TİPİK REEL FONKSİYONLAR VE BİLGİSAYAR DESTEKLİ MATEMATİK İLE (MATHEMATICA) GEOMETRİK YORUMU

Nurdoğan GÜNER

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Halit ORHAN
2012

Her hakkı saklıdır

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TİPİK REEL FONKSİYONLAR VE BİLGİSAYAR DESTEKLİ MATEMATİK İLE (MATHEMATICA) GEOMETRİK YORUMU

Nurdoğan GÜNER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2012

Her hakkı saklıdır

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

TİPİK REEL FONKSİYONLAR VE BİLGİSAYAR DESTEKLİ MATEMATİK İLE (MATHEMATICA) GEOMETRİK YORUMU

Doç. Dr. Halit ORHAN danışmanlığında, Nurdoğan GÜNER tarafından hazırlanan bu çalışma 16/07/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Hüseyin KHALİLOV *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Aslan GÜLCÜ *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Halit ORHAN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TİPİK REEL FONKSİYONLAR VE BİLGİSAYAR DESTEKLİ MATEMATİK İLE (MATHEMATICA) GEOMETRİK YORUMU

Nurdoğan GÜNER

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Halit ORHAN

Bu tezde tipik reel fonksiyonlar ve onların geometrik yorumları incelenmiştir. Ayrıca, araştırma bulguları örneklerle desteklenmiştir.

2012, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tipik reel fonksiyon, analitik fonksiyon, harmonik fonksiyon, ünivalent fonksiyon, bilgisayar destekli matematik, Mathematica.

ABSTRACT

Master Thesis

TYPICALLY REAL FUNCTIONS AND GEOMETRICAL INTERPRETATIONS OF THEM WITH COMPUTER AIDED MATHEMATICS (MATHEMATICA)

Nurdoğan GÜNER

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Halit ORHAN

Typically real functions and their geometric properties were investigated in this thesis. Also research findings were supported with examples.

2012, 53 pages

Keywords: Typically real function, analytic function, harmonic function, univalent function, computer aided mathematics, Mathematica.

TEŞEKKÜR

Tez konumu bana vererek çalışmalarımda beni yönlendiren, yardım ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Halit ORHAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında değerli fikir ve eleştirileri ile çalışmalarımı değerlendiren Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na, K.K.E.F. İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a, yararlandığım Mathematica Programı'nın kullanımında verdiği destekten dolayı K.K.E.F. Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Aslan GÜLCÜ'ye, çalışmalarım esnasında konu ile ilgili bilgi ve çalışmalarını benimle paylaşan Lublin Teknoloji Üniversitesi Teknolojinin Temelleri Fakültesi Öğretim Üyesi Sayın Dr. Paweł Zaprawa'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda bana yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Erhan DENİZ, Sayın Arş. Gör. Murat ÇAĞLAR, Sayın Arş. Gör. Nihat YAĞMUR ve değerli meslektaşım Sayın Ender HANCI'ya teşekkür ederim.

Çalışmalarımı rahatlıkla yürütmem hususunda desteklerinden dolayı aileme ve özellikle dürüstlüğü ve çalışkanlığı ile bana örnek olan babam Sayın Yaşar GÜNER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Nurdoğan GÜNER
Temmuz 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Eksen
$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
$\mathbb{N}$	$\{1,2,3,\dots\}$ Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$ Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\emptyset$	Boş Küme
E	$\{z \in \mathbb{C}: \lvert z\rvert < 1\}$ Açık Birim Diski
S	E Birim Diskinde Analitik ve Ünivalent Olan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ Fonksiyonlarının Sınıfı
SR	S de Tüm a_n Katsayılarının Reel Olduğu Fonksiyonların Kümesi
$k(z)$	Koebe Fonksiyonu
P	$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ Biçimindeki Fonksiyonların Sınıfı
PR	P de Tüm p_n Katsayılarının Reel Olduğu Fonksiyonların Kümesi
TR	$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ Şeklindeki Tipik Reel Fonksiyonların Kümesi
S_H	$f = h + \bar{g}$ Şeklindeki Harmonik Ünivalent Fonksiyonların Sınıfı
S_H^0	S_H Sınıfında $g'(0) = 0$ Şartını Sağlayan Fonksiyonların Kümesi
T_H	$f = h + \bar{g}$ Şeklindeki Tipik Reel Harmonik Fonksiyonların Sınıfı
T_H^0	T_H Sınıfında $g'(0) = 0$ Şartını Sağlayan Fonksiyonların Kümesi
$K(z)$	Harmonik Koebe Fonksiyonu
$Re(z)$	z Kompleks Sayısının Reel Kısmı
$Im(z)$	z Kompleks Sayısının İmajiner Kısmı
$\Delta(z)$	$\frac{f(z)-f(\bar{z})}{z-\bar{z}}$ Oranı
max	Maksimum
min	Minimum
$signx$	İşaret Fonksiyonu
∂E	E Birim Diskinin Sınırı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Çağımız bilim anlayışının benimsediği disiplinler arası yaklaşım, Analiz ve Geometrinin etkileşimini sağlamış ve bu da Kompleks Fonksiyonlar Teorisi alanında kendini göstererek Geometrik Fonksiyonlar Teorisi'ni ortaya çıkarmıştır. Bu teorinin temeli, Bernhard Riemann'ın 1851'de ortaya attığı ve literatürde "Riemann Dönüşüm Teoremi" olarak bilinen teoreme dayanmaktadır (Deniz 2011).

20. yüzyılın başlarında Geometrik Fonksiyonlar Teorisinin önemli bir uygulama alanı olarak Ünivalent (Yalınkat) Fonksiyonlar Teorisi ortaya çıkmış ve bu alandaki çalışmalar birim diskte analitik, ünivalent ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimindeki fonksiyonların kümesi olan S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır. Yapılan çalışmalar da daha çok katsayı sınırı ve ünivalentlik kriteri bulma yönünde ilerlemiştir. 1920'li yıllardan sonra Bieberbach'ın ortaya attığı, "$f \in S,\ n = 2,3,4 \ldots$ için $|a_n| \leq n$" tahmininin ispatı problemi üzerinde uzun yıllar boyunca çalışılmış ve nihayet 1985 yılında De Branges tarafından ispat edilmiştir (Orhan 2002).

S sınıfında tüm a_n katsayılarının reel olduğu SR sınıfı için $n = 2,3,4, \ldots$ olmak üzere, "$|a_n| \leq n$" eşitsizliğinin ispatında ihtiyaç duyulan "her $z \in E$ için $f(z) \neq f(\bar{z})$" şartı, ünivalent olması gerekmeyen bir fonksiyon çeşidinin çalışılmasına olanak sağlamıştır. Rogosinski (1932), bu şartı sağlayan fonksiyonları "tipik reel kuvvet serisi" olarak adlandırarak bu alanda temel oluşturmuştur. Tipik reel fonksiyonlar, bu tarihten itibaren $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimindeki fonksiyonlar için tanımlanarak, katsayı tahminleri ve bazı özellikleri üzerinde çalışılmıştır. Yapılan çalışmalar, çeşitli makalelerde yayınlanmış ve özellikle Goodman (1983)'ın "Univalent Functions" kitabının birinci cildinde, "Typically Real Functions And Related Topics" başlığı altında bir bölüm olarak yer almıştır.

Mühendislik, fizik, elektronik, tıp, aerodinamik ve uygulamalı matematik gibi farklı alanlarda kullanılan harmonik fonksiyonların 1980'li yıllardan itibaren kompleks analizciler tarafından çalışılması, analitik ve ünivalent fonksiyonlar için ulaşılan bazı sonuçların harmonik ve ünivalent fonksiyonlar için de geçerli olup olmadığı sorusunu ortaya çıkarmıştır. Clunie and Sheil-Small (1984), “Harmonic Univalent Functions” makalesi ile bu sorunun cevabının olumlu olduğunu göstermişlerdir (Şeker 2008). Bu çalışmada ayrıca harmonik tipik reel fonksiyon tanımını yapmışlardır. Böylelikle harmonik fonksiyonlar için de tipik reel fonksiyon kavramı oluşmuştur.

Biz bu çalışmamızla, analitik veya harmonik tipik reel bir fonksiyon için tanıma eşdeğer şarlar bularak bir fonksiyonun tipik reel olup olmadığının belirlenmesinde kolaylık sağlamayı amaçladık. Ayrıca, geometrik olarak tipik reel fonksiyonun ne anlama geldiğini belirlemeye çalıştık. Burada, değişik sınıflara ait fonksiyonların birim diski dönüştürdüğü bölgeleri temsil ederken “Mathematica” bilgisayar programını kullandık.

Sunulan tezin bu bölümünde, konu ile ilgili amaç, kapsam ve literatür bilgilerine yer verilmiştir.

“Kuramsal Temeller” olarak adlandırılan ikinci bölümde, öncelikle konunun temel tanım ve teoremleri belirtilmiş, ardından ünivalent fonksiyonlar, bazı alt sınıfları ve S sınıfı tanıtılmıştır.

“Materyal ve Yöntem” adını verdiğimiz üçüncü bölümde, tipik reel fonksiyonların ortaya çıkışı, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimindeki tipik reel fonksiyonlar ve harmonik tipik reel fonksiyonlar gibi konunun temelini oluşturan başlıklara yer verilmiştir.

Çalışmamıza özgünlük kazandıran “Araştırma Bulguları” başlıklı dördüncü bölümde, birim diskte analitik veya harmonik bir fonksiyonun tipik reel olup olmadığının daha kolay bir şekilde anlaşılması için tanıma eşdeğer şartlar verilmiştir. Ayrıca, tipik reel bir fonksiyonun birim diski dönüştürdüğü görüntü kümesine bakılarak geometrik yorumu yapılmış ve bu yoruma göre bir fonksiyonun tipik reel olup olmadığının anlaşılması sağlanmıştır. Bu bölümde, araştırma bulgularının örneklerle desteklenmesine özen gösterilmiştir.

Beşinci ve son bölüm olan “Tartışma ve Sonuç” kısmında, tez çalışmamızda elde edilen sonuçlar ifade edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı kavram, tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Açıklayıcı olması bakımından bazı tanımlar örneklerle, bazı teoremler de ispatlarıyla beraber verilmiştir.

Tanım 2.1.1: $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere; $D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine, z_0 noktasının ε komşuluğu denir. $D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}$ kümesine ise z_0 noktasının ε delinmiş komşuluğu adı verilir ve $D^*(z_0, \varepsilon)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2: $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in A$ noktasının en az bir komşuluğu tamamen A kümesinde kalıyorsa, z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının kümesi $içA$ ile gösterilir ve $içA$ kümesine A kümesinin içi denir.

Tanım 2.1.3: A kümesinin her noktası bir iç nokta ise A ya ($\mathbb{C}$ de) açık küme denir.

Örneğin; $A = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 3\}$ kümesinin her noktası bir iç nokta olup A açık bir kümedir.

Tanım 2.1.4: $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının her delinmiş komşuluğu A kümesinin en az bir noktasını ihtiva ediyorsa, z_0 noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir ve A kümesinin bütün yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: $A' \subset A$ oluyorsa, A kümesine ($\mathbb{C}$ de) kapalı küme denir.

Tanım 2.1.6: A kümesini içeren en küçük kapalı kümeye A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

Yığılma noktalarının kümesi ile kapanış kümesi arasında, $\bar{A} = A \cup A'$ bağıntısı vardır.

Tanım 2.1.7: $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Her $r > 0$ için $D(z_0, r)$ diskinin hem A hem de $\mathbb{C} \backslash A$ ile arakesiti boş olmayan bir küme ise z_0 noktasına, A kümesinin bir sınır noktası denir. A kümesinin bütün sınır noktalarından oluşan kümeye A kümesinin sınırı adı verilir ve kısaca ∂A ile gösterilir.

Örneğin; $D(z_0, \varepsilon)$, $\overline{D}(z_0, \varepsilon)$ ve $A = \{z : |z - z_0| = \varepsilon\}$ kümeleri için;

$$\partial D(z_0, \varepsilon) = \partial \overline{D}(z_0, \varepsilon) = \partial A = A$$

dır.

Tanım 2.1.8: Kompleks sayılar kümesinde U ve V gibi boş olmayan iki küme göz önüne alalım. Bu kümelerin arakesiti boş ise bu iki kümeye ayrık kümeler denildiği bilinmektedir. Eğer $\overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}$ oluyorsa, U ve V ye ayrılmış kümeler adı verilir.

Bu tanımdan, ayrık kümelerin ayrılmış küme olması gerekmediği, ancak ayrılmış kümelerin ayrık kümeler olduğu söylenebilir.

Örneğin; $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ ve $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \emptyset$ olup $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ayrık, fakat ayrılmamış kümelerdir.

Tanım 2.1.9: $A \subset \mathbb{C}$, U ve V ayrık kümeler, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ ve $A \subset U \cup V$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ de U ve V açık kümeleri varsa, A kümesine bağlantısızdır denir.

Tanım 2.1.10: $A \subset \mathbb{C}$ bağlantısız değilse, A ya bağlantılı küme denir.

A kümesinden alınan her nokta çifti yine bu kümede kalan bir eğri ile birleştirilebiliyorsa, A kümesine eğrisel bağlantılı küme denir.

Eğrisel bağlantılı bir küme aynı zamanda bağlantılıdır. Fakat her bağlantılı kümenin eğrisel bağlantılı olması gerekmez.

Örneğin; $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi eğrisel bağlantılı olup aynı zamanda bağlantılıdır.

Tanım 2.1.11: Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı bir kümeye bölge denir. Kompleks düzlemde kapalı ve bağlantılı bir kümeye de kapalı bölge denir.

Örneğin; $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, hem açık hem de bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

$\mathbb{C}$ de kompleks değişkenli ve kompleks değerli bir fonksiyon kısaca kompleks fonksiyon olarak adlandırılır. Kompleks fonksiyonun formal tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.1.12: $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olmak üzere A kümesindeki her bir z elemanına w kompleks sayısı karşılık getiren f kuralına, A dan $\mathbb{C}$ ye bir fonksiyon denir ve $f\colon A \to \mathbb{C}$ ile gösterilir. Burada A, fonksiyonun tanım kümesi, $\mathbb{C}$ de değer kümesidir. z_0 elemanına f fonksiyonu tarafından w_0 kompleks sayısı karşılık getiriliyorsa, bu $w_0 = f(z_0)$ şeklinde yazılarak gösterilir. Bu durumda w_0, z_0 ın f altındaki görüntüsü (veya f nin z_0 daki değeri) olarak adlandırılır. Fonksiyon belirli bir kural ile verilmişse, bu $w = f(z)$ şeklinde yazılabilir.

Bu tanıma göre $w = f(z)$ kompleks sayı olduğundan reel ve imajiner kısımlarından söz edilebilir. O halde $z = x + iy$ alınırsa,

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olur. Doğal olarak,

$$Ref(z) = u(x,y) \text{ ve } Imf(z) = v(x,y)$$

dir. Görüleceği gibi kompleks fonksiyon, biri reel diğeri imajiner kısım olmak üzere iki tane iki değişkenli reel fonksiyondan oluşmaktadır. $z = re^{i\theta}$ olarak alınırsa, $f(z)$ kompleks fonksiyonu kutupsal formda,

$$w = f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda,

$$Ref(z) = u(r,\theta) \text{ ve } Imf(z) = v(r,\theta)$$

olur.

Örneğin; $z = x + iy$ alınırsa, $f(z) = z^2$ fonksiyonu reel değişkenlerle,

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

şeklinde yazılabilir. Burada $Ref(z) = x^2 - y^2$ ve $Imf(z) = 2xy$ dir. Ayrıca $z = re^{i\theta}$ olarak alınırsa, $f(z) = z^2$ fonksiyonu kutupsal formda,

$$f(z) = (re^{i\theta})^2 = r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = r^2\cos 2\theta + ir^2\sin 2\theta$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, $Ref(z) = r^2\cos 2\theta$ ve $Imf(z) = r^2\sin 2\theta$ dır.

Tanım 2.1.13: $A \subset \mathbb{C}$ boştan farklı bir küme ve $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Her $z \in A$ için $|f(z)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ reel sayısı varsa, $f(z)$ fonksiyonuna sınırlıdır denir.

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan (x, y) noktalarının geometrik yerine, f fonksiyonunun grafiği denir ve burada tanım kümesi ile değer kümesi aynı koordinat sisteminde gösterilebilir. Fakat $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$ kompleks fonksiyonunun grafiği çizilemez. Çünkü bu fonksiyonun tanım kümesi ile değer kümesinin aynı koordinat sisteminde gösterilmesi için dört boyutlu bir uzaya ihtiyaç vardır. Dolayısıyla "kompleks fonksiyonların geometrik gösterimi" ile, bir f fonksiyonunun tanım kümesi ve bunun f altındaki görüntüsünün geometrik gösterimi anlatılır. Bunun için iki kompleks düzleme ihtiyaç vardır. Tanım kümesinin bulunduğu kompleks düzleme z-düzlemi veya xy-düzlemi, değer kümesinin bulunduğu kompleks düzleme de w-düzlemi veya uv-düzlemi adı verilir. z-düzlemindeki bir kümeyi w-düzlemindeki bir kümeye dönüştürdüğünden "$f(z)$ fonksiyonu" yerine, "$f(z)$ dönüşümü" ifadesi de kullanılır.

Örneğin; $f(z) = z$ fonksiyonu her noktayı kendisine dönüştüreceğinden, E nin bu fonksiyon altındaki görüntüsü kendisidir.

Tanım 2.1.14: $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası ve w_0 bir kompleks sayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < |z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $z,\ z_0$ a yaklaşırken $f(z)$ fonksiyonunun limiti w_0 dır denir ve bu durum kısaca,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

şeklinde yazılarak gösterilir.

Tanım 2.1.15: $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.1.16: $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $S \subset A$ kümesinin her noktasında sürekli ise $f(z)$ fonksiyonuna S kümesinde süreklidir denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu A kümesinde, yani tanım kümesinde, sürekli ise $f(z)$ fonksiyonuna sürekli fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.1.17: $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer;

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limitin değeri, $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi adı verilir. $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğunda diferensiyellenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir (Kadıoğlu 2012).

Teorem 2.1.18: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında diferensiyellenebilirse bu noktada u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevleri var ve

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır.

Tanım 2.1.19: S ve A, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde açık iki alt küme ve $S \subset A$ olsun. $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, S kümesinin her noktasında analitik ise $f(z)$

fonksiyonuna, S kümesinde analitik fonksiyon denir. $f(z)$ fonksiyonu A kümesinde, yani tanım kümesinde, analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna analitik fonksiyon adı verilir. $\mathbb{C}$ düzleminde analitik olan fonksiyona ise tam fonksiyon denir.

Örneğin; $f(z) = \sin z$ ve $f(z) = e^z$ fonksiyonları tüm $\mathbb{C}$ düzleminde analitik olup tam fonksiyonlardır. Fakat $f(z) = |z|^2$ hiçbir yerde analitik değildir. Çünkü bu fonksiyonun yalnız $z_0 = 0$ noktasında türevi vardır. Fakat $z_0 = 0$ noktasının herhangi bir komşuluğunda türevi yoktur.

Tanım 2.1.20: $B \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi ve $u: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. u nun birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinin var ve sürekli olduğunu kabul edelim. Ayrıca her $(x, y) \in B$ için,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

oluyorsa, u ya B bölgesinde reel harmonik fonksiyon denir. Eğer $u(z) = u(x, y)$ ve $v(z) = v(x, y)$ fonksiyonları bir B bölgesinde reel harmonik ise $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonuna B de kompleks harmonik fonksiyon denir (Başkan 1991).

Biz bu çalışmada, kompleks harmonik fonksiyonlardan bahsedeceğiz ve bunları kısaca harmonik fonksiyon olarak belirteceğiz.

Örneğin; $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z + 2\bar{z}$ fonksiyonu için,

$$f(z) = z + 2\bar{z} = x + iy + 2(x - iy) = 3x - iy = u(x, y) + iv(x, y)$$

olup,

$$u_x = 3,\ u_y = 0,\ u_{xx} = 0, u_{yy} = 0 \ \text{ ve } \ v_x = 0,\ v_y = -1,\ v_{xx} = 0, v_{yy} = 0$$

kısmi türevleri $\mathbb{C}$ de var ve süreklidir. Diğer yandan her $(x, y) \in \mathbb{C}$ için $u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$ ve $v_{xx} + v_{yy} = 0 + 0 = 0$ dır. Yani $u(x, y)$ ve $v(x, y)$, $\mathbb{C}$ de reel harmonik, dolayısıyla $f(z)$, $\mathbb{C}$ de harmonik bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.21: $f(z) = u + iv$ fonksiyonu B bölgesinde analitik ise u ve v fonksiyonları bu bölgede reel harmoniktir.

İspat: f, B bölgesinde analitik olduğundan bu bölgede,

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır. Bu eşitliklerin x e göre kısmi türevlerini alırsak,

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx}$$

ve y ye göre kısmi türevlerini alırsak,

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

buluruz. Bu kısmi türevler sürekli olup kısmi türevlerin sürekliliği,

$$u_{xy} = u_{yx}, \qquad v_{xy} = v_{yx}$$

olmasını gerektirir. Bu eşitlikleri de dikkate alarak B bölgesinde,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

ve

$$v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0$$

yazılır. Yani u ve v, B bölgesinde reel harmoniktir.

Tanım 2.1.22: u ve v fonksiyonları B bölgesinde reel harmonik olsun. $f(z) = u + iv$ fonksiyonu B bölgesinde analitik ise v ye u nun harmonik eşleniği denir.

Burada v, u nun harmonik eşleniği ise u nun da v nin harmonik eşleniği olması gerekmez. Ancak v, u nun harmonik eşleniği ise u da $-v$ nin harmonik eşleniği olur.

Tanım 2.1.23: **i.** $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir.

ii. $\gamma(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$ eğrisi verilsin. Eğer $[a,b]$ aralığında $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir.

Tanım 2.1.24: $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileri de w_0 da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorsa, f fonksiyonuna, z_0 da konform bir dönüşümdür denir. f, her $z_0 \in B$ noktasında konform ise f, B de konformdur denir (Başkan 1996).

Teorem 2.1.25: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Teorem 2.1.26: Kompleks düzlemin her $B \subset \mathbb{C}$ $(B \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi, konform olarak, E birim diski üzerine dönüştürülebilir. Ayrıca, $z_0 \in B$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve B yi E birim diski üzerine dönüştüren bir tek konform dönüşüm vardır.

Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinen Teorem 2.1.26 ya göre kompleks düzlemin herhangi bir basit bağlantılı alt bölgesi üzerinde çalışmak yerine, E birim diski üzerinde çalışılabilir. Biz de, E birim diski üzerinde çalışacağız.

Tanım 2.1.27: Tanım kümesi pozitif tam sayılar, değer kümesi kompleks sayılar olan fonksiyonlara kompleks dizi denir ve kısaca (z_n) ile gösterilir.

Tanım 2.1.28: (z_n) dizisi ve z_0 kompleks sayısı verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $n \to +\infty$ için (z_n) dizisinin limiti z_0 sayısıdır denir ve

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$$

olarak yazılır.

Tanım 2.1.29: (z_n) dizisi verilsin. $\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$ olacak şekilde bir z_0 kompleks sayısı varsa, (z_n) dizisi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir ve $z_n \to z_0$ ile gösterilir. Bir sayıya yakınsayan diziye yakınsak dizi, aksi halde ıraksak dizi denir. Bir dizinin yakınsaklığına veya ıraksaklığına o dizinin karakteri denir.

Tanım 2.1.30: $A \subset \mathbb{C}$ ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $f_n: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşan kümeyi S ile gösterelim. $h: \mathbb{N} \to S,\ h(n) = f_n$ olarak tanımlanan fonksiyon, bir dizidir. Değer kümesi fonksiyonlardan oluştuğundan bu diziye, fonksiyon dizisi denir.

Tanım 2.1.31: (f_n), $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f_n: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının bir dizisi ve A kümesinde $f_n \to f$ olsun. Ayrıca, $A_1 \subset A$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in A_1$ için $n > n_0$ olduğunda, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi, A_1 kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.32: (z_n) bir kompleks dizi olmak üzere $z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$ ifadesine kompleks seri denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.33: z_0 kompleks sayısı verilsin. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ kompleks sayılar olmak üzere,

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

fonksiyon serisine, z_0 merkezli, bir kuvvet serisi denir.

Kuvvet serisi kısaca,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

ile gösterilir. $z = z_0$ için bu kuvvet serisinin toplamının a_0 olduğu görülmektedir. Yani bir kuvvet serisi, merkezi olan $z = z_0$ noktasında yakınsaktır (Kadıoğlu 2012).

Tanım 2.1.34: **i.** $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

serisine, $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğundaki Taylor serisi denir.

ii. Taylor serisinde özel olarak $z_0 = 0$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

olur. Buna Maclaurin serisi denir.

Tanım 2.1.35: **i.** $f(z)$ fonksiyonu B bölgesinde analitik olsun. $z_0 \in B$ için $f(z_0) = 0$ oluyorsa, z_0 değerine $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri (veya sıfırı) denir.

ii. z_0, $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri ve

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) \text{ ve } f^n(z_0) \neq 0$$

oluyorsa z_0 değerine $f(z)$ fonksiyonunun n. mertebedenden (veya n katlı) bir sıfır yeri denir.

Tanım 2.1.36: z_0 kompleks sayısı verilsin. a_n, b_n kompleks sayılar olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

fonksiyon serisine, z_0 merkezli, Laurent serisi denir. Burada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

serisine Laurent serisinin esas kısmı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Tanım 2.1.37: i. $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse, bu noktaya fonksiyonun tekil (singüler) noktası denir.

ii. z_0, $f(z)$ fonksiyonunun bir tekil noktası olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının $D^*(z_0, r)$ delinmiş bir komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası denir.

iii. z_0, $f(z)$ fonksiyonunun bir tekil noktası olsun. Eğer z_0 noktasının her $D^*(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonunun en az bir tekil noktası varsa, z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun ayrık olmayan tekil noktası denir.

Örneğin;

$$f(z) = \frac{1}{sin\frac{\pi}{z}}$$

fonksiyonunun tekil noktalarından oluşan küme $A = \{z: z = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\} \cup \{0\}$ olur. $z = 0,\ f(z)$ fonksiyonunun ayrık olmayan tekil noktası iken diğer tekil noktaların her biri $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktasıdır.

Ayrık tekil noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir.

Ayrık tekil noktalar; kaldırılabilir tekil nokta, kutup noktası ve esas tekil nokta olmak üzere üç kısma ayrılır.

Tanım 2.1.38: z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonunun Laurent serisini göz önüne alalım.

i. Bu serinin esas kısmındaki bütün katsayılar sıfır oluyorsa, z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kaldırılabilir tekil noktası denir.

ii. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa, z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir. z_0 noktasının uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisinde, paydadaki $(z - z_0)$ ın en büyük kuvveti m ise z_0 noktasına, $f(z)$ fonksiyonunun $m.$ mertebeden kutup noktası (veya $m.$ mertebeden kutbu) denir.

Örneğin;

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$$

fonksiyonunun tekil noktası, $z_0 = 0$ noktasıdır. Bu noktanın delinmiş komşuluğundaki Laurent serisi,

$$f(z) = \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots - 1}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots$$

şeklindedir. O halde, $z_0 = 0,\ f(z)$ fonksiyonunun 1. mertebedenden kutbudur.

iii. Bu serinin esas kısmında sonsuz sayıda terim varsa, z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun esas tekil noktası denir.

Tanım 2.1.39: Bir B bölgesinde kutuptan başka tekil noktası olmayan $f(z)$ fonksiyonuna, B de meromorf fonksiyon denir.

Örneğin; $f(z) = \frac{e^z}{z}$ fonksiyonunun kutup noktası $z_0 = 0$ olup, bunun dışında tekil noktası yoktur. O halde, $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de meromorf bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.40: Bir $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların bir $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ dizisi verilsin. Eğer her $m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n$ için,

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = 0$$

oluyorsa, $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ fonksiyon dizisine $[a, b]$ de ortogonaldir denir.

2.2. Ünivalent Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Bu bölümde, ünivalent fonksiyonlar, bazı alt sınıfları ve S sınıfı tanıtılarak bunlar arasındaki ilişkiler belirtilmiştir. Ayrıca, bazı önemli fonksiyonlar, E yi dönüştürdükleri bölgelerin geometrik temsilleri ile beraber verilmiştir.

Tanım 2.2.1: $f(z)$ fonksiyonu $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde bire-bir ise, yani her $z_1, z_2 \in B$ için $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ oluyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna, B de ünivalent (ya da yalınkat) fonksiyon denir (Nehari 1952).

Biz bu çalışmada ünivalent kelimesini kullanmayı tercih edeceğiz.

a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere,

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0$$

şeklindeki rasyonel fonksiyona Mobiüs dönüşümü denir. Mobiüs dönüşümü, analitik olduğu bir bölgede ünivalenttir. Örneğin; $f(z) = \frac{2z+3}{3z-2}$ fonksiyonu $|z| < \frac{2}{3}$ bölgesinde ünivalenttir.

Tanım 2.2.2: $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu, bir $z_0 \in B$ noktasının en az bir komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna, z_0 noktasında lokal (yerel) ünivalent fonksiyon adı verilir.

Analitik bir f fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu, z_0 noktasındaki lokal ünivalentliğe denktir.

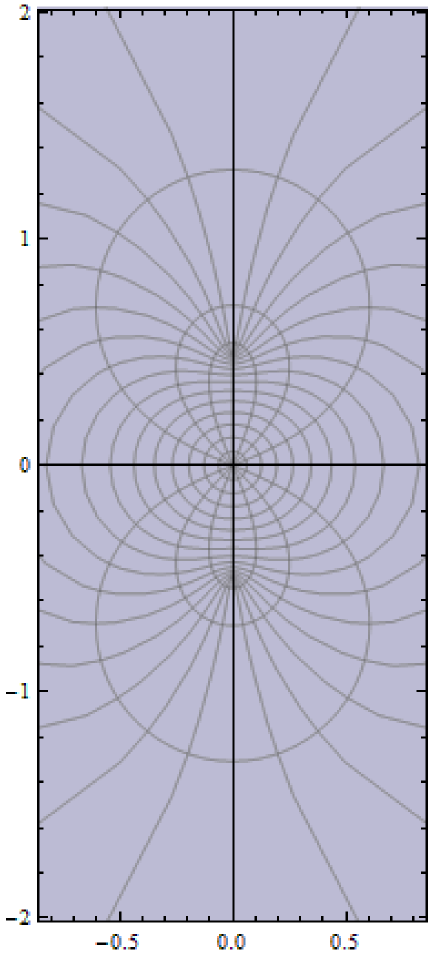
Tanım 2.2.3: E birim diskinde analitik olan,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçimindeki $f(z)$ fonksiyonuna, E de normalize edilmiş fonksiyon denir. E de normalize edilmiş bütün analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

S sınıfına ait bir f fonksiyonunun, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ eşitliğini sağladığı açıktır.

Örnek 2.2.4: $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu S sınıfına aittir ve bu fonksiyon, E birim diskini ünivalent olarak $\mathbb{C} \setminus \left\{u + iv : u = 0,\ v \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right\}$ kümesi üzerine dönüştürür.



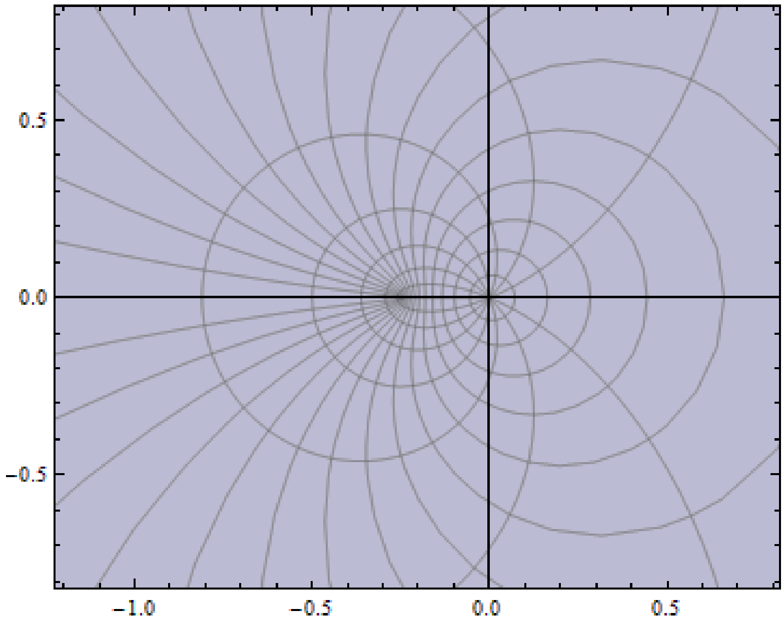
Şekil 2.1. E nin, $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Tanım 2.2.5: S sınıfında olan,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

fonksiyonuna Koebe fonksiyonu denir.

Koebe fonksiyonu E birim diskini ünivalent olarak $\mathbb{C} \backslash \left\{u + iv : u \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right], v = 0 \right\}$ bölgesi üzerine dönüştürür.



Şekil 2.2. E nin, $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

Bu görüntü kümesi, analitik olarak da bulunabilir. Bunun için Koebe fonksiyonunu,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

şeklinde yazalım. Burada, $\frac{1+z}{1-z} = g$ ve $k(z) = w = u + iv$ alırsak, $g^2 = 4w + 1$ olur. $g = \frac{1+z}{1-z}$ nin, birim diski sağ yarı düzleme dönüştürdüğünü göz önüne alırsak, $Re(g) > 0$ ve $Im(g) \in \mathbb{R}$ dir. g^2 nin reel ve imajiner kısımları,

$$Re(g^2) = (Reg)^2 - (Img)^2 \qquad \text{ve} \qquad Im(g^2) = 2(Reg)(Img)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$4u + 1 + (Img)^2 = (Reg)^2 \qquad\qquad 4v = 2(Reg)(Img)$$

dir. Burada, Img için üç durum vardır:

1. Durum: $Img = 0$ ise $v = 0$ ve $u > -\frac{1}{4}$ tür.

2. Durum: $Img > 0$ ise $v > 0$ ve $u \in \mathbb{R}$ dir.

3. Durum: $Img < 0$ ise $v < 0$ ve $u \in \mathbb{R}$ dir.

Bu üç durum $k(z)$ nin birim diski, $\mathbb{C} \backslash \left\{ u + iv : u \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right], v = 0 \right\}$ bölgesine dönüştürdüğünü ifade eder.

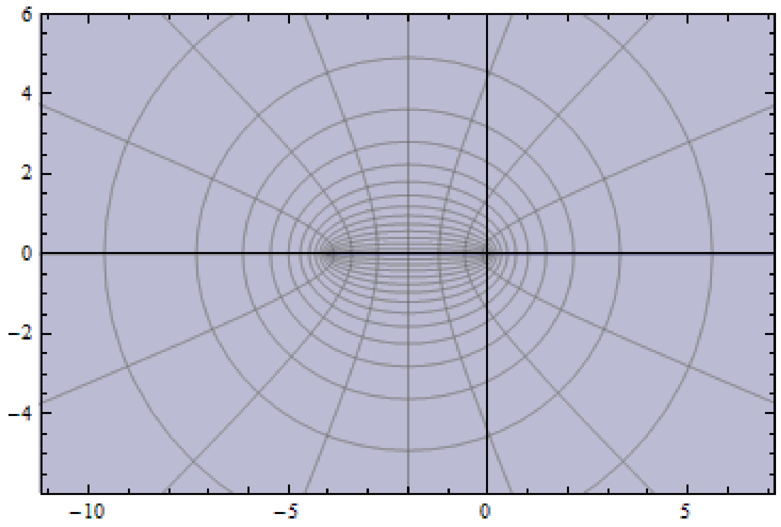
Tanım 2.2.6: $\alpha \in (0, 2]$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right]$ fonksiyonu genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu fonksiyon S sınıfına aittir.

Burada, $\alpha = 2$ olarak alınırsa Tanım 2.2.5'de verilen Koebe fonksiyonu elde edilir.

Örnek 2.2.7: Koebe fonksiyonunun bir başka şekli,

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{k\left(\frac{1}{\xi}\right)} = \xi - 2 + \frac{1}{\xi}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon, $E^{*} = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < 1\}$ kümesini reel eksen boyunca $[-4,0]$ kapalı aralığı çıkarılmış kompleks düzlemin tamamı üzerine dönüştürür.



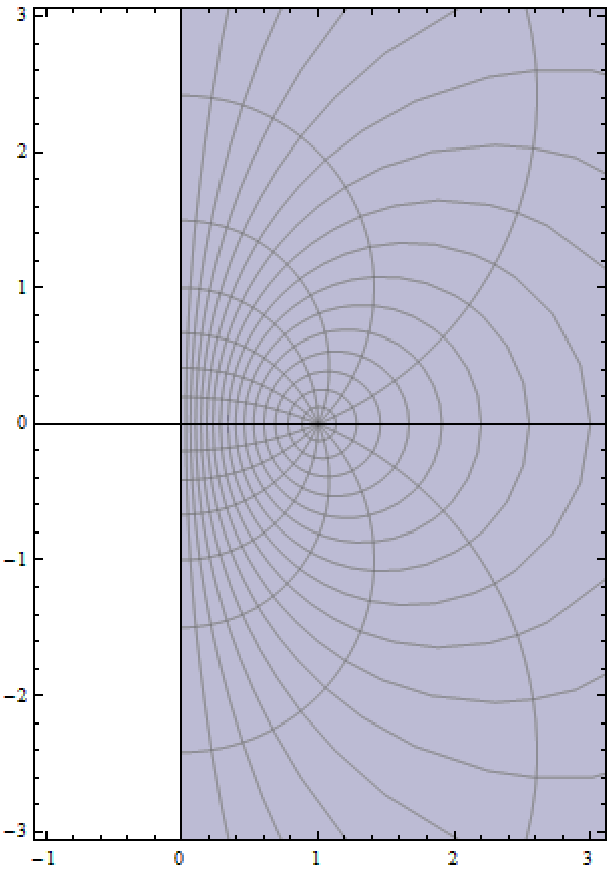
Şekil 2.3. $E^* = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < 1\}$ kümesinin, $\varphi(\xi) = \xi - 2 + \frac{1}{\xi}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Tanım 2.2.8: E birim diskinde, $f(0) = 1$ ve $Re\big(f(z)\big) > 0$ koşullarını sağlayan,

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa P sınıfı veya Caratheodory sınıfı denir.

Örnek 2.2.9: $f(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait bir fonksiyondur ve E birim diskini aşağıda gösterildiği gibi sağ yarı düzlem üzerine dönüştürür.



Şekil 2.4. E nin, $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Bu görüntü kümesi analitik olarak da bulunabilir. $z \in E,\ w \in f(E)$ olsun. Bu durumda,

$$w = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow z = \frac{w-1}{w+1}$$

ve $|z| < 1$ olduğundan,

$$\left|\frac{w-1}{w+1}\right| < 1 \Rightarrow |w-1| < |w+1|$$

dir. $w = u + iv$ alınır ve gerekli işlemler yapılırsa, $u > 0$ bulunur. Sonuç olarak yukarıdaki eşitsizliğin çözüm kümesi, $w = \{u + iv : u > 0,\ v \in \mathbb{R}\}$ olur ki bu küme, Şekil 2.4'de gösterilen sağ yarı düzlemdir.

Tanım 2.2.10: B kompleks düzlemde bir bölge olsun. Her $z \in B$ ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz \in B$ ise B ye orijine göre yıldızıl bölge denir. Bunun geometrik anlamı, B bölgesinin bütün noktalarını orijine birleştiren doğru parçalarının yine B de kalmasıdır. Eğer E de tanımlı bir f fonksiyonu için $f(E)$ orijine göre yıldızıl bir bölge ise f ye yıldızıl fonksiyon denir.

Örneğin; $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu için $k(E)$ bölgesi (Şekil 2.2), $Re(w_0) > -\frac{1}{4}$ olan reel w_0 noktasına göre yıldızıldır.

Tanım 2.2.11: B kompleks düzlemde bir bölge olsun. Farklı herhangi $z, w \in B$ noktaları ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz + (1-t)w$ doğru parçası B de kalıyorsa, B ye konveks bölge denir. $f(E)$ konveks bir bölge ise E deki analitik f fonksiyonuna, konvekstir denir.

Örneğin; $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu E yi kompleks düzlemin sağ yarısına (Şekil 2.4) dönüştürür ve bu bölge konveks olduğundan, $f(z)$ konvekstir.

S nin konveks fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı C ve yıldızıl fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı S^* ile gösterilir. Bu sınıflar arasında, $C \subset S^* \subset S$ biçiminde bir kapsam bağıntısı vardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tipik Reel Fonksiyonların Ortaya Çıkışı

Bu bölümde, tipik reel fonksiyonlara neden ihtiyaç duyulduğu belirtilmiştir.

Tanım 3.1.1: S de tüm a_n katsayılarının reel olduğu,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

fonksiyonlarının kümesi SR ile gösterilir.

SR ve S sınıfları arasında, $SR \subset S$ şeklinde bir ilişkinin olduğu açıktır.

SR sınıfındaki fonksiyonlar için a_n katsayılarının tahmini, önemli bir araştırma konusu olmuş ve bu alandaki çalışmalar aşağıdaki iki teoremin ortaya çıkmasına temel oluşturmuştur.

Teorem 3.1.2: $f(z),\ SR$ sınıfında ise bu durumda $n = 2,3,4, \ldots$ için,

$$|a_n| \leq n \tag{2}$$

dir.

İspat: $z = re^{i\theta},\ 0 < r < 1$ ve $0 < \theta < \pi$ alırsak,

$$\Delta\left(re^{i\theta}\right)=\frac{f\left(re^{i\theta}\right)-f\left(re^{-i\theta}\right)}{re^{i\theta}-re^{-i\theta}}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_nr^n\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)}{r(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} \qquad (3)$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nr^{n-1}\frac{sinn\theta}{sin\theta}$$

dır. $\Delta(r)=f'(r)$ ve $\Delta(-r)=f'(-r)$ olarak alınırsa, Δ oranı $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ değerlerine genişletilmiş olur. Bu durumda;

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{sinn\theta}{sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{ncosn\theta}{cos\theta}=n\lim_{\theta\to 0}\frac{cosn\theta}{cos\theta}=n$$

$$\lim_{\theta\to \pi}\frac{sinn\theta}{sin\theta}=\lim_{\theta\to \pi}\frac{ncosn\theta}{cos\theta}=n\lim_{\theta\to \pi}\frac{cosn\theta}{cos\theta}=\begin{cases}1, & n\ tek\ ise\\ -1, & n\ çift\ ise\end{cases}$$

$$=(-1)^{n+1}n$$

dir.

$f(z)$ ünivalent ise $0\le r<1$, $0\le\theta<2\pi$ bölgesi için $\Delta(re^{i\theta})\neq 0$ ve $\Delta(0)=1$ dir. Tüm katsayılar reel olduğu için $\Delta(z)$ reel ve E de $\Delta(z)>0$ dır.

Şimdi,

$$I_n=\int_0^{\pi}\Delta(re^{i\theta})sin\theta sinn\theta d_\theta$$

integralini hesaplayalım. $[0,\pi]$ de $\{sink\theta\}$ nın ortogonalliği kullanılarak,

$$I_n = \int_0^\pi \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k r^{k-1} \frac{sink\theta}{sin\theta}\right) sin\theta sinn\theta \, d_\theta$$

$$= a_n r^{n-1} \int_0^\pi sin^2 n\theta \, d_\theta \tag{4}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$I_n = \int_0^\pi \Delta\left(re^{i\theta}\right) sin\theta sinn\theta d_\theta = \int_0^\pi \Delta\left(re^{i\theta}\right) sin^2\theta \frac{sinn\theta}{sin\theta} d_\theta$$

dır.

m_n ve M_n, $[0,\pi]$ de $\dfrac{sinn\theta}{sin\theta}$ ifadesinin minimum ve maksimum değerlerini göstersin. Bu durumda,

$$m_n \int_0^\pi \Delta(re^{i\theta}) sin^2\theta d_\theta \leq I_n \leq M_n \int_0^\pi \Delta(re^{i\theta}) sin^2\theta d_\theta$$

dır. $\{sink\theta\}$ nın ortogonalliği ve $\Delta(re^{i\theta})$ nın seri açılımları (3) kullanılarak,

$$m_n \int_0^\pi sin^2\theta d_\theta \leq I_n \leq M_n \int_0^\pi sin^2\theta d_\theta \tag{5}$$

elde edilir.

Sonuç olarak iki trigonometrik integralin de $\dfrac{\pi}{2}$ yi verdiğini göz önüne alarak (4) ve (5) i birleştirirsek,

$$m_n \leq a_n r^{n-1} \leq M_n \tag{6}$$

elde edilir.

O halde, $M_n = n$ ve $m_n = -n$ dir. Fakat sadece n nin çift olduğu durumda $min\left(\frac{sinn\theta}{sin\theta}\right) = -n$ dir. Eğer n tek sayı ise bu durumda, $m_n > -n$ dir. Eğer (6) eşitsizliğinde $r \to 1$ için limit alınırsa, $-n \leq m_n \leq a_n \leq n$ elde edilir. Bu durumda, teoremin ifadesinden daha fazlası ispatlanmış olur ve aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.1.3: $f(z)$, SR sınıfında ve $m_n = min\left(\frac{sinn\theta}{sin\theta}\right)$ ise bu durumda her n için,

$$m_n \leq a_n \leq n \tag{7}$$

dir.

İspat: Koebe fonksiyonu, üst sınırın kesin olduğunu gösterir.

$$\tilde{k}_\theta(z) = \frac{z}{1 - 2zcos\theta + z^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{sinn\theta}{sin\theta} z^n$$

fonksiyonu SR sınıfındadır ve θ yı $\dfrac{sinn\theta}{sin\theta}$ minimum değerini alacak şekilde seçersek, $\tilde{k}_\theta(z)$ alt sınırın kesin olduğunu gösterir ve bu alt sınır $m_n = min\left(\frac{sinn\theta}{sin\theta}\right)$ dır.

Teorem 3.1.2'nin ispatında gördük ki, $f(z)$ nin ünivalent olmasına gerek yoktur. Sadece birim diskin üst yarısında, tüm z ler için $f(z) \neq f(\bar{z})$ ye ihtiyaç duyduk. Bu bize, tipik reel fonksiyonlar olarak adlandırılan, daha geniş bir sınıfın çalışılmasının gerekliliğini işaret eder.

3.2. E de Analitik ve Normalize Edilmiş Tipik Reel Fonksiyonlar

Bu bölümde, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlar için tipik reel fonksiyon kavramından ve bunların bazı özelliklerinden bahsedilmiştir.

Tanım 3.2.1: E de tanımlı ve analitik olan,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer $f(z)$ nin reel olması z nin reel olmasını, z nin reel olması da $f(z)$ nin reel olmasını gerektiriyorsa $f(z)$, E de tipik reel bir fonksiyondur denir.

E de analitik ve normalize edilmiş tipik reel fonksiyonların sınıfı TR ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre, $a_n \in \mathbb{R}$ ve her $z \in E$ için $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ dir. Ayrıca $f'(0) = 1$ olduğundan, $f(z)$ tipik reel fonksiyonu her $z \in E$ için,

$$sign\big(Imf(z)\big) = sign(Imz) \qquad (8)$$

eşitliğini sağlar. Burada reel z değerleri için $f(z)$ nin reel olduğu açıktır. Dolayısıyla (8) şartı, reel olmayan her $z \in E$ için,

$$\big(Imf(z)\big)(Imz) > 0 \qquad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu şart, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçimindeki bir fonksiyonun tipik reel olup olmadığının belirlenmesinde yeterlidir.

Örnek 3.2.2:

$$f(z) = z + \frac{z^2}{2}$$

fonksiyonu, E de tipik reel bir fonksiyondur. Çünkü, $z = x + iy$ olarak alınırsa,

$$f(z) = x + iy + \frac{(x+iy)^2}{2} = \frac{x^2 + 2x - y^2}{2} + 2i(1+x)y$$

olur. Burada, reel olmayan her $z \in E$ için,

$$\big(Imf(z)\big)(Imz) = 2(1+x)y^2 > 0$$

olup $f(z)$, E de tipik reeldir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.3'de belirtilen katsayı sınırlarının $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki tipik reel bir fonksiyon için de geçerli olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 3.2.3: Eğer $f(z)$ fonksiyonu TR sınıfında ise $m_n = min\left(\frac{sinn\theta}{sin\theta}\right)$ olmak üzere her n için,

$$m_n \leq a_n \leq n \tag{7}$$

dir.

Örnek 3.2.4: $f(z)$, TR sınıfında ise $-f(-z)$ fonksiyonu da TR sınıfındadır. Bunu göstermek için $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ alalım. $f(z)$, TR de ise (8) şartını sağlar. Dolayısıyla,

$$y = Imz = 0 \Longrightarrow v(x,y) = Imf(z) = 0 \text{ ve } v(x,y) = Imf(z) = 0 \Longrightarrow y = Imz = 0$$

dır. $-f(-z) = -u(-x,-y) - iv(-x,-y)$ fonksiyonu için,

$$-y = Im(-z) = 0 \Longrightarrow -v(-x,-y) = Im\big(-f(-z)\big) = 0$$

ve

$$-v(-x,-y) = Im\big(-f(-z)\big) = 0 \Longrightarrow -y = Im(-z) = 0$$

olup (8) şartı sağlanır. O halde $f(z)$, TR sınıfında ise $-f(-z)$ de TR dedir.

Örnek 3.2.5: TR kümesinin konveks olup olmadığını inceleyelim. Bunun için $0 \leq t \leq 1$ ve $f(z),\ g(z) \in TR$ ise $F(z) = tf(z) + (1-t)g(z)$ fonksiyonunun TR sınıfında olup olmadığına bakmalıyız. $z = x + iy$, $f(z) = u_1 + iv_1$ ve $g(z) = u_2 + iv_2$ olsun. $f(z),\ g(z) \in TR$ ise (8) şartının gereği olarak,

$$y = Im(z) = 0 \Longrightarrow [v_1 = Imf(z) = 0 \text{ ve } v_2 = Img(z) = 0]$$

ve

$$[v_1 = Imf(z) = 0 \text{ ve } v_2 = Img(z) = 0] \Longrightarrow y = Im(z) = 0$$

dır. $F(z) = tf(z) + (1-t)g(z)$ fonksiyonunda $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları yerine yazılırsa,

$$F(z) = t(u_1 + iv_1) + (1-t)(u_2 + iv_2)$$

$$= tu_1 + u_2 - tu_2 + i(tv_1 + v_2 - tv_2)$$

dir. Burada,

$$y = Im(z) = 0 \Longrightarrow tv_1 + v_2 - tv_2 = Im(F(z)) = 0$$

ve

$$tv_1 + v_2 - tv_2 = Im(F(z)) = 0 \Longrightarrow y = Im(z) = 0$$

olup (8) şartı sağlanır. O halde TR kümesi konvekstir.

Tanım 3.2.6: Tüm p_n katsayıları reel olan P sınıfına ait,

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

biçimindeki fonksiyonların kümesine pozitif reel kısımlı fonksiyonlar kümesi denir ve PR ile gösterilir.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki tipik reel fonksiyonlar, pozitif reel kısımlı fonksiyonlarla yakın ilişkilidir. Aşağıdaki teorem bu ilişkiyi göstermektedir.

Teorem 3.2.7: TR ve PR kümeleri arasında birebir eşleme vardır. Eğer $g(z)$, PR sınıfında ise bu durumda,

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2} g(z) = z + p_1 z^2 + (p_2 + 1) z^3 + \cdots$$

TR dedir. Tersine olarak eğer $f(z)$, TR sınıfında ise bu durumda,

$$g(z) = \frac{1 - z^2}{z} f(z) = 1 + a_2 z + (a_3 - 1)z^2 + \cdots$$

PR dedir.

Teorem 3.2.8: $f(z),\ TR$ sınıfında ise bu durumda,

$$f_1(z) = \frac{z^2}{(1 - z^2)^2 f(z)}$$

fonksiyonu da TR sınıfındadır.

İspat: $f \in TR$ ise Teorem 3.2.7'ye göre,

$$g(z) = \frac{1 - z^2}{z} f(z)$$

olacak şekilde $g \in PR$ vardır ve

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{z}{(1 - z^2) f(z)} \in PR$$

dir. Yine Teorem 3.2.7'ye göre,

$$f_1(z) = \frac{z^2}{(1 - z^2)^2 f(z)} \in TR$$

elde edilir.

3.3. Harmonik Tipik Reel Fonksiyonlar

Bu bölümde, harmonik tipik reel fonksiyon kavramına ve bunların bazı özelliklerine değinilmiştir.

Tanım 3.3.1: E birim diskinde analitik olan h ve g fonksiyonlarının seri açılımları,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere, $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ şartlarını sağlayan, E de konform, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ harmonik ünivalent fonksiyonlarının sınıfı S_H ile gösterilir. $g'(0) = 0$ özelliğindeki bütün $f \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı ise S_H^0 ile sembolize edilir.

Yukarıdaki tanıma göre, S_H sınıfının S sınıfını kapsadığı aşikardır.

Tanım 3.3.2: $f(z)$, E de harmonik olsun. Bu durumda $f(z)$ nin reel olması z nin reel olmasını, z nin reel olması da $f(z)$ nin reel olmasını gerektiriyorsa $f(z)$, E de tipik reel bir fonksiyondur denir.

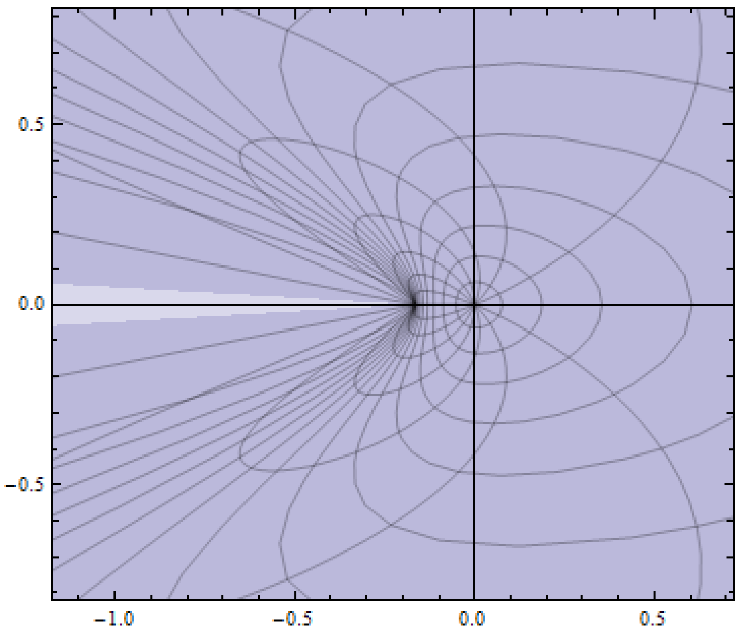
$|g'(z)| < |h'(z)|$, $f(0) = 0$, $|h'(0)| = 1$ ve $0 < r < 1$ için $f(r) > 0$ şartlarını sağlayan bütün tipik reel harmonik $f = h + \bar{g}$ fonksiyonlarının sınıfı T_H ile gösterilir. $g'(0) = 0$ şartını sağlayan $f \in T_H$ fonksiyonlarının sınıfı T_H^0 ile sembolize edilir. Burada, $h'(0) = 1$ olması gerekmediği gibi tipik reel harmonik bir fonksiyonun ünivalent olması da gerekmez.

Eğer, $f = h + \bar{g} \in T_H$ ise bu durumda $Imz > 0$ için $Imf(z) > 0$ ve $Imz < 0$ için $Imf(z) < 0$ olur.

Teorem 3.3.3: Eğer $f(z) \in S_H$ fonksiyonu reel katsayılara sahip ise $f(z)$ tipik reel olup T_H sınıfına aittir.

İspat: $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun bütün a_n ve b_n katsayıları reel ise, her $z \in E$ için $\overline{f(z)} = \overline{h(z)} + g(z) = f(\bar{z})$ dir. Öte yandan, $f(z)$ fonksiyonunun reel olması için gerek ve yeter şart $\overline{f(z)} = f(z)$ olmasıdır. Böylece, $f(z)$ reel iken $f(z) = f(\bar{z})$ elde edilir. Eğer f ünivalent ise bu durum, $z = \bar{z}$ için geçerli olabilir. Bunun anlamı, $f(z)$ nin ancak ve ancak z nin reel olduğu durumda reel olmasıdır. Böylece $f(z) \in T_H$ dir (Bostancı 2008).

Tanım 3.3.4: $h(z) = \dfrac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$ ve $g(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$ olmak üzere $K(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ fonksiyonuna, harmonik Koebe fonksiyonu denir. Bu fonksiyon, $K(z) = Re\left(\dfrac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right) + iIm\left(\dfrac{z}{(1-z)^2}\right)$ şeklinde de yazılabilir. Harmonik Koebe fonksiyonu, E birim diskini aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi reel eksenden $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right]$ aralığı çıkarılmış kompleks düzlem üzerine dönüştürür.



Şekil 3.1. E nin, $K(z) = Re\left(\dfrac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right) + iIm\left(\dfrac{z}{(1-z)^2}\right)$ harmonik Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı rolü, harmonik Koebe fonksiyonu S_H^0 sınıfında oynar.

Teorem 3.3.5: Eğer, $f = h + \bar{g} \in T_H^0$ ise bu takdirde $a_1 = 1$ ve $n = 2,3, \dots$ için,

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1),\ |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1) \text{ ve } \big||a_n| - |b_n|\big| \leq n$$

ve $f \in T_H$ ise,

$$|a_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1) \text{ ve } |b_n| < \frac{1}{3}(2n^2+1)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlik, harmonik Koebe fonksiyonu için eşitlik halini alır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Tanıma Eşdeğer Şartlar

Bu bölümde, tipik reel fonksiyon tanımına eşdeğer olarak bazı şartlar verilmiştir.

"Materyal ve Yöntem" bölümünde, literatürdeki tipik reel fonksiyon tanımları yer almaktadır. Bu tanımları aşağıdaki şekilde birleştirmek mümkündür.

Tanım 4.1.1: $f(z)$, E de analitik veya harmonik bir dönüşüm olsun. $f(z)$ nin reel olması z nin reel olmasını, z nin reel olması da $f(z)$ nin reel olmasını gerektiriyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna E de tipik reel bir fonksiyondur denir.

Yukarıdaki tanıma göre analitik veya harmonik bir $f(z)$ fonksiyonunun tipik reel olması için,

$$Im(z) = 0 \Leftrightarrow Im\big(f(z)\big) = 0 \tag{10}$$

şartını sağlaması gerekir. Yani; (10) un gerek şartı olarak,

$$Im(z) = 0 \text{ ise } Im(f(z)) = 0 \tag{11}$$

ve yeter şartı olarak da,

$$Im(f(z)) = 0 \text{ ise } Im(z) = 0 \tag{12}$$

olmalıdır. Burada (11) şartının doğru olup olmadığının belirlenmesi kolay olmasına rağmen, (12) şartı için böyle bir kolaylıktan söz edilemeyebilir. O halde, $f(z)$ nin konformluğu göz önüne alınarak aşağıdaki şart yazılabilir ve bu şartı sağlaması fonksiyonun tipik reel olması için yeterlidir.

Şart 4.1.2: E de analitik veya harmonik $f(z)$ dönüşümü verilsin. Bu durumda, reel olan her $z \in E$ için $f(z)$ reel, reel olmayan her $z \in E$ için de,

$$Im\big(f(z)\big)Im(z) > 0 \text{ veya } Im\big(f(z)\big)Im(z) < 0 \tag{13}$$

oluyorsa $f(z),\ E$ de tipik reel bir fonksiyondur.

Örnek 4.1.3: Eğer $f(z) \in TR$ ise $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonundaki tüm katsayılar reel olmalıdır. Fakat tüm katsayılarının reel olması $f(z)$ nin reel olmasını gerektirmez. Örneğin; $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonunun katsayıları reel olmasına rağmen tipik reel bir fonksiyon değildir. Çünkü $z = re^{i\theta} = rcos\theta + irsin\theta$ olarak alınırsa,

$$f\big(re^{i\theta}\big) = re^{i\theta} + 2r^2e^{2i\theta}$$

$$= rcos\theta + 2r^2cos2\theta + i(rsin\theta + 2r^2sin2\theta)$$

olur. Bu durumda,

$$Im(z) = rsin\theta = 0 \Longrightarrow Imf(z) = rsin\theta + 2r^2sin2\theta = 0$$

dır. $Im(z) = rsin\theta \neq 0$ ise,

$$Im\big(f(z)\big)(Imz) = (rsin\theta + 2r^2sin2\theta)rsin\theta = r^2sin^2\theta(1 + 4rcos\theta)$$

eşitliğinde, $r^2sin^2\theta > 0$ olup $-3 \leq 1 + 4rcos\theta \leq 5$ olduğundan reel olmayan her $z \in E$ için (13) eşitsizliği sağlanmaz. Dolayısıyla $f(z) = z + 2z^2 \notin TR$ dir.

Örnek 4.1.4: “$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu, E birim diskinde tipik reel bir fonksiyon mudur?” sorusuna cevabımız evet olacaktır. Bunu göstermek için $z=x+iy$, $k(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ alalım. Bu durumda,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{x+iy}{(1-x-iy)^2}=\frac{x-2x^2+x^3+xy^2-2y^2}{((1-x)^2+y^2)^2}+i\frac{y\big(1-(x^2+y^2)\big)}{((1-x)^2+y^2)^2}$$

olur. Burada reel olan her $z\in E$ için,

$$y=Im(z)=0\Longrightarrow\frac{y\big(1-(x^2+y^2)\big)}{((1-x)^2+y^2)^2}=Im(k(z))=0$$

ve reel olmayan her $z\in E$ için,

$$Im\big(k(z)\big)(Imz)=\frac{y^2\big(1-(x^2+y^2)\big)}{((1-x)^2+y^2)^2}>0$$

bulunur. O halde $k(z)$ Koebe fonksiyonu, (10) ve (12) şartlarını sağlar. Bu ise gösterilmek istenen sonuçtur.

Örnek 4.1.5: $f_1(z)=z+\bar{z}$ ve $f_2(z)=z-\bar{z}$ harmonik fonksiyonlarında $z=x+iy$ olarak alırsak, $f_1(z)=2x$ ve $f_2(z)=2iy$ elde edilir. Burada, reel olan her $z\in E$ için, $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ reel, reel olmayan her $z\in E$ için de,

$$Im\big(f_1(z)\big)(Imz)=0 \text{ ve } Im\big(f_2(z)\big)(Imz)=2y^2>0$$

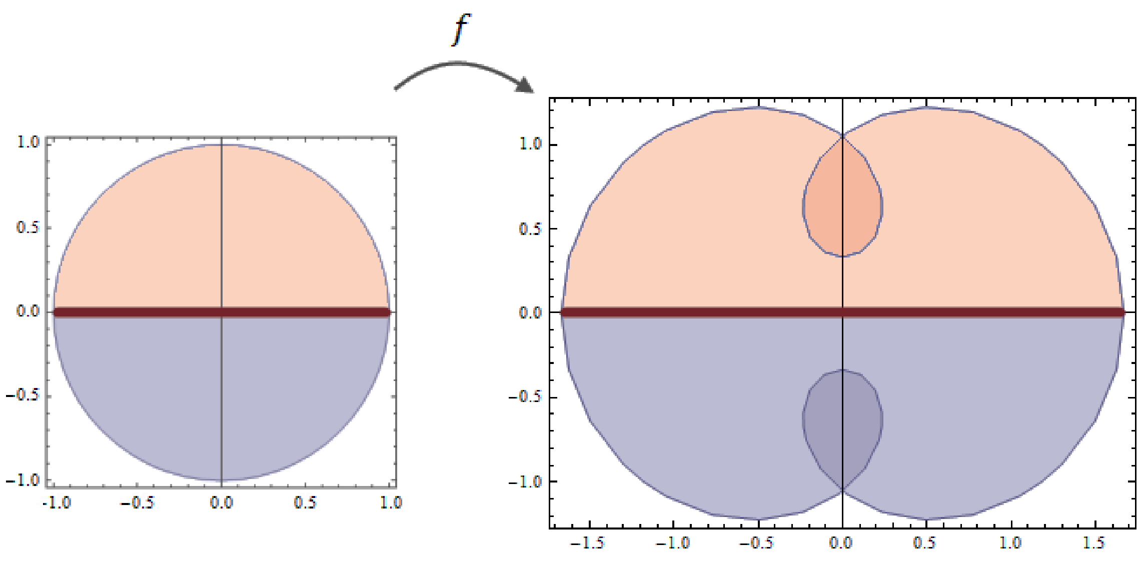
dır. O halde Şart 4.1.2 gereğince $f_2(z)$ tipik reel, $f_1(z)$ ise tipik reel değildir.

4.2. Tipik Reel Fonksiyonların Geometrik Yorumu

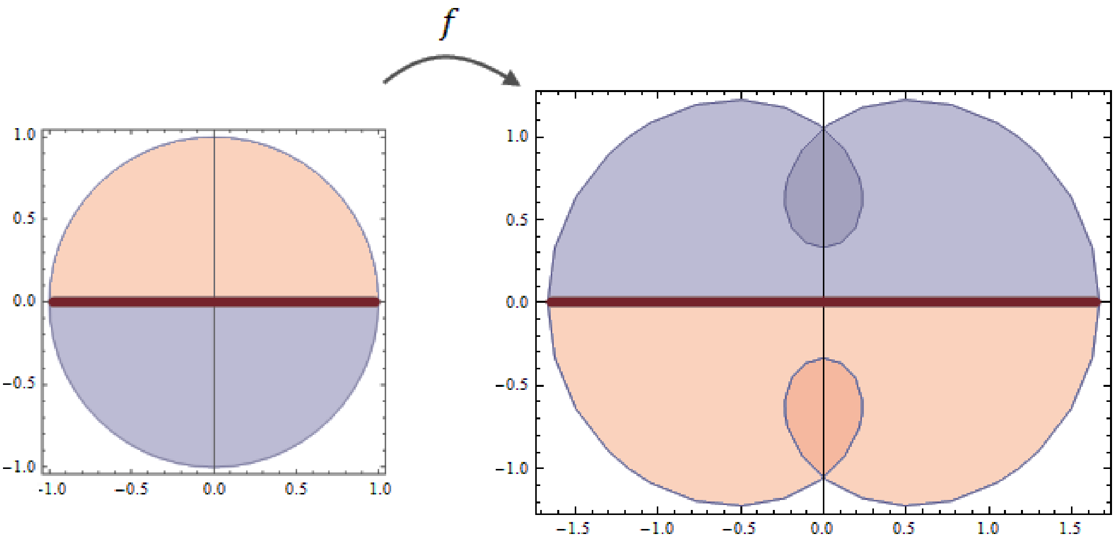
Bu bölümde, tipik reel fonksiyon tanımına eşdeğer olarak verilen Şart 4.1.2 dikkate alınarak geometrik yorum çıkarılmıştır. Bu yorum çeşitli örnekler ve geometrik temsillerle desteklenmiştir.

Geometrik Yorum 4.2.1: E de analitik veya harmonik bir tipik reel f fonksiyonu, E nin reel eksen üzerindeki noktalarını $f(E)$ görüntü kümesinin reel ekseni üzerindeki noktalara dönüştürür. Ayrıca, bu fonksiyon altında E nin üst yarı bölgesi $f(E)$ görüntü kümesinin üst veya alt yarı bölgesine, E nin alt yarı bölgesi de $f(E)$ görüntü kümesinin alt veya üst yarı bölgesine dönüşür.

Geometrik Yorum 4.2.1 aşağıda verilen iki şekil ile temsil edilebilir ve bu şekillere uygun dönüşüm yapan fonksiyonlar tipik reeldir. Şekillerde E nin reel ekseni, üst yarı bölgesi ve alt yarı bölgesi üzerindeki noktalar, bu noktaların f fonksiyonu altındaki görüntüleri ile aynı renkte gösterilmiştir.

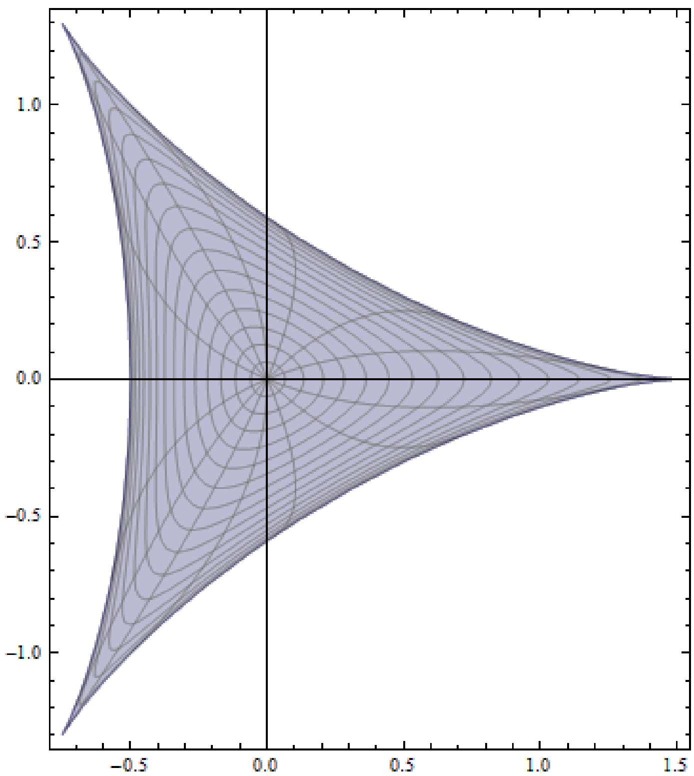


Şekil 4.1. E nin reel ekseni, üst yarı bölesi ve alt yarı bölgesinin, $f(z) = z + \frac{2}{3}z^3$ fonksiyonu altındaki görüntüsü



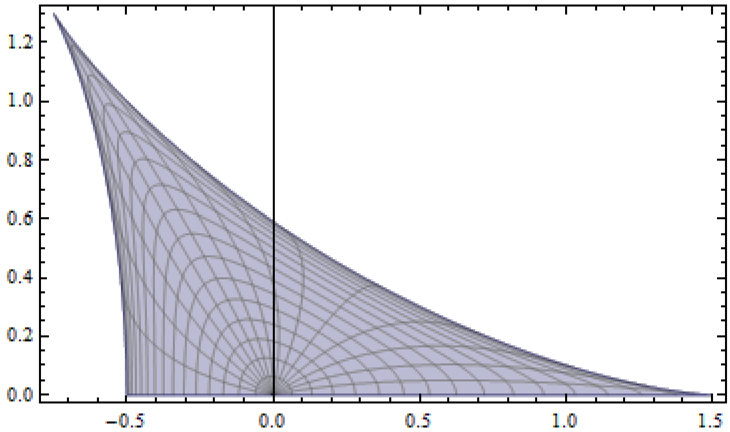
Şekil 4.2. E nin reel ekseni, üst yarı bölesi ve alt yarı bölgesinin, $f(z) = -z - \frac{2}{3}z^3$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Örnek 4.2.2: $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonu, E yi aşağıdaki Şekil 4.3'de verilen bölgeye,



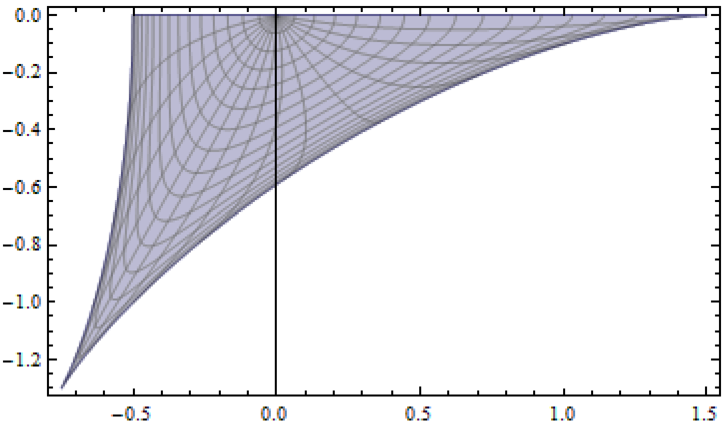
Şekil 4.3. E nin, $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin üst yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.4'de verilen bölgeye,



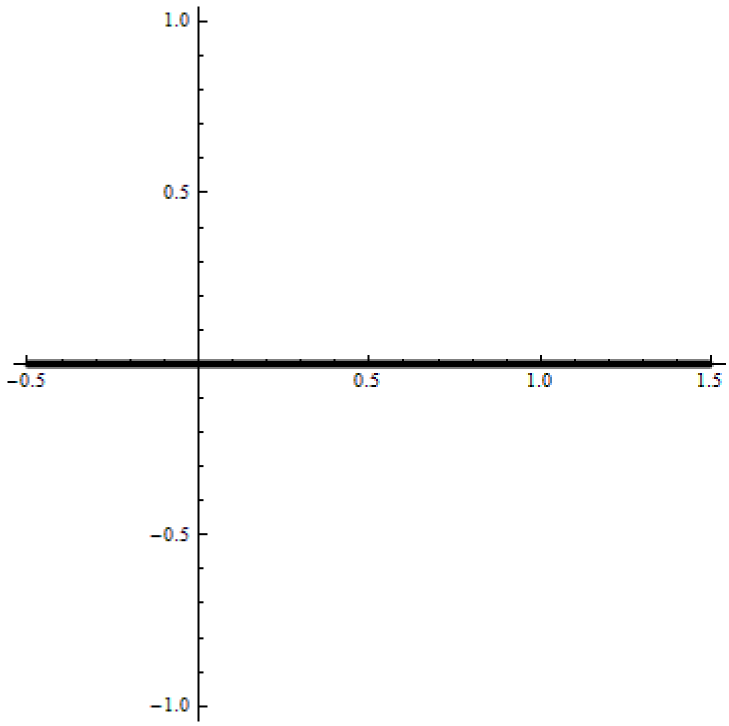
Şekil 4.4. E nin üst yarı bölgesinin, $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin alt yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.5'de verilen bölgeye



Şekil 4.5. E nin alt yarı bölgesinin, $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

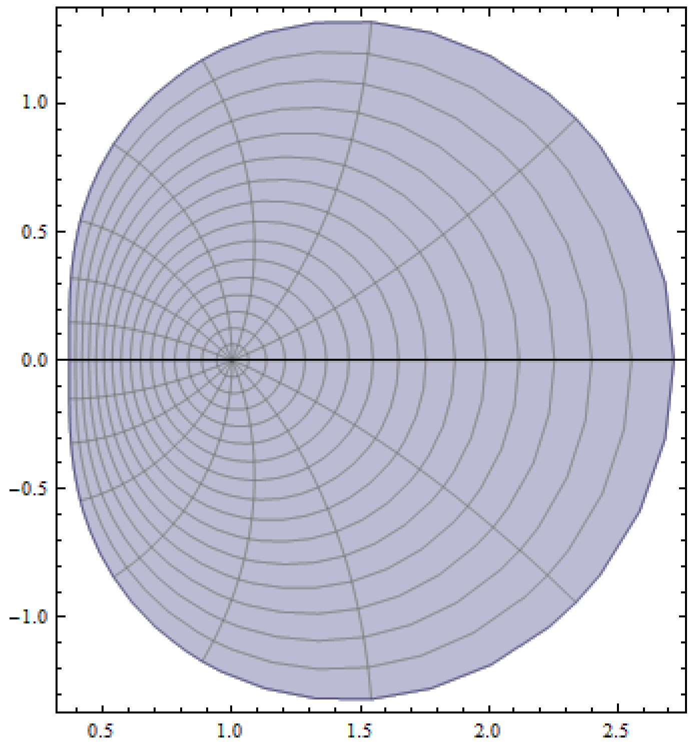
ve E nin reel eksen üzerindeki noktalarını, aşağıdaki Şekil 4.6'da verilen noktalar kümesine dönüştürür.



Şekil 4.6. E nin reel ekseninin, $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

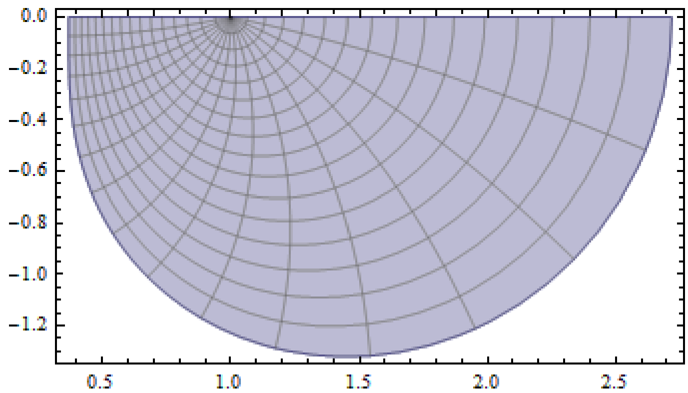
O halde, $f(z)$ fonksiyonu E de tipik reeldir.

Örnek 4.2.3: $f(z) = e^{-z}$ fonksiyonu, E yi aşağıdaki Şekil 4.7'de verilen bölgeye,



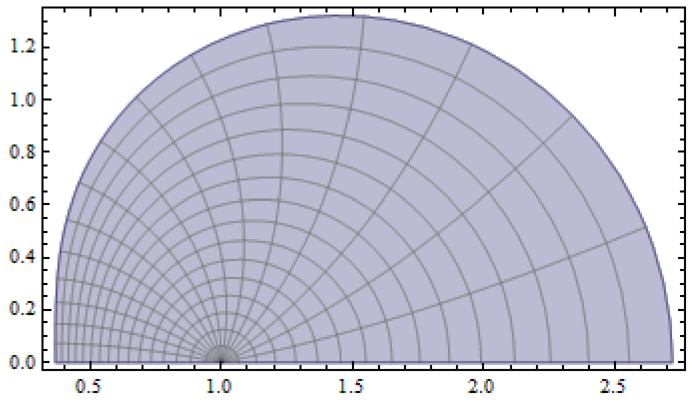
Şekil 4.7. E nin, $f(z) = e^{-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin üst yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.8'de verilen bölgeye,



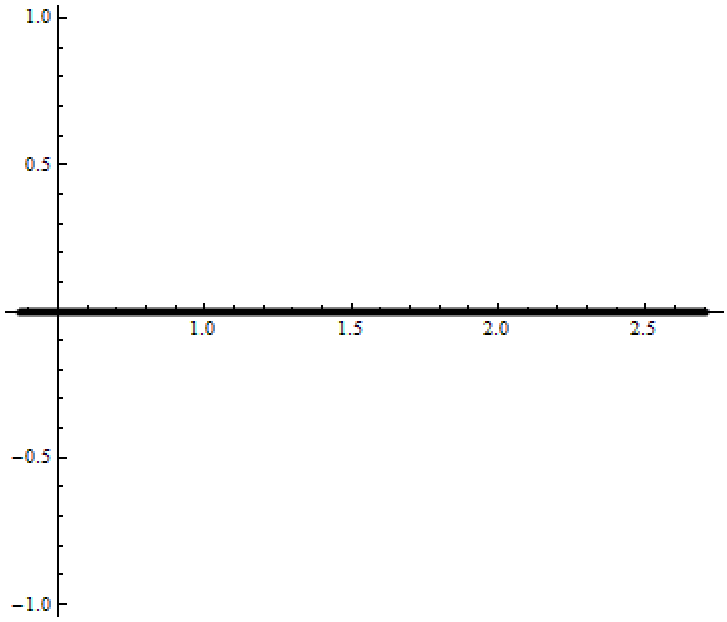
Şekil 4.8. E nin üst yarı bölgesinin, $f(z) = e^{-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin alt yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.9'da verilen bölgeye



Şekil 4.9. E nin alt yarı bölgesinin, $f(z) = e^{-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

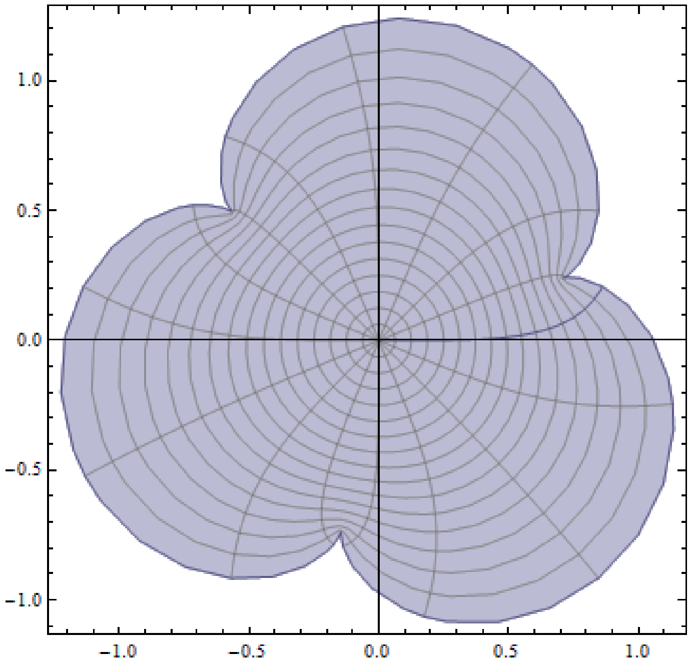
ve E nin reel eksen üzerindeki noktalarını, aşağıdaki Şekil 4.10'da verilen noktalar kümesine dönüştürür.



Şekil 4.10. E nin reel ekseninin, $f(z) = e^{-z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

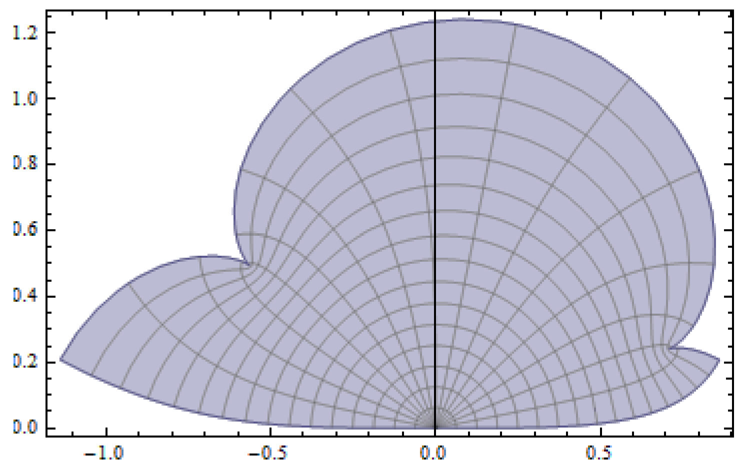
O halde, $f(z)$ fonksiyonu E de tipik reeldir.

Örnek 4.2.4: $f(z) = z - \frac{2-3i}{4\sqrt{13}} z^4$ fonksiyonu, E yi aşağıdaki Şekil 4.11'de verilen bölgeye,



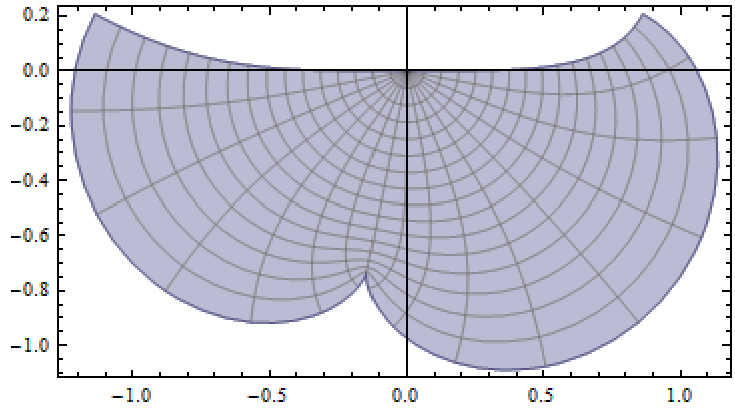
Şekil 4.11. E nin, $f(z) = z - \frac{2-3i}{4\sqrt{13}} z^4$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin üst yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.12'de verilen bölgeye,



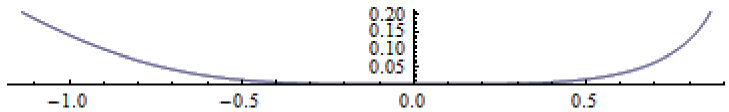
Şekil 4.12. E nin üst yarı bölgesinin, $f(z) = z - \frac{2-3i}{4\sqrt{13}} z^4$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin alt yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.13'de verilen bölgeye



Şekil 4.13. E nin alt yarı bölgesinin, $f(z) = z - \frac{2-3i}{4\sqrt{13}} z^4$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

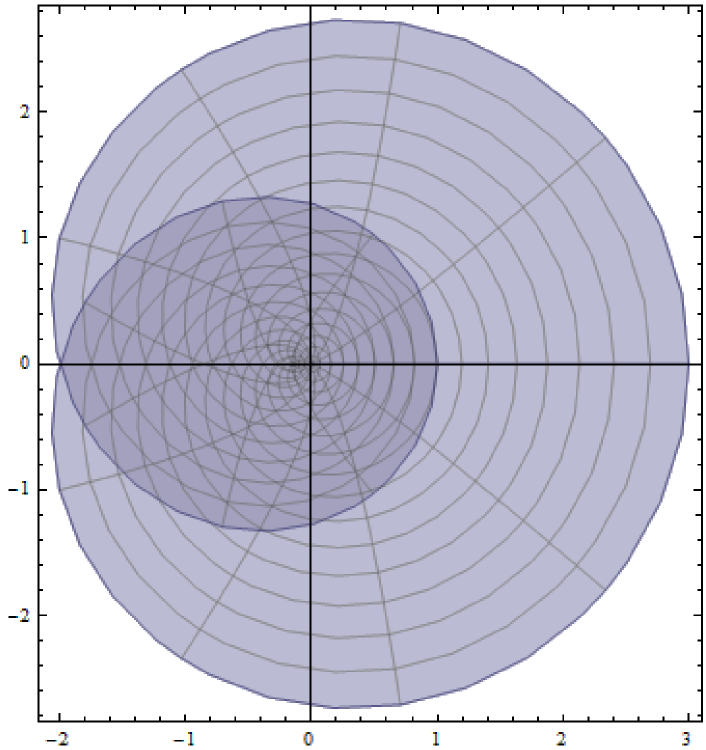
ve E nin reel eksen üzerindeki noktalarını, aşağıdaki Şekil 4.14'de verilen noktalar kümesine dönüştürür.



Şekil 4.14. E nin reel ekseninin, $f(z) = z - \frac{2-3i}{4\sqrt{13}} z^4$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

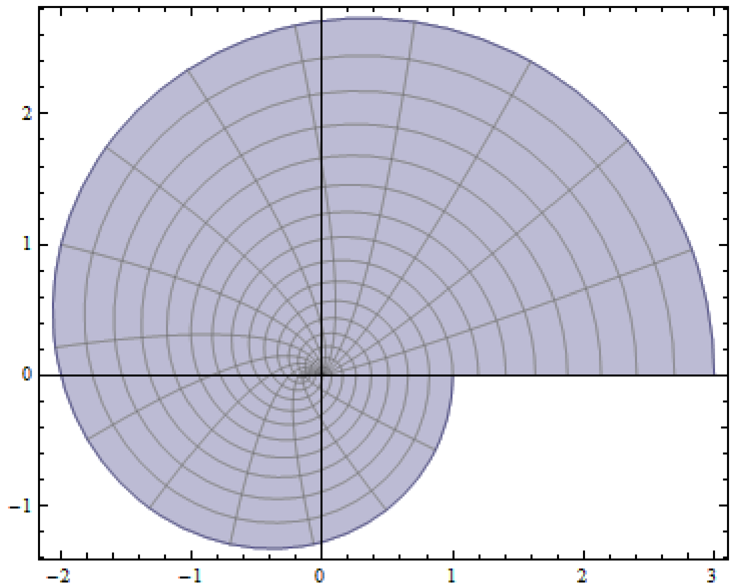
O halde, $f(z)$ fonksiyonu E de tipik reel değildir.

Örnek 4.2.5: $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonu, E yi aşağıdaki Şekil 4.15'de verilen bölgeye,



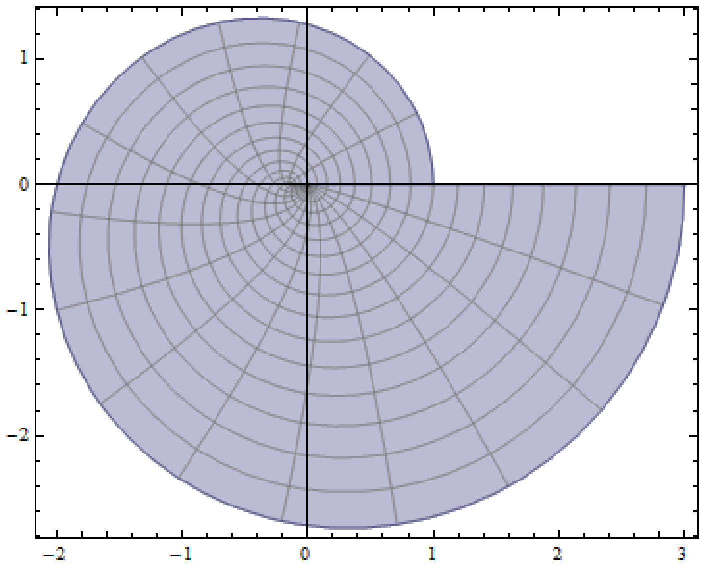
Şekil 4.15. E nin, $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin üst yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.16'da verilen bölgeye,



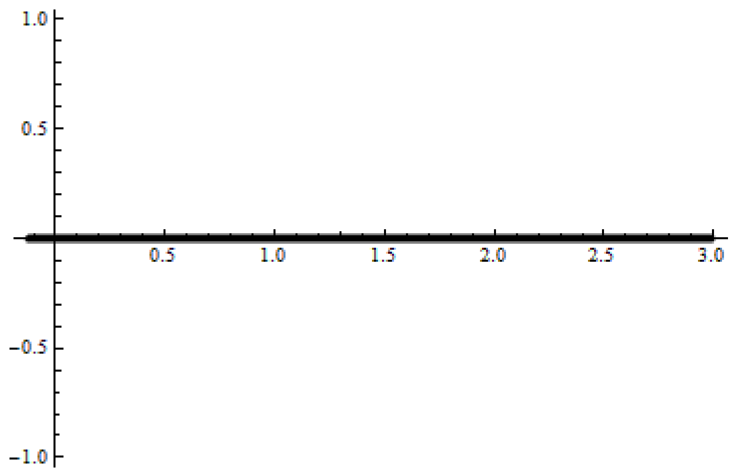
Şekil 4.16. E nin üst yarı bölgesinin, $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

E nin alt yarı bölgesindeki noktaları, aşağıdaki Şekil 4.17'de verilen bölgeye



Şekil 4.17. E nin alt yarı bölgesinin, $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

ve E nin reel eksen üzerindeki noktalarını, aşağıdaki Şekil 4.18'de verilen noktalar kümesine dönüştürür.



Şekil 4.18. E nin reel ekseninin, $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

O halde, f(z) fonksiyonu E de tipik reel değildir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde, tez çalışmamızda elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Sonuç 5.1: Tipik reel fonksiyonların ünivalent olması gerekmediği gibi, ünivalent bir fonksiyonun da tipik reel olması gerekmez.

Örneğin; $f(z) = z + \frac{2}{3}z^3$ fonksiyonu (Şekil 4.1), tipik reel olmasına rağmen ünivalent değil, $f(z) = z - \frac{2-3i}{4\sqrt{13}}z^4$ fonksiyonu (Örnek 4.2.4), ünivalent olmasına rağmen tipik reel değildir. Ayrıca, $f(z) = e^{-z}$ fonksiyonu (Örnek 4.2.3) hem tipik reel, hem ünivalent, $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonu (Örnek 4.2.5) ise ne tipik reel, ne de ünivalenttir.

Sonuç 5.2: TR konveks bir kümedir. Fakat bu kümeye ait olan bir fonksiyonun konveks olması gerekmez.

Örnek 3.2.5'de TR kümesinin konveks olduğu gösterilmiştir. Bu kümeye ait olan $f(z) = z + \frac{2}{3}z^3$ fonksiyonu (Şekil 4.1), konveks değildir.

Sonuç 5.3: Tipik reel bir f fonksiyonu için $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ şartı sağlandığından, $f(E)$ görüntü kümesi u-reel eksenine göre simetriktir. Fakat bunun tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örneğin; $f(z) = z + \frac{2}{3}z^3$ fonksiyonu tipik reel olup Şekil 4.1'de verilen görüntü kümesi, u-reel eksenine göre simetriktir. Fakat $f(z) = z + 2z^2$ fonksiyonu, Şekil 4.15'de verilen görüntü kümesinin u-reel eksenine göre simetrik olmasına rağmen tipik reel değildir.

Sonuç 5.4: Bir fonksiyonun tipik reel olup olmadığının belirlenmesi için bazı kaynaklarda, “reel olmayan her $z \in E$ için $\big(Imf(z)\big)(Imz) \geq 0$” şartının sağlanması gerektiği belirtilmiştir (Schober 1975; Goodman 1983). Bazı kaynaklarda ise bu şart “reel olmayan her $z \in E$ için $\big(Imf(z)\big)(Imz) > 0$” olarak verilmiştir (Goodman 1973; Bshouty et al. 1996; Todorov 2002). $\big(Imf(z)\big)(Imz) \geq 0$ şartı harmonik fonksiyonlar için her zaman sağlanmadığından (Örnek 4.1.5’deki $f_1(z) = z + \bar{z}$ fonksiyonu tipik reel olmamasına rağmen bu şartı sağlar), $\big(Imf(z)\big)(Imz) > 0$ şartı da tanımı kapsamadığından (Şekil 4.2’de verilen fonksiyon tipik reel olmasına rağmen bu şartı sağlamaz), bunlar Şart 4.1.2 olarak genişletilebilir ve bu oldukça kullanışlıdır.

Sonuç 5.5: E de analitik veya harmonik olmak üzere $f(-z) = -f(z)$ şartını sağlayan tek tipik reel bir $f(z)$ fonksiyonu için, $-f(z)$ de tipik reeldir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 bu duruma bir örnek teşkil etmektedir.

Sonuç 5.6: E de analitik veya harmonik bir $f(z)$ fonksiyonunun tipik reel olup olmadığı, E nin üst bölgesi, alt bölgesi ve reel ekseninin bu fonksiyon altındaki görüntülerine bakılarak belirlenebilir. (Şekil 4.1, Şekil 4.2, Örnek 4.2.2, Örnek 4.2.3, Örnek 4.2.4 ve Örnek 4.2.5)

Sonuç 5.7: Analitik ve harmonik fonksiyonlar için ifade edilen tipik reel fonksiyon kavramı, konform olan farklı dönüşümlere de genişletilebilir.

KAYNAKLAR

Başkan, T., 1991. Kompleks Analiz. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Başkan, T., 1996. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi, 360 s, Bursa.

Bostancı, H., 2008. Meromorf Harmonik Fonksiyonlar. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Bshouty, D., Hengartner W. and Hossian O., 1996. Harmonic Typically Real Mappings. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 119, 673-680.

Clunie, J. and Sheil-Small T., 1984. Harmonic Univalent Functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math, 9, 3-25.

Deniz, E., 2011. Kompleks Düzlemin Bazı Alt Bölgelerinde Tanımlı Analitik Fonksiyonlar İçin Ünivalentlik Kriterleri. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Duren, P. L., 1983. Univalent Functions. Springer Verlag, 382 p, U.S.A..

Goodman, A. W., 1973. The Critical Points of a Typically-Real Function. Proc. Amer. Math. Soc., 38, 95-102.

Goodman, A. W., 1983. Univalent Functions I. Mariner Publishing Company, 246 p, Tampa, Florida.

Kadıoğlu, E., 2012. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Ders Notları, Erzurum.

Nehari, Z., 1952. Conformal Mapping. McGraw-Hill, 396 p, New York.

Orhan, H., 2002. Analitik Fonksiyonların Belli Sınıfları İçin Katsayı Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Rogosinski, W., 1932. Über Positive Harmonische Entwicklungen und Typisch Reelle Potenzreihen. Math. Z., 35, 93-121.

Schober, G., 1975. Univalent Functions-Selected Topics. Springer Verlag, 200 p, New York.

Şeker, B., 2008. Harmonik Yalınkat ve Harmonik Çok Katlı Fonksiyonların Bazı Altsınıfları. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Todorov, P. G., 2002. Variational Methods for the Typically Real Functions and Applications. Bull. Inst.Math. Acad. Sinica, 30, 261-286.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Erzurum'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2003 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı ve 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl M.E.B.'de göreve başladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda bilimsel hazırlık programı ile yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen, Pasinler İbrahim Hakkı İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.