sum_{i=1}^{n+1}F_i(x)=\sum_{i=1}^{n}F_i(x)+F_{n+1}(x)$$

$$=\frac{F_{n+1}(x)+F_n(x)-1}{x}+F_{n+1}(x)$$

$$= \frac{F_{n+1}(x) + F_n(x) - 1 + xF_{n+1}(x)}{x}$$

$$= \frac{F_{n+2}(x) + F_{n+1}(x) - 1}{x}$$

olduğundan eşitlik tüm pozitif tamsayılar için doğrudur.

3.2.2. Fibonacci polinomlarının fonksiyonu olarak x^n nin tanımı

Fibonacci polinomları için mevcut olan eşitlikler matris biçiminde $F = B.X$ şeklinde yazılabilir. Burada

$$F = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots)^T$$

$$X = (1, x, x^2, x^3, \ldots)^T$$

olup B matrisi Fibonacci polinomlarının açılımındaki x in artan kuvvetlerinin katsayıların oluşturduğu alt üçgen matristir. Yani

$$B = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{matrix}$$

B matrisindeki sıfırdan farklı olan başlangıçlar pascal üçgeninin köşegenlerini oluşturur ve aynı satırda bulunan elemanların toplamı klasik Fibonacci dizisini verir. Bununla birlikte B matrisi terslenebilirdir ve tersi

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 9 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 14 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan x^n Fibonacci polinomlarının lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Çizelge 3.3. x^n nin Fibonacci Polinomlarının Lineer Kombinasyonu Olarak İfadesi

n	x^n
0	$F_1(x)$
1	$F_2(x)$
2	$F_3(x) - F_1(x)$
3	$F_4(x) - 2F_2(x)$
4	$F_5(x) - 3F_3(x) + 2F_1(x)$
5	$F_6(x) - 4F_4(x) + 5F_2(x)$
6	$F_7(x) - 5F_5(x) + 9F_3(x) - 5F_1(x)$
7	$F_8(x) - 6F_6(x) + 14F_4(x) - 14F_2(x)$
...	...

Bu açılımlar Fibonacci polinomları için Zeckendorf teoreminin bir versiyonu olan aşağıdaki teoremde kapalı şekilde verilmiştir. Zeckendorf teoremine göre her tamsayı ardışık olmayan Fibonacci sayılarının toplamı olarak tek bir şekilde yazılabilir. Buna dayanarak Fibonacci polinomları için Falcon ve Plaza aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 3.2.2.1: $n \geq 1$ şartını sağlayan her $n \in \mathbb{Z}$ için, x^n ilk Fibonacci polinomunun lineer kombinasyonu olarak, $\binom{n}{-1} = 0$ olmak üzere

$$x^n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \left[\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1} \right] F_{n+1-2i}(x)$$

şeklinde yazılır (Falcon and Plaza 2009).

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapacağız. $n = 1$ için

$$(-1)^0 \left[\binom{1}{0} - \binom{1}{-1}\right] F_{1+1-0}(x) = (1-0)x = x = x^1$$

olup eşitlik doğrudur. Eşitliğin $n-1$ den küçük yada eşit her tamsayı için doğru olduğunu kabul edelim. O halde

$$x^{n-1} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1}\right] F_{n-2i}(x)$$

yazılır ve bu eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılır ve

$$xF_{n-2i}(x) = F_{n+1-2i}(x) - F_{n-1-2i}(x)$$

olduğu göz önünde bulundurularak

$$x.x^{n-1} = x \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1}\right] F_{n-2i}(x)$$

yazılır. Buradan

$$x^n = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1}\right] F_{n+1-2i}(x)$$
$$- \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1}\right] F_{n-1-2i}(x)$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler sonrasında eşitliğin sağlandığı görülebilir.

3.2.3. Fibonacci polinomlarının türevi

Fibonacci polinomlarının türevlerinin alınması ile

Çizelge 3.4. Türev Polinomları

n	$F_n'(x)$
0	0
1	0
2	1
3	$2x$
4	$3x^2 + 2$
5	$4x^3 + 6x$
6	$5x^4 + 12x^2 + 3$
7	$6x^5 + 20x^3 + 12x$
8	$7x^6 + 30x^4 + 30x^2 + 4$
...	...

şeklindeki polinomlar elde edilir. Fibonacci polinomlarının herhangi mertebeden türevi alınarak yeni diziler oluşturulabilmektedir. Türev polinomlarında x değişkenine bir tamsayı değeri verilerek farklı sayı dizileri elde edilmiştir. Örneğin; birinci türev için

$$\mathrm{F}_n'(1) = 0,1,2,5,10,20,38,71,130,235,\ldots$$

$$\mathrm{F}_n'(2) = 0,1,4,14,44,131,376,1052,2888,7813,\ldots$$

$$F'_n(3) = 0,1,6,29,126,516,2034,7807,29382,\ldots$$

$$F'_n(4) = 0,1,8,50,280,1475,7472,36836,178000,\ldots$$

şeklinde diziler elde edilir. Bu dizilerden $F'_n(1)$ ve $F'_n(2)$ türev dizilerinin daha önce çalışılan dizilerden olduğu görülmüştür. Bu anlamda, $F'_n(1)$ türev dizisinin aslında k. teriminin ardışık tamsayıların oluşturduğu alt kümeler alınmaksızın

$$1,2,3,\ldots,k-1$$

kümesinin alt kümelerinin sayısını veren bir diziyle çakıştığı görülmüştür. (Falcon and Plaza 2009) Örneğin; $F'_n(1)$ dizisinin beşinci terimi 10 dur. Aynı zamanda $F'_n(1)$ dizisine karşılık gelen dizinin beşinci terimi de 10 dur (Sloane 2006). Çünkü;

$$1,2,3,4$$

kümesinin hepsi ardışık olmayan elemanlarından oluşan alt kümeleri;

$$\emptyset,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 1,3\ ,\ 1,4\ ,\ 2,4\ ,\ 1,2,4\ ,\ 1,3,4$$

şeklinde olup 10 tanedir.

Falcon ve Plaza bu şekilde devam edilerek m. türev için de yeni sayı dizileri elde edilebileceğini göstermişlerdir. Örneğin; ikinci türev için

$$F''_n(1) = 0,0,2,6,18,44,102,222,466,948,\ldots$$

$$F''_n(2) = 0,0,2,12,54,208,732,2424,7684,23568,\ldots$$

$\mathrm{F}_n''(3) = 0,0,2,18,114,612,2982,13626,59474, \dots$

$\mathrm{F}_n''(4) = 0,0,2,24,198,1376,8652,50928,286036, \dots$

sayı dizileri, üçüncü türev için

$\mathrm{F}_n'''(1) = 0,0,0,6,24,84,240,630,1536,3564, \dots$

$\mathrm{F}_n'''(2) = 0,0,0,6,48,264,1200,4860,18192, \dots$

$\mathrm{F}_n'''(3) = 0,0,0,6,72,564,3600,20310,105408, \dots$

$\mathrm{F}_n'''(4) = 0,0,0,6,96,984,8160,59580,399264, \dots$

şeklinde birtakım tamsayı dizileri elde edilmiştir (Falcon and Plaza 2009).

Tanım 3.2.3.1: Fibonacci polinomları için

$$F_{n+1}(x) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} x^{n-2\mathrm{i}}, \mathrm{n} \geq 0$$

şeklinde verilen eşitlik türevlenerek, $F_1'(x) = 0$ olmak üzere

$$F_{n+1}'(x) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\frac{n-1}{2}} (n-2\mathrm{i}) \binom{n-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} x^{n-1-2\mathrm{i}}, \mathrm{n} \geq 1$$

eşitliği ile verilen türev formülü elde edilmiştir (Falcon and Plaza 2009).

Benzer şekilde herhangi bir mertebeden türev de elde edilebilmektedir. Örneğin; Fibonacci polinomlarının ikinci mertebeden türevi $n = 1,\ n = 2$ için $F''_n(x) = 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$F''_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} (n-2i)(n-1-2i)\binom{n-i}{i} x^{n-2-2i}$$

şeklinde verilmektedir.

Teorem 3.2.3.2: Eğer $r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ise, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}(x)}{F_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{F'_{n+1}(x)}{F'_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{F''_{n+1}(x)}{F''_n(x)} = \cdots = r_1$$

dır (Falcon and Plaza 2009).

Bununla birlikte türevin derecesi arttıkça ardışık terimlerin oranının limitinin altın orandan uzaklaştığı görülmüştür. Örneğin; k=3, n=9 için

$$\frac{F_{10}(3)}{F_9(3)} = \frac{42837}{12970} = 3.3027$$

$$\frac{F'_{10}(3)}{F'_9(3)} = \frac{108923}{29382} = 3.7071$$

$$\frac{F''_{10}(3)}{F''_9(3)} = \frac{250812}{59474} = 4.2171$$

$$\frac{F'''_{10}(3)}{F'''_9(3)} = \frac{514956}{105408} = 4.8853$$

olup $r_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.3027$ dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.2.3.3:

$$F_n'(x) = \frac{nF_{n+1}(x) - xF_n(x) + nF_{n-1}(x)}{x^2+4}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.2.3.4: $F_1'(x) = 0$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$F_n'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x) F_{n-i}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.2.3.5: $n \geq 1$ olmak üzere,

$$F_{n+1}'(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i (n-2i) F_{n-2i}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.2.3.6:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(F_{n+1}'(x) + F_{n-1}'(x)\right)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.2.3.7: Türev dizisi için rekürans bağıntısı

$$F_{n+1}^{(r)}(x) = \begin{cases} 0, & n < r \ ise \\ r!, & n = r \ ise \\ \dfrac{1}{n-r}\left(nxF_n^{(r)}(x) + (n+r)F_{n-1}^{(r)}(x)\right), & n > r \ ise \end{cases}$$

şeklindedir (Falcon and Plaza 2009).

3.3. İki Değişkenli Fibonacci Polinomları

Tanım 3.3.1: $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x^2 + 4y > 0$ ve $n \geq 0$ olmak üzere $G_0(x, y) = a$ ve $G_1(x, y) = b$ başlangıç şartları ile birlikte

$$G_{n+2}(x, y) = xG_{n+1}(x, y) + yG_n(x, y) \tag{3.10}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı polinomlara genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları denir (Catalani 2004).

Özel olarak, (3.10) ile verilen indirgeme bağıntısında $n \geq 0$ iken $a = 0$, $b = 1$ seçilerek $F_0(x, y) = 0$ ve $F_1(x, y) = 1$ başlangıç şartları ile

$$F_{n+2}(x, y) = xF_{n+1}(x, y) + yF_n(x, y) \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanan polinomlara iki değişkenli Fibonacci polinomları denir (Catalan 2004). Bu anlamda iki değişkenli Fibonacci polinomları;

Çizelge 3.5. İki Değişkenli Fibonacci Polinomları

n	$F_n(x,y)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+y
4	x^3+2xy
5	$x^4+3x^2y+y^2$
6	$x^5+4x^3y+3xy^2$
7	$x^6+5x^4y+6x^2y^2+y^3$
8	$x^7+6x^5y+10x^3y^2+4xy^3$
...	...

şeklindedir.

İki değişkenli Fibonacci polinomları için (3.11) eşitliği ile verilen indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$r^2 - xr - y = 0$$

olup karakteristik denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2}, r_2 = \frac{x-\sqrt{x^2+4y}}{2}$$

şeklindedir. Burada $r_1.r_2 = -y$ ve $r_1 + r_2 = x$ dir.

Tanım 3.3.2: Eşitlik (3.11) ile tanımlı indirgeme bağıntısı $n \geq 0$ olmak üzere

$$yF_n(x,y) = F_{n+2}(x,y) - xF_{n+1}(x,y)$$

biçiminde düzenlenerek iki değişkenli Fibonacci polinomları negatif indisler için tanımlanabilir (Abbas 2009).

3.3.1. Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları ve iki değişkenli Fibonacci polinomlari ile ilgili bazi özdeşlikler

Teorem 3.3.1.1: Her $n \geq 0$ için

$$F_{-n}(x,y) = -\frac{F_n(x,y)}{(-y)^n} \tag{3.12}$$

dir (Frei 1980).

Teorem 3.3.1.2: (Binet formülü)

$$F_n(x,y) = \frac{r_1{}^n - r_2{}^n}{r_1 - r_2} \tag{3.13}$$

dir (Catalani 2004).

Teorem 3.3.1.3: (Ardışık Terimlerin Oranının Asimptotik Davranışı) Eğer $r_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4y}}{2}$ ise, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}(x,y)}{F_n(x,y)} = r_1$$

dır (Catalani 2004).

Teorem 3.3.1.4: A ve B reel sayılar ve $A \neq B$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{A^{n+1}-B^{n+1}}{A-B}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^i\binom{n-i}{i}(AB)^i(A+B)^{n-2i}$$

dir (Gould 1972).

Teorem 3.3.1.5: $x\neq 0$, $y\neq 0$ ve $x^2+4y\neq 0$ olsun. Her $n\geq 0$ için

$$F_{n+1}(x,y)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-i}{i}x^{n-2i}y^i$$

dir (Belbachir and Bencherif 2008).

İspat: Teorem 3.3.1.4'de A ve B yerine sırasıyla karakteristik denklemin pozitif ve negatif kökü olan r_1 ve r_2 yazılırsa

$$\frac{{r_1}^{n+1}-{r_2}^{n+1}}{r_1-r_2}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^i\binom{n-i}{i}(r_1r_2)^i(r_1+r_2)^{n-2i}$$

elde edilir.

$$r_1r_2=-y\ ve\ r_1+r_2=x$$

olduğundan

$$\frac{{r_1}^{n+1}-{r_2}^{n+1}}{r_1-r_2}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^i\binom{n-i}{i}(-y)^i(x)^{n-2i}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-i}{i}x^{n-2i}y^i$$

olup

$$F_{n+1}(x,y)=\frac{{r_1}^{n+1}-{r_2}^{n+1}}{r_1-r_2}$$

olduğu da dikkate alınırsa

$$F_{n+1}(x,y)=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n-i}{i}x^{n-2i}y^{i}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1.6: $F_n(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomu ve $x+y-1\neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n}F_i(x,y)=\frac{1}{x+y-1}\left(F_{n+1}(x,y)+yF_n(x,y)-1\right)$$

dir (Tuğlu vd 2011).

Teorem 3.3.1.7: $F_n(x,y)$, iki değişkenli Fibonacci polinomu ve $G_n(x,y)$, (3.10) ile tanımlanan genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomu olmak üzere her $m,n\in\mathbb{Z}$ için

$$G_{n+m}(x,y)=yF_{m-1}(x,y)G_n(x,y)+F_m(x,y)G_{n+1}(x,y) \tag{3.14}$$

dir (Abbas 2009).

İspat: n sabit bir sayı olsun. İspatı m üzerinden tümevarımla yapalım. $m=0$ için, (3.12) eşitliği dikkate alınarak

$$F_{-1}(x,y) = \frac{F_1(x,y)}{y}$$

yazılır ve

$$yF_{-1}(x,y)G_n(x,y) + F_0(x,y)G_{n+1}(x,y) = F_1(x,y)G_n(x,y) + F_0(x,y)G_{n+1}(x,y)$$

dir. $F_0(x,y) = 0$ ve $F_1(x,y) = 1$ olduğundan

$$yF_{-1}(x,y)G_n(x,y) + F_0(x,y)G_{n+1}(x,y) = G_n(x,y)$$

olur. $m = 1$ için

$$yF_0(x,y)G_n(x,y) + F_1(x,y)G_{n+1}(x,y) = F_1(x,y)G_{n+1}(x,y) = G_{n+1}(x,y)$$

olup doğrudur. $m = 0,1,2,\dots,k$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$G_{n+k-1}(x,y) = yF_{k-2}(x,y)G_n(x,y) + F_{k-1}(x,y)G_{n+1}(x,y)$$

ve

$$G_{n+k}(x,y) = yF_{k-1}(x,y)G_n(x,y) + F_k(x,y)G_{n+1}(x,y)$$

olsun. $m = k + 1$ için eşitliğin doğruluğunu inceleyelim:

$$yF_{k-1}(x,y)G_n(x,y) + F_k(x,y)G_{n+1}(x,y) = y\left(xF_{k-1}(x,y) + yF_{k-2}(x,y)\right)G_n(x,y)$$

$$+\ xF_k\ \ x,y\ \ +yF_{k-1}\ \ x,y\ \ \ G_{n+1}\ \ x,y$$

$$=yxF_{k-1}\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y\ \ +y^2F_{k-2}\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y$$

$$+xF_k\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y\ \ +yF_{k-1}\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y$$

$$=y\ \ yF_{k-2}\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y\ \ +F_{k-1}\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y$$

$$+x\ \ yF_{k-1}\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y\ \ +F_k\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y$$

dir. Eşitliğin k'ya kadar olan tüm pozitif tamsayılar için doğru olduğunu kabul ettiğimizden

$$yF_k\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y\ \ +F_{k+1}\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y\ \ =yG_{n+k-1}\ \ x,y\ \ +xG_{n+k}\ \ x,y$$

$$=G_{n+k+1}\ \ x,y$$

elde edilir. Böylece $m=k+1$ için doğru olduğu görülür. O halde $m\geq 0$ tamsayıları için

$$G_{n+m}\ \ x,y\ \ =yF_{m-1}\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y\ \ +F_m\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y$$

dir. Şimdi de eşitliği negatif tamsayılar için ispatlayalım. $m=-1$ olsun. Yine (3.12) eşitliği dikkate alınarak

$$F_{-2}\ \ x,y\ \ =-\frac{F_2\ \ x,y}{-y\ \ ^2}=-\frac{F_n\ \ x,y}{y^2}=\frac{-x}{y^2}$$

yazılır ki

$$yF_{-2}\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y\ \ + F_{-1}\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y\ \ = y\frac{-x}{y^2}G_n\ \ x,y\ \ + \frac{1}{y}G_{n+1}\ \ x,y$$

$$= \frac{1}{y}\ \ -xG_n\ \ x,y\ \ + G_{n+1}\ \ x,y$$

$$= \frac{1}{y}\ \ yG_{n-1}\ \ x,y$$

$$= G_{n-1}\ \ x,y$$

olup $m = -1$ için doğrudur. $m = -2$ olsun. Diğerlerine benzer şekilde

$$F_{-3}\ \ x,y\ \ = -\frac{F_3\ \ x,y}{-y\ \ ^3} = \frac{F_3\ \ x,y}{y^3} = \frac{x^2 + y}{y^3}$$

ve

$$yF_{-3}\ \ x,y\ \ G_n\ \ x,y\ \ + F_{-2}\ \ x,y\ \ G_{n+1}\ \ x,y\ \ = y\ \ \frac{x^2 + y}{y^3}G_n\ \ x,y\ \ \ -\frac{x}{y^2}G_{n+1}\ \ x,y$$

$$= \frac{1}{y^2}\ \ \ x^2 + y\ \ G_n\ \ x,y\ \ - xG_{n+1}\ \ x,y$$

$$= \frac{1}{y^2}\ \ x\ \ G_n\ \ x,y\ \ - G_{n+1}\ \ x,y\ \ \ + yG_n\ \ x,y$$

$$= \frac{1}{y^2}\ \ -xyG_{n-1}\ \ x,y\ \ + yG_n\ \ x,y$$

$$= \frac{1}{y^2}\ \ y\ \ G_n\ \ x,y\ \ - xG_{n-1}\ \ x,y$$

$$= G_{n-2}(x,y)$$

dir. Yani $m=-2$ için eşitlik doğrudur. İddianın her $-k+1 \leq m \leq -1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani;

$$G_{n-k+1}(x,y) = yF_{-k}(x,y)G_n(x,y) + F_{-k+1}(x,y)G_{n+1}(x,y)$$

ve

$$G_{n-k}(x,y) = yF_{-k-1}(x,y)G_n(x,y) + F_{-k}(x,y)G_{n+1}(x,y)$$

olsun. $m=-k-1$ için

$$\begin{aligned} yF_{-(k+2)}(x,y)G_n(x,y) + F_{-(k+1)}(x,y)G_{n+1}(x,y) \\ = yF_{-k-2}(x,y)G_n(x,y) + F_{-k-1}(x,y)G_{n+1}(x,y) \end{aligned}$$

$$= \frac{y}{x}\left(-yF_{-k-1}(x,y) + F_{-k}(x,y)\right)G_n(x,y)$$

$$+\frac{1}{x}\left(-yF_{-k}(x,y) + F_{-k+1}(x,y)\right)G_{n+1}(x,y)$$

$$= \frac{1}{x}\left(-y^2F_{-k-1}(x,y)G_n(x,y) + F_{-k}(x,y)G_n(x,y)\right)$$

$$+\frac{1}{x}\left(-yF_{-k}(x,y)G_{n+1}(x,y) + F_{-k+1}(x,y)G_{n+1}(x,y)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(-y\left(yF_{-k-1}(x,y)G_n(x,y) + F_{-k}(x,y)G_{n+1}(x,y)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{x}\left[F_{-k}(x,y)\,G_n(x,y)+F_{-k+1}(x,y)\,G_{n+1}(x,y)\right]$$

olup tümevarım hipotezinden

$$\frac{1}{x}\left(-yG_{n-k}(x,y)\right)+\frac{1}{x}G_{n-k+1}(x,y)=\frac{1}{x}\left(-yG_{n-k}(x,y)+G_{n-k+1}(x,y)\right)$$

$$=\frac{1}{x}xG_{n-k-1}(x,y)$$

$$=G_{n-k-1}(x,y)$$

dir. O halde iddia her $m<0$ tamsayısı için doğrudur. Böylece $n,m\in\mathbb{Z}$ için

$$G_{n+m}(x,y)=yF_{m-1}(x,y)\,G_n(x,y)+F_m(x,y)\,G_{n+1}(x,y)$$

olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.1.8: $F_n(x,y)$, iki değişkenli Fibonacci polinomu ve $G_n(x,y)$, (3.10) ile tanımlanan genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomu olmak üzere her $m,n\in\mathbb{Z}$ için

$$G_{n-m}(x,y)=(-y)^{-m}\left[F_{m+1}(x,y)\,G_n(x,y)-F_m(x,y)\,G_{n+1}(x,y)\right]$$

dir (Abbas 2009).

İspat: (3.12) ve (3.14) eşitlikleri dikkate alınarak

$$G_{n+(-m)}(x,y)=yF_{(-m)-1}(x,y)\,G_n(x,y)+F_{-m}(x,y)\,G_{n+1}(x,y)$$

$$= yF_{-m-1}(x,y)\,G_n(x,y) + F_{-m}(x,y)\,G_{n+1}(x,y)$$

$$= y\frac{F_{m+1}(x,y)}{(-y)^m}G_n(x,y) + \frac{(-1)F_m(x,y)}{(-y)^m}G_{n+1}(x,y)$$

$$= (-1)^m (y)^{-m}F_{m+1}(x,y)\,G_n(x,y) + (-1)(y)^{-m}(-1)^m F_m(x,y)\,G_{n+1}(x,y)$$

$$= (-y)^m \left(F_{m+1}(x,y)\,G_n(x,y) - F_m(x,y)\,G_{n+1}(x,y)\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1.9: Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{n+m}(x,y) = yF_{m-1}(x,y)\,F_n(x,y) + F_m(x,y)\,F_{n+1}(x,y)$$

dir (Abbas 2009).

Teorem 3.3.1.10: Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{n-m}(x,y) = (-y)^{-m}\left(F_{m+1}(x,y)\,F_n(x,y) - F_m(x,y)\,F_{n+1}(x,y)\right)$$

dir (Abbas 2009).

Teorem 3.3.1.11: Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$xF_{2n}(x,y) = F_{n+1}{}^2(x,y) - y^2F_{n-1}{}^2(x,y)$$

dir (Abbas 2009).

Teorem 3.3.1.12: Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{2n+1}(x,y) = yF_n^{\,2}(x,y) - F_{n+1}^{\,2}(x,y)$$

dir. (Abbas 2009)

Teorem 3.3.1.13: Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$G_{n+m}(x,y) - (-y)^m G_{n-m}(x,y) = F_m(x,y)\left(G_{n+1}(x,y) + yG_{n-1}(x,y)\right)$$

dir (Abbas 2009).

Teorem 3.3.1.14: $F_n(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomu, $G_n(x,y)$ ve $H_n(x,y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları olmak üzere her $h, k, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} &G_{n+h}(x,y)H_{n+k}(x,y) - G_n(x,y)H_{n+h+k}(x,y) \\ &\qquad = (-y)^n\left(G_h(x,y)H_k(x,y) - G_0(x,y)H_{h+k}(x,y)\right) \end{aligned}$$

dir (Abbas 2009).

İspat: $G_n(x,y)$ ve $H_n(x,y)$ genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları olmak üzere $J_n(x,y)$ polinomları

$$J_n(x,y) = G_{n+h}(x,y)H_{n+k}(x,y) - G_n(x,y)H_{n+h+k}(x,y)$$

ve

$$J_{n+1}(x,y) = G_{n+1+h}(x,y)H_{n+1+k}(x,y) - G_{n+1}(x,y)H_{n+1+h+k}(x,y)$$

ile tanımlayalım. Bu ifadede yer alan $G_{n+h}(x,y)$ ve $H_{n+h+k}(x,y)$ için (1.1) eşitliği kullanılırsa

$$G_{n+h}\ x,y\ = yF_{h-1}\ x,y\ G_n\ x,y\ + F_h\ x,y\ G_{n+1}\ x,y$$

ve

$$H_{n+h+k}\ x,y\ = yF_{h-1}\ x,y\ H_{n+k}\ x,y\ + F_h\ x,y\ H_{n+k+1}\ x,y$$

olup, bunlar $J_n\ x,y$ de yerine yazılırsa

$$J_n\ x,y\ = F_h\ x,y\ \ G_{n+1}\ x,y\ H_{n+k}\ x,y\ - G_n\ x,y\ H_{n+k+1}\ x,y$$

olur. Benzer şekilde $G_{n+1+h}\ x,y$ ve $H_{n+1+h+k}\ x,y$ için (1.1) eşitliği uygulanırsa

$$G_{n+1+h}\ x,y\ = yF_h\ x,y\ G_n\ x,y\ + F_{h+1}\ x,y\ G_{n+1}\ x,y$$

ve

$$H_{n+1+h+k}\ x,y\ = yF_h\ x,y\ H_{n+k}\ x,y\ + F_{h+1}\ x,y\ H_{n+k+1}\ x,y$$

olup bunlar $J_{n+1}\ x,y$ de yerlerine yazılırsa

$$J_{n+1}\ x,y\ = -yF_h\ x,y\ \ G_{n+1}\ x,y\ H_{n+k}\ x,y\ - G_n\ x,y\ H_{n+k+1}\ x,y$$

olur. Buradan

$$J_{n+1}\ x,y\ =\ -y\ J_n\ x,y$$

olduğu görülür.

$$J_1\ x,y\ =\ -y\ J_0\ x,y\ ,J_2\ x,y\ =\ -y\ ^2J_0\ x,y\ ,\ldots,J_n\ x,y\ =\ -y\ ^nJ_0\ x,y$$

dir. O halde

$$G_{n+h}(x,y)\,H_{n+k}(x,y)-G_n(x,y)\,H_{n+h+k}(x,y)$$
$$=(-y)^n\left(G_h(x,y)\,H_k(x,y)-G_0(x,y)\,H_{h+k}(x,y)\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.1.15: Her $h,k,n\in\mathbb{Z}$ için

$$F_{n+h}(x,y)\,F_{n+k}(x,y)-F_n(x,y)\,F_{n+h+k}(x,y)=(-y)^nF_h(x,y)\,F_k(x,y)$$

dir (Abbas 2009).

Teorem 3.3.1.16: (Catalan özdeşliği) Her $k,n\in\mathbb{Z}$ için

$$F_n^{\,2}(x,y)-F_{n-k}(x,y)\,F_{n+k}(x,y)=(-y)^{n-k}F_k(x,y)$$

dir (Abbas 2009).

İspat: Teorem 3.3.1.15 de $h=-k$ seçilirse

$$F_{n-k}(x,y)\,F_{n+k}(x,y)-F_n^{\,2}(x,y)=(-y)^nF_{-k}(x,y)\,F_k(x,y)$$

$$=(-y)^n(-1)(-y)^{-k}F_k^{\,2}(x,y)$$

$$=(-1)^{n+1+k}(-y)^{n-k}F_k(x,y)$$

olup, denklem düzenlenirse

$$F_n^2(x,y) - F_{n-k}(x,y)\,F_{n+k}(x,y) = (-y)^{n-k}F_k(x,y)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1.17: (Cassini özdeşliği) Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_n^2(x,y) - F_{n-1}(x,y)\,F_{n+1}(x,y) = (-y)^{n-1}$$

dir (Abbas 2009).

İspat: Catalan özdeşliğinde $k = 1$ seçilirse eşitlik kolaylıkla görülebilir.

Teorem 3.3.1.18: Her $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} x^{n-i} F_i(x,y) = \frac{1}{y}\left(F_{n+2}(x,y) - x^n F_2(x,y)\right)$$

dir (Frei 1980).

Teorem 3.3.1.19: Her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\sum_{i=1}^{n} y^{n-i} F_{2i}(x,y) = \frac{1}{x}\left(F_{2n+1}(x,y) - y^n\right)$$

dir (Frei 1980).

İspat: $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_n(x,y) = \frac{1}{x}F_{n+1}(x,y) - \frac{y}{x}F_{n-1}(x,y)$$

olup buradan

$$y^{n-1}F_2(x,y) = \frac{y^{n-1}F_3(x,y)}{x} - \frac{y^nF_1(x,y)}{x}$$

$$y^{n-2}F_4(x,y) = \frac{y^{n-2}F_5(x,y)}{x} - \frac{y^{n-1}F_3(x,y)}{x}$$

$$\vdots$$

$$yF_{2n-2}(x,y) = \frac{yF_{2n-1}(x,y)}{x} - \frac{y^2F_{2n-3}(x,y)}{x}$$

$$F_{2n}(x,y) = \frac{F_{2n+1}(x,y)}{x} - \frac{y^2F_{2n-1}(x,y)}{x}$$

dir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$y^{n-1}F_2(x,y) + y^{n-2}F_4(x,y) + \cdots + yF_{2n-2}(x,y) + F_{2n}(x,y) = \frac{1}{x}\left(F_{2n+1}(x,y) - y^nF_1(x,y)\right)$$

dir. $F_1(x,y) = 1$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} y^{n-i}F_{2i}(x,y) = \frac{1}{x}\left(F_{2n+1}(x,y) - y^n\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1.20: Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$xF_n^{\,2}(x,y) = F_n(x,y)F_{n+1}(x,y) - yF_n(x,y)F_{n-1}(x,y)$$

dir (Frei 1980).

İspat: $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_n(x,y) = \frac{1}{x}F_{n+1}(x,y) - \frac{y}{x}F_{n-1}(x,y)$$

olup buradan

$$\begin{aligned} xF_n^{\,2}(x,y) &= xF_n(x,y)F_n(x,y) \\ &= F_n(x,y)\left(F_{n+1}(x,y) - yF_{n-1}(x,y)\right) \\ &= F_n(x,y)F_{n+1}(x,y) - yF_n(x,y)F_{n-1}(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1.21: Her $n \geq 1$ ve $s \in \mathbb{Z}$ için

$$\sum_{i=1}^{n} y^{n-i} F_i^{\,2}(x,y) = \frac{1}{x}F_n(x,y)F_{n+1}(x,y)$$

dir (Frei 1980).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. İki Değişkenli Fibonacci Polinomlarının Türevi

Bu bölümde iki değişkenli Fibonacci polinomlarının türevlenmesi ile elde edilen diziler araştırılmıştır. x ve y değişkenlerine tamsayı değerleri verilerek birçok tamsayı dizisinin elde edilebildiği, türev dizileri, iki değişkenli Fibonacci polinomları ve türevleri arasındaki ilişkiler incelenmiş, yeni bazı özdeşlikler ve iki değişkenli Fibonacci polinomlarının kısmi türevlerinin alınması ile yeni diziler elde edilmiştir.

x değişkenine göre türev alınırsa

Çizelge 4.1. İki Değişkenli Fibonacci Polinomlarının Kısmi Türevleri 1

n	$F_n(x,y)$	$F_n'(x,y)$
0	0	0
1	1	0
2	x	1
3	x^2+y	$2x$
4	x^3+2xy	$3x^2+2y$
5	$x^4+3x^2y+y^2$	$4x^3+6xy$
6	$x^5+4x^3y+3xy^2$	$5x^4+12x^2y+3y^2$
7	$x^6+5x^4y+6x^2y^2+y^3$	$6x^5+20x^3y+12xy^2$
8	$x^7+6x^5y+10x^3y^2+4xy^3$	$7x^6+30x^4y+30x^2y^2+4y^3$
...	...	...

şeklindeki türev polinomları elde edilir. Dikkat edilirse iki değişkenli Fibonacci polinomlarının türevlerinin alınması ile yeni bir dizi elde edilir ki bu dizi

$$\frac{\partial F_n\ x,y}{\partial x} = 0,0,1,2x,3x^2+2y,4x^3+6xy,5x^4+12yx^2+3y^2,\ldots$$

şeklindedir. y değişkenine göre türev alınırsa elde edilen polinomlar aşağıdaki tablodaki gibi olur.

Çizelge 4.2. İki Değişkenli Fibonacci Polinomlarının Kısmi Türevleri 2

n	$F_n(x,y)$	$F_n'(x,y)$
0	0	0
1	1	0
2	x	0
3	x^2+y	1
4	x^3+2xy	$2x$
5	$x^4+3x^2y+y^2$	$3x^2+2y$
6	$x^5+4x^3y+3xy^2$	$4x^3+6xy$
7	$x^6+5x^4y+6x^2y^2+y^3$	$5x^4+12yx^2+3y^2$
8	$x^7+6x^5y+10x^3y^2+4xy^3$	$6x^5+20x^3y+12xy^2$
...	...	...

Dikkat edilirse yine iki değişkenli Fibonacci polinomlarının türevlerinin alınması ile yeni bir dizi daha elde edilir ki bu dizi

$$\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial y} = 0,0,0,1,2x,3x^2+2y,4x^3+6xy,5x^4+12yx^2+3y^2,\ldots$$

şeklindedir. Yine bu kısmi türevlerin tekrar türevleri alınarak ikinci mertebeden ve bu şekilde devamla $n.$ mertebeden türev dizileri elde edilebilir. Bu dizilerde, x ve y ye tamsayı değerleri verilerek yeni tamsayı dizileri elde edilebilir**.**

Tanım 4.1.1: (İki Değişkenli Fibonacci Polinomlarının Kısmi Türevleri)

İki değişkenli Fibonacci polinomları için $n \geq 0$ olmak üzere,

$$F_{n+1}(x,y) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^i$$

şeklinde verilen eşitlik x değişkenine göre türevi alınırsa, $\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} = 0$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (n-2i)\binom{n-i}{i} x^{n-1-2i} y^{i}$$

şeklinde verilen türev formülü elde edilmiştir (Filipponi and Horadam 1993). Benzer şekilde y değişkenine göre türevi alınırsa, $\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 0$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i\binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^{i-1}$$

şeklinde verilen türev formülü elde edilmiştir (Filipponi and Horadam 1993). Bu şekilde herhangi mertebeden türev için de formüller elde edilebilir. Örneğin; iki değişkenli Fibonacci polinomlarının ikinci mertebeden x değişkenine göre türevi

$$\frac{\partial^2 F_{n+1}(x,y)}{\partial^2 x} = \begin{cases} 0 & , n = 0,1 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} (n-2i)(n-1-2i)\binom{n-i}{i} x^{n-2-2i} y^{i} & , n \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde olup, bu polinomların y değişkenine göre ikinci mertebeden türevi

$$\frac{\partial^2 F_{n+1}(x,y)}{\partial^2 y} = \begin{cases} 0 & , n = 0,1 \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i(i-1)\binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^{i-2} & , n \geq 2 \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.2: $n \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial F_n \;\; x, y}{\partial x} = \frac{\partial F_{n+1} \;\; x, y}{\partial y}$$

dir (Swamy 1999).

Teorem 4.1.3: $\frac{\partial F_1 \;\; x,y}{\partial x} = 0$ ve $n > 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial F_n \;\; x, y}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i \;\; x, y \;\; F_{n-i} \;\; x, y$$

dir.

İspat: İspatı tümevarım metodu ile yapacağız. $n = 2$ için

$$\sum_{i=1}^{2-1} F_i \;\; x, y \;\; F_{2-i} \;\; x, y \;\; = F_1 \;\; x, y \;\; F_1 \;\; x, y$$

$$= 1 = \frac{\partial}{\partial x} \;\; x \;\; = \frac{\partial F_2 \;\; x, y}{\partial x}$$

olup iddia doğrudur. Şimdi iddianın $k \leq n$ için doğru olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\frac{\partial F_{n-1} \;\; x, y}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n-2} F_i \;\; x, y \;\; F_{n-1-i} \;\; x, y$$

$$\frac{\partial F_n \;\; x, y}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i \;\; x, y \;\; F_{n-i} \;\; x, y$$

eşitlikleri mevcuttur. İki değişkenli Fibonacci polinomları için

$$F_{n+1}(x,y) = xF_n(x,y) + yF_{n-1}(x,y)$$

şeklinde verilen eşitliğin x değişkenine göre kısmi türevi alınıp, yukarıda kabul edilen eşitlikler dikkate alınırsa

$$\frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial x} = F_n(x,y) + x\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial F_{n-1}(x,y)}{\partial x}$$

$$= F_n(x,y) + x\sum_{i=1}^{n-1} F_i(x,y)F_{n-i}(x,y) + y\sum_{i=1}^{n-2} F_i(x,y)F_{n-1-i}(x,y)$$

$$= F_n(x,y) + xF_{n-1}(x,y)F_1(x,y) + x\sum_{i=1}^{n-2} F_i(x,y)F_{n-i}(x,y)$$

$$+ y\sum_{i=1}^{n-2} F_i(x,y)F_{n-1-i}(x,y)$$

$$= F_n(x,y) + xF_{n-1}(x,y)F_1(x,y)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x,y)\left(xF_{n-i}(x,y) + yF_{n-1-i}(x,y)\right)$$

$$= F_n(x,y)F_1(x,y) + F_{n-1}(x,y)F_2(x,y) + \sum_{i=1}^{n-2} F_i(x,y)F_{n-i+1}(x,y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i(x,y)F_{n+1-i}(x,y)$$

olur ki bu eşitliğin tüm pozitif tamsayılar için doğru olduğunu gösterir.

$\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial y}$ olduğu dikkate alınarak y değişkenine göre türev alınırsa oluşturulan dizi için yukarıdaki teoremi aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 4.1.4: $\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 0$ ve $n > 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n-2} F_i(x,y)\, F_{n-1-i}(x,y)$$

dir.

Teorem 4.1.5: $n \geq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i (n-2i)\, F_{n-2i}(x,y)\, y^i$$

dir.

İspat: $n = 1$ için

$$\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 = (-1)^0 (1-0)\, F_1(x,y)$$

olup eşitlik doğrudur. n. iki değişkenli Fibonacci polinomuna kadar bu eşitliğin sağlandığını kabul edelim. n nin $n = 2p$ olacak şekilde bir çift tamsayı olduğunu varsayalım. O halde

$$\frac{\partial F_{2p+1}(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p-2i)\, F_{2p-2i}(x,y)\, y^i$$

$$\frac{\partial F_{2p}(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p-1-2i) F_{2p-1-2i}(x,y)\, y^i$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p-2i) F_{2p-1-2i}(x,y)\, y^i + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{1+i} (2p-1-2i)\, y^i$$

eşitlikleri kabulümüzden dolayı sağlanır. Şimdi iddiamızın $n+1=2p+1$ için sağlandığını gösterelim. İki değişkenli Fibonacci polinomlarının tanımından dolayı

$$F_{2p+2}(x,y) = xF_{2p+1}(x,y) + yF_{2p}(x,y)$$

yazılır. O halde

$$\frac{\partial F_{2p+2}(x,y)}{\partial x} = F_{2p+1}(x,y) + x\frac{\partial F_{2p+1}(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial F_{2p}(x,y)}{\partial x}$$

$$= F_{2p+1}(x,y) + x\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p-2i) F_{2p-2i}(x,y)\, y^i$$

$$+y\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p-2i) F_{2p-1-2i}(x,y)\, y^i + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{1+i} (2p-1-2i)\, y^i$$

$$= F_{2p+1}(x,y) + x\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p-2i)\, y^i \left(xF_{2p-2i}(x,y) + yF_{2p-1-2i}(x,y)\right) + y\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{1+i} (2p-1-2i)\, y^i$$

$$= F_{2p+1}(x,y) + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p-2i) F_{2p+1-2i}(x,y)\, y^i$$

$$+y\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{1+i} (2p-1-2i)\, y^i$$

$$= (2p+1) F_{2p+1}(x,y) - y(2p-1) F_{2p-1}(x,y) + \cdots + (-1)^p F_1(x,y)\, y^p$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (2p+1-2i) F_{2p+1-2i}(x,y)\, y^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i (n-2i) F_{n-2i}(x,y) y^i$$

$$= \frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial x}$$

olup ilk ve son terimden n bir çift sayı iken eşitliğin sağlandığı görülür. Benzer olarak n tek sayı olması durumunda da eşitliğin sağlandığı görülebilir.

$\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial y}$ olduğu dikkate alınarak yukarıdaki teoremi y değişkenine göre türev alınarak oluşturulan dizi için aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Teorem 4.1.6: $n \geq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^i (n-2-2i) F_{n-2-2i}(x,y) y^i$$

dir.

Teorem 4.1.7:

$$F_n(x,y) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial}{\partial x} F_{n+1}(x,y) + y \frac{\partial}{\partial x} F_{n-1}(x,y)\right)$$

dir.

İspat: İki değişkenli Fibonacci polinomları için verilen tanımdan hareketle

$$F_{n+1}(x,y) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^{i}, n \geq 1$$

$$F_{n-1}(x,y) = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i} y^{i}, n \geq 3$$

yazılır. O halde

$$F_{n+1}(x,y) + yF_{n-1}(x,y) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^{i} + y \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i} y^{i}$$

$$= x^{n} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^{i} + \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i} y^{i+1}$$

$$= x^{n} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^{i} + \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-1-i}{i-1} x^{n-2-2i} y^{i}$$

$$= x^{n} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left(\binom{n-i}{i} + \binom{n-1-i}{i-1} \right) x^{n-2i} y^{i}$$

$$= x^{n} + n \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-1-i}{i-1} \frac{1}{i} x^{n-2i} y^{i}$$

yazılır. Son eşitliğin türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{n+1}(x,y) + y \frac{\partial}{\partial x} F_{n-1}(x,y) = nx^{n-1} + n \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-1-i}{i-1} \frac{n-2i}{i} x^{n-1-2i} y^{i}$$

ve buradan

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{n+1}(x,y)+y\frac{\partial}{\partial x}F_{n-1}(x,y)\right)=x^{n-1}+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\binom{n-1-i}{i-1}\frac{n-2i}{i}x^{n-1-2i}y^{i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n-1-i}{i}x^{n-1-2i}y^{i}=F_n(x,y)$$

elde edilir. İlk ve son terimden iddianın tüm pozitif tamsayılar için doğru olduğu görülür.

$\frac{\partial F_n(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F_{n+1}(x,y)}{\partial y}$ olduğu dikkate alınarak, yukarıdaki teorem y değişkeni için aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.1.8:

$$F_n(x,y)=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial}{\partial y}F_{n+2}(x,y)+y\frac{\partial}{\partial y}F_n(x,y)\right)$$

dir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada Fibonacci polinomlarının temelini oluşturan k-Fibonacci dizileri ve özellikleri ele alınarak, bu polinomların türevleri ile ilgili özellikler araştırıldı. Daha sonra Fibonacci tipi polinomların genelleştirmelerinden biri olan iki değişkenli Fibonacci polinomları araştırıldı ve bu polinomlarının kısmi türevleri ile ilgili yeni sonuçlar elde edildi. Bu anlamda iki değişkenli Fibonacci polinomlarının kısmi türevlerinin bu polinomlarının çarpımlarının toplamı veya bu polinomların katlarının toplamı şeklinde yazılabileceği ve iki değişkenli Fibonacci polinomlarının da türev polinomları yardımıyla elde edilebildiği görüldü.

KAYNAKLAR

Abbas, HA., 2009. İki Değişkenli Fibonacci ve Lucas Polinomları. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Belbachir, H. and Bencherif, F., 2008. On Some Properties of Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials. Journal of Integer Sequences 11, Article 08.2.6.

Catalani, M., 2004. Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials. Arxiv: math/0211366v2 [math.CO], 4 Jun.

Catalani, M., 2004. Some Formulate for Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials. Arxiv: math/0406323v1[math.CO], 16 Jun.

Frei, G., 1980. Binary Lucas and Fibonacci Polynomials I. Mathematische Nachrichten, 96: 83-112.

Falcon, S. and Plaza, A., 2007. On the Fibonacci *k*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 32(2), 1615-1624.

Falcon, S. and Plaza, A., 2007. The *k*-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle. Chaos, Solitons & Fractals, 33(1), 38-49.

Falcon, S. and Plaza, A., 2008. The *k*-Fibonacci hyperbolic functions. Chaos, Solitons & Fractals, 38(2), 409-420.

Falcon, S. and Plaza, A., 2009. On *k*-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. Chaos, Solitons & Fractals, 39, 1005-1019.

Falcon, S. and Plaza, A., 2009. The metallic ratios as limits of complex valued transformations. Chaos, Solitons & Fractals, 41, 1-13.

Filipponi, P. and Horadam, A.F., 1993. Second derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials. The Fibonacci Quarterly, 194-204.

Gould, HW., 1972. Combinatorial Identities. Morgantown, W. Va., 50-90.

Livio, M., 2002. The Golden Ratio:The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number. New York, http://mathworld.wolfram.com/.

Sloane, NJA., 2006. The on-line encyclopedia of integer sequences. www.research.att.com/njas/sequences/.

Stakhov, A. and Rozin, B., 2006. The “golden” algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals, 27, 1415-1421.

Swamy, MNS., 1999. Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials and Their Associated Diagonal Polynomials. The Fibonacci Quarterly, 37, 213-222.

Tuglu, N. and Kocer, EG. and Stakhov, A., 2011. Bivariate Fibonacci Like p – polynomials. Applied Mathematics and Computations, 217(24), 10239-10246.

Vajda, S., 1989. Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Erzurum'da doğdu. İlk ve orta öğretimini Erzurum da tamamladı. 2006 tarihinde Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne yerleşerek lisans öğrenimine başladı ve 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.