KONFORM DÖNÜŞÜMLER VE SCHWARZ-CHRİSTOFFEL FORMÜLLERİ

Musa SÖNMEZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU
2012

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONFORM DÖNÜŞÜMLER VE SCHWARZ-CHRİSTOFFEL FORMÜLLERİ

Musa SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2012

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

KONFORM DÖNÜŞÜMLER VE SCWARZ-CHRİSTOFFEL DÖNÜŞÜMÜ

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Musa SÖNMEZ tarafından hazırlanan bu çalışma 19/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONFORM DÖNÜŞÜMLER VE SCHWARZ-CHRİSTOFFEL FORMÜLLERİ

Musa SÖNMEZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

Bu tezde konform dönüşümlerin bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Schwarz-Christoffel dönüşümleri göz önüne alınmış ve uygulaması yapılmıştır.

2012, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Konform dönüşüm, analitik fonksiyonlar, Schwarz-Christoffel dönüşümü, Riemann dönüşüm teoremi.

ABSTRACT

Master Thesis

CONFORM TRANSFORMATIONS AND SCHWARZ-CHRISTOFFEL FORMULAS

Musa SÖNMEZ

Atatürk University
Instıtute of Science
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

In this thesis, some of the properties of Conform Transformations have been investigated. Moreover, Schwarz-Cristoffel transformations have been considered and their applications have been done.

2012, 66 pages

Keywords: Conform Transformation, Analytical Functions, Schwarz-Christoffel Transformation, Riemann Transformation Theorem

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, beni her adımda bilgilendiren çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Musa SÖNMEZ
Mayıs 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

A'	Yığılma noktalarının kümesi
$A(D)$	D de analitik alan fonksiyonların aileleri
arg	Argüman
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
C	Düzgün eğri
D	$\mathbb{C}$ de bir bölge
$D(z_0;\varepsilon)$	ε -komşuluk
$D^*(z_0;\varepsilon)$	ε -delinmiş komşuk
f	Fonksiyon
(f_n)	Fonksiyon dizisi
$\mathcal{F}$	D de bir normal aile
$i\c{c}A$	A nın bütün iç noktalarının kümesi
K	D nin keyfi bir kompakt altkümesi
K_n	Kompakt kümelerin bir dizisi
k_j	Sabit reel sayı
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
P	Çok kenarlı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
S_r	Yarım daire
T	Bir eğrinin teğeti
U	Birim disk
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
z	Kompleks sayı
$\{z_n\}$	$\mathbb{C}$ de bir dizi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kompleks fonksiyonlar yardımı ile açıklanmış önemli bir sonuç konform dönüşüm problemidir. Bir küreyi (dünya yüzeyini) bir düzleme dönüştürme eskiden beri matematikçilerin dikkatini cezbeden uygulaması olan bir problemdir. 18. Yüzyıldan önce bu dönüşüme en dikkate değer matematiksel katkı 1569 yılında G. Mercator'un kullandığı Mercator projeksiyonu ve M.Ö. 150 yılında Potelemy'e ait stereografik izdüşümdür. Bu iki projeksiyonda konformdur yani, açıları korur. 18. Yüzyıl matematikçileri bunu "küçüklükte benzerlik" olarak adlandırmışlardı. Bu herhangi R bölgesinin $f(R)$ görüntüsünün, R nin ebatları sıfıra yaklaştıkça, R ye oldukça benzer olduğunu ifade eder. "Geniş anlamda benzerlik" imkansız olduğundan konformluk, küre üzerindeki bölgelerin görüntülerini koruyan en iyi dönüşüm olduğu kabul edilir. Yön bulmaya yardım etmek amacı olan Mercator projeksiyonunda açıların korunması hedeflenmiş ve stereografik projeksiyonun konformluğu ilk 1590'lı yıllarda Harriot tarafından fark edilmişti.

Konform dönüşüm teorisindeki önemli gelişmeler Lambert (1772), Euler (1777) (küreden düzleme) ve Lagrange (1779) (genel dönel yüzeylerden düzleme) tarafından yapılmıştır. Bu matematikçiler kompleks sayılardan yararlanmıştır. Bunlar arasında en açık ve en genel olanı Lagrange'ın sunumuydu. Lagrange, d'Alambert (1752)'in metodunu kullanarak iki reel değişkenli diferansiyel denklemlerin bir çifti ile bir kompleks değişkenli çifti birleştirdi ve dönel yüzeyden (x, y) –düzlemine herhangi iki konform dönüşüm göz önüne alarak onlar arasında düzlemi kendi üzerine dönüştüren $f(x + iy)$ kompleks fonksiyonu yardımıyla bir ilişki olduğunu ortaya koydu. Bu sonuçları Lagrange Teoremini keyfi bir yüzeyden düzleme tanımlanan bir konform dönüşüme genelleştiren Gauss (1822)'un çalışması daha da güzelleştirmişti.

Tersine, z –düzlemini kendi üzerine dönüştüren bir $f(z)$ fonksiyonu tanımlandığında bunun bir konform dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. Aslında bu f nin diferansiyellenebilir olmasının bir sonucudur.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

limitinin mevcut olması demek z_0 civarındaki $\{z: |z - z_0| < |h|\}$ diskinin $|h|$ yarıçapı sıfıra giderken f altındaki görüntüsü $f(z_0)$ civarındaki bölgeye ölçek ölçek dönüşmesi demektir. Eğer bu türev

$$f'(z_0) = re^{i\theta}$$

şeklinde kutupsal olarak gösterilirse; r, bu limit fonksiyonunun büyüme-küçülme çarpanı ve θ da dönme açısı olur. Riemann (1851), konform dönüşüm özelliğini kompleks fonksiyonlar teorisi için temel alan ilk kişidir. Onun bu yöndeki önemli sonucu Riemann Dönüşüm Teoremidir. Riemann Dönüşüm Teoremi, bir basit kapalı eğri ile sınırlandırılmış düzlemsel bir bölgenin birim diske konform dönüşebileceğini ifade eder.

Teorik anlamda bakıldığında topolojik uzaylar arasındaki homeomorfizm; cebirsel yapılar arasındaki izomorfizm; diferansiyel geometride izometrik dönüşümlerin rolünü kompleks analizde konform dönüşümler oynamaktadır. Ayrıca konform dönüşüm, kompleks fonksiyonların geometrik olarak yorumlanması için bir fırsat oluşturmaktadır. Hatta bazı kaynaklarda “konform dönüşüm kavramı”, “geometrik fonksiyon kavramı” olarak algılanmaktadır (Stillwell and Springer 1989).

Bu öneminden dolayı tezimizde konform dönüşüm kavramı incelenmesi amaçlanmıştır.

Bu çalışma bir derlemedir. Tezimizde önce konform dönüşüm kavramı tanıtıldı. Bir noktada türevin sıfırdan farklı olması durumunda fonksiyonun o noktada konform olduğu gösterildi. Gerçel eksenin bir çokgen üzerine dönüşümü incelendi. Bundan hareketle Schwarz-Christoffel dönüşümü verildi ve bu dönüşümle ilgili uygulama yapıldı. Daha sonra Riemann dönüşüm teoremi incelendi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Ön Bilgiler

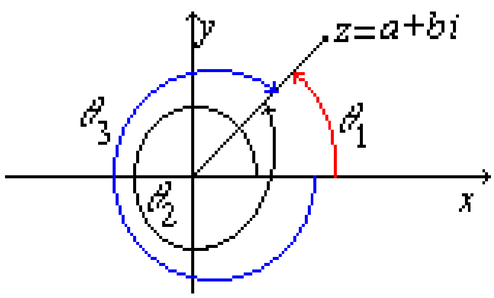
Tanım 2.1.1 (Kompleks Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık): $z = a + bi$ ve $w = c + di$ kompleks sayıları verilsin. Bunlar arasındaki uzaklık $d(z,w)$ ile gösterilir ve

$$d(z,w) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = |z - w|$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.2 (Argüman): $z \neq 0$ kompleks sayısı verilsin. Bu z kompleks sayısının belirttiği vektörün x ekseninin pozitif kısmı ile yaptığı açıya z kompleks sayısının bir argümanı denir ve kısaca $arg z$ ile gösterilir.

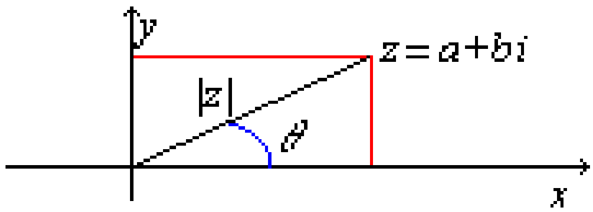
Tanımdan anlaşılacağı gibi, $z = 0$ kompleks sayısının argümanı tanımlı değildir. Bu çalışmada, argümanların ölçüsünü radyan cinsinden kullanmayı tercih edeceğiz.



Şekil 2.1. $z \neq 0$ kompleks sayısının argümanları

Tanım 2.1.3 (Esas argüman): Bir z kompleks sayısının $(-\pi, +\pi]$ aralığına düşen argümanına bu z kompleks sayısının esas argümanı denir ve $Arg z$ ile gösterilir.

Keyfi bir $z = a + bi$ kompleks sayısının argümanı



Şekil 2.2. z kompleks sayısının geometrik gösterimi

$$cos\theta = \frac{a}{|z|}, \quad sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

denklemlerini, aynı anda, sağlayan θ reel sayısıdır.

Tanım 2.1.4 (Kompleks Sayıların Kutupsal Şekli): Bir argümanı θ olan $z = a + bi$ kompleks sayısı için

$$z = |z|(cos\theta + i\, sin\theta)$$

şeklindeki yazılışa z kompleks sayısının kutupsal şekli denir.

Burada θ, z kompleks sayısının bir argümanıdır. Bu durumda, her bir $k \in \mathbb{Z}$ için

$$arg z = \theta + 2k\pi$$

olduğunu düşünerek

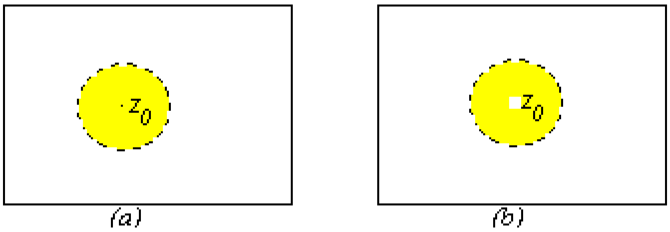
$$z = |z|[\cos(\theta + 2k\pi) + isin(\theta + 2k\pi)],$$

yazılır. Buna, z kompleks sayısının kutupsal şekilde en genel yazılışı adı verilir.

Tanım 2.1.5 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzerek

$$D(z_0;\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının ε-komşuluğu denir. $D(z_0;\varepsilon)\setminus\{z_0\}$ kümesine ise z_0 noktasının ε -delinmiş komşuluğu adı verilir ve $D^*(z_0;\varepsilon)$ ile gösterilir.



Şekil 2.3. *(a)* $D(z_0;\varepsilon)$ komşuluğu, *(b)* $D^*(z_0;\varepsilon)$ delinmiş komşuluğu.

Önceki bilgilerimizden hatırlanacağı gibi, $D(z_0;\varepsilon)$ kümesi, merkezi z_0 noktası, yarıçapı ε olan bir çemberin içidir. $D^*(z_0;\varepsilon)$ ε -delinmiş komşuluğunu

$$D^*(z_0;\varepsilon) = \{z: 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

şeklinde de yazabiliriz. Bazen, " $D(z_0;\varepsilon)$ komşuluğu" yerine "$\mathbb{C}$ de bir disk" ifadesi de kullanılır.

Tanım 2.1.6 (İç Nokta ve Açık Küme): i. $A \subset \mathbb{C}$, boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in A$ noktasının en az bir komşuluğu tamamen A kümesinde kalırsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

ii. A nın bütün iç noktalarının kümesi $içA$ ile gösterilir ve $içA$ kümesine A kümesinin içi denir. $A = \emptyset$ olması halinde $iç\emptyset = \emptyset$ olarak tanımlanır.

iii. A kümesinin her noktası bir iç nokta, yani $içA = A$, ise A ya ($\mathbb{C}$ de) açık küme denir.

Tanım 2.1.7 (Yığılma Noktası ve Kapalı Küme): i. $A \subset \mathbb{C}$, boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in \mathbb{C}$, noktasının her delinmiş komşuluğu A kümesinin en az bir noktasını ihtiva ederse z_0 noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir ve A kümesinin bütün yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir. $A = \emptyset$ olması halinde $A' = \emptyset' = \emptyset$ olarak tanımlanır.

ii. $A \cup A'$ kümesine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

iii. $A' \subset A$ oluyorsa, yani $\bar{A} = A$ ise, A kümesine ($\mathbb{C}$ de) kapalı bir küme denir.

Tanım 2.1.8 (Bağlantılı Kümeler): A, U ve V, $\mathbb{C}$ nin boştan farklı altkümeleri olsun.

i. U, V ayrılmış kümeler ve $A = U \cup V$ ise $\{U, V\}$ kümeler ailesine, A kümesinin bir ayrışımı denir.

ii. A kümesinin bir ayrışımı varsa A ya bağlantısız küme adı verilir.

iii. A kümesinin hiçbir ayrışımı yoksa A ya bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.9 (Bağlantısız Kümeler): A, $\mathbb{C}$ nin bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap U \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$ ve $A \subset U \cup V$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ de U, V ayrık ve açık kümeleri varsa A kümesine bağlantısızdır denir.

Tanım 2.1.10 (Bölge ve Kapalı Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı bir kümeye bölge denir. Kompleks düzlemde kapalı ve bağlantılı bir kümeye de kapalı bölge adı verilir.

Tanım 2.1.11 (Kompleks Fonksiyonların Limiti): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$,fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası ve w_0 bir kompleks sayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < |z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - w_0| < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı varsa z, z_0a yaklaşırken $f(z)$ fonksiyonunun limiti w_0 dır denir ve bu durum kısaca

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

şeklinde yazılarak gösterilir (Kadıoğlu 2011).

Tanım 2.1.12 (Kompleks Fonksiyonların Sürekliliği): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir (Kadıoğlu 2011).

Teorem 2.1.1: $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$, sürekli bir fonksiyon ve C, A nın bağlantılı bir altkümesi olsun. Bu durumda $f(C)$, bağlantılı bir kümedir.

Teorem 2.1.2: $A \subset \mathbb{C}$, olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$, sürekli bir fonksiyon ve K, A nın kapalı ve sınırlı bir altkümesi olsun. Bu durumda $f(K)$, kapalı ve sınırlı bir kümedir.

Tanım 2.1.13 (Kompleks Fonksiyonların Türevi): $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi adı verilir. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti yoksa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenemez (veya türevlenemez) diyeceğiz (Kadıoğlu 2011).

Teorem 2.1.3: $f(z)$ fonksiyonu, bir z_0 noktasında diferensiyellenebilirse bu noktada süreklidir.

Teorem 2.1.4 (Cauchy-Riemann Denklemleri): $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında diferensiyellenebilirse bu noktada u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevleri var ve

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \quad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır (Kadıoğlu 2011).

Tanım 2.1.14 (Analitik Fonksiyonlar): $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Bu tanıma göre, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir dediğimiz zaman, bu fonksiyonun sadece z_0 noktasında değil bu noktanın uygun bir r komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebildiği anlaşılır (Bu durumda z_0, $f(z)$ fonksiyonunun diferensiyellenebildiği kümenin bir iç noktası olacağına dikkat ediniz). Hatırlatmak gerekir ki, kompleks düzlemde, z_0 noktasının bir $r-$ komşuluğu $D(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ şeklinde açık bir dairedir. Doğal olarak z_0 noktasının, $f(z)$ fonksiyonunun diferensiyellenebildiği, böyle bir komşuluğu yok ise fonksiyon o noktada analitik değildir. $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse, bu noktaya fonksiyonun singüler (tekil) noktası denir.

$f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında analitik olduğunu göstermek için z_0 noktasının, $f(z)$ fonksiyonunun diferensiyellenebildiği D kümesinin bir iç noktası olduğunu göstermek gerekir. Aksi halde $f(z)$ fonksiyonu, $z_0$noktasında analitik olamaz. Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ise bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada da analitik olacağı açıktır (Kadıoğlu 2011).

Tanım 2.1.15 (Açık Kümede Analitik Fonksiyon): i. A ve S, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde boş olmayan iki açık küme ve $S \subset A$ olsun. $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, S kümesinin her noktasında analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna S kümesinde bir analitik fonksiyon denir. $f(z)$ fonksiyonu A kümesinde, yani tanım kümesinde, analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna analitik fonksiyon adı verilir.

ii. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde analitik olan fonksiyona ise tam fonksiyon denir.

Tanım 2.1.16 (Keyfi Kümede Analitiklik): K, $f(z)$ nin tanım kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. $f(z)$, K yı kapsayan ve tanım kümesinde bulunan bir açık kümede analitik oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna K kümesinde analitiktir denir.

Bu tanıma göre, $f(z)$ fonksiyonu bir kümede analitik ise onun boş olmayan her altkümesinde de analitiktir.

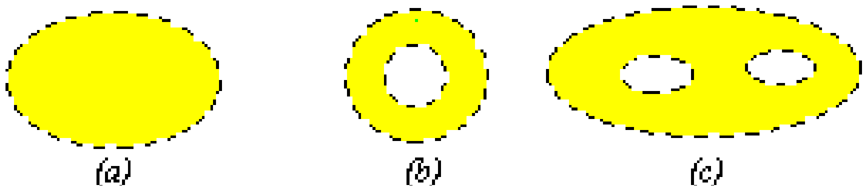
Tanım 2.1.17 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir (Kadıoğlu 2011).

Tanım 2.1.18 (Düzgün Eğri): i. $\gamma(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$ eğrisi verilsin. Eğer $[a,b]$ aralığında $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir.

Tanım 2.1.19 (Parçalı Düzgün Eğri): $\gamma(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$ eğrisi

verilsin. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ olmak üzere $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $[a,b]$ aralığının sonlu bir bölüntüsü olsun. γ nın $[x_{k-1}, x_k]$ aralıklarına kısıtlanması bir düzgün eğri olacak şekilde $[a, b]$ aralığının sonlu bir $\mathcal{P}$ bölüntüsü varsa γ eğrisine parçalı düzgün eğri (veya çevre veya yol) denir. Parçalı düzgün eğri, sonlu sayıda düzgün eğrinin uç uca eklenmesiyle oluşmuş eğridir.

Tanım 2.1.20 (Basit Bağlantılı Bölge): $B, \mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer B bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen B de kalıyorsa B bölgesine basit bağlantılı bölge denir. Basit bağlantılı olmayan bölgeye ise çok bağlantılı bölge adı verilir. Geometrik bir yorumla, bir bölgedeki her basit kapalı eğri bölgenin dışına çıkmadan, bölgede bir noktaya büzülebilirse bu bölgeye basit bağlantılı bölge adını veririz (Kadıoğlu 2011).



Şekil 2.4. ***(a)*** Basit bağlantılı bölge, ***(b)*** ve ***(c)*** Çok bağlantılı bölge

Teorem 2.1.5 (Cauchy Teoremi): Basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde $f(z)$ fonksiyonu analitik, $f'(z)$ fonksiyonu sürekli ise

$$\int_{\gamma} f(z)d(z) = 0$$

olur (Kadıoğlu 2011).

Teorem 2.1.6 (Cauchy-Goursat Teoremi): $f(z)$ fonksiyonu basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik ise

$$\int_{\gamma} f(z)d(z) = 0$$

olur (Kadıoğlu 2011).

Teorem 2.1.7 (Cauchy İntegral Formülü): $f(z)$, pozitif yönlü basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu çevrenin içinde bir nokta olsun. Bu durumda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} d(z)$$

olur (Kadıoğlu 2011).

Teorem 2.1.8 (Morera Teoremi): $f(z)$, B basit bağlantılı bölgesinde sürekli bir fonksiyon ve bu bölgedeki her basit kapalı γ çevresi için

$$\int_{\gamma} f(z)d(z) = 0$$

olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu B bölgesinde analitiktir (Kadıoğlu 2011).

Teorem 2.1.9 (Schwarz Lemması): $f(z)$ fonksiyonu $D = \{z: |z| < 1\}$ diskinde analitik ve bu diskte $|f(z)| \leq 1$, $f(0) = 0$ şartları sağlanıyorsa

$$|f(z)| \leq |z| \text{ ve } |f'(0)| \leq 1$$

olur. D diskinde sıfırdan farklı en az bir z noktasında $|f(z)| = |z|$ olması için gerek ve yeter şart $|c| = 1$ olmak üzere $f(z) = cz$ olmasıdır (Kadıoğlu 2011).

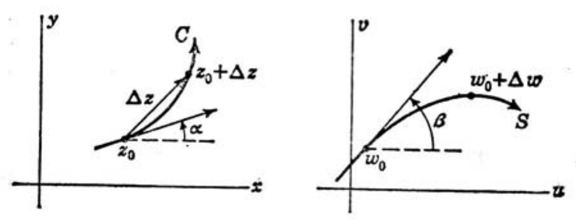
3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Teğetlerin Dönmesi

Bir eğrinin bir z_0 noktadaki T teğetinin eğim açısı ile bu eğrinin bir f fonksiyonu altındaki görüntüsünün $w_0 = f(z_0)$ noktasındaki T' teğetinin eğim açısı arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Teğetlerin eğim açısı aynı zamanda eğrilerin o noktalardaki eğim açısı olarak alındığını bir kez daha hatırlatalım. f fonksiyonunun z_0 noktasında türevlenebildiğini ve z_0 noktasındaki türevi için $f'(z_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebildiğinden dolayı $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ olmak üzere,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

yazılır. Bilindiği üzere bu limit, Δz nin sıfıra yaklaştığı yoldan bağımsızdır.



Şekil 3.1. $\beta = \alpha + \psi_0$

$f'(z_0) \neq 0$ olduğu için $\psi_0 = \arg f'(z_0)$ olarak alınabilir. $R_0 = |f'(z_0)|$ denirse $f'(z_0)$, kutupsal olarak,

$$f'(z_0) = R_0 e^{i\psi_0} \qquad (R_0 > 0)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ eşitliği de göz önünde bulundurularak,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = R_0$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} (arg \frac{\Delta w}{\Delta z}) = \psi_0$$

olduğu görülür.

C, düzgün bir eğri ve S de bu eğrinin $w = f(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü olsun (Şekil 3.1.). Eğer C eğrisi üzerinde pozitif yön (eğri kapalı değilse eğrinin başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru olan yön) alınırsa bunun f dönüşümü altındaki görüntüsü olan S boyunca da bu yön korunur. $z_0 + \Delta z$ noktası C üzerinde z_0 noktasından itibaren pozitif yönde bir nokta olduğu zaman, Δz sıfıra yaklaşırken Δz nin argümanı, C nin z_0 daki teğetinin eğim açısı olan $\propto$ olur. $w_0 = f(z_0)$ ve $z_0 + \Delta z$ nin görüntüsü de $w_0 + \Delta w$ ise, bu durumda Δw nın argümanı S nin w_0 daki teğetinin β eğim açısına yaklaşır.

Δw nın $\Delta w = \Delta z(\frac{\Delta w}{\Delta z})$ şeklinde yazılabildiği göz önüne alınarak

$$\arg \Delta w = arg\ \Delta z + arg \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

olduğu görülür. Burada $\Delta z \to 0$ için

$$\beta = \propto + \psi_0$$

elde edilir. Demek ki bir C eğrisinin z_0 daki teğetinin f altındaki görüntüsü, f nin z_0 da türevlenebilmesi ve $f'(z_0) \neq 0$ olması koşulu ile,

$$\psi_0 = \arg f'(z_0)$$

açısı kadar daha döndürülmektedir (Churchill 1989).

3.2. Konform Dönüşüm

Tanım 3.2.1 (İki Eğri Arasındaki Açı): C_1 ve C_2 bir z noktasında kesişen ve bu noktadaki teğetleri sırasıyla, T_1 ve T_2 olan $\mathbb{C}$ de iki eğri olsun. T_1 teğeti ile T_2 teğeti arasındaki açıya C_1 eğrisi ile C_2 eğrisi arasındaki açı denir.

T_1 teğeti ile T_2 teğeti arasındaki açının yönü T_1 teğetinden T_2 teğetine doğru ise C_1 eğrisi ile C_2 eğrisi arasındaki açının yönü de C_1 eğrisinden C_2 eğrisine doğrudur diyeceğiz (Moore and Hadlock 1991).

Tanım 3.2.2 (Konform Dönüşüm): D, $\mathbb{C}$'de bir bölge, $f: D \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z \in D$ olsun. Ayrıca U, z nin bir komşuluğu olarak verilsin. C_1 ve C_2 , z noktasında kesişen U da iki düzgün eğri ve $f(C_1)$, $f(C_2)$, $f(z)$ de teğetleri olan eğriler olsun. C_1 den C_2 ye doğru olan açı ile $f(C_1)$ den $f(C_2)$ ye doğru olan açı eşit ise $f(z)$ fonksiyonuna z de konformdur denir.

$f(z)$ fonksiyonu D bölgesinin her noktasında konform ise $f(z)$ ye D de konformdur denir (Moore and Hadlock 1991).

Teorem 3.2.1: $f(z)$, D bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(z)$, D nin $f'(z) \neq 0$ olacak şekildeki her bir z noktasında konform olur (Moore and Hadlock 1991).

İspat: $z \in D$ noktasında $f'(z) \neq 0$ olsun. 8.2.12'ye göre $f(z)$ nin bire – bir olacağı ve D de ihtiva edilen z nin bir $N(z)$ komşuluğu vardır. $k = 1,2$ için

$$C_k: \; z_k = z_k(t) \qquad\qquad t \in [a_k, b_k]$$

ile verilen z noktasından geçen $N(z)$ de düzgün olan C_k eğrisini göz önüne alalım. Burada $t \in [a_k, b_k]$ için $z'_k(t) \neq 0$ ve $z_1(t_1) = z_2(t_2) = z$ dir. Bu durumda $f(C_1)$ ve $f(C_2)$

$$f(C_k): \; w_k = f\big(z_k(t)\big) \;\; , t \in [a_k, b_k], \;\; k = 1,2$$

ile verilir. Böylece

$$w'_k(t_k) = f'(z)\, z'_k(t_k) \neq 0$$

dır. $w'_k(t_k) \neq 0$ olduğundan $f(C_k)$, $f(z)$ de bir teğete sahiptir ve onun yönü

$$\arg w'_k(t_k) = \arg f'(z) + \arg z'_k(t_k) \qquad k = 1,2$$

ile verilir. Böylece $f(z)$ de $f(C_1)$ den $f(C_2)$ ye olan açı

$$\begin{aligned} \arg w'_2(t_2) - \arg w'_1(t_1) \\ &= [\arg f'(z) + \arg z'_2(t_2)] - [\arg f'(z) + \arg z'_1(t_1)] \\ &= \arg z'_2(t_2) - \arg z'_1(t_1) \end{aligned}$$

olur ki bu da C_1 den C_2 ye doğru olan açıdır.

Not 3.2.1: $f(z)$, D bölgesinde analitik ve $f'(z)$, D de sıfır olmasın.

$$C: z = z(t), \qquad t \in [a, b]$$

ile verilen eğri D de düzgün bir eğri ise bu taktirde onun $f(C)$ görüntüsü

$$f(C): w = f(z(t)) \quad t \in [a,b]$$

ile verilir. Teğetlerin dönmesinde anlatıldığı gibi

$$arg w'(t) = arg f'(z(t)) + arg z'(t)$$

olur. Böylece $f(z), z$ deki C nin teğetini $arg f'(z)$ açısı kadar döndürür

Örnek 3.2.1: $f(z) = -iz$ olsun. C_1, $z = 0$ dan $z = 2$ ye uzanan doğru parçası ve C_2 de $z = 0$ dan $z = 1 + i$ ye uzanan diğer bir doğru parçası olarak verilsin. $f(C_1)$, $w = 0$ dan $w = -2i$ ye ve $f(C_2)$ de $w = 0$ dan $w = 2-2i$ ye uzanan doğru parçaları olurlar. C_1 ile C_2 arasındaki açı $\frac{\pi}{4}$, $f(C_1)$ ile $f(C_2)$ arasındaki açı da $arg(2-2i) - arg(-2i) = \frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ olup C_1 ile C_2 arasındaki açıya eşittir. $f'(0) = -i \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz. Böylece $f(z) = -iz$ lineer dönüşümü $z = 0$ da konformdur. $f(z) = -iz$ fonksiyonu göz önüne alınarak

$$arg f(z) = arg(-i) + arg z = \frac{3\pi}{2} + arg z \text{ ve } |f(z)| = |z|$$

olduğu görülür. Böylece $f(z)$, bütün noktaları orijin etrafında 270^0 döndürdüğü söylenir.

Not 3.2.2: $f'(z_0)$ mevcutsa

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

olur (Moore and Hadlock 1991).

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $0 < |z - z_0| < \delta$ için $\delta > 0$ sayı vardır ve bu durumda

$$\varepsilon > \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|} - f'(z_0)\right| \geq \left|\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| - |f'(z_0)|\right|$$

olduğu görülür.

Tanım 3.2.3: $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

oranına z_0 noktasından z noktasına uzanan doğru parçasının f ye göre büyümesi (magnification) denir. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|$$

limiti varsa buna da f ye göre z_0 noktasındaki büyüme adı verilir.

Not 3.2.2.'ye göre $f'(z_0)$ mevcutsa $|f'(z_0)|$ a f ye göre z_0 daki büyümedir.

Bilindiği üzere $|z - z_0|$, z ve z_0 noktaları arasındaki uzaklık; $|f(z) - f(z_0)|$ da w – düzleminde onların görüntüleri arasındaki uzaklıktır (Moore and Hadlock 1991).

Not: 3.2.3: f fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. f nin z_0 da konform olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Moore and Hadlock 1991).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve UYGULAMALAR

4.1. Analitik Fonksiyon ve Konform Dönüşüm Arasındaki İlişki

Teorem 4.1.1: $f, f_x, f_y,$ D bölgesinde sürekli olsun. Eğer $f(z)$, D de konform ise f fonksiyonu D de analitiktir (Moore and Hadlock 1991).

İspat: $z_0 \in D$ ve $z(a) = z_0$ olacak şekilde

$$z = z(t)\ , \qquad t \in [a, b]$$

ile verilen C eğrisi D de düzgün olsun. Buna göre $f(C)$ de

$$w = f\,[z(t)], \qquad t \in [a, b]$$

ile verilir. $f, f_x, f_y,$ D bölgesinde sürekli olduklarından $w'(a)$ mevcuttur ve

$$w'(a) = f_x(z_0)x'(a) + f_y(z_0)y'(a)$$

ile verilir.

$$x' = \frac{1}{2}\left(z', \overline{z'}\right) \text{ve } y' = \frac{i}{2}\left(\overline{z'} - z'\right)$$

oldukları kullanılırsa

$$w'(a) = \frac{1}{2}(f_x - if_y)z' + \frac{1}{2}(f_x + if_y)\overline{z'}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{w'(a)}{z'(a)} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) + \frac{1}{2}(f_x + if_y)\frac{\overline{z'}}{z'}$$

olur. Burada z', $t = a$ da ve f_x, f_y de $z = z_0$ da hesaplanmıştır.
$f(z)$, z_0 da konform olduğundan

$$"arg\frac{w'(a)}{z'(a)}, \qquad argz'(a) \text{ dan bağımsızdır.}"$$

Yani z_0 daki C nin yönünden bağımsızdır. Şimdi bunu gösterelim: $z_1(a_1) = z_0$ olacak şekilde

$$C_1: \ z = z_1(t), \quad t \in [a_1, b_1]$$

D de bir başka düzgün eğri olsun. Buna göre $f(C_1)$,

$$f(C_1): \ w_1(t) = f[z_1(t)], \quad t \in [a_1, b_1]$$

ile verilir. f fonksiyonu D de konform olduğundan

$$argz'_1(a_1) - argz'(a) = argw'_1(a_1) - argw'(a)$$

veya

$$argw'(a) - argz'(a) = argw'_1(a_1) - argz'_1(a_1)$$

yazılır. Buradan da

$$\arg\frac{w'(a)}{z'(a)} = \arg\frac{w'_1(a_1)}{z'_1(a_1)}$$

olduğu görülür. Bu da bize $\arg\frac{w'(a)}{z'(a)}$ nın $\arg z'(a)$ dan bağımsız olduğunu söyler. Şimdi tekrar

$$\frac{w'(a)}{z'(a)} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) + \frac{1}{2}(f_x + if_y)\frac{\overline{z'}}{z'}$$

eşitliğine dönelim. Burada

$$\alpha = \frac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)], \ \beta = \frac{1}{2}[f_x(z_0) + if_y(z_0)]$$

ve $z'(a) = re^{i\theta}$ olarak alınırsa

$$\frac{w'(a)}{z'(a)} = \alpha(z_0) + \beta(z_0)e^{-2i\theta}$$

olduğu görülür. $\arg z'(a)$ nın $\theta = 0$ dan $\theta = 2\pi$ ye değişmesine müsaade edilirse $\frac{w'(a)}{z'(a)}$ noktası α merkezli ve $|\beta|$ yarıçaplı bir çember belirtir. Böylece $\beta = 0$ olmadıkça $\arg\frac{w'(a)}{z'(a)}$ değişecektir. $\arg\frac{w'(a)}{z'(a)}$, $\arg z'(a)$ dan bağımsız ve β nın verilişi dikkate alınarak

$$0 = \beta = \frac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)]$$

olması

$$f_x = -if_y$$

olmasını gerektirir. Bu ise Cauchy – Rieman denklemlerinin sağlanması demektir. Geçekten

$$f_x = U_x + iV_x, \qquad f_y = U_y + iV_y$$

olduğu dikkate alınırsa

$$f_x = -if_y \Rightarrow U_x + iV_x = V_y - iU_y$$

yazılır. Buradan

$$U_x = V_y, \qquad U_y = -V_x$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde analitiktir.

4.2. Gerçel Eksenin Bir Çokgen Üzerine Dönüşümü

Düz ve yönlenmiş bir C yayının bir z_0 noktasındaki birim teğet vektörünü t karmaşık sayısı ile göstereceğiz. f, z_0 da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olmak üzeri bir $w = f(z)$ dönüşümü altında C nin S görüntüsünde z_0 a karşılık gelen w_0 noktasındaki birim teğet vektörünü τ sayısı ile gösterelim. Bu durumda

$$\arg \tau = \arg t + \arg f'(z_0) \tag{4.1}$$

olduğunu görmüştük.

Özel olarak eğer C, x ekseninin sağa doğru yönlenmiş bir parçası ise bu durumda onun $z_0 = x$ noktalarının her birinde $t = 1$ ve $\arg t = 0$ olur ve (4.1) eşitliği

$$\arg \tau = \arg f'(x)$$

olarak yazılır. Bu parça boyunca $f'(z)$ sabit bir argümana sahip olduğu sürece, $\arg \tau$ da sabit olur; yani o parçanın S görüntüsü de yine düz bir doğru parçasıdır.

Şimdi x ekseninin tamamını n ayrıtlı bir çokgenin üzerine dönüştüren öyle bir $w = f(z)$ dönüşümü oluşturalım ki $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ve $x_n = \infty$ noktaları x ekseni üzerinde bulunan ve görüntüleri çokgenin köşeleri olan ayrıca

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$$

eşitsizliklerini de sağlayan noktalar olsun. Köşeler

$$w_j = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

noktaları olup $w_n = f(\infty)$ dur. f fonksiyonu, z noktası x eksenini çizdikçe $\arg f'(z)$ bir sabit değerden diğerine atlayacak şekilde olmalıdır.

Eğer A sabit bir kompleks sayı, k_j lerin her biri de birer sabit reel sayı olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonu

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1} (z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \qquad (4.2)$$

olacak şekilde seçilirse, z gerçel ekseni taradıkça $f'(z)$ nin argümanı istenilen biçimde değişecektir. Çünkü (4.2)fonksiyonunun argümanı

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \cdots$$
$$- k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}) \qquad (4.3)$$

olarak yazılabilir. $z = x$ ve $x < x_1$ olduğunda

$$\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = \cdots = \arg(z - x_{n-1}) = \pi$$

olur. Burada $x_1 < x < x_2$ için $\arg(z - x_1) = 0$ dır ve diğer argümanların her biri π dir.

O zaman (4.3) eşitliğine göre, z noktası $z = x_1$ noktasından geçip sağa doğru hareket ettikçe $\arg f'(z)$ de birden bire $k_1\pi$ açısı kadar artar. z noktası x_2 noktasından geçerken yine $k_2\pi$ miktarı kadar artar ve böylece devam eder gider.

$\arg\tau = \arg f'(z)$ eşitliğine göre, z noktası x_{j-1} den x_j ye doğru değişirken τ birim vektörünün yönü sabit kalır. Dolayısıyla w, bu sabit yönde düz bir doğru boyunca hareket eder. Ama x_j nin w_j görüntü noktasında τ nun yönü birden $k_j\pi$ açısı kadar değişir. Bu $k_j\pi$ açıları w_j noktalarınca belirlenmiş çokgenin dış açılarıdır.

Dış açılar $-\pi$ ve π arasındaki açılara kısıtlanabilir. Bu durumda $-1 < k_j < 1$ olur. Çokgenin kenarlarının birbirlerini hiç kesmediklerini varsayıyoruz. Kapalı bir çokgenin dış açıları toplamının 2π olduğu göz önüne alınarak $x_n = \infty$ noktasının görüntüsü olan w_n köşesindeki dış açı,

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\pi$$

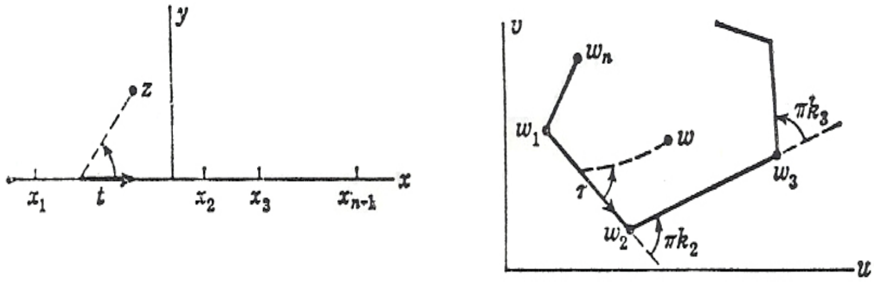
olarak yazılabilir. O halde k_j sayıları

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + k_n - 2$$
$$-1 < k_j < 1 \, , j = 1,2, \ldots, n$$

koşullarını sağlamalıdır. Buradaki eşitlikten

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} - 2 - k_n$$

yazılır. Bu $k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\pi$ eşitliğinde kullanılırsa $k_n = 0$ olduğu görülür. Bu durumda çokgenin ilk ve son kenarının doğrultuları çakışır ve w_n bir köşe olmaktan çıkar, birinci ayrıt üzerinde bir nokta olur. Böylece çokgenimiz $n \quad 1$ kenarlı olarak karşımıza çıkar (Churchill 1989).



Şekil 4.1. Gerçel eksenin bir çokgen üzerine dönüşümü

4.3. Schwarz-Christoffel Formülü

Teorem 4.3.1: Köşe noktaları $w_1, w_2, \ldots, w_n$ olan w düzlemdeki bir çok kenarlı P olsun. Şekil 4.2 de görüldüğü gibi P nin dış açıları $k_1\pi, k_2\pi, \ldots, k_n\pi$ dir. $\operatorname{Im}(z_0) \geq 0$ alalım. Bu takdirde;

$$f(z) = A\int_{z_0}^{z} (z' - x_1)^{-k_1}(z' - x_2)^{-k_2} \ldots (z' - x_n)^{-k_n}\, dz' + B$$

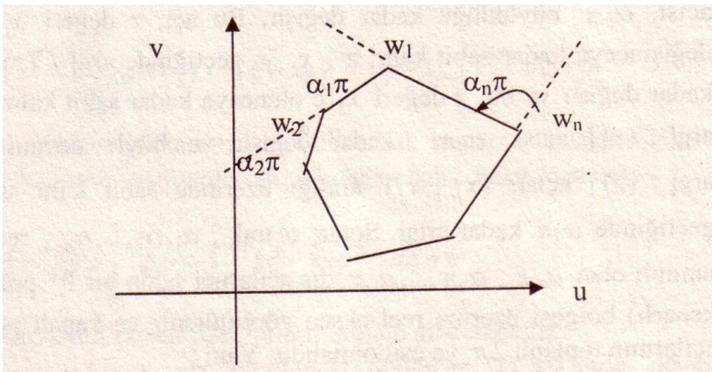
fonksiyonu $\operatorname{Im}(z) > 0$ bölgesini, P tarafından sınırlanan bölge üzerine dönüştürecek şekilde A, B sabitleri ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reel sayıları vardır.

$\operatorname{Im}(z) > 0$ için bu integral üst yarı düzlemdeki z_0 dan z ye herhangi bir parçalı düzgün eğri üzerinden alınır.Teoremde ifade edilen f fonksiyonuna Schwarz – Christoffel dönüşümü denir.

Eğer bu çok kenarlının köşeleri olan $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \infty$ noktaları çok kenarlının köşelerine görüntülenecek şekilde $z_n = \infty$ seçersek integralden $(z' - x_n)^{-k_n}$ çarpanının atılmasıyla Schwarz – Christoffel dönüşümü

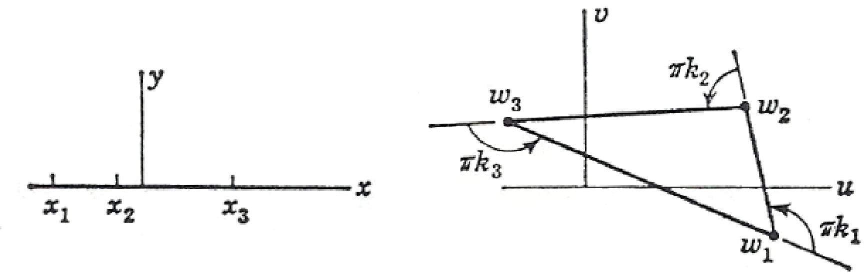
$$f(z) = A\int_{z_0}^{z}(z' - x_1)^{-k_1}(z' - x_2)^{-k_2} \dots (z' - x_{n-1})^{-k_{n-1}} dz' + B$$

şekline gelir.Yani üst yarı düzlemi bir çokgen üzerine dönüştüren herhangi bir dönüşüm Schwarz – Christoffel dönüşümüdür (Başarır 2010).



Şekil 4.2. Üst yarı düzlemin poligona dönüşümü

Örnek 4.3.1 (x-Ekseninin Eşkenar Üçgene Dönüşümü):



Şekil 4.3. Gerçel eksenin üçgensel bölgeye dönüşümü

Çokgenin köşeleri w_1, w_2, w_3 noktaları olan Şekil 4.3. deki gibi bir üçgen ise

$k_1 + k_2 + k_3 = 2$ ve $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(z) = w = A\int_{z_0}^{z}(z' - x_1)^{-k_1}(z' - x_2)^{-k_2}(z' - x_3)^{-k_3}dz' + B \tag{4.4}$$

yazılabilir. Eğer w_3 köşesinin görüntüsünü sonsuzdaki nokta olarak alırsak, üçgenin dönüşümü

$$f(z) = w = A\int_{z_0}^{z}(z' - x_1)^{-k_1}(z' - x_2)^{-k_2}dz' + B \tag{4.5}$$

olur. Burada x_1 ve x_2 ye istenilen değerler verilebilir.

Şimdi üst yarı düzlemi eşkenar bir üçgene dönüştüren formülü bulalım.

Eş ayrıtlı bir üçgen için $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{2}{3}$ tür. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = +\infty$ yazmak ve $z_0 = 1$, $A = 1, B = 0$ olmak üzere (4.5) eşitliğini kullanmak uygun olur. Böylece

$$f(z) = w = \int_1^z (z' + 1)^{-\frac{2}{3}}(z' - 1)^{-\frac{2}{3}}dz' \tag{4.6}$$

olur. Şimdi,

$$w_1 = f(-1), w_2 = f(1), w_3 = f(+\infty)$$

görüntülerini bulalım. Öncelikle

$$w_2 = f(1) = \int_1^1 (z' + 1)^{-\frac{2}{3}}(z' - 1)^{-\frac{2}{3}}dz' = 0$$

dır. Yani $w_2 = 0$ olur. $w_1 = f(-1)$ i bulalım. z' yerine x yazabiliriz. O zaman

$$w_1 = f(-1) = \int_1^{-1} (x+1)^{-\frac{2}{3}} (x-1)^{-\frac{2}{3}}\, dx$$

olur. $-1 < x < 1$ aralığında integral alınacak. $0 < x + 1$ ve $\arg(x+1) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$x + 1 = |x+1| e^{0i} = (x+1) e^{0i}$$

yazılabilir. Aynı şekilde $x - 1 < 0$ ve $\arg(x-1) = \pi$ dir. Böylece;

$$x - 1 = |x-1| e^{\pi i} = (1 - x) e^{\pi i}$$

yazılabilir.

$$w_1 = f(-1) = \int_1^{-1} (x+1)^{-\frac{2}{3}} (x-1)^{-\frac{2}{3}}\, dx$$

$$= \int_1^{-1} \left[(x+1)e^{0i}\right]^{-\frac{2}{3}} \left[(1-x)e^{\pi i}\right]^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$= e^{-\frac{2}{3}\pi i} \int_1^{-1} (x+1)^{-\frac{2}{3}} (1-x)^{-\frac{2}{3}}\, dx$$

$$= e^{-\frac{2}{3}\pi i} (-1) \int_{-1}^{1} (x+1)^{-\frac{2}{3}} (1-x)^{-\frac{2}{3}}\, dx, \quad \left(-1 = |-1| e^{\pi i}\right)$$

$= e^{\frac{\pi i}{3}} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$ (β fonksiyonunu tanımlarken kullanılan integraldir.)

$$b = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} \quad \text{dersek}$$

$$f(-1) = w_1 = e^{\frac{\pi i}{3}} b = c_1 + i c_2 \qquad , \qquad (|w_1| = b > 0 \ dır)$$

$$w_3 - f(x_3) - f(\infty) - \int_1^{\infty} (x+1)^{-\frac{2}{3}} (x-1)^{-\frac{2}{3}} \, dx$$

olur. Burada

$$1 < x < \infty \, , x - 1 > 0 \, , x + 1 > 0$$

dır.

$$w_3 = f(\infty) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^{2/3}}$$

olur. w_3 köşesi pozitif u ekseni üzerindedir. Ama z negatif x ekseni boyunca sonsuza giderken w_3 ün değeri de (4.6) integrali ile gösterilebilir.

$$w_3 = \int_1^{-\infty} (x+1)^{-2/3} (x-1)^{-2/3} dx$$

$$w_3 = \int_1^{-1} (x+1)^{-2/3} (x-1)^{-2/3} dx + \int_{-1}^{-\infty} (x+1)^{-2/3} (x-1)^{-2/3} \, dx$$

$$w_3 = w_1 + \int_{-1}^{-\infty} (x+1)^{-2/3} (x-1)^{-2/3} \, dx$$

şeklindedir. Burada

$$x+1<0\ ,\arg(x+1)=\pi \text{ ve } \quad x+1=\ |x+1|\ e^{\pi i}$$

$$x-1<0\ ,\arg(x-1)=\pi \text{ ve } \quad x-1=\ |x-1|\ e^{\pi i}$$

yazılır.

$$w_3 = w_1 + \int_{-1}^{-\infty} |x+1|^{-2/3}\, e^{\frac{-2\pi i}{3}}\ |x-1|\, e^{\frac{-2\pi i}{3}}\ dx$$

$$w_3 = w_1 + e^{\frac{-4}{3}\pi i} \int_{-1}^{-\infty} |x^2-1|^{-2/3}\, dx$$

$u=-x$ alınırsa $du=-dx$ ve, $u(-1)=+1$, $u(-\infty)=+\infty$ olur.

$$w_3 = w_1 + e^{\frac{-4}{3}\pi i}\,(-1) \int_{1}^{\infty} \frac{du}{(u^2-1)^{2/3}}$$

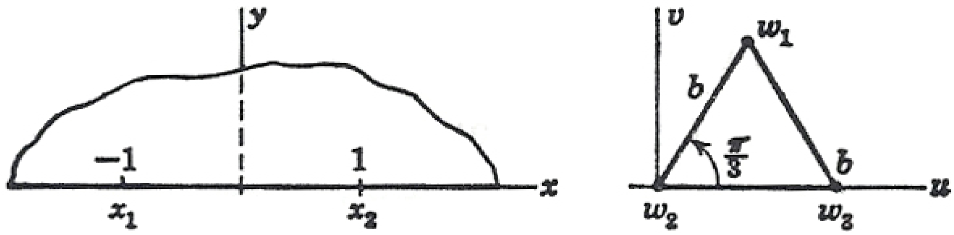
$$w_3 = w_1 + e^{\frac{-4}{3}\pi i}\, e^{\pi i} \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}}$$

$$w_3 = w_1 + e^{-\frac{\pi i}{3}}\, w_2$$

$$w_3 = b\, e^{\frac{\pi i}{3}} + e^{-\frac{\pi i}{3}}\, w_3$$

$$w_3 = b$$

bulunur (Churchill 1989).



Şekil 4.4. Gerçel eksenin eşkenar üçgene dönüşümü

4.4. Schwarz – Christoffel Dönüşümünün Elde Edilişi

Bu bölümde $H = \{z: I(z) > 0\}$ üst yarı düzlemini bir poligonun içine dönüştüren bir birebir analitik fonksiyonun bulunması problemini tartışacağız. Gelecek testlerimizde kullanacağımız bazı şartları sunacağız.

$j = 1,2,3,\ldots,n+1$ olmak üzere herhangi bir j tamsayısı için

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n\ ,\ x_{n+1} = \infty\ , -1 < k_j < 1 \text{ ve } \sum_{j=1}^{n+1} k_j = 2 \tag{4.7}$$

olacak şekilde x_j ve k_j sayılarını seçelim.

$$D = \{\, z: z \in \mathbb{R}^2 \ ve\ \frac{-\pi}{2}\ , j = 1,2,\ldots,n \ için\ z - x_j \ nin\ bir\ argümanı\ değil\}$$

ve D deki her bir z için

$$g(z) = (z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\ldots(z-x_n)^{-k_n} \tag{4.8}$$

ile verilen $g(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada

$$(z-x_j)^{-k_j} = |z-x_j|^{-k_j} e^{-ik_j\theta_j}\ ,\quad \frac{-\pi}{2} < \theta_j = \arg(z-x_j) < \frac{3\pi}{2} \tag{4.9}$$

şeklindedir. Sonuç olarak D deki uygun bir sabit z_0 noktası için

$$f(z)=\begin{cases}\int_{z_0}^{z} g(t)\,dt & ,z\in D\\ w_j & ,z=x_j\end{cases}$$

fonksiyonunu yazalım. Burada

$$w_j=\lim_{z\to x_j} f(z)\quad ,\quad j=1,2,\dots,n$$

ve

$$w_{n+1}=\lim_{z\to\infty} f(z)\quad ,\quad (z\in H^-)$$

şeklindedir.

$\mathbb{R}^2$ de bu limitlerin mevcut olduğunu göstereceğiz (Moore and Hadlock 1991).

Teorem (4.4.1): H, D, f, g, k_j, x_j ve w_j yukarıda verildiği gibi olsun. Ayrıca $j=1,2,\dots,n$ için $k_j\neq 0$ olarak verilsin.

a) f fonksiyonu D de analitiktir ve yine D de $f'=g$ dir.
b) $j=1,2,\dots,n$ için $\mathbb{R}^2$ de w_j limiti mevcuttur.
c) $\mathbb{R}^2$ de w_{n+1} limiti vardır.
d) $j=1,2,\dots,n$ için f fonksiyonu $[x_j,x_{j+1}]$ doğru parçasını $\overrightarrow{w_jw_{j+1}}$ doğru parçası üzerine ve $[x_{n+1},x_1]$ doğru parçasını da $\overrightarrow{w_{n+1}w_1}$ doğru parçası üzerine dönüştürür. Burada

$$[x_n,x_{n+1}]=[x_n,\infty)=\{x : x\geq x_n \text{ veya } x=\infty\}$$

ve

$$[x_{n+1}, x_1] = \{x : x \leq x_1 \ veya \ x = \infty\}$$

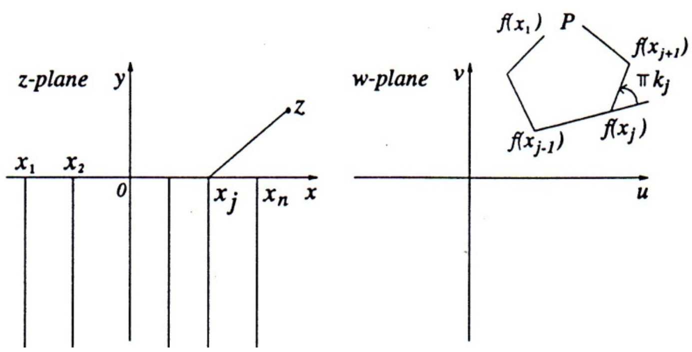
olarak anlaşılacaktır.

e) P, $j = 1,2,\dots,n$ olmak üzere $\overline{w_j w_{j+1}}$ doğru parçalarını ve $\overline{w_{n+1} w_1}$ doğru parçasını içeren kapalı bir poligon eğrisi olsun.

Bu durumda f genişletilmiş reel ekseni P ye dönüştürür.(Bak şekil 4.5) (4.10)

f) f fonksiyonu $j = 1,2,\dots,n$ için $[x_j, x_{j+1}]$ ve $[x_{n+1}, x_1]$ üzerinde birebirdir.

g) Köşeler hariç poligonun kenarları kendilerini kesmezse f fonksiyonu H üst yarı düzlemini P nin içi alan $iç(P)$ ye birebir olarak dönüştürür.



Şekil 4.5. Schwarz – Christoffel Dönüşümünün Elde Edilişi

f fonksiyonu genişletilmiş reel ekseni şekilde gösterilen doğru parçalarını içeren çokgensel P doğrusuna eşler (Moore and Hadlock 1991).

İspat (a): D basit bağlantılı bir bölgedir.

$$f(z) = \begin{cases} \int_{z_0}^{z} g(t)dt\,, & z \in D \\ w_j\,, & z = x_j \end{cases}$$

$z \in D$ olmak üzere

$$f(z+h) - f(z) = \int_{z_0}^{z+h} g(t)dt - \int_{z_0}^{z} g(t)\,dt = \int_{z}^{z+h} g(t)dt$$

yazılır.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} g(t)dt$$

veya

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} [g(t) - g(z)]\ dt$$

yazılır. g fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} [g(t) - g(z)]\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\int_{z}^{z+h} |g(t) - g(z)|\ |dt|\ , \qquad (g(t) - g(z) < \varepsilon)$$

$$< \frac{\varepsilon}{|h|}\int_{z}^{z+h} |dt| = \varepsilon \quad , \quad \left(\int_{z}^{z+h} |dt| = |h|\right)$$

bulunur. Bu da

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| = 0$$

veya

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z) + h - f(z)}{h} = g(z)$$

veya

$$f'(z) = g(z)$$

elde edilir. Bu her $z \in D$ için $f'(z)$ türevinin var olması demektir. Bu da $f(z)$ fonksiyonunun D de analitik olması demektir.

İspat (b): $$g(z) = (z - x_1)^{-k_1} h(z) \qquad (4.11)$$

olduğunu düşünelim. Burada

$$h(z) = (z - x_2)^{-k_2} \dots (z - x_n)^{-k_n}$$

dir.Dolayısı ile h, x_1 noktasında analitiktir. O zaman x_1 in uygun bir komşuluğunda

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_1)^n \qquad (4.12)$$

şeklinde Taylor Serisine açılır.

$p \in D \cap N(x_1)$ olsun. $D \cap N(x_1)$ deki her bir z için

$$
\begin{aligned}
f(z) = \int_{z_0}^{p} g(t)dt + \int_{p}^{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (t - x_1)^{n-k_1} \, dt \\
= \int_{z_0}^{p} g(t)dt + (z - x_1)^{1-k_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (z - x_1)^{n} \\
- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (p - x_1)^{n-k_1+1}
\end{aligned}
\qquad (4.13)
$$

$$
f(z) = \int_{z_0}^{z} g(t)dt
$$

$$
= \int_{z_0}^{p} g(t)dt + \int_{p}^{z} g(t)dt
$$

$$
= \int_{z_0}^{p} g(t)dt + \int_{p}^{z} \sum_{h=0}^{\infty} a_n \, (t - x_1)^{n-k_1} dt
$$

$$
= \int_{z_0}^{p} g(t)dt + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{p}^{z} (t - x_1)^{n-k_1} dt
$$

$$
= \int_{z_0}^{p} g(t)dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (t - x_1)^{n-k_1+1} \Big|_{p}^{z}
$$

$$
= \int_{z_0}^{p} g(t)dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (z - x_1)^{n-k_1+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (p - x_1)^{n-k_1+1}
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_{z_0}^{p} g(t)dt + (z - x_1)^{1-k_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (z - x_1)^{n} \\
- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (p - x_1)^{n-k_1+1}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{z \to x_1} f(z) = \int_{z_0}^{z} g(t)dt - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n - k_1 + 1} (p - x_1)^{n-k_1+1}
$$

$$
\lim_{z \to x_1} f(z) = L
$$

olur. Burada $L \in \mathbb{C}$ dir. Yani $\lim_{z \to x_1} f(z)$ limiti vardır. Benzer şekilde $j = 1,2,\dots,n$ için $\lim_{z \to x_1} f(z)$ limiti vardır denir.

İspat (c):Eğer $|z| > 2|x_j|$ ise

$$(i) \quad |z - x_j| \geq |z| - |x_j| \geq |z| - \frac{|z|}{2} = \frac{|z|}{2}$$

Eğer, $|z| > |x_j|$ ise

$$(ii) \quad |z - x_j| \leq |z| + |x_j| < 2|z|$$

Bu yüzden $|z| > 2|x_j|$ için

$$|z - x_j|^{-k_j} < \begin{cases} 2^{k_j}|z|^{-k_j} & k_j > 0 \ ise \ (i) \ e \ göre \\ 2^{-k_j}|z|^{-k_j} & k_j < 0 \ ise \ (ii) \ e \ göre \end{cases} \tag{4.14}$$

Şimdi $r > max\{2|x_j| : j = 1,2,\dots,n\}$ olduğunu düşünelim. Buna göre $|z| > r$ ise bu taktirde $s = \sum_{j=1}^{n} k_j$ ve M pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$|g(z)| < \frac{M}{|z|^s} \tag{4.15}$$

yazılır. Şimdi $k_{n+1} < 1$ dir. Böylece $-k_{n+1} > -1$ dir. Bundan dolayı (4.7)'ye göre

$$s = 2 - k_{n+1} = 2 + (-k_{n+1}) > 2 + (-1) = 1 \tag{4.16}$$

olur. $|z| > r$ için C nin $|t| = |z|$ ile verilen $|z|$ den z ye uzanan dairesel bir yay olmak üzere (bak şekil 4.6)

$$f(z) = \int_{z_0}^{r} g(t)dt + \int_{r}^{|z|} g(x)dx + \int_{c} g(t)dt \qquad (4.17)$$

olarak yazılır.

(4.17) deki ilk integral bir sabittir. İkinci integralin $|z|$ sonsuza giderken (4.15) ve (4.16)göz önüne alınarak

$$\left|\int_{r}^{|z|} g(x)dx\right| \leq M \int_{r}^{|z|} x^{-s} dx$$

$$= \frac{M}{1-s}\left[\frac{1}{|z|^{s-1}} - \frac{1}{r^{s-1}}\right]$$

$$\to \frac{M}{(s-1)r^{s-1}} \qquad (4.18)$$

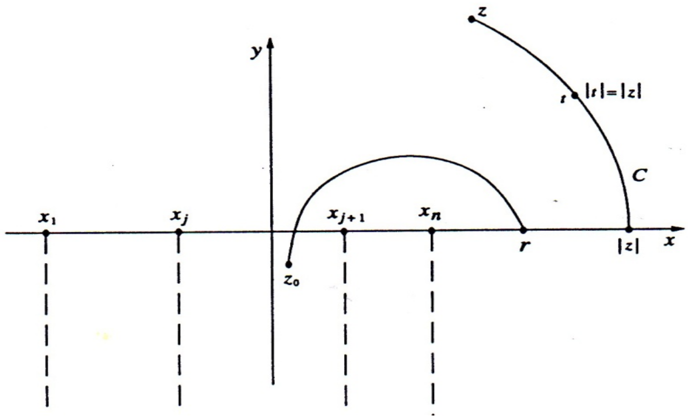
şeklinde bir limite sahip olduğu görülür.

Son olarak (4.17) deki üçüncü integral $z \to \infty$ iken

$$\left|\int_{c} g(t)dt\right| \leq \frac{M}{|z|^{s}}(2\pi|z|) \quad ,$$

$$= \frac{2\pi M}{|z|^{s-1}} \to 0 \qquad (4.19)$$

şeklinde sıfır olduğu bulunur.



Şekil 4.6. Schwarz – Christoffel Dönüşümünün Elde Edilişi

$$f(z) = \int_{z_0}^{r} g(t)dt + \int_{r}^{|z|} g(x)dx + \int_{C} g(t)dt$$

Böylece (4.17) – (4.19) göz önüne alınırsa

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_{n+1}$$

olduğu görülür.

İspat (d): Öncelikle x ve x_j reel ve $\alpha_j(x) = arg\left(x - x_j\right)$ ise

$$\alpha_j(x) = \begin{cases} \pi \ iken & x - x_j < 0 \\ 0 \ iken & x - x_j > 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

olur. Teoremin (a) kısmına göre (4.8) dikkate alındığında eğer $x_{j-1} < x < x_j$ ise

$$\beta_x = arg f'(x)$$

$$= -k_1\alpha_1(x) - k_2\alpha_2(x) - \cdots - k_{j-1}\alpha_{j-1}(x) - k_j\alpha_j(x) - \cdots - k_n\alpha_n(x)$$

$$= -k_1 0 - \cdots - k_{j-1} 0 - k_j \pi - \cdots - k_n \pi \tag{4.21}$$

Bu yüzden $z = x$, x ekseni boyunca x_{j-1} den x_j e doğru gittiğinde β_x bir sabittir. Yani $w = f(x)$ eğrisine teğet vektörün sabit bir yönü vardır. Böylece x, x_{j-1} den x_j e giderken $w = f(x)$ bir doğru boyunca hareket eder. Bu yüzden f, $[x_{j-1}, x_j]$ aralığını $\overrightarrow{w_{j-1} w_j}$ doğru parçası üzerine dönüştürür. Fakat β_x , x_j den geçtiğinde $|k_j \pi|$ kadar artar (veya azalır). Çünkü $x_j < x < x_{j+1}$ ise (4.21) de $-k_j \pi$ terimi 0 ile yer değiştirecektir. Aynı zamanda (4.21) deki ilk doğruya göre görüyoruz ki β_x, $x < x_1$ için ve $x > x_n$ için sabittir. Böylece f, $[x_n, \infty]$'u $\overrightarrow{w_n, w_{n+1}}$ doğru parçası üzerine ve f, $[x_{n+1}, x_1]$ i de $\overrightarrow{w_{n+1} w_1}$ doğru parçası üzerine dönüştürür.

İspat (e): (d) deki açıklamalardan bu görülür.

Not: (4.10)'un sağlandığını kabul edelim. w_n, w_{n+1} ve w_1 aynı doğru üzerindeyse w_{n+1} P nin köşesi değildir ve P, n tane kenara sahiptir. Burada n, $g(t)$ deki çarpanların sayısıdır. Fakat w_n , w_{n+1} ve w_1 aynı doğru üzerinde değilse w_{n+1} bir köşedir ve P nin $n+1$ kenarı vardır. Böylece P, n veya $n+1$ köşeye sahiptir. Aynı zamanda (4.21)'e göre w_j deki P'nin dış açısı $k_j \pi$ dir.

İspat (f): Eğer sabit j için $x_{j-1} < x < x' < x_j$ ise t, $[x, x']$ aralığında değiştiğinde $\theta = \arg g(t)$ sabittir. Buradan

$$f(x') - f(x) = \int_x^{x'} g(t)\, dt$$

$$= e^{i\theta} \int_x^{x'} |g(t)|\, dt$$

$$\neq 0$$

yazılır. Böylece $f(x') \neq f(x)$ olur ve f fonksiyonu $[x_{j-1}, x_j]$ aralığında birebirdir. Benzer şekilde f , $[x_n, x_{n+1}]$ ve $[x_{n+1}, x_1]$ üzerinde birebirdir.

İspat (g): C, S_r yarım dairesi, n tane S_{r_j} yarım daireleri ve şekil (4.6) da gösterilen x ekseninin parçalarıyla oluşan basit kapalı bir çevre olsun w_0 P poligonu üzerinde olmayan bir nokta olsun. $f(z) - w_0$ ın C nin içindeki sıfırların n_c sayısı C deki $f(z)$ w_0 hiç sıfır olmasın diye yarım daire ışınlarının seçildiği

$$Q(z) = \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \text{ olmak üzere } n_c = \frac{1}{2\pi i} \int_C Q(z)dz \tag{4.22}$$

olduğu bilinmektedir. Burada yarım çemberler o şekilde seçilmiştir ki

$f(z) - w_0$ ın C eğrisi üzerinde sıfırı yoktur.

$t, \tau, f(t)$ ve $f(\tau)$ şekil (4.7) deki gibi olmak üzere

$$\int_t^\tau Q(x)dx = \int_{f(t)}^{f(\tau)} \frac{dw}{w - w_0} \tag{4.23}$$

yazılır. Buradaki son integral P nin bir kenarı üzerinden alınmıştır. Çünkü $w = f(x)$, $f(t)$ den $f(\tau)$ ye uzanan doğru parçasının bir parametresidir.

Bu teoremin (b) kısmına göre

$$\lim_{\substack{t \to x_j \\ \tau \to x_{j+1}}} \int_{f(t)}^{f(\tau)} \frac{dw}{w - w_0} = \lim_{\tau \to x_{j+1}} \int_{w_j}^{f(\tau)} \frac{dw}{w - w_0} - \lim_{t \to x_j} \int_{w_j}^{f(t)} \frac{dw}{w - w_0}$$

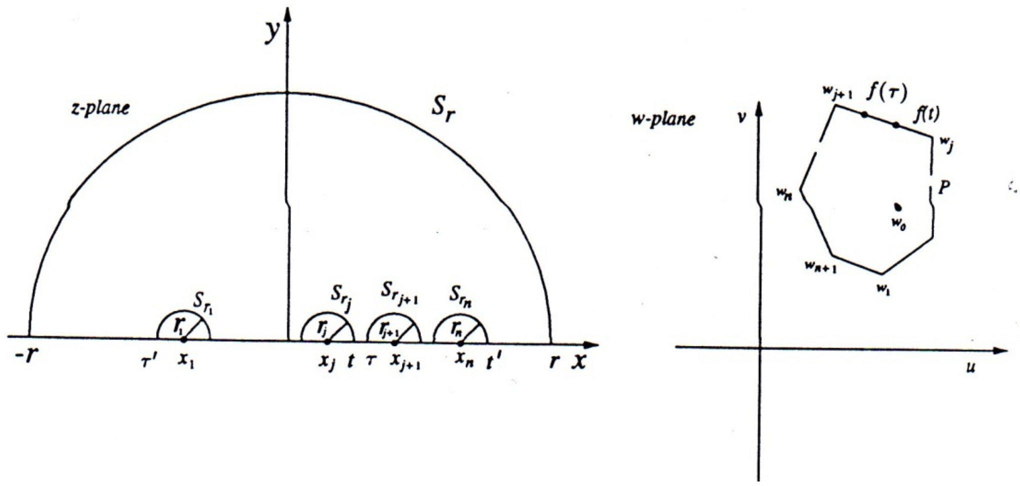
$$= \int_{w_j}^{w_{j+1}} \frac{dw}{w - w_0} - \int_{w_j}^{w_j} \frac{dw}{w - w_0}$$

$$= \int_{w_j}^{w_{j+1}} \frac{dw}{w - w_0} \tag{4.24}$$

yazılır. Böylece (4.23) ve (4.24)’e göre

$$\lim_{\substack{t \to x_j \\ \tau \to x_{j+1}}} \int_t^{\tau} Q(x)dx = \int_{w_j}^{w_{j+1}} \frac{dw}{w - w_0} \tag{4.25}$$

olur.



Şekil 4.7. Schwarz – Christoffel Dönüşümünün Elde Edilişi

Eğer (4.10) sağlarsa f fonksiyonu H nin $I(P)$ üzerinde birebir eşleniğidir.

Benzer olarak

$$\lim_{\substack{t' \to x_n \\ r \to \infty}} \int_{t'}^{r} Q(x)dx = \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{dw}{w - w_0} \tag{4.26}$$

ve

$$\lim_{\substack{\tau'\to x_1 \\ r\to\infty}} \int_{-r}^{\tau'} Q(x)dx = \int_{w_{n+1}}^{w_1} \frac{dw}{w - w_0} \qquad (4.27)$$

olduğu görülür. (10.101)'e göre

$$2\pi i n_c = \int_{s_r} Q(z)dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{s_{r_j}} Q(z)dz + \int_{-r}^{\tau'} Q(x)dx$$

$$+ \cdots + \int_{t}^{\tau} Q(x)dx + \cdots + \int_{t'}^{r} Q(x)dx \qquad (4.28)$$

yazılır.

(4.25)- (4.28) e göre r sonsuza giderken ve her bir r_j sıfıra giderken,

$$n_c \to \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - w_0} = \begin{cases} 1 & w_0 \epsilon\, I(P)\, ise \\ 0 & w_0 \epsilon\, E(P)\, ise \end{cases} \qquad (4.29)$$

olur. Buradan (4.29) doğrudan aşağıdaki (i) ve (ii) düşüncelerini verir.

(i) w_0, P poligonunun içinde ise $f(z) = w_0$ olacak şekilde H de bir tek z vardır.

(ii) w_0,P poligonunun dışında ise $f(z) = w_0$ olacak şekilde H de hiçbir z yoktur.f analitik bir fonksiyon olduğundan $f(H)$ açık kümedir. Böylece şu düşünceyi elde ederiz:

(iii) w_0, P üzerinde bir nokta ise $f(z) = w_0$ olacak şekilde H de hiçbir z yoktur. Bir an için $z_0 \in H$ olmak üzere $f(z_0) = w_0 \;\in P$ olduğunu düşünelim. $f(H)$ açık olduğu için $N_r(w_0) \subset f(H)$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla H nin noktalarının görüntüleri olan $N_r(w_0) \cap E(P)$ kümesinde noktalar vardır. Bu da (ii) ile çelişir. Bu yüzden (i) – (iii) ile şu sonuca varırız ki f, H'yi $I(F)$ üzerinde birebir örter (dönüştürür) ve (g) ispatlanmış olur.

4.5. Fonksiyon Dizileri

Tanım 4.5.1: (f_n), $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f_n : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Ayrıca $A_1 \subset A$ olmak üzere $f : A_1 \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.

i. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $z \in A_1$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$ sayısı bulunabiliyorsa (f_n) fonksiyon dizisi A_1 kümesinde f fonksiyonuna (noktasal) yakınsıyor denir ve $f_n \to f$ veya $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ ile gösterilir.

ii. Her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in A_1$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde ortak bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (f_n) fonksiyon dizisi A_1 kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir (Kadıoğlu 2011).

Tanım 4.5.2: Her bir terimi A kümesinde tanımlı olan (f_n) fonksiyon dizisi verilsin ve $A_1 \subset A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in A_1$için $n, m > n_0$iken $|f_n(z) \quad f_m(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$sayısı varsa (f_n) dizisine A_1 kümesinde düzgün Cauchy dizisi denir (Kadıoğlu 2011).

Teorem 4.5.1: (Diziler İçin Cauchy Düzgün Yakınsaklık Kuralı) Her bir terimi A kümesinde tanımlı olan (f_n) fonksiyon dizisi verilsin ve $A_1 \subset A$ olsun. (f_n) dizisinin A_1 kümesinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu dizinin A_1 kümesinde bir düzgün Cauchy dizisi olmasıdır (Kadıoğlu 2011).

İspat: Önce (f_n) dizisinin A_1 kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in A_1$ için $n > n_0$ iken $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. A_1 kümesinde, aynı n_0 için, $n, m > n_0$ olduğunda

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_m(z) - f(z)| < 2\varepsilon$$

bulunur. O halde (f_n), A_1 kümesinde düzgün Cauchy dizisidir.

Şimdi de (f_n) dizisinin A_1 kümesinde düzgün Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. O halde $\varepsilon > 0$ ve her $z \in A_1$ için $m, n > n_0$ iken $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. Yani her bir $z \in A_1$ için $(f_n(z))$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. Bu durumda her bir $z \in A_1$ için $(f_n(z))$ dizisi yakınsaktır. Bunu $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ olarak yazalım. Şimdi, $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon/2$ ifadesinde n yi sabit tutup $m \to \infty$ göz önüne alınırsa aynı n_0 ve her $z \in A_1$ için

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise (f_n) dizisinin A_1 kümesinde düzgün yakınsak olması demektir.

Teorem 4.5.2: (f_n) dizisindeki her bir fonksiyonun bir A kümesinde sürekli olduğunu ve (f_n) dizisinin, bu kümede, f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda, f fonksiyonu A kümesinde süreklidir (Kadıoğlu 2011).

İspat: Keyfi bir $z_0 \in A$ alalım. $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun z_0 noktasında sürekli olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ verilsin. $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan A kümesine ait her z için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız. Bir n indisi ve A kümesinin herhangi bir z noktası için, üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|$$

yazılır. Diğer yandan (f_n), A kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsadığından, A daki her z için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir n indisi seçilebilir. Hipoteze göre f_n, A kümesinde sürekli olduğundan A kümesine ait ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her z için $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir. Bunları ve üçgen eşitsizliği kullanılarak yazılan yukarıdaki eşitsizliği göz önüne alırsak A kümesine ait ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her z için

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında sürekli olur. z_0, A kümesinin keyfi bir noktası olduğundan f fonksiyonunun A kümesinde sürekli olduğu söylenir.

Teorem 4.5.3: (f_n) dizisindeki her bir fonksiyonun A kümesinde sürekli olduğunu ve (f_n) dizisinin, bu kümede, f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda, A kümesindeki her parçalı düzgün γ eğrisi için

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

olur (Kadıoğlu 2011).

İspat: Teorem 11.1.4 e göre f fonksiyonu A kümesinde süreklidir. Dolayısıyla $\int_\gamma f(z)dz$ integralinden sözedebiliriz. (f_n), A kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsadığından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 sayısı bulabiliriz ki her $z \in A$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olur. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in A$ için $n > n_0$ olduğunda

$$\left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)||dz| < \varepsilon L(\gamma)$$

yazılır. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma} f_n(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

olur.

Tanım 4.5.3: (f_n) dizisi, bir A kümesinin her kapalı alt diskinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa (f_n) dizisi A kümesinde f fonksiyonuna normal yakınsıyor denir (Kadıoğlu 2011).

Teorem 4.5.4: B,bir bölge ve (f_n),bu bölgede analitik olan fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer (f_n) dizisi, B de f fonksiyonuna normal yakınsıyorsa f, B bölgesinde analitiktir. Ayrıca, (f_n') dizisi de B bölgesinde f' fonksiyonuna normal yakınsar (Kadıoğlu 2011).

İspat: z_0, B bölgesinde keyfi bir nokta olsun. $\overline{D}$ tamamen B bölgesinde kalacak şekilde $D = \{z : |z - z_0| < r\}$ diskini göz önüne alalım. Hipoteze göre $\overline{D} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$ kümesinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün olduğundan, D diskinde de bu yakınsama düzgündür. Amacımız f nin D D de ve dolayısıyla z_0 noktasında analitik olduğunu göstermektir. Bunun için Morera Teoremini kullanacağız. f_n fonksiyonları B bölgesinde analitik olduğundan aynı zamanda bu bölgede süreklidirler. Hipoteze göre, (f_n) dizisi $\overline{D}$ kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsadığından f fonksiyonu bu kümede ve aynı zamanda D de süreklidir. γ, D de basit kapalı parçalı düzgün keyfi bir eğri olsun. f_n fonksiyonları D de analitik olduğundan Cauchy-Goursat Teoremine göre $\int_{\gamma} f_n(z)dz = 0$ dır. Diğer yandan, teorem 11.1.5. e göre, $\int_{\gamma} f_n(z)dz \to \int_{\gamma} f(z)dz$ $olup$ $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ dır. O halde, Morera Teoremine göre f, D diskinde ve dolayısıyla z_0 noktasında analitiktir. z_0 , B bölgesinde keyfi bir nokta olduğundan f, B nin her noktasında, yani B bölgesinde, analitik bir fonksiyondur.

Şimdi de, B deki her kapalı diskte $f_n' \to f'$ yakınsamasının düzgün olduğunu gösterelim. $\bar{D} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$, B bölgesinde kapalı bir disk olsun. B bölgesinde z_0 merkezli ρ yarıçaplı öyle bir γ çemberi göz önüne alalım ki $\bar{D}$ kümesi bu çemberin içinde kalsın. Bu durumda $r < \rho$ olur. Cauchy İntegral Formülüne göre her $z \in \bar{D}$ için

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw \text{ ve } f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw$$

yazarız. Hipoteze göre $\{z : |z - z_0| \leq \rho\}$ kapalı diskinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgündür. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$, için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z) < \varepsilon|$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı bulabiliriz. γ ,$\{z : |z - z_0| \leq \rho\}$ kümesinin sınırı olduğundan γ üzerindeki her w için $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ olduğunda $|f_n(w) - f(w) < \varepsilon|$ yazılabilir.

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2}dw\right|$$

ve her $z \in \bar{D}$,her $w \in \gamma$ için $|w - z| \geq \rho - r$ olduğunu dikkate alarak

$n > n_0 = n_0(\epsilon)$ olduğunda

$$|f_n'(z) - f'(z)| < \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon}{(\rho - r)^2}L(\gamma) = \frac{\varepsilon\rho}{(\rho - r)^2}$$

elde edilir. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

4.6. Fonksiyonların Normal Aileleri

$A(D)$ ile D de analitik alan fonksiyonların aileleri gösterelim.

Tanım 4.6.1: D, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $\mathcal{F} \subset A(D)$ olsun.

a. $\mathcal{F}$ deki her bir dizi D nin her bir kompakt altkümesi üzerinde düzgün yakınsayan bir alt diziye sahipse $\mathcal{F}$ ye (D de) normal aile denir.

b. K, D nin kompakt bir altkümesi olsun. Her bir $f \in \mathcal{F}$ ve her $z \in K$ için

$$|f(z)| \leq M_k$$

olacak şekilde M_k sayısı $\mathcal{F}$ ailesi D nin her bir kompakt altkümesi üzerinde düzgün sınırlıdır denir.

c. $K \subset D$ olsun. Her $\varepsilon > 0$, her $z, z' \subset K$ ve her $f \subset \mathcal{F}$ için $|z \quad z'| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $\mathcal{F}$ ailesi K da eş süreklidir denir (Moore and Hadlock 1991).

Lemma 4.6.1: $\{z_n\}$,$\mathbb{C}$ de bir dizi $\{f_n\}$ kompleks fonksiyonların (her bir sabit k sayısı için $\{f_n(z_k)\}$ sayı dizisi sınırlı olacak şekilde) bir dizisi olsun.$\mathbb{N}$ deki her k için $\{f_{n_j}(z_k)\}$ yakınsayacak şekilde $\{f_n\}$ nin $\{f_{n_j}\}$ altdizisi vardır (Moore and Hadlock 1991).

İspat: $\{f_n(z_1)\}$,sayıların sınırlı bir dizisi olduğundan $\{f_{n_j}(z_1)\}$ şeklinde yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu z_1 de yakınsayan $\{f_n\}$ nin $\{f_{n_j}\}$ fonksiyonlarının bir alt dizisini tanımlar. Benzer şekilde $\{f_{n_j}(z_2)\}$ sınırlı sayı dizisi $\{f_{p_j}(z_2)\}$ yakınsak alt dizisine sahiptir. Buradan $\{f_{n_j}\}$ nin $\{f_{p_j}\}$ alt dizisinin z_1 ve z_2 de yakınsadığını söyleriz. Bu şekilde devam ederek

$f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \dots$ dizisi z_1 de yakınsar

$f_{p_1}, f_{p_2}, f_{p_3}, \dots$ dizisi z_1 ve z_2 de yakınsar

$f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}, \dots$ dizisi z_1, z_2 ve z_3 de yakınsar

yazılır. Burada her bir satır dizisi (birinci hariç) bir öncekinin bir alt dizisi ve dolayısıyla $\{f_n\}$ dizisi bir alt dizisidir.

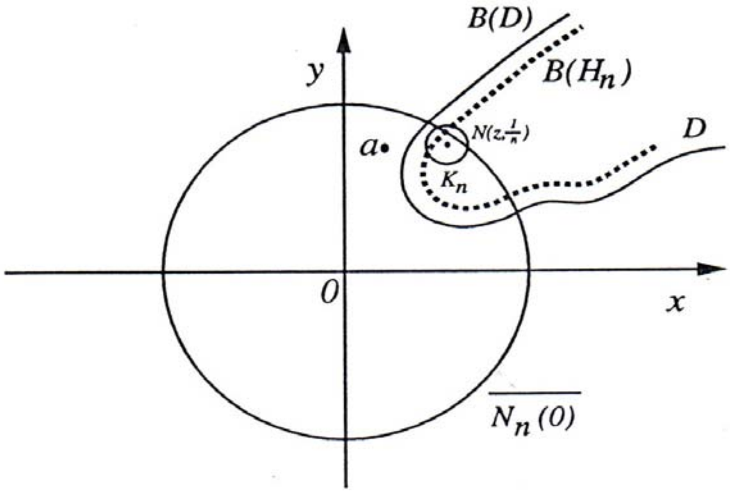
Burada köşegen üzerinde oluşan $f_{n_1}, f_{p_2}, f_{q_3}, \dots$ dizisi $\{f_n\}$ nin bir alt dizisidir ve $\mathbb{N}$ deki her bir k için z_k da yakınsar.

Lemma 4.6.2: D, $\mathbb{R}^2$ de bir açık küme olsun. Kompakt kümelerin bir $\{K_n\}$ alt dizisi vardır öyle ki $z \in K_n$ ise $r = \frac{1}{n(n+1)}$ olmak üzere $N_r(z) \subset K_{n+1}$ ve $K_n \subset iç K_{n+1}$ dir. Bundan başka

$$D = \cup \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olur (Moore and Hadlock 1991).

İspat:



Şekil 4.8. Fonksiyonların normal aileleri $K_n = \overline{N_n(0)} \cap H_n$

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$H_n = \left\{z : |z-a| \geq \frac{1}{n}, her\ bir\ a \in \mathbb{R}^2 - D\right\}$$

olmak üzere

$$K_n = N_n(0) \cap H_n$$

olsun. H_n yi

$$H_n = \mathbb{R}^2 \setminus \cup \left\{N_{\frac{1}{n}}(a) : a \in \mathbb{R}^2 - D\right\}$$

şeklinde de yazabiliriz. Açık kümelerin birleşiminin tümleyeni olduğundan H_n kapalıdır.

İki kapalı kümenin arakesiti kapalı olduğundan K_n kapalıdır. $K_n \subset \overline{N_n(0)}$ olduğundan K_n sınırlıdır. Dolayısıyla K_n kompaktır.

$z \in K_n$ ise $r = \frac{1}{n(n+1)}$ olmak üzere $N_r(z) \subset K_{n+1}$ ve $K_n \subset iç\ K_{n+1}$ olduğunu gösterelim. $w \in N_r(z)$ olsun. bu taktirde

$$|w| \leq |w-z| + |z| < \frac{1}{n(n+1)} + n < 1 + n$$

olur. Böylece $w \in \overline{N_{n+1}(0)}$

yazılır. $z \in H_n$ olduğundan $\mathbb{R}^2 - D$ deki her bir a için

$$|w-a| \geq |z-a| - |a-w| \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

olur. Böylece

$$w \in H_{n+1}$$

dir. $K_{n+1} = \overline{N_{n+1}(0)} \cap H_{n+1}$ olduğundan $w \in K_{n+1}$ dir. Böylece $N_r(z) \subset K_{n+1}$ yazılır. $z \in K_n$ ise $N_r(z) \subset K_{n+1}$ olduğundan $K_n \subset içK_{n+1}$ dir.

$z \in H_n$ ise $z \notin \mathbb{R}^2 - D$ dir. buradan $H_n \subset D$ yazılır. Böylece her K_n için $K_n \subset D$ dir. Bu da

$$\cup \{K_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D$$

olmasını gerektirir. Şimdi de $z \in D$ alalım. D açık olduğundan $N_s(z) \subset D$ olacak şekilde $s > 0$ vardır. $|z| < j$ ve $\frac{1}{j} < s$ olacak şekilde $j \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda $N_{\frac{1}{j}}(z) \subset N_s(z) \subset D$ olur. Böylece $z \in H_j$ dir. $|z| < j$ olduğundan $z \in \overline{N_j(0)}$ dır. Bu durumda $z \in K_j$ dir. Buradan

$$D \subset \cup \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$$

dır. Dolayısıyla $D = \cup \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ dir.

Teorem 4.6.1: D, $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere $\mathcal{F} \subset A(D)$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$, D nin her bir kompakt alt kümesi üzerinde üniform sınırlı ise $\mathcal{F}$, D de bir normal ailedir (Moore and Hadlock 1991).

İspat: K_n , Lemma 11.2.3 de verilmiş kompakt kümelerin bir dizisi olsun.Her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her bir $f \subset \mathcal{F}$ için K_n üzerinde

$$|f(z)| \leq M$$

olacak şekilde $M_n \in \mathbb{R}$ dir.Sabit bir n için $0 < r_n < \frac{1}{2n(n+1)}$ olmak üzere $|z - z'| < r$ olacak şekilde K_n de z ve z' noktalarını alalım. γ, z merkezli ve $2r_n < \frac{1}{n(n+1)}$ yarıçaplı pozitif yönlü bir çember olsun.

$$\gamma \subset K_{n+1}$$

dir. Cauchy İntegral Formülüne göre

$$|f(z) - f(z')| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(t)}{t-z}dt - \int_\gamma \frac{f(t)}{t-z'}dt\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(t)}{(t-z)(t-z')}dt\right||z-z'|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{(4\pi r_n)M_{n+1}|z-z'|}{(2r_n)(r_n)}$$

$$< \frac{M_{n+1}}{r_n}|z-z'|$$

olduğu $|t - z'| \geq |t - z| - |z - z'| > 2r_n - r_n - r_n$ olması göz önüne alınarak yazılır. Bu da $\mathcal{F}$ nin K_n üzerinde eş süreklidir. $\varepsilon > 0$ ise $\delta = min\left\{r_n, r_n \frac{\varepsilon}{M_{n+1}}\right\}$ dir.

$\{f_n\}$, $\mathcal{F}$ nin üyelerinin bir dizisi ve

$$E = \{z : z = (x,y) \in D \text{ ve } x, y \in \mathbb{Q}\}$$

olsun. E sayılabilir olduğundan

$$E = \{z_1, z_2, \dots\}$$

yazılabilir. Her bir sabit k için tek noktadan oluşan $\{z_k\}$ kümesi kopmaktır. Hipoteze göre $\mathcal{F}$, $\{z_k\}$ kümesinde üniform sınırlıdır. Böylece $\{f_n(z_k)\}$ sabit bir k için sınırlıdır. Lemma 11.2.2 ye göre $\{f_n\}$ dizisinin $\{f_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Öyleki E deki her bir z için $\{f_{n_j}\}$ yakınsar.

$\{f_{n_j}\}$ dizisinin sabit bir K_n üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstermek için $\varepsilon > 0$ alalım. $\mathcal{F}, K_n$ üzerinde eş sürekli olduğundan $f \in \mathcal{F}$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan K_n deki z ve z' için

$$|f(z) - f(z')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. $G = \{N_\delta(z) : z \in E\}$, K_n için bir açık örtüdür. K_n kompakt olduğundan $\{N_\delta(z_k) : j = 1, 2, \dots, m\}$, K_n için G nin sonlu bir alt örtüsüdür. Böylece

$$K_n \subset N_\delta(z_1) \cup N_\delta(z_2) \cup, \dots, \cup N_\delta(z_m)$$

olur. E deki her bir z için $\{f_{n_j}\}$ yakınsak olduğundan $k = 1, 2, \dots, m$ için $\{f_{n_j}(z_k)\}$, bir Cauchy dizisidir. Böylece $k = 1, 2, \dots, m$ için $j \geq M$ ve $r \geq M$ iken

$$\left|f_{n_j}(z_k) - f_{n_r}(z_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde M sayısı vardır. $z \in K_n$ olsun. Bu durumda $1 \leq t \leq m$ olacak şekilde uygun bir t sayısı için $z \subset N_\delta(z_t)$ olur. Böylece $j \geq M$ ve $r \geq M$ iken

$$\left|f_{n_j}(z) - f_{n_r}(z)\right| \leq \left|f_{n_j}(z) - f_{n_j}(z_t)\right| + \left|f_{n_j}(z_t) - f_{n_r}(z_t)\right|$$

$$+\left|f_{n_r}(z_t) - f_{n_r}(z)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

yazılır. M sayısı z den bağımsız olarak alınmıştır. Fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı için Cauchy kuralı gereğince $\left\{f_{n_j}\right\}$, keyfi n için K_n üzerinde düzgün yakınsak olur.

K, D nin keyfi bir kompakt altkümesi olsun. Uygun bir $s \in \mathbb{N}$ için $K \subset K_s$ olduğunu göreceğiz. $\left\{f_{n_j}\right\}, K_s$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan K üzerinde de düzgün yakınsaktır. Böylece $\mathcal{F}$, bir normal ailedir. Lemma 11.2.3 dikkate alınarak

$$K \subset D = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \ldots$$

$$= iç K_1 \cup iç K_2 \cup iç K_3 \cup \ldots$$

yazılır. Bu durumda $\{iç K_n : n \in \mathbb{N}\}, K$ için bir açık örtüdür. K kompakt olduğundan

$$K \subset iç K_1 \cup iç K_2 \cup iç K_3 \cup \ldots \cup iç K_s \subset K_s$$

olacak şekilde s sayısı vardır.

4.7. Riemann Dönüşüm Teoremi

$D \neq \mathbb{C}$ olmak üzere $D, \mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge ve $U = \{z : |z| < 1\}$ açık birim disk olmak üzere

$$\mathcal{F} = \{f : f \in A(D); f, D \ \ de\ bire - bir\ ve\ f(D) \subset U\}$$

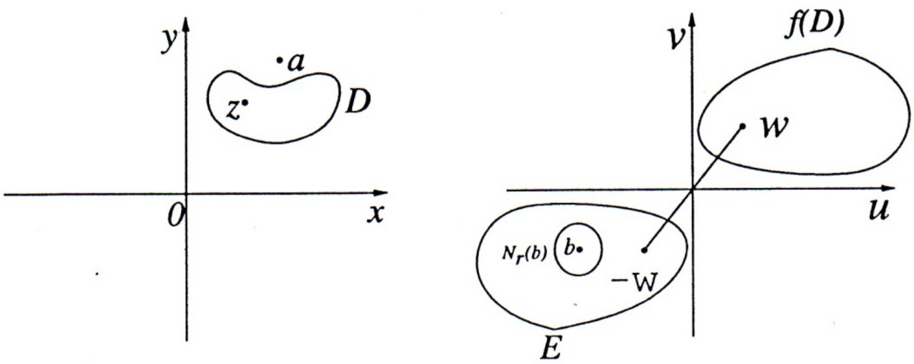
olsun.

Lemma 4.7.1: $\mathcal{F}$ kümesi boş değildir. Yani D den U ya bire-bir bir analitik fonksiyon vardır (Moore and Hadlock 1991).

İspat: $a \in \mathbb{C} \setminus D$ olsun. $f, (z-a)^{1/2}$ nin D deki bir dalı olsun. $f(z_1) = f(z_2)$ iken

$$z_1 - a = [f(z_1)]^2 = [f(z_2)]^2 = z_2 - a \rightarrow z_1 = z_2$$

olduğundan f, D de bire-birdir. Açık dönüşüm teoremine göre $f(D)$ açıktır. $w \subset f(D)$ için $h(w) = -w$ ve $E = h(f(D))$ olsun. Açık dönüşüm teoremine göre E açıktır.



Şekil 4.9. Riemann Dönüşüm Teoremi $E - h(f(D))$

$z_1 \neq z_2$ *olacak şekilde* z_1 ve z_2, D de iki nokta olsun. Bu durumda $f(z_1) \neq f(z_2)$ dir. f, D de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$ nin bir dalı olduğundan $0 \notin f(D)$ olduğu da göz önüne alınarak bunun

$$£ \cap f(D) = \emptyset$$

olması gerektiğini söyleriz. $b \in £$ olsun. $N_r(b) \subset £$ olacak şekilde $r > 0$ alalım.Böylece $N_r(b) \cap f(D) = \emptyset$ dir. Bu D deki her bir z için $|f(z) - b| \geq r$ demektir. D deki her bir z için

$$g(z) = \frac{1}{2}\frac{r}{f(z) - b}$$

alınırsa $g \in A(D)$ ve g, bire-bir olur. Aynı zamanda $|f(z) - b| \geq r$ olduğundan

$g(z) \leq \frac{1}{2} < 1$ dir. Böylece $g(D) \subset U$ dur. Dolayısıyla $g \in \mathcal{F}$ dir.

Not 4.7.1: $a \in U$ olsun.

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = w$$

diyelim. T_a , U dan U ya bire-bir analitik fonksiyonudur.Böylece $f \in \mathcal{F}$ ise $T_a o f \in \mathcal{F}$ dir. $T_a(z)$ nin verilişinden a, T_a nın bir tek sıfırıdır. Aynı zamanda

$$T_a^{-1} = T - a$$

dır (Moore and Hadlock 1991).

Lemma 4.7.2: $f(D) \neq U$ olacak şekilde $f \in \mathcal{F}$ ise D de herhangi bir z_0 için

$$|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$$

olacak şekilde $g \in \mathcal{F}$ vardır (Moore and Hadlock 1991).

İspat: $z_0 \in D$ ve $c = f(z_0) \in U$ olmak üzere

$$f_1 = T_c o f$$

olsun. Bu durumda $f_1 \in \mathcal{F}$ ve

$$f_1(z_0) = T_c(f(z_0)) = 0$$

dır.

$f(D) \neq U$ ve $T_c : U \to U$ bire-bir bir dönüşüm olduğundan $f_1(D) \neq U$ olur. $a \in U - f_1(D)$ olsun. $f_1 \in \mathcal{F}$ olduğundan $T_a \circ f_1 \in \mathcal{F}$ ve $T_a o f_1$ in D de sıfırı yoktur. h, $[(T_a o f_1)(z)]^{1/2}$ nin D de bir dalı olsun. $T_a(f_1(z)) \in U$ olması $\sqrt{T_a(f_1(z))} \in U$ olmasını gerektirdiğinden $h \in \mathcal{F}$ dir.

Sonuç olarak $b = h(z_0)$ olmak üzere

$$g = T_b o h$$

olsun.Bu takdirde $g \in \mathcal{F}$ dir. Şimdi $|g'(z_0)| > |f'(z_0)|$ olduğunu ispatlayacağız.

Öncelikle

$$h = T_b^{-1} o\ g$$

dir. Buradan $s(w) = w^2$ olmak üzere

$$T_a o f_1 = h^2 = (T_b^{-1} o g)^2$$
$$= s\ o(T_{-b} o g)$$

yazılır. Böylece $H = T_{-a} o s o\ T_{-b}$ olmak üzere

$$f_1 = (T_{-a} o s o\ T_{-b}) o g = H o g$$

olur. Zincir kuralını kullanarak

$$f_1'(z_0) = H'(g(z_0))g'(z_0)$$
$$= H'(0)g'(z_0)$$

ve $g = T_b o h$ dan

$$g(z_0) = T_b(h(z_0)) = T_b(b) = 0$$

olur.

Şimdi

$$H(0) = 0, \qquad |H'(a)| < 1 \ \ ve\ g'(z_0) \neq 0$$

olduğunu göstereceğiz.

$$0 = f_1(z_0)$$
$$= H(g(z_0)) = H(0)$$

dır.

$T_{-b}: U \to U$ bire-bir bir dönüşüm ve s, U da bire-bir olmadığından H, U da bire-bir değildir. Böylece H, $k \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $H(z) = kz$ formunda değildir. $H(0) = 0$ ve $H(U) \subset U$ olduğundan Schwarz Lemmasına göre

$$|H'(0)| < 1$$

dir.

$g \in A(D)$ ve g, D de bire-birdir. Böylece $g'(z_0) \neq 0$ dır. $f_1'(z_0) = H'(0)g'(z_0)$ ve $|H'(0)| < 1$ olduğundan

$$|g'(z_0)| > |f_1'(z_0)|$$

dır. $f_1 = T_c o f$ olduğu göz önüne alındığında ve $\frac{1}{1-|c|^2} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |f_1'(z_0)| &= |T_c'(c) f'(z_0)| \\ &= \left| \frac{1}{1-|c|^2} f'(z_0) \right| \\ &\geq |f'(z_0)| \end{aligned}$$

yazılır. Böylece Lemma ispatlanmış olur.

Lemma 4.7.3: z_0, D de keyfi fakat sabit bir nokta ve

$$B = lub\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\}$$

olsun. Bu durumda B sonludur ve $\mathcal{F}$ deki uygun bir g için

$$|g'(z_0)| = B$$

olur (Moore and Hadlock 1991).

İspat: Lemma 11.3.1. e göre $\mathcal{F}$, boş değildir. Öylece B , sonlu veya sonsuz olabilir. $h \to \infty$ iken

$$|f'_n(z_0)| \to B$$

olacak şekilde $\mathcal{F}$ de bir $\{f_n\}$ dizisi vardır. [B nin sonlu ise $\mathbb{N}$ deki her n için $|f'_n(z_0)| > B - \frac{1}{n}$ olacak şekilde $f_n \in \mathcal{F}$ olur.$B = +\infty$ ise $|f'_n(z_0)| > n$ olacak şekilde $f_n \in \mathcal{F}$ olur. Her iki durumda $|f'_n(z_0)| \longrightarrow B$ dir.] $\mathcal{F}$,D nin her kompakt alt kümesinde düzgün sınırlıdır. Çünkü her $f \subset \mathcal{F}$ için D de $|f(z)| < 1$ dir. Teorem 11.2.4. e göre $\mathcal{F}$, D de bir normal ailedir. Böylce K, D nin bir kompakt alt kümesi ise $\{f_n\}$ nin $\{g_n\}$ alt dizisi vardır ve $g_n \to g$ yakınsaması düzgündür. Böylece Teorem 11.1.7. ye göre $g \in A(D)$ dir. Yine bu teoreme göre

$$g'_n(z_0) \to g'(z_0)$$

dır. Böylece

$$|g'(z_0)| = B$$

dir. Böylece B sonludur.

$g_n \in \mathcal{F}$ olduğundan D de bire-birdir. Böylece g , D de bire-bir veya g sabit olmalıdır. Ancak $|g'(z_0)| = B \neq 0$ olduğundan g sabit olamaz. Dolayısıyla g , D de bire-birdir.

Son olarak,$g_n(D) \subset U$ dır. Böylece $g(D) \subset \overline{U}$ olur. Açık Dönüşüm Teoreminden ve g nin bire-birliğinden biliyoruz ki $g(D)$, $\overline{U}$ nun bir açık alt kümesidir. Böylece $g(D)) \subset U$ olur. Bu bilgilerden sonra $g \in \mathcal{F}$ dir.

Teorem 4.7.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi): $D \neq \mathbb{C}$ olmak üzere D , $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge ise D den U birim diskine bire-bir örten analitik bir dönüşüm vardır (Moore and Hadlock 1991).

İspat: $z_0 \in D$ ve

$$\mathcal{F} = \{f : f \in A(D), f, D \text{ de bire} - \text{bir ve } f(D) \subset U\}$$

olsun. Lemma 11.3.4. e göre

$$|g'(z_0)| = \ell ub\{\,|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\}$$

olacak şekilde $g \in \mathcal{F}$ vardır. Lemma 11.3.3. e göre g, D yi U üzerine dönüştürür. [Eğer $g(D)$, U ya eşit olmazsa Lemma 11.3.3 e göre $|h'(z_0)| > |g'(z_0)|$ olacak şekilde uygun bir $h \in \mathcal{F}$ olurdu ki bu da $|g'(z_0)| = \ell ub\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\}$ olmasıyla çelişir.]

Teorem 4.7.5: $D \neq \mathbb{C}$ olmak üzere D , $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda $g(z_0) = 0$ ve $g'(z_0) > 0$ olacak şekilde $g : D \to U$ bire-bir analitik fonksiyonu vardır. $z_0 \in D$ değiştirilmemek şartıyla bu g fonksiyonu tektir (Moore and Hadlock 1991).

İspat: Teorem 11.3.5 e göre $f : D \to U$ bire-bir örten analitik fonksiyonu vardır.$h = T_{f(z_0)} \circ f$ olsun. Dolayısıyla

$$h(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}\, f(z)}$$

olur. $T_{f(z_0)}$ ve f bire-bir örten analitik fonksiyon olduklarından h da bire-bir örten analitik fonksiyondur ve

$$h(z_0) = 0$$

dır. $\alpha = Arg\, h'(z_0)$ olmak üzere

$$h'(z_0) = |h'(z_0)|\, e^{i\alpha} \neq 0$$

yazılır. Her $z \in D$ için

$$g(z) = e^{-i\alpha} h(z)$$

olsun. Burada $g(z_0) = 0$ dır. $|e^{-i\alpha}| = 1$ olduğundan g , U nun bir rotasyonu ile oluşturulmuş h dır. Böylece $g: D \to U$ bire-bir örten analitik fonksiyondur.

Ayrıca

$$g'(z_0) = e^{-i\alpha} h'(z_0) = |h'(z_0)| > 0$$

dır.

Şimdi g nin tek olduğunu gösterelim. $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olmak üzere $f: D \to U$ bire-bir örten analitik fonksiyon olsun. $f = g$ olduğunu göstereceğiz. U da $h = f \circ g^{-1}$ olsun. Bu durumda $h: U \to U$, bire-bir örten analitik fonksiyondur. Aynı zamanda $f(z_0) = g(z_0) = 0$ olduğundan $h(0) = 0$ dır. Böylece h, Schwarz Lemmasının hipotezini sağlar. $z \in D$ için $z = g^{-1}(w)$ olmak üzere $w = g(z)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(g^{-1}(w))| \\ &= |h(w)| \\ &\leq |w| \\ &= |g(z)| \end{aligned}$$

olur. f ve g nin yerlerini değiştirirsek benzer şekilde $z \in D$ için

$$|g(z)| \leq f(z)$$

olur. Bu son iki sonuçtan her $z \in D$ için

$$|f(z)| = |g(z)|$$

dir. Zincir kuralına göre hipotezden $f'(z_0) > 0$ ve $g'(z_0) > 0$ olduğundan

$$h'(0) - f'(z_0)\frac{1}{g'(z_0)} > 0$$

olur. Bunu $h = fog^{-1}$ ve $z = g^{-1}(w)$ olmak üzere $w = g(z)$ olmasından yazdığımızı hatırlatalım. Her $w \in U$ için

$$\begin{aligned} |h(w)| &= |f(g^{-1}(w))| \\ &= |g(g^{-1}(w))| \\ &= |w| \end{aligned}$$

olur. Böylece Schwarz Lemmasına göre her $w \in U$ için

$$h(w) = aw \ , \quad (|a| = 1)$$

olur. Buradan

$$0 < h'(0) = a$$

dır. $|a| = 1$ ve $a > 0$ ise $a = 1$ dir. Dolayısıyla

$$h\colon U \longrightarrow U, \qquad h(w) = w$$

özdeşlik dönüşümü olur. Yani $h = I$ dır.

$$fog^{-1} = I \text{ ise } f = g$$

olur. Böylece g nin tek olduğu söylenir.

5. SONUÇ

Bu çalışma bir derlemedir.

Tezimizde önce konform dönüşüm kavramı tanıtıldı. Bir noktada türevin sıfırdan farklı olması durumunda fonksiyonun o noktada konform olduğu gösterildi. Gerçel eksenin bir çokgen üzerine dönüşümü incelendi. Bundan hareketle Schwarz-Christoffel dönüşümü verildi ve bu dönüşümle ilgili uygulama yapıldı. Daha sonra Riemann dönüşüm teoremi incelendi.

KAYNAKLAR

Başarır, M., 2010. Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi. Sakarya Yayıncılık, 298-299, Adapazarı

Başkan, T., 2005. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Nobel Yayın Dağıtım, 271, 5. Baskı, Ankara

Churchill, R. V. 1989. Karmaşık Değişkenler ve Uygulamalar. Çeviren Arif Kaya. Milli eğitim Bakanlığı Yayınları, 200-201, 246-253, 2. Baskı, İstanbul

Kadıoğlu, E. 2011. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi ders notları. Basılmamış kaynak.

Moore, T. O., Hadlock, E. H., 1991. Complekx Analysıs. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 310-324, Singapore

Stillwell J., Springer V., 1989. Mathematics and Its History. p. 318-319, 5. Baskı ,Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Musa SÖNMEZ 1978 yılında Bolvadin'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Emirdağ'da, lise öğrenimini Afyon' da tamamladı. 1995 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazanıp 1999 yılında mezun oldu. Değişik dershane ve özel okullarda çalıştı. 2009'da yüksek lisansa başladı. Halen Erzurum'da özel bir okulda yönetici olarak çalışmaktadır. Evli olup Süeda ve Salih isminde iki çocuğu bulunmaktadır.