GCD ve LCM MATRİSLERİ

Mehmet SEVER

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN
2012

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GCD ve LCM MATRİSLERİ

Mehmet SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2012

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

GCD ve LCM MATRİSLERİ

Doç.Dr. İnci GÜLTEKİN danışmanlığında, Mehmet SEVER tarafından hazırlanan bu çalışma 17/09/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Erdal KARADUMAN *İmza* :

Üye : Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GCD ve LCM MATRİSLERİ

Mehmet SEVER
Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN

Bu tezde, Smith'in (1876) ilk olarak ortaya attığı i,j , i ve j pozitif tamsayılarının en büyük ortak bölenini göstermek üzere $S = \quad i,j$ matrisi ve determinantından yola çıkarak ve özellikle Beslin ve Ligh ın çalışmalarından yararlanarak GCD ve LCM matrisleri hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

2012, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: GCD, LCM, Matris, Euler Phi Fonksiyonu, Möbiüs Mü Fonksiyonu, Aritmetik Fonksiyon

ABSTRACT

Master Thesis

GCD ve LCM MATRİSLERİ

Mehmet SEVER

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İnci GÜLTEKİN

In this thesis, based upon the matrix $S =$ i, j and its determinant raised by Smith (1876) where i, j is denoted by the greatest common divisor of the positive integers i, j and especially, benefited from Beslin and Ligh's working on the subject we give a detailed information on the subject.

2012, 59 pages

Keywords: GCD, LCM, Matrix, Euler Phi Function, Mobius Mu Function, Arithmetical Function
.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez hazırlama sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN'e teşekkürlerimi arz ederim.

Akademik yaşama karşı beni tavsiyeleri ile cesaretlendiren çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞÇI' ya teşekkür ederim.

Tez çalışmamın yazım aşamasında her türlü desteği gösteren arkadaşlarım Sayın Kadirhan POLAT, Sayın Latif YALÇIN ve Sayın İsmail ŞAHİN'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tezimin incelenmesinde ve kıymetli görüşlerini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ayşe NALLI 'ya teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman için bana tam destek veren ve güvenlerini hissettiren aileme sonsuz minnettarlığımı dile getirmek isterim.

Mehmet SEVER
Ağustos 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

ϕ	Euler phi fonksiyonu
μ	Möbiüs fonksiyonu
GCD	En büyük ortak bölen (greatest common divisor)
LCM	En küçük ortak kat (least common multiple)
(S)	S pozitif tamsayılar kümesi üzerindeki GCD matrisi
[S]	S pozitif tamsayılar kümesi üzerindeki LCM matrisi
(x_i, x_j)	x_i ile x_j sayılarının en büyük ortak böleni
$[x_i, x_j]$	x_i *ile* x_j sayılarının en küçük ortak katı
n,m veya x_i , $1 \leq$ i$\leq n$	pozitif bir tamsayı
d	verilen n sayısının bir böleni
$*$	Dirichlet çarpım notasyonu

1. GİRİŞ

H.J.Smith (1876) , i,j , i ve j pozitif tamsayılarının en büyük ortak bölenini göstermek üzere $S = \; i,j$ matrisinin determinantının $\phi\ 1\ \phi\ 2\ \ldots\ \phi\ n$ olduğunu göstermiştir. Ayrıca, bu sonucun çarpan kapalı bir kümede de doğru olduğunu göstermiştir. Burada ϕ Euler'in toplam fonksiyonudur.

GCD matrisleri olarak adlandırılan bu matrislerin incelemesini Beslin ve Ligh başlatmıştır. Beslin ve Ligh, Smith determinantından hareketle GCD matrisini tanımlamışlar ve bu matrisin yapısını inceleyerek determinantını hesaplamışlardır. GCD kapalı küme üzerinde tanımlanan bir GCD matrisinin determinantını hesaplayarak bu sonucu genellemişlerdir. GCD matrislerinin kesin olarak pozitif tanımlı olduklarını ve belirli bir matris ve transpozunun çarpımı halinde yazılabildiklerini göstermişlerdir (Beslin and Ligh1989).

Ayrıca Smith, p asalının p^r kuvveti için $\Pi\ p^r\ = -p$ şeklinde tanımlanan Π çarpımsal fonksiyon olmak üzere LCM matrislerinin determinantının da

$$\phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \ldots \phi\ x_n\ \Pi\ x_1\ \Pi\ x_2\ \ldots \Pi\ x_n$$

olduğunu göstermiştir (Smith 1876).

Buna göre, S kümesi çarpan kapalı bir küme olmak üzere S , GCD matrisi ve S , LCM matrislerinin tersleri alınabilir. Ayrıca $det\ S$, $det\ S$ yi bölmektedir (Bourque and Ligh1992).

Eger $S = \; x_1, x_2, \ldots, x_n$ birbirinden farklı pozitif tamsayılardan oluşan herhangi bir küme ise det $S\ \leq x_1 x_2 \ldots x_n$ dir (Beslin and Ligh1989). Li, bu üst sınır için eşitliğin yalnız ve yalnız S kümesi çarpan kapalı bir küme ise,

$$\phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \ldots\phi\ x_n\ \leq \det\ S\ \leq x_1x_2\ldots x_n - \frac{n}{2}\ !$$

olduğunu göstermiştir (Li 1990). Bu sonuç birbirinden farklı pozitif tamsayılardan oluşan herhangi bir S kümesi üzerinde tanımlanmış olan S GCD matrisinin tersinin

tanımlanabilir olduğunu göstermektedir. S , GCD matrisinin yapısal özelliği $\phi\ d$ ye bağlıdır. Burada $d \in T$ ve T de , S yi kapsayan ve çarpan kapalı bir kümedir.

Her bir pozitif m tamsayısı için,

$$g\ m\ = \frac{1}{m}\sum_{d|m} d\mu\ d\ = \frac{\pi\ m\ \phi\ m}{m^2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon LCM matrisinin yapısal özelliğini, Euler toplam GCD matrisinin yapısal özelliğini belirlediği kadar belirler.

Bourque ve Ligh, S çarpan kapalı olması durumunda GCD ve LCM matrislerinin terslerinin elemanlarını Euler'in toplam fonksiyonu ve Möbius fonksiyonu cinsinden ifade etmişlerdir (Bourque and Ligh 1992).

Nallı ve Taşçı 2004 te gcd reciprocal lcm matrisini tanımlayarak bu matrisi GCD kapalı küme üzerinde incelemişlerdir.

Konu ile ilgili P. Haukkanen çok çeşitli çalışmalar yapmıştır.1997 de Smith determinantının kısmi sıralı kümelerdeki durumunu incelemiştir. Yine bu kümeden hareketle meet ve join matrislerini tanımlamıştır. 2005 te GCD matrisinin l_p normu için üst sınır elde etmiştir. Son olarak 2011 de GCD matrislerinin bölünürlüğüne topolojik yaklaşımlar elde etmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2. 1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Bir $A \in M_n \;\; F$ simetrik matrisi verilsin. Eğer her $x \in F^n$ vektörü için $x^T A x > 0$ (≥ 0) ise A matrisi pozitif tanımlıdır (pozitif yarı-tanımlıdır PYT) denir. Eğer her $x \in F^n$ vektörü için $x^T A x < 0 \;\; \leq 0$ ise A matrisi negatif tanımlıdır (negatif yarı-tanımlıdır NYT) denir (Lütkhpol 1996).

A matrisinin PYT olması için gerek ve yeter şart bütün özdeğerlerinin sıfır veya pozitif olmasıdır. A pozitif tanımlı ise,

i. A nın esas köşegen elemanlarının hepsi pozitiftir.

ii. $i \neq j$ için $a_{ii} > \;\; a_{ij} \;\; ^2$ dir.

iii. A nın mutlak değerce en büyük elemanı esas köşegeni üzerindedir.

vi. $\det \;\; A \;\; > 0$ dır.

Teorem 2.1.2: Bir $A = \;\; a_{ij} \;\; \in M_n \;\; F$ matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart her $i \in \;\; 1,2, \ldots, n$ için

$$\det \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{matrix} > 0$$

olmasıdır (Lütkhpol 1996).

Teorem 2.1.3 (Cauchy-Binet Formülü): Bir $A = \; a_{ij} \; \in M_n \; F$ matrisi için $B = \; b_{ij} \; \in M_{n,m} \; F$ ve $C = \; c_{ij} \; \in M_{m,n} \; F$ olmak üzere $A = BC$ olsun.

i. Eğer $n \leq m$ ise $\det A = \; {}_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq m} \det B_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \det C^T_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ dir. Burada $B_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ ve $C^T_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ matrisleri sırasıyla B ve C^T matrislerinin $k_1, k_2, \ldots, k_n$ inci sütunlarından oluşan alt matrislerdir.

ii. Eğer $n > m$ ise $\det \; A \; = 0$ dır (Gantmacher 1960).

Tanım 2.1.4: Eğer S kümesi her bir elemanının tüm bölenlerini içeriyorsa S kümesine çarpan kapalıdır (Factor Closed, FC) denir. Yani, S çarpan kapalı bir küme ise S nin her elemanının tüm pozitif bölenleri yine S nin elemanıdır (Beslin and Ligh 1989).

Tanım 2.1.5: Elemanları pozitif tamsayılar olan bir kümenin herhangi iki elemanının ortak bölenlerinin en büyüğü, yine bu kümenin bir elemanı ise, bu kümeye en büyük ortak bölen kapalı (Greatest Common Divisor Closed, GCDC) küme denir (Beslin and Ligh 1989).

O halde çarpan kapalı bir küme GCD kapalıdır. Ancak tersi doğru değildir.

Teorem 2.1.6 (Aritmetiğin Temel Teoremi): n>1 tamsayısı ya asaldır ya da asalların çarpımı şeklinde sıra değişikliği hariç tek türlü yazılabilir (Apostol 1976).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3. 1. Aritmetik Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1: Pozitif tam sayılar cümlesinden kompleks sayılar cümlesinin herhangi bir alt cümlesine tanımlanan fonksiyonlara Aritmetik fonksiyon yada Teorik sayı fonksiyonu adı verilir. f, aritmetik bir fonksiyon olmak üzere, $_{d|n} f(d)$ ve $_{d|n} f(d)$ sembolleri n nin bütün pozitif d bölenleri üzerinden toplam ve çarpımı göstermektedir (Altındiş 2005).

Tanım 3.1.2: f özdeş olarak sıfır olmayan bir aritmetik fonksiyon ve (m,n)=1 olsun.

f(m. n)= f(m). f(n)

ise f fonksiyonu çarpımsaldır denir. Eğer her m,n için

f(m. n)= f(m). f(n)

oluyorsa f fonksiyonu komple çarpımsaldır denir (Altındiş 2005).

Örnek 3.1.3: α reel veya kompleks olmak üzere f_α (n)= n^α şeklinde tanımlanan f_α fonksiyonu komple çarpımsal bir fonksiyondur. Çünkü her (m,n) için f_α m, n $=$ $(m.n)^\alpha$=$m^\alpha . n^\alpha = f_\alpha$(m). f_α (n) olur.

Teorem 3.1.4: f özdeş olarak sıfır olmayan çarpımsal bir fonksiyon ise f (1)=1 dir (Altındiş 2005).

İspat: f özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon olduğunda f n $\neq 0$ olacak şekilde pozitif bir n tam sayısı vardır. $1, n$ $= 1$ ve f çarpımsal olduğunda

$$f(n) = f(1.n) = f(1).f(n)$$

olarak yazılabilir. $f(n) \neq 0$ olduğundan her iki taraf $f(n)$ ile bölünürse $f(n) = 1$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.5: f çarpımsal bir fonksiyon olmak üzere;

$$\mathrm{F}(\mathrm{n}) = \sum_{d|n} f(d)$$

olarak tanımlanan F fonksiyonu da çarpımsaldır (Altındiş 2005).

İspat: $(m,n) = 1$ olmak üzere $F(m.n) = F(m)F(n)$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$F(m.n) = \sum_{d|mn} f(d)$ olduğundan mn nin her d böleni tek türlü $(d_1, d_2) = 1$ ve $d_1|m$, $d_2|$n olmak üzere $d = d_1 d_2$ şeklinde yazılabilir buradan;

$$F(m.n) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1 d_2)$$

olur. f fonksiyonu çarpımsal olduğundan;

$$\sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1 d_2) = \left(\sum_{d_1|m} f(d_1)\right).\left(\sum_{d_2} f(d_2)\right) = \mathrm{F}(\mathrm{m})F(n)$$

olur ki ispat tamamlanmıştır.

3. 2. Euler ϕ Fonksiyonu

Tanım 3.2.1: n≥1 olmak üzere n yi geçmeyen ve n ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını veren fonksiyona Euler'in ϕ fonksiyonu denir ve $\phi(n)$ ile gösterilir.

Şimdi n nin bir asal ve bir asalın kuvveti olması durumunda $\phi(n)$ değerlerinin nasıl bulanacağına dair teoremleri verelim.

Teorem 3.2.2: p asal ise $\phi(p) = p - 1$ dir. Teoremin tersi de doğrudur, yani p, $\phi(p) = p - 1$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı ise p asaldır (Altındiş 2005).

İspat: p asal olduğundan p den küçük her pozitif tamsayı p ile aralarında asal olur. $p - 1$ tane böyle sayı olacağından $\phi(p) = p - 1$ olduğu görülür.

Tersini gösterelim, p bileşik sayı ise $1 < d < p$ olacak şekilde p nin bir d böleni olmalıdır, dolayısıyla $(p, d) \neq 1$ dir. $1, 2, \ldots, p - 1$ sayılarından en az biri p ile aralarında asal değildir,en azından d böyledir,buradan $\phi(p) \leq p - 2$ sonucuna varırız. Eğer $\phi(p) = p - 1$ ise bu bize p nin asal olduğunu verir.

Teorem 3.2.3: p asal ve a pozitif bir tamsayı ise;

$$\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$$

dir (Altındiş 2005).

İspat: p^a dan küçük ve p ile aralarında asal olmayan sayılar p^a geçmeyen ve p ile bölünebilen sayılardır,bunları $1 \leq k \leq p^{a-1}$ olmak üzere $k.p$ şeklinde ifade edebiliriz. p^{a-1} tane böyle sayı olduğundan, $p^a - p^{a-1}$ tane sayıda p^a dan küçük olup p^a ile aralarında asal olanların sayısıdır. Buda tanım gereği $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^a(1 - \frac{1}{p})$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.4: $n \geq 1$ için;

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

dir (Apostol 1976).

İspat: S= $1,2,\ldots,n$ kümesini alalım ve S nin elemanlarını aşağıdaki gibi ayrık kümelere ayıralım. n nin her bir pozitif d böleni için A $_d$ = k: $k,n \ = d, 1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$ kümesini tanımlayalım. Yani, A $_d$ kümesi S nin n ile ebob u, d olan elamanlarını içerir. Böyle A $_d$ kümeleri ayrıktır ve birleşimleri S yi verir buradan eğer A $_d$ de bulunan tam sayıların sayısını f(d) ile gösterecek olursak,

$$_{d|n} f \ d \ = n$$

olur, fakat (k,n)=d ⇔ ($\frac{k}{d}$,$\frac{n}{d}$)=1 ve 0≤k≤n ⇔ 0<$\frac{k}{d} \leq \frac{n}{d}$ olacağından $\frac{k}{d}$ =q dersek A(d) deki elamanlarla 0<q≤ $\frac{n}{d}$ ve (q, $\frac{n}{d}$)=1 şeklindeki q lar arasında birebir bir eşleme vardır. Böyle q ların sayısı ϕ($\frac{n}{d}$)dir. Buradan f(d)= ϕ ($\frac{n}{d}$) ve $_{d|n}$ ϕ($\frac{n}{d}$)=n olur. bu ifadede

$$_{d|n}\,\phi(d)=\mathrm{n}$$

ifadesine denktir.

3. 3. Möbiüs Fonksiyonu

Tanım 3.3.1:

$$\mu \ n \ = \begin{array}{lll} 1 & , & n = 1 \quad ise \\ -1 \ ^{k} & , & n = p_1{}^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}\,, \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1 \ ise \\ 0 & , & n = p_1{}^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k} \quad , \qquad \exists\, a_i \geq 2 \ ise \end{array}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Möbiüs fonksiyonu adı verilir ve μ ile gösterilir (Altındiş 2005).

Teorem 3.3.2: µ fonksiyonu çarpımsal olup

$$_{d|n}\,\mu(d)= \begin{array}{ll} 1 & , \; n=1 \\ 0 & , \; n>1 \end{array}$$

dir (Altındiş 2005).

İspat: µ fonksiyonun çarpımsal olduğu tanımdan kolayca görülebilir, şöyle ki m,n pozitif tamsayıları için (m,n)=1 olmak üzere m ve n nin herhangi biri karesel bir çarpana sahipse µ(m.n)=0=µ(m)µ(n)olur. Eğer m ve n nin her ikisi de 1 den büyük karesel çarpana sahip değilse m=$p_1p_2\ldots p_r$, n=$q_1\, q_2\ldots q_s$ şeklinde farklı asalların çarpımı olarak yazılabilir. O zaman µ(m)=$(-1)^r$, µ(n)=$(-1)^s$olup µ(m.n)=$(-1)^{r+s}$ =µ(m)µ(n) dir. Belirtelim ki µ fonksiyonu tam çarpımsal değildir aksine örnek olarak m=14 ,n=22 alalım µ(m)=1,µ(n)=1 olup, µ (m.n)=0 olacağından (m,n)≠1 ise µ (m.n) ≠ µ(m)µ(n) dir.

Teoremin ikinci kısmının ispatında; eğer n=1 ise d=1 olacağından,

$$_{d|n}\,\mu\;\; d\; = \mu(1)=1$$

olur n>1 ise p_i ler asal ve $a_i \geq 0$ olmak üzere n=$p_1^{a1}.\,p_2^{a2}\ldots.\,p_k^{ak}$ olsun. $_{d|n}\,\mu(d)$ toplamında sıfır olmayan terimler sadece d=1 ve n yi bölen farklı asal çarpanlarda gelir. o zaman

$$_{d|n}\,\mu(d)=\mu(1)+\mu(p_1)+\ldots+\mu(p_k)$$

$$+\mu(p_1p_2)+\ldots+\mu(p_{k-1}p_k)$$

$$+\mu(p_1p_2p_3)+\ldots\; +\mu(p_1p_2 \ldots p_k)$$

$$=1+ \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{1}\,(-1)+ \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{2}\,(-1)^2+\ldots+ \genfrac{}{}{0pt}{}{k}{k}\,(-1)^k$$

$$=(1-1)^{k}=0 \text{ olur.}$$

Şimdi ϕ fonksiyonu ile μ fonksiyonu arasındaki ilişkiyi gösteren bir teorem verelim.

Teorem 3.3.3: n≥1 için

$$\phi\ (n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

dir (Apostol 1976).

İspat: ϕ fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\phi\ (n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n,k)}$$

yazılabilir. Teorem (3.3.2) den n yerine (n,k) alınarak

$$\phi\ (n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d|(n,k)}\mu\ d\ =\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{d|n\\ d|k}}\mu(d)$$

olur, n nin sabit bir d böleni için k; $1\leq k\leq n$ ve d nin bir katı olacak şekilde seçilmelidir.

k=qd dersek;

$$1\leq k\leq n\ \Leftrightarrow 1\leq q\leq\frac{n}{d} \text{ olur.}$$

Buradan;

$$\phi(n)=\sum_{d|n}\sum_{q=1}^{\frac{n}{d}}\mu\ d\ =\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{q=1}^{\frac{n}{d}}1=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

olur ki, bu da teoremi ispatlar.

Şimdi de $\phi(n)$ değerini n pozitif tamsayısının ayrık asal bölenlerinin çarpımı şeklinde ifade eden teoremi verelim.

Teorem 3.3.4: n≥1 için

$$\phi(n) = \mathrm{n} \quad {}_{p|n} \ 1-\frac{1}{p} \ .$$

dir (Apostol 1976).

İspat: n=1 durumunda asal bölenden söz edilemeyeceğinden çarpımı 1 kabul edeceğiz.

n >1 ve $p_1, p_2, \ldots, p_k$, n nin ayrık asal bölenleri olsun.

$${}_{p|n} \ 1-\frac{1}{p} = {}^{r}_{r=1} \ 1-\frac{1}{p}$$

$$=1- \ \frac{1}{p_i}+ \ \frac{1}{p_ip_j} - \ \frac{1}{p_ip_jp_k}+. . . +\frac{(-1)^{\mathrm{r}}}{p_1p_2\ldots p_r}$$

eşitliğin sağ tarafında n nin ayrık asal bölenlerinin ve çarpımlarının tüm olası durumlarını düşüneceğiz. + veya – işaret ise tamamen μ(d) değerine bağlıdır.

Herhangi bir d bölenin karesel asal çarpan içermesi durumunda μ(d)=0 olacağından sağ taraftaki eşitliği ${}_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$ olarak alabiliriz. Buda ispatı tanımlar.

Şimdi ϕ fonksiyonun tam çarpımsal olmayıp çarpımsal olduğunu ifade eden teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.5: Herhangi m ve n pozitif tamsayıları için , (m,n)=d olmak üzere

$$\phi(mn) = \phi(m) \,.\, \phi(n) \,.\, \frac{d}{\phi(d)}$$

dir (Apostol 1976).

İspat: Belirtelim ki m.n yi bölen bir asal ya m yi ya da n yi bölecektir. Her ikisini de bölmesi durumunda (m,n) i de böler, buradan

$$\frac{\phi(mn)}{mn} = {}_{p|nm} \quad 1-\frac{1}{p} = \frac{{}_{p|m} \quad 1-\frac{1}{p} \;.\; {}_{p|n} \quad 1-\frac{1}{p}}{{}_{p|(n,m)} \quad 1-\frac{1}{p}} = \frac{\frac{\phi(m)}{m}.\frac{\phi(n)}{n}}{\frac{\phi(d)}{d}}$$

olur ki $m,n \;\; = 1$ olması durumunda $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ olacağı açıktır.

3.4. Aritmetik Fonksiyonların Dirichlet Çarpımı

(3.3.3) teoreminden;

$$\phi(n) = {}_{d|n}\, \mu(d)\,\frac{n}{d}$$

olduğu görüldü. Sağ taraftaki toplam sayılar teorisinin sıkça karşılaşacağımız bir tipidir. Bu formu

$$_{d|n} \quad f \;\; d \;\; g(\frac{n}{d})$$

şeklinde genelleştirmek için f ve g gibi keyfi iki aritmetik fonksiyonun alınması gerekir.

Tanım 3.4.1: f ve g iki aritmetik fonksiyon olmak üzere bunların Dirichlet çarpımını şu şekilde tanımlarız;

$$h(n)=\sum_{d|n} f(d)\, g(\frac{n}{d})$$

ve h da bunların Dirichlet çarpımıdır ve f∗g=h notasyonu kullanılır (Apostol 1976).

Teorem 3.4.2: Dirichlet çarpımı değişmeli ve birleşmelidir. Yani f,g,k aritmetik fonksiyonları için

f∗g= g∗f

(f∗g) ∗k=f∗(g∗f) dir (Apostol 1976).

İspat: Öncelikle f∗g yi aşagıdaki gibi yazalım.

$$(\mathrm{f} * \mathrm{g})(n) = \sum_{a.b=n} f(a).g(b)$$

Burada a ve b; n nin muhtemel bütün pozitif bölenleridir. a·b=$b \cdot a$ olduğundan ispat açıktır.

Birleşme kuralı ispatı için $(\mathrm{g} * \mathrm{k}) = A$ diyelim,

$f * (\mathrm{g} * \mathrm{k})$ =f∗ A olur.

$$(\mathrm{f} * \mathrm{A})(n) = \sum_{a.d=n} f(a).A(d)= \sum_{b.c=d} g(b).k(c)$$

$$= \sum_{a.b.c=n} f(a)\, g(b)\, k(c)$$

Benzer şekilde, B= f∗g dersek ve $\mathrm{B} * \mathrm{k}(n)$ yi göz önüne alırsak aynı sonuca ulaşırız. Buradan $\mathrm{f} * \mathrm{A} = \mathrm{B} * \mathrm{k}$ olur ki bu da Dırıchlet çarpımının birleşmeli olduğunu ifade eder.

Tanım 3.4.3: $$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1\ ,\ n = 1 \\ 0\ ,\ n > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan I aritmetik fonksiyonuna özdeşlik fonksiyonu denir (Apostol 1976).

Teorem 3.4.4: f herhangi bir aritmetik fonksiyon olmak üzere;

$$\mathrm{I}*\mathrm{f}= \mathrm{f}*\mathrm{I}=\mathrm{f}$$

olur.

İspat:

$$\mathrm{f} * \mathrm{I}(n) = \sum_{d|n} f(d) . I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) . \left[\frac{d}{n}\right] = f(n)$$

dir. Çünkü d$<n$ ise $\left[\frac{d}{n}\right]$ =0 dır.

Şimdi vereceğimiz lemma, f; f(1)≠0 şeklinde bir fonksiyon iken f nin Dirichlet inversiyonunu bulmaya yöneliktir.

Lemma 3.4.5: f, f(1)≠0 şeklinde bir aritmetik fonksiyon ise;

$$f * g = g * f = I$$

olacak şekilde bir tek g aritmetik fonksiyonu vardır ve

$$g(1)=\frac{1}{f(1)}$$

$$g(n)=\frac{1}{f(n)} \;{}_{\substack{d|n\\ d<n}} g(d)f\;\; \frac{n}{d} \qquad , n>1$$

dir (Jones and Jones 1998).

İspat: $*$ ın değişme özelliginden g$*\, f\ = I$ olduğunu göstermek yeter yani;

$${}_{d|n}\, g(d)f\;\; \frac{n}{d} = \begin{matrix} 1 & , & n=1 \\ 0 & , & n>1 \end{matrix}$$

olduğunu göstermeliyiz n =1 için;

g(1)=1 olacağı açıktır. n >1 için;

$${}_{d|n}\; g(d)f\;\; \frac{n}{d} \;= g\;\; n\;\; f\;\; 1\;\; + \;{}_{\substack{d|n\\ d<n}}\; g(d)f\;\; \frac{n}{d}$$

$$=\frac{-f(1)}{f(1)} \;{}_{\substack{d|n\\ d<n}} g(d)f\;\; \frac{n}{d} \;+\; {}_{\substack{d|n\\ d<n}} g(d)f\;\; \frac{n}{d}$$

Bulunur, burada g(n) değerini tanımdan direk olarak yerine yazdık.

Tanım 3.4.6: Lemma (3.4.5) de ki g fonksiyonuna f nin Diricleht tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir.

G, f(1)$\neq$ 0 şeklindeki bütün f aritmetik fonksiyonlarının bir kümesi olsun, aşağıdaki teoremle G nin $*$ işlemine göre değişmeli bir gurup olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.4.7: G, $*$ işlemine göre değişmeli bir guruptur (Jones and Jones 1998).

İspat: Kapalılığın ispatı için f,g$\in G$ alalım böylece f(1),g(1)$\neq 0$ olacaktır.

Buradan

$$f * g \quad 1 = {}_{d|1} f \;\; d \;\; g \;\; \frac{1}{d} \quad \neq 0$$

olur, çünkü f(1),g(1)$\neq 0$ dır buradan $f * g \in G$ bulunur. Teorem 3.4.2 den birleşme, değişme ve birim eleman özellikleri mevcuttur. Son olarak $f \in G$ iken $f^{-1} \in G$ dir. Çünkü f^{-1} =g ise g(1)=$\frac{1}{f(g)}$ $\neq$0 olduğundan ters eleman da G dedir.

Teorem 3.4.8 (Möbiüs inversiyon formülü):

F herhangi bir aritmetik fonksiyon ve

$$F(n)= {}_{d \;|n} f(d)$$

olsun. O zaman,

$$f(d)= {}_{d \;|n} \mu(d) F(\tfrac{n}{d})$$

olur (Altındiş 2005).

İspat: $$F(n)= {}_{d \;|n} f(d)$$

olduğunu kabul edelim. O zaman

$${}_{d\,|n} \mu(d) F(\tfrac{n}{d})= {}_{d \;|n} \mu(d) \,.\; {}_{b|\frac{n}{d}} f \;\; b \;\; = {}_{d \;|n} \;\; {}_{b|\frac{n}{d}} \mu \;\; d \;\; f(b) \qquad (3.1)$$

olur. Eğer d $|n$ ve b $|\frac{n}{d}$ ise $\frac{n}{d}$ ve $\frac{n/d}{b}$ bir tam sayıdır. fakat $\frac{n|d}{b} = \frac{n}{bd} = \frac{n|b}{d}$ olduğundan $\frac{n}{b}$ ve $\frac{n|b}{d}$ de bir tam sayıdır. Bu da bize d $|n$ ve b $|\ \frac{n}{d}$ olması için gerek ve yeter şartın b|n ve d$|\frac{n}{b}$ olmasıdır sonucunu verir, böylece (3.1) ifadesi

$$\sum_{d\,|n}\ \sum_{b|\frac{n}{d}} \mu(d)\, f(b) = \sum_{b\,|n}\ \sum_{d|\frac{n}{b}} \mu(d)\, f(b) \tag{3.2}$$

halini alır, sol taraftaki toplamda görülen bir ifade sağ taraftaki toplamda gözükür, tersine sağ taraftaki toplamda gözüken bir terimde sol taraftaki toplamda gözükür. Şimdi (3.1) ve (3.2) birlikte düşünülürse,

$$\sum_{dn} \mu(d)\, F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{b|n}\ \sum_{d|\frac{n}{b}} \mu(d)\, f(b)$$

$$= \sum_{b|n} f(b) \,.\, \sum_{d|\frac{n}{b}} \mu(d)$$

$$= f(n)$$

olur.

Şimdi Möbiüs inversiyon formülünü başka bir yöntemle ifade ve ispat edelim.

Tanım 3.4.9: U birim fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım;

$$U(n)=1,\ n\geq 1$$

teorem (3.3.2) den;

$$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$$

idi. Dirichlet çarpım notasyonu ile μ*u=I yazabiliriz. Buradan $U=\mu^{-1}$ ve $\mu=U^{-1}$ yazabiliriz.

Teorem 3.4.10: f,g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere

$$F(n)=\sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n)=\sum_{d|n} f(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

dir (Apostol 1976).

İspat: ⇒ den, f=g*U yazarız ve sağdan μ ile çarparsak

$$F*\mu=(g*U)\mu=g*(U*\mu)=g*\mu=g$$

olur ki ⇐ elde edilir.

Aksine ⇐ ‘ den g=f∗μ ifadesini U ile çarparsak

$$g*U=f*(\mu*U)=f*I=f$$

olur ki ⇒ elde edilir.

Teorem 3.4.11: f,g çarpımsal iki aritmetik fonksiyon olmak üzere bunların Dirichlet çarpımı f*g de çarpımsaldır (Apostol 1976).

İspat: f*g=h olsun (m,n)=1 olmak üzere $h(mn)=\sum_{c|mn} f(c)\, g(\frac{mn}{c})$ olur . Şimdi mn ‘nin her bir c böleni c=ab formunda yazılabilir öyle ki a |m, b |n,(a,b)=1, $(\frac{m}{a},\frac{n}{b})=1$ dir. Buradan

$$h(mn) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab)\, g\left(\frac{mn}{ab}\right)$$

$$= \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a) f(b)\, g\left(\frac{m}{a}\right) g\left(\frac{n}{b}\right)$$

$$= \sum_{a|m} f(a)\, g\left(\frac{m}{a}\right) . \sum_{b|n} f(b)\, g\left(\frac{n}{b}\right)$$

$$= h(m)h(n)$$

olur ve ispat tamamlanır.

3.5. GCD Matrisi

S= $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanları birbirinden farklı olan pozitif tamsayılar kümesi olsun ij -inci elemanı x_i ve x_j nin ortak bölenlerinin en büyüğü olan (x_i, x_j) lerden oluşan (S) matrisine en büyük ortak bölen (GCD-OBEB) matrisi denir (Beslin and Ligh 1989).

Teorem 3.5.11: S= $x_1, x_2, \dots . x_n$ ayrık pozitif tam sayıların bir kümesi olsun. O zaman (S) GCD matrisi bir A, $n \times m$ matrisi ile bu matrisin transpozunun çarpımı şeklinde yazılabilir. Öyle ki; d, S yi içeren en küçük çarpan kapalı bir kümenin elemanı olmak üzere, sıfırdan farklı girdiler $\sqrt{\phi(d)}$ şeklindedir. Burada $\phi(x)$ Eulerin toplam fonksiyonudur (Beslin and Ligh 1989).

İspat: D= $d_1, d_2, \dots . d_m$ kümesinin S yi içeren en küçük çarpan kapalı bir küme olduğunu varsayalım ve A= a_{ij} matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$a_{ij}=e_{ij} \sqrt{\phi(d_j)}$$

E= $(e_{ij})_{n\times m}$ matrisini de;

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad d_j|x_i \ ise \\ 0 & , \quad di\breve{g}er \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan A , $n \times m$ ve A^T, $m \times n$ matristir, dahası;

$$(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, a_{jk}$$

$$= \sum_{\substack{d_k|x_i \\ d_k|x_j}} \sqrt{\phi(d_k)}\ \sqrt{\phi(d_k)}$$

$$= \sum_{d_k|(x_i,x_j)} \sqrt{\phi(d_k)}$$

$$=(x_i, x_j)$$

$$=s_{ij}.$$

Böylece (S)= AA^T olur.

Sonuç 3.5.12: λ=köşeg $(\phi(d_1), (\phi d_2), \ldots, \phi(d_m))$, $m \times m$ bir köşegen matris ve E, 3.5.11 teoremindeki gibi $n \times m$ bir matris olsun. O zaman;

$$AA^T = (E\lambda^{\frac{1}{2}})(E\lambda^{\frac{1}{2}})^T = \mathrm{E}\,\lambda E^T$$

olarak yazılabilir (Beslin and Ligh 1989).

Sonuç 3.5.13: S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ kümesinin elemanlarının bir yeniden düzenlenmiş hali $S^{'}$= $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots . x_{i_n}$ olsun. O zaman ($S^{'}$) GCD matrisi (S) GCD matrisine benzerdir. Buradan rank(S)= rank ($S^{'}$) ve det(S) =det ($S^{'}$) dir (Beslin and Ligh 1989).

Teoerem 3.5.14: Bir GCD matrisi hiçbir durumda singüler (tekil) değildir (Beslin and Ligh 1989).

İspat: rank(S) =n olduğunu göstermeliyiz. Sonuç (3.4.13) ten $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ varsayabiliriz. Teorem(3.5.11) ve sonuç (3.5.12) den,

$$(S) = AA^T = E\, \lambda E^T$$

olur.

Teorem (3.5.11) deki D kümesi $d_1 = x_1, d_2 = x_2, \ldots,\ d_n = x_n$,olacak şekilde şecilebilir. Buradan E= E_1, E_2 diyebiliriz, öyleki E_1 , $n \times n$ alt üçgensel matrisi ise şu formdadır;

$$\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & 1 \end{matrix}$$

böylece

$$\text{rank(E)= rank(A)= rank} AA^T = \text{n}$$

olur.

Teorem 3.5.15: (S) GCD matrisi S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ kümesi üzerinde tanımlı ise (S) pozitif tanımlıdır (Beslin and Ligh 1989).

Sonuç 3.5.16 (Smith): S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ çarpan kapalı bir küme ve (S) de bu küme üzerinde tanımlı GCD matrisi olsun. O zaman,

$$\text{Det(S)}= \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \ldots \phi\ x_n$$

olur (Beslin and Ligh 1989).

İspat: S çarpan kapalı bir küme olduğundan teorem (3.5.11) deki D kümesi yerine S alırız ve S= AA^T olur ki burada A ve A^Tsırasıyla alt ve üst üçgensel matrisler olurlar. Dahası

$$a_{ii} = \overline{\phi(\ x_i)}= A^T\ _{ii}$$

olur ki ispat tamamdır.

Sonuç:3.5.17 $E(n)$= $1,2, \ldots, n$ ise det $E(n)$ $= \phi\ 1\ \phi\ 2\ \ldots \phi\ n$ olur ve smith determinantı bu sonuçtan da açıkça görülebilir.

3.6. Reciprocal GCD Matrisi

Tanım 3.6.1: S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ pozitif tamsayıların sıralı bir kümesi olmak üzere; i,j girişi $\frac{1}{(x_i, x_j)}$ olan n× n matrise S kümesi üzerinde reciprocal GCD matrisi denir ve $\frac{1}{(S)}$ şeklinde gösterilir.

Reciprocal GCD matrislerinin simetrik olduğu açıktır. Her reciprocal GCD matrisinin elemanları kompleks sayılar olan bir A matrisi ile transpozunun çarpımı olarak yazılabildiği Beslin (1989) tarafından gösterilmiştir.

Tanım 3.6.2: $n \geq 1$ olmak üzere;

$$\mathrm{g}(n)=\frac{1}{n} \quad {}_{d|n}\, d.\mu(d)$$

fonksiyonunu tanımlayalım, $\mathrm{f}(n)=\frac{1}{n}$ ve h(n)= ${}_{d|n}\, d.\mu(d)$ olmak üzere $\mathrm{g}(n)=\mathrm{f}(n)\,\mathrm{h}(n)$ dersek gerek $\mathrm{f}(n)$ ve gerekse de $\mathrm{h}(n)$ çarpımsal fonksiyonlar olduklarından $\mathrm{g}(n)$ de çarpımsaldır. Dahası p asalı için;

$$\mathrm{h}(p^{\mathrm{m}})=1-p$$

dir. Buradan

$$\mathrm{g}(p^{\mathrm{m}})=\frac{1-p}{p^m}$$

olur. Yani

$$\mathrm{g}\,(\mathrm{n})=\frac{1}{n} \quad {}_{p|n}\, 1-p=\frac{\phi\ n}{n^2} \quad {}_{p|n}(-p)$$

olur.

Ayrıca, Möbius inversiyon formülünden;

$$\mathrm{f(n)}=\frac{1}{n}= \quad {}_{d|n}\, g\ \ n$$

dir (Beslin 1989) .

Teorem 3.6.3: S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ pozitif tam sayıların sıralı bir kümesi olsun. $\frac{1}{(S)}$ matrisi bir A= $a_{ij}\ _{n\times m}$ matrisi ile transpozu olan $A^T = \ a_{ji}\ _{m\times n}$ matrislerinin çarpımı şeklinde yazılabilir (Beslin 1989) .

İspat: D= $d_1, d_2, \ldots . d_m$, S yi içeren çarpan kapalı bir küme olsun. Kompleks bir A= (a_{ij}) matrisini şöyle tanımlayalım;

$$a_{ij} = \begin{matrix} \overline{g(d_j)} & , & d_j | x_i \ ise \\ 0 & , & diğer \end{matrix}$$

o zaman, D çarpan kapalı olduğundan,

$$AA^T\ _{ij} = {}_{k=1}^{m} a_{ik}\ a_{jk}$$

$$= {}_{\substack{d_k | x_i \\ d_k | x_j}} \overline{g(d_k)} \quad \overline{g(d_k)}$$

$$= {}_{d_k | (x_i, x_j)} g\ \ d_k$$

$$= \frac{1}{(x_i, x_j)}$$

olur. Böylece $\frac{1}{(S)} = AA^T$dur.

Açıklama 3.6.4: Teorem (3.6.3) te ki A matrisinin bazı $\overline{g(d_j)}$ girdileri kompleks olabilir. $\frac{1}{(S)}$ nin reel matris çarpımı ayrışımı şu şekilde elde edilir.

B=(b_{ij}) için;

$$b_{ij}= \begin{cases} \overline{g(d_j)} &, \quad d_j|x_i \ ise \\ 0 &, \quad diğer \end{cases}$$

C=(c_{ij}) için;

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 &, \quad d_j|x_i \ ise \\ 0 &, \quad diğer \end{cases}$$

denirse;

$\frac{1}{(S)}$=B. C^T olduğu kolayca görülebilir (Beslin 1989).

Önerme 3.6.5: S çarpan kapalı bir küme olsun. O zaman,

$$\det(\frac{1}{S})=g(x_1)g(x_2)\ldots\ldots g(x_n)$$

dir (Beslin 1989).

İspat: Teorem (3.6.3) te D=S alırsak A ve A^T matrisler; sırasıyla alt ve üst üçgensel hale gelirler. Böylece,

$$\det \frac{1}{(S)} = \det(A).\det(A^T) = (\det(A))^2 = g(x_1)g(x_2)\ldots\ g(x_n)$$

olur.

Açıklama 3.6.6: Teorem (3.6.3) te ki D kümesi, d_1=x_1, d_2=$x_{2,\ldots,}d_n$=x_n olacak şekilde seçilirse A_1 $n \times n$ alt üçgen matris olmak üzere A= A_1, A_2 yazılabilir, öyle ki;

$$A_1 = \begin{matrix} \overline{g(x_1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \overline{g(x_n)} \end{matrix}$$

dir,buradan rank (A)=n dir. Yine de A nın reel olmayan girdileri bulunduğundan AA^T singüler değildir diyemeyiz (Beslin 1989).

Açıklama 3.6.7: GCD matrislerinin aksine, reciprocal GCD matrisleri asla pozitif tanımlı değildirler. Bu gerçek $\frac{1}{(S)}$ matrisinin $2x2$ asli minörünün;

$$\frac{1}{x_1x_2} - \frac{1}{(x_1,x_2)^2} < 0$$

olmasından kaynaklanır (Beslin 1989).

3.7. GCD Kapalı Kümelerde GCD Matrisi

Önerme 3.7.1: S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ pozitif tamsayıların sıralı ve gcd kapalı bir kümesi olsun. C=(c_{ij}) matrisi de

$$c_{ij}= {}_{x_k|(x_i,x_j)} \quad {}_{\substack{d|x_k \\ d\nmid x_t \\ t<k}} \phi(d) \qquad 1 \le i,j \le n$$

şeklinde tanımlansın. O zaman;

$$c_{ij}=(x_i, x_j)$$

dır (Beslin and Ligh 1989).

İspat:

$$(x_i, x_j) = {}_{d|(x_i,x_j)}\,\phi(d) \qquad (1)$$

ifadesi doğrudur. Açıktır ki (1) ve c_{ij} ler tekrar etmezler, yani her bir d bir kez hesap edilir.

Şimdi $x_k|(x_i, x_j)$ ve d$|x_k$ olsun. O zaman $d|(x_i, x_j)$ olur. S GCD kapalı olduğundan (x_i, x_j)= x_m olacak şekilde bir m≤i,j vardır. Buradan $d|x_m$ olur. Şimdi $d|x_k$ ve k≤m olacak şekilde ilk tamsayıya k diyelim. O zaman $d \nmid x_t$, t< k olur. Şimdi (x_k, x_i)= x_r , r≤ k diyelim. Buradan $d|x_r$ olur. Fakat k nın minimalliğinden r= k olmalıdır. Böylece x_r=x_k ve $x_k|x_i$olur. Benzer şekilde $x_k|x_j$ bulunur. Buradan $x_k|(x_i, x_j)$ çıkar ki ispat tamamdır.

Teorem 3.7.2: S= $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif tamsayıların sıralı ve GCD kapalı bir kümesi olsun. O zaman (S) alt üçgensel bir A matrisi ile üst üçgensel bir B matrisinin çarpımına eşittir. Dahası,

$$a_{ii} = {}_{\substack{d|x_i \\ d\nmid x_t \\ t<i}}\,\phi(\mathrm{d})$$

olmak üzere;

$$\det(S)=\det(A)= {}_{i=1}^{n}\, a_{ii}$$

olur (Beslin and Ligh 1989).

İspat: A=(a_{ij}) matrisini şu şekilde tanımlayalım,

$$a_{ij}= \begin{cases} \sum\limits_{\substack{d|x_j \\ d\nmid x_t \\ t<j}} \phi(d) & , \ x_j|x_i \\ 0 & , \ diğer \end{cases}$$

B matrisi de A^T matrisine göre incidence olarak oluşturalım, yani A^T nin i,j- girişi 0 ise B nin de i,j- girişi 0 olur, diğer durumlarda da 1 olsun. Böylece

$$(AB)_{ij}= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{\substack{x_k|x_i \\ x_k|x_j}} a_{ik}$$

bu da önerme (3.7.1)' deki c_{ij} ye eşittir. Buradan AB nin i,j- girişi (x_i, x_j) dir. Açıktır ki A alt üçgensel ve B de üst üçgensel ve det(B)=1 dir. Buradan

$$\det(S)=\det(A)= a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

olur.

Teorem 3.7.3: S= $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gcd kapalı bir küme olsun o zaman

$$\det(S)= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \Leftrightarrow \text{S çarpan kapalıdır (Beslin, Ligh 1989).}$$

İspat: $\Leftarrow$ Smith determinantıdır.

Şimdi varsayalım ki S çarpan kapalı değildir. Not edelim ki teorem (3.7.1) deki $a_{ii} \geq \phi(x_i)$ dir. S çarpan kapalı değilse en az bir i için bir d vardır öyle ki, $d|x_i$, $d \neq x_i$, $d \nmid x_t$, t<i dir. Buradan

$$a_{ii} \geq \phi(x_i) + \phi(d) > \phi(x_i) \qquad \text{(S gcd kapalı)}$$

olur. Böylece;

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} > \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)$$

olur ki çelişkinin S nin çarpan kapalı olmadığı varsayımından çıktığı aşikardır.

3.8. Smith Determinantının Genel Hali

Buraya kadar GCD matrisleri keyfi pozitif tamsayılar kümesi üzerinde düşünüldü. Beslin ve Ligh daha özel bir hal olan

D(s,d,n)={s,s+d,s+2d,…. s+(n-1)d}, (s,d)=1 kümesi üzerinde ki GCD matrislerinin determinantının ne olduğu sorusunu gündeme getirmiştir. Açıktır ki burada

D(1,1,n)=E(n) dir.

3.9. GCD Matrisinin Tersi

Teorem 3.9.1: S= $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif tamsayıların sıralı ve çarpan kapalı bir kümesi olmak üzere (S) GCD matrisinin tersi A=(a_{ij}) dir. Öyle ki;

$$a_{ij} = \sum_{\substack{x_i | x_k \\ x_j | x_k}} \frac{1}{\phi(x_k)} \mu\left(\frac{x_k}{x_i}\right) \mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

dir (Bourque and Ligh 1992).

İspat: E=(e_{ij}) ve U=(u_{ij}) n×n matrisleri şöyle tanımlansın.

$$e_{ij} = \begin{matrix} 1 & , & x_j|x_i \ ise \\ 0 & , & diğer \end{matrix}$$

$$u_{ij} = \begin{matrix} \mu\left(\frac{x_i}{x_j}\right) & , & x_j|x_i \ ise \\ 0 & , & diğer \end{matrix}$$

E ile U matrislerinin çarpımının i,j girişi;

$$(EU)_{ij} = {}_{k=1}^{n} e_{ik}u_{kj} = {}_{\substack{x_k|x_i \\ x_j|x_k}} \mu \ \frac{x_k}{x_j} = {}_{x_k|\frac{x_i}{x_j}} \mu \ x_k = \begin{matrix} 1 & , & i = j \ ise \\ 0 & , & i \neq j \ ise \end{matrix}$$

olur ki buradan da,

$$E = U^{-1}$$

olur.

⅄=köşeg($\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$,…, $\varphi(x_n)$) ise sonuç (3.5.12)' den (S)=E⅄ E^{T} yazılabilir. Buradan

$(S)^{-1} = U^{T}⅄^{-1}U$=(a_{ij}) dersek

$$a_{ij} = {}_{k=1}^{n} \frac{1}{\varphi \ x_k} u_{ki} \, u_{kj} = {}_{\substack{x_i|x_k \\ x_j|x_k}} \frac{1}{\varphi \ x_k} \ \mu \ \frac{x_k}{x_i} \ \mu \ \frac{x_k}{x_j}$$

olur.

3.10. GCD Matrisinin ϕ Fonksiyonun Genellemesi İle İnşaası

Tanım 3.10.1: S= $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif tam sayıların bir kümesi olsun. Euler ϕ fonksiyonunun genel hali S kümesi üzerinde şöyle tanımlanır.

$$\psi_S(\mathrm{x_j}) = x_j - \sum_{\substack{x_i | x_j \\ x_i \neq x_j}} \psi_S(\mathrm{x_i})$$

Not 3.10.2: S kümesinin çarpan kapalı olması durumunda

$$\psi_S\ \mathrm{x_j} = \varphi(\mathrm{x_j})\ \ \forall x_j \in S$$

olacaktır.

Teorem 3.10.3: S= $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif tamsayıların bir kümesi ve T= $y_1, y_2, \dots, y_m$ kümesi de S nin GCD kapanışı olsun. O zaman (S) GCD matrisi, bir A=$(\mathrm{a_{ij}})_{\mathrm{nxm}}$ ve $\mathrm{A^T}$=$(\mathrm{a_{ji}})_{\mathrm{mxn}}$ matrislerinin çarpımı olarak yazılabilir. Öyle ki A nın sıfır olmayan girdileri $\overline{\psi_T(\mathrm{y_j})}$, $\mathrm{y_j} \in T$ şeklindedir (Bhat 1991).

İspat: A=$(\mathrm{a_{ij}})_{\mathrm{nxm}}$ matrisi şu şekilde tanımlansın;

$$\mathrm{a_{ij}} = \mathrm{e_{ij}}\ \overline{\psi_T(\mathrm{y_j})},$$

$E = (\mathrm{e_{ij}})_{\mathrm{nxm}}$ matrisini de

$$\mathrm{e_{ij}} = \begin{cases} 1, & x_j | x_i \ ise \\ 0, & diğer\ durum \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman

$$(AA^T)_{ij}= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \sum_{\substack{y_k|x_i \\ y_k|x_j}} \sqrt{\psi_T(\mathrm{y_k})}\ \sqrt{\psi_T(\mathrm{y_k})}$$

$$= \sum_{\mathrm{y_k}|(xi,xj)} \psi(\mathrm{y_k})=(x_i, x_j)\ ,\ (x_i, x_j) \in T \text{ dir.}$$

Böylece (S)= AA^T dur.

Not 3.10.4: E=($\mathrm{e_{ij}}$) matrisi teoremdeki gibi olsun. ⅄ da m×m köşegen matris olan öyle ki, r. köşegen elemanı;

$$\lambda_r=\psi_T(\mathrm{y_r}), \qquad 1\leq r\leq m \text{ olsun.}$$

O zaman;

$$\mathrm{AA^T} =(\mathrm{E}⅄^{1/2})\ (E⅄^{1/2})^{\mathrm{T}}= E⅄E^{\mathrm{T}}$$

olur.

Belirtelim ki yapısal teorem özellikle A nın kare matris olması durumunda yararlıdır. Yani S kümesi GCD kapalı iken T=S olacaktır (Bhat 1991).

Tanım 3.10.5: S kümesi teorem (4.1.3) teki gibi ve E=($\mathrm{e_{ij}}$) matrisi de aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\mathrm{e_{ij}}= \begin{cases} 1\ , & x_j|x_i \ ise \\ 0\ , & diğer\ durum \end{cases}$$

O halde E matrisine S kümesinin başlangıç matrisi denir (Bhat 1991).

Teorem 3.10.6: S= $x_1, x_2, \dots, x_n$ GCD kapalı bir küme olsun. O halde;

$$\det(S)= \psi_s\ y_1\ .\ \psi_s\ y_2\ \dots \psi_s\ y_n$$

olur (Bhat 1991).

İspat: $x_1<x_2<\ldots<x_n$ seçersek (S) nin determinantı değişmeyeceğinden E=(e_{ij}) başlangıç matrisi esas köşegen elemanları 1 olan alt üçgensel bir matris halini alır. Buradan,

det(E)=det(E^T)=1 ve not (4.1.4) den;

$$\det(S)=\det\lambda=\psi_s\ x_1\ .\ \psi_s\ x_2\ \ldots \psi_s\ x_n$$

olur.

Teorem 3.10.7: S= $x_1, x_2, \dots, x_n$ GCD kapalı bir küme, δ; $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ şeklinde ki sütun vektörü ve λ de $(\psi(x_1),\psi(x_2)\ldots\psi(x_n))^T$ şeklindeki sütun vektörü olsun. O zaman,

$$\lambda = E^{-1}\delta \qquad \text{(E, S 'nin başlangıç matrisi) olur (Bhat 1991).}$$

İspat: Yine $x_1<x_2<\ldots<x_n$ alalım. Şimdi

$$(E\lambda)_i= {}_j\, e_{ij}\psi(x_j) = {}_{j:x_j|x_i}\, \psi(x_j)= x_i$$

dir, det(E)=1 olduğundan tersi mevcuttur, buradan da istenilen elde edilir.

3.11. GCD Matrisinin Determinantı

Teorem 3.11.1: S= $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif tamsayıların bir kümesi ve D={d_1,d_2,…d_m} kümesi de S nin çarpan kapanışı olsun.

Aynı zamanda x_1<x_2<…<x_n ve x_{n+1}<x_{n+2}<…<x_m olsun. O zaman

$$\det(S)= {}_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n\le m}(\det E(k_1,k_2,\ldots,k_n))^2\ \phi(x_{k_1})\phi(x_{k_2})\ldots\phi(x_{k_n})$$

olur.

Burada; E(k_1,k_2,…,k_n), E nin k_1,k_2,…,k_n. sütunlarından oluşan alt matristir (Beslin and Ligh 1990).

Teorem 3.11.2: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ olmak üzere $S =\ x_1, x_2, \ldots, x_n$, elemanları pozitif tamsayılar olan bir küme ve S , S kümesi üzerinde tanımlanan GCD matrisi olsun. Bu taktirde

$$\det\ S\ \geq \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \ldots \phi\ x_n$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart S kümesinin çarpan kapalı olmasıdır (Beslin and Ligh 1990).

İspat: 4.2.1 ile verilen toplamda terimler negatif olamaz ve $k_1, k_2, \ldots, k_n\ =\ 1,2,\ldots,n$ için

$$\det E_{\ 1,2,\ldots,n}\ \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \ldots \phi\ x_n\ = \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \ldots \phi\ x_n$$

dir. Çünkü burada $E_{\ 1,2,\ldots,n}$, köşegeni üzerindeki elemanları 1 olan bir alt üçgen matristir. O halde

$$\det S \geq \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \dots\phi\ x_n$$

olacağı açıktır. S kümesi çarpan kapalı ise $\det S = \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \dots\phi\ x_n$ olduğu sonuç (3.5.16) da ispatlanmıştı. O halde Sonuç (3.5.16) nın tersini göstermek ispatı tamamlayacaktır.

$\det S = \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \dots\phi\ x_n$ olsun. Bu kabul S kümesinin çarpan kapalı olduğunu iddia eder. S kümesinin çarpan kapalı olmadığını varsayalım. Bu durumda $S \neq \overline{S}$ dir ve $x_{n+1} \in \overline{S} - S$, S kümesinin bir elemanının bölenidir. $x_{n+1}|x_r$ olacak şekilde en küçük $r \in 1,2,\dots,n$ tamsayısı alınsın. E matrisinin r-inci sütunu yerine $n+1$ -inci sütunu alınarak elde edilen $E_{1,2,\dots,r-1,n+1,r+1,\dots,n,n+1}$ alt matrisi ele alınsın. r tamsayısının seçiminden; $\det E_{1,2,\dots,r-1,n+1,r+1,\dots,n,n+1} = \mp 1$ olur. O halde $3.7.3$ ten

$$\det S \geq \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \dots\phi\ x_n + \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \dots\phi\ x_{r-1}\ \phi\ x_{r+1}\ \dots\phi\ x_n\ \phi\ x_{n+1}$$

olur, bu ise $\det S \geq \phi\ x_1\ \phi\ x_2\ \dots\phi\ x_n$ olması ile çelişir. Bu yüzden $S = \overline{S}$ olmalıdır. Yani S çarpan kapalıdır.

3.12. LCM Matrisi

Tanım 3.12.1: $S = x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif tamsayıların bir kümesi olsun. i,j. girişi $[x_i, x_j]$ olan nxn matrise S kümesi üzerinde LCM (least comman multiple) matrisi denir ve [S] ile gösterilir.

LCM matrislerinin yapısı ve determinantı Reciprocal GCD matrislerinden elde edilen sonuçlarla direkt olarak açıklanabilir. Çünkü,

$$[x_i, x_j] = \frac{x_i x_j}{(x_i, x_j)}$$

dir, şayet $\frac{1}{(S)}$ reciprocal GCD matrisi ise bu matrisin i. Satırını x_i ile j. Sütununu x_j ile çarparsak [S] LCM matrisini elde ederiz.

Buradan LCM matrisi, Reciprocal GCD matrisine elemanter satır işlemleri uygulanarak elde edilebilir. (Beslin 1989).

Teorem 3.12.2: S= $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif tamsayıların sıralı bir kümesi ve A da teorem (3.6.3) teki gibi $n \times n$ bir matris olsun o zaman,

$$[S] = DAA^T D = D\frac{1}{(S)}D$$

şeklinde yazılabilir. Burada D=köşeg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dir (Beslin 1989).

Sonuç 3.12.3: LCM matrisi pozitif tanımlı değildir. Bu sonuç x_1, x_2 pozitif tam sayıları için $x_1 x_2 - [x_1, x_2]^2 \leq 0$ olması ve eşitliğin sadece $x_1 = x_2$ olması durumunda geçerli olacağı gerçeğinden yola çıkarak söylenebilir (Beslin 1989).

Sonuç 3.12.4: Şayet S çarpan kapalı bir küme ise,

$$\det[S] = {x_1}^2 {x_2}^2 \ldots {x_n}^2 g\ x_1\ \ g\ x_n\ \ \ldots g(x_n)$$

olacaktır. Burada, g (3.6.3) teki gibidir.

Sonuç(3.12.4) ten de görüleceği gibi S çarpan kapalı iken det[S] $\neq 0$ dır.

S. Beslin, ‘reciprocal gcd matrices and lcm matrices’(1989) adlı makalede [S] matrisinin determinantının hangi durumlarda pozitif hangi durumlarda negatif veya sıfır olacağı üzerine sorular ve sanılar ortaya atmıştır. Bu bölümde LCM matrisinin tersini çarpan kapalı bir kümede hesaplayacağız. g aritmetik fonksiyonu n$\in Z^+$ için;

$$g(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n} d.\mu(d)$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 3.12.5: S= $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitif tamsayıların çarpan kapalı bir kümesi olsun. O zaman [S] matrisinin tersi B= (b_{ij}) dir, öyleki;

$$b_{ij}=\frac{1}{x_i x_j}\sum_{\substack{x_i|x_k \\ x_j|x_k}} \frac{1}{g(x_k)}\, \mu\left(\frac{x_k}{x_i}\right) \mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

olur (Bourque and Ligh 1992).

İspat: D=köşeg $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. Teorem(3.6.3) ten [S]=DAA^TD olarak yazılabilir öyle ki A= (a_{ij}) $n \times n$ bir matris ve (3.6.3) teki şekildedir. E, $n \times n$ matrisi ve U $n \times n$ matrisi teorem (3.6.3) teki gibi λ da $\lambda = köşeg(g\ x_1\ , g\ x_2\ , \dots, g\ x_n\ )$ şeklinde köşegen matris olmak üzere

$$AA^T = E\lambda E^T$$

dir. Buradan

$$[S]^{-1} = D^{-1}U^T\lambda^{-1}UD^{-1}$$

olur, $[S]^{-1} = B = (b_{ij})$ dersek,

$$b_{ij}=\frac{1}{x_i x_j}\sum_{\substack{x_i|x_k \\ x_j|x_k}} \frac{1}{g(x_k)}\, \mu\left(\frac{x_k}{x_i}\right) \mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

olur ki ispat tamamlanır.

3.13. f-GCD Matrisi

f, aritmetik bir fonksiyon ve $f(x_i, x_j)$ $n \times n$ matriside i-j girişi $f(x_i, x_j)$ olan bir matris olsun yani (S) GCD matrisinin her bir girdisine f aritmetik fonksiyonu etki etsin. Bourque ve Ligh (1995) te göstermişlerdir ki C_S aritmetik fonksiyonların özel bir sınıfı olmak üzere $f(x_i, x_j)$ $: f \in C_S$ şeklinde ki f-GCD matrisleri GCD matrisleri ile benzer özelliklere sahiptir. Aynı zamanda ispatlanmıştır ki $f \in C_S$ ise $f(x_i, x_j)$ matrisi pozitif tanımlıdır ve böylece

$$\det\ f\ \ x_i, x_j \quad \leq \mathrm{f}\ \mathrm{x}_1\ \ \mathrm{f}\ \mathrm{x}_2\ \ldots \mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{n})$$

dir. Dahası,

$$\det\ \ f\ \ x_i, x_j \quad \geq \quad {}_{k=1}^{n}(f * \mu)(x_k)$$

olur ve eşitlik sadece S çarpan kapalı iken geçerlidir. Benzer şekilde f aritmetik bir fonksiyon olsun $f[x_i, x_j]$ matrisi de i-j girişi $f[x_i, x_j]$ olan $n \times n$ bir matris olsun. Bourque ve Ligh (1995) göstermişlerdir ki f nin özel bir aritmetik fonksiyonu olması durumunda $f[x_i, x_j]$ matrisi GCD matrisine benzer özellikler taşımaktadır. Dahası f çarpımsal ve $\frac{1}{f} * \mu\ \ \epsilon\ C_S$ ise $f[x_i, x_j]$ matrisi pozitif tanımlıdır ve böylece,

$$\det\ f[x_i, x_j]\ \leq\ \mathrm{f}\ \mathrm{x}_1\ \ \mathrm{f}\ \mathrm{x}_2\ \ldots \mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{n})$$

$$\det\ \ f[x_i, x_j]\ \geq\ \ {}_{k=1}^{n} f(x_k)^2 (\frac{1}{f} * \mu)\ (x_k)$$

dır ve eşitlik sadece S çarpan kapalı olması ile mümkündür.

Tanım 3.13.1: S pozitif tamsayıların bir kümesi olmak üzere özel aritmetik fonksiyonların bir sınıfı şu şekilde tanımlanmıştır;

$$C_S = \quad f \quad f * \mu \quad d \quad > 0, d \ x, x \epsilon S$$

(Bourque and Ligh 1995).

GCD matrisinin yapısını tamamen ϕ Euler toplam fonksiyonun

$$_{d|n} \phi \ \ d \ \ = n$$

olması özelliğinin üzerine kurulduğunu gördük. Bu bölümde daha genel bir hale ulaşmak için ϕ yerine g aritmetik fonksiyonu alınacak ve haliyle sağ taraftan bir f aritmetik fonksiyonu alınacak şimdi f ve g aritmetik fonksiyonlarını birbirleri yardımıyla

$$\text{f(n)=} \quad _{d|n} g \ \ d$$

şeklinde tanımlayalım. Literatürde kullanılması sebebiyle bu matrisi artık (S_f) notasyonu ile göstereceğiz. H.J.Smith (1876) ispat etmiştir ki;

$$det \ \ f(i,j) \ \ _{n\times n} = \ g(1)g(2)\ldots \ g(n) \qquad 1 \leq \text{i,j} \leq n$$

dir. Yine, Polya ve Szegö (1971)

$$f(i,j) \ \ _{n\times n} = G.C^T$$

olduğunu göstermişlerdir. Burada G ve C alt üçgensel matrisleri

$$g_{ij} = \begin{matrix} g \;\; j \;\;, & j|i \; ise \\ 0 \;\;, & diğer \end{matrix}$$

ve

$$c_{ij} = \begin{matrix} 1 \;\;, & j|i \; ise \\ 0 \;\;, & diğer \end{matrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Buradan sonra $1 \leq i, j \leq n$ yerine kümeyi S= $x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ pozitif tamsayılarının herhangi bir kümesi olacak şekilde keyfi seçelim.

$\mathbf{3.14.}$ $\boldsymbol{det \;\; f(x_i, x_j)}$ için alt sınırlar

Yardımcı Teorem 3.14.1: n pozitif bir tamsayı olmak üzere;

$${}_{d|n} \; f * \mu \quad d \;\; = f(n)$$

dir (Hong 1998).

İspat: I ve U aritmetik fonksiyonları I(m)= $\frac{1}{m}$, U(m)=1 şeklinde tanımlansınlar.Burada x , x ten büyük olmayan en büyük tamsayı ve $m \in Z^+$ dır. $\mu * U = I$ ve f =f$* I$ olduğundan,

f(n)= f$* I \quad n \;=\; f * \;\; \mu * U \quad\; n \;=\;\; f * \mu \;\; * U \;\; (n)$

$$= \;{}_{d|n} \; f * \mu \quad d \;\; U(\tfrac{n}{d}) = \;\; {}_{d|n} \; f * \mu \quad d$$

olur ve ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.14.2: D= $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$ S nin çarpan kapanışı olsun. Eğer A= a_{ij} $_{n\times m}$matrisi

$$a_{ij} = \begin{matrix} \overline{f*\mu\ (y_j)} & , & j|i\ ise \\ 0 & , & diğer \end{matrix}$$

şeklinde tanımlı ise o zaman

$$f(x_i, x_j) = AA^T$$

olur (Hong 1998).

İspat: $1 \le i \le n, 1 \le j \le m\ iken\ \ f(x_i, x_j) = AA^T$ olduğunu görmek için;

$$(AA^T)_{ij} = {}_{k=1}^{m} a_{ik}a_{jk}$$

$$= {}_{\substack{y_k|x_i \\ y_k|x_j}} \overline{f*\mu\ \ y_k}^{\,2}$$

$$= {}_{y_k|((x_i,x_j))} f*\mu\ \ y_k$$

$$= {}_{d|n} f*\mu\ \ d$$

Yardımcı teorem (3.14.1) den $= f(x_i, x_j)$

olur ki ispat tamlanır.

Teorem 3.14.3: Eğer f ∈ C_S ise o zaman

$$\det f(x_i, x_j) \geq \prod_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d|x_k \\ d\nmid x_t \\ t<k}} (f * \mu)(d)$$

olur. Eşitlik sadece S nin GCD kapalı olması halinde mümkündür (Hong 1998).

Sonuç 3.14.4: $$\det f(x_i, x_j) \geq \prod_{k=1}^{n} \sum_{\substack{d|x_k \\ d\nmid x_t \\ t<k}} \phi(d)$$

olur. Eşitlik yalnızca S nin GCD kapalı olması ile mümkündür (Hong 1998).

İspat: f= N ve N(n)=n, n∈ Z^+ olsun N∗ $\mu = \phi$ ve ϕ(d)> 0, d∈ Z^+ olacağından ispat açıktır.

Tanım 3.14.5: f aritmetik bir fonksiyon ise $\frac{1}{f}$ aritmetik fonksiyonu şu şekilde tanımlıdır;

$$\frac{1}{f}(m) = \begin{cases} 0 & , \quad f(m) = 0 \; ise \\ \frac{1}{f(m)} & , \quad diğer \end{cases}$$

Yardımcı Teorem 3.14.6: f aritmetik bir fonksiyon ve $\frac{1}{f} * \mu \in c_s$ olsun.O zaman $\frac{1}{f} \in c_s$ tir (Hong 1998).

İspat: Varsayalım ki $\frac{1}{f} * \mu \in c_s$ olsun. x∈ S ve d|x ise (4.5.1) teoreminden;

$(\frac{1}{f} * \mu)$(d)= $\sum_{d_1|d} (\frac{1}{f} * \mu * \mu)(d_1)$ olacaktır. $d_1|d$ ve d|x olduğundan $d_1|x$ olur. Böylece $\frac{1}{f} * \mu \in c_s$ olması $(\frac{1}{f} * \mu * \mu)(d_1) > 0$ *ı gerektirir ki* bu da $\frac{1}{f} \in c_s$ demektir.

Yardımcı Teorem 3.14.7: Bir f aritmetik fonksiyonu m,n pozitif tamsayıları için yalnız ve yalnız

$$f(m)f(n) = f((m,n))f([m,n])$$

olması durumunda yarı çarpımsaldır (Hong 1998).

Teorem 3.14.8: f yarı çarpımsal bir fonksiyon olsun şayet $\frac{1}{f} \in c_s$ ise o zaman

$$\det\left(f\left(x_i,x_j\right)\right) \geq \prod_{k=1}^{n} f(x_k)^2 \sum_{\substack{d|x_k \\ d\nmid x_t \\ d<t}} \left(\frac{1}{f} * \mu\right)(d)$$

olur. Eşitlik yalnızca S nin gcd kapalı olması halinde mümkündür (Hong 1998).

3.15. det $f(x_i,x_j)$ ve det $f[x_i,x_j]$ İçin Üst Sınırlar

Li (1990) GCD matrisi için determinant üst sınırı olarak

$$\det(x_i, x_j) \leq x_1\, x_2 \ldots x_n\text{-}\left(\frac{n!}{2}\right)$$

eşitsiziliğini bulmuştur. Burada başka bir üst sınırı Fischer Eşitsizliğini kullanarak bulacağız.

Yardımcı Teorem 3.15.1 (Fischer Eşitsizliği):

$$P = \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C \end{pmatrix}$$

pozitif tanımlı bir matris ve A, C boş olmayan kare matrisler olmak üzere,

$$\det(P) \leq (\det A)(\det C)$$

dir. Burada B^* ,B nin eşlenik transpozudur.

İfade edeceğimiz teorem için a={min x | x∈ S} ve b=min {x | xϵS\{a}} olsun.

Teorem 3.15.2: f ϵ C_s ve f(a)≤ f (b) olsun. n≥ 2 için

$$\det f(x_i, x_j) \leq (1- \frac{f(a)}{f(b)}) \prod_{k=1}^{n} f(x_k)$$

dır (Hong 1998).

3.16. GCD Matrisinin Normu Üzerine

Teorem 3.16.1: A=(a_{ij}) herhangi bir nxn kompleks matris olsun. A^*, A nın eşlenik tranpozunu göstermek üzere,

$$\det (A^*A) \leq \frac{\|A\|_E^{2n}}{n^n}$$

olur (Taşçı 1994).

Teorem 3.16.2: G=$((x_i, x_j))_{n\times n}$ matrisi S={$x_1, x_2,\ldots, x_n$} çarpan kapalı kümesi üzerinde GCD matrisi olsun.

Bu takdirde

$$\sqrt[n]{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|G\|_E$$

eşitsizliği geçerlidir (Solak vd 2003).

İspat: Teorem (3.16.1) den

$$\text{Det}(A^{*}\text{A}) \leq \frac{\|A\|_E^{2n}}{n^n}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. A =(a_{ij}) matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} \overline{\varphi(x_j)} & , x_j|x_i \quad ise \\ 0 & , \quad diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir üçgensel matris olsun. Teorem (3.5.11) den G=AA^{T} olup

$$\text{Det(G)=det(AA}^{\text{T}})\leq \frac{\|A\|_E^{2n}}{n^n}$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{\|A\|_E^{2n}}{n^n} \geq \text{det(G)} \prod_{k=1}^{n} \varphi(x_k)$$

dır.

Eğer AA^{T} yerine G yazılırsa;

$$\text{det(GG)=(det(AA}^{\text{T}})(\text{AA}^{\text{T}})\leq \frac{\|A\text{A}^{\text{T}}\|_E^{2n}}{n^n} = \frac{\|G\|_E^{2n}}{n^n}$$

olup

$$(\det G)^2 \le \frac{\|G\|_E^{2n}}{n^n}$$

olacaktır. Sonuç olarak;

$$\sqrt[n]{\det G} \le \frac{\|G\|_E}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \varphi(x_k)} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \|G\|_E$$

elde edilir ki ispat tamamlanır.

Teorem 3.16.3: $L=(\frac{1}{[x_i,x_j]})$, S= $\{x_1, x_2, \dots . x_n\}$ çarpan kapalı kümesi üzerinde reciprocal LCM matrisi olsun. O zaman;

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \phi(x_i)} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \|L\|_E$$

dir (Solak vd 2003).

İspat: $x_i x_j$ $=[x_i, x_j](x_i, x_j)$ olduğundan

$$L= \frac{1}{[x_i,x_j]} = \frac{(x_i,x_j)}{x_i . x_j}$$

dir. Diğer taraftan

$$H= \begin{cases} \sqrt{\frac{\varphi(x_j)}{x_i}} , & x_j | x_i \\ 0 , & diğer \end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{(x_i,x_j)}{x_i x_j} = HH^T$$

olarak yazılabilir.

$$\text{Det } HH^T = {}_{i=1}^{n}\frac{\varphi(x_i)}{{x_i}^2}$$

olacağından

$$\det\ LL = \det((HH^T)(HH^T)) \leq \frac{HH^T{}_E^{2n}}{n^n} = \frac{L{}_E^{2n}}{n^n}$$

$$\leq \frac{L{}_E^{2n}}{n^n}$$

elde ederiz.

Teorem 3.16.4: G= $\frac{i,j}{ij}$ olsun. O zaman

$$G{}_E \leq \sqrt{\frac{5\pi^2}{6} - 4}$$

eşitsizliği geçerlidir (Bozkurt ve Solak 2002).

İspat: Öklityen norm tanımından

$$G{}_E^2 = {}_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + {}_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(k+1)} + 2 \quad \propto_i \qquad (1)$$

yazılabilir. G matrisi simetrik olduğundan (1) eşitliğinin sağ tarafındaki orta toplam 2 ile çarpıldı. Yine $\propto_i \leq \frac{1}{4^2}$ her i için dogrudur. O halde

$$2\ {}^{n}_{k=1}\frac{1}{(k+1)^2}> 2 \quad \propto_i$$

dir. Buradan;

$$G\ {}^{2}_{E} \leq \ {}^{n}_{k=1}\frac{1}{k^2}+\ {}^{n-1}_{k=1}\frac{4}{(k+1)^2}=\frac{5\pi^2}{6}-5\ \psi\ (1,n+1)-4$$

olur. Burada ψ poligama fonksiyonu olup,

$$\Gamma\ x\ = {}_{0}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \qquad\qquad x>0$$

şeklinde tanımlı gama fonksiyonu yardımıyla;

$$\psi\ \mathrm{x}\ =\frac{\Gamma'\ x}{\Gamma\ x}$$

şeklinde tanımlı digama fonksiyonunun $\psi'\ \mathrm{x}$, $\psi''\ \mathrm{x}$, $\psi'''\ \mathrm{x}$ ... türevleri olarak tanımlı fonksiyondur.

Sağ tarafta n→ ∞ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}\psi(\mathrm{a}, \mathrm{n}+\mathrm{b})$ =0, aϵZ$^+$,bϵR olacağından

$$G\ {}_{E} \leq \overline{\frac{5\pi^2}{6}-4}$$

bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Fibonacci-GCD Matrisi

S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ sıralı pozitif tamsayıların çarpan kapalı bir kümesi olsun. Bu küme üzerinde i-j girişi $F_{\ x_i,x_j\ +1}$ olacak şekilde bir nxn matris tanımlayalım. Bu matrise Fibonacci GCD matrisi diyelim, kısalık olması bakımından (S_F) ile gösterelim. Şimdi S üzerinde

$$ {}_{d|n} g\ \ d\ \ = F_{n+1} $$

şeklinde bir aritmetik g fonksiyonu tanımlanırsa bu matrisin yapısı incelenebilir. Burada F_n yerine F_{n+1} alma nedenimiz S = $x_1, x_2, \ldots . x_n$ kümesinin $S =\ 1,2 \ldots . . n$ olması halinde $F_1 = F_2 = 1$ olmasının, $g\ \ 2\ \ = 0$ olmasını gerektireceğinden, meydana gelen matrisin tekilliğini kaldırmaktır.Yine burada, m $> n$ iken $F_m > F_n$ olacağından g fonksiyonu artan ve pozitif değerlidir. Mobius Inversiyon Formülünden:

$$ g\ \ n\ \ = \ \ F_{d+1}\mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad {}_{d|n} $$

olur ki $g\ \ n$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Bir A $= (a_{ij})_{n\times n}$ matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$ a_{ij} = \begin{matrix} \overline{g(x_j)}\ , & x_j|x_i\ \ ise \\ 0\ \ \ , & diğer \end{matrix} $$

(S_F) nin AA^T şeklinde yazılabildiğini gösterebiliriz;

$$ (AA^T)_{ij} = \ {}_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} $$

$$= {}_{\substack{x_k|x_i \\ x_k|x_j}} \quad \overline{g \;\; x_k}^{\;2}$$

$$= \quad {}_{x_k|(x_i,x_j)}\, g \;\; x_k$$

$$= F \;\; {}_{x_i,x_j} \;\; {}_{+1}$$

$$= (S_F)_{ij}$$

olur ve x_i ler sıralı olduğundan A alt üçgensel olur ki;

$$(S_F) \;\; = \;\; A \;\; {}^{2} = \quad {}^{n}_{i=1}\, g\,(x_i)$$

olur. (S_F) $\;\; > 0$ ve teorem (2.1.2) den (S_F) pozitif tanımlıdır. rank(S_F) =n ve (S_F)=(S_F) ^{T} olacağından (S_F) matrisinin n farklı öz değeri vardır. (E)=$(e_{ij})_{n\times n}$ matrisini şöyle tanımlayalım.

$$e_{ij} = \begin{matrix} 1 & , & x_j|x_i \;\; ise \\ 0 & , & diğer \end{matrix}$$

D= $(d_{ij})_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ köşegen matrisi de D=köşeg $g \;\; x_1 \;\; , g \;\; x_2 \;\; , \ldots , g(x_n)$ olmak üzere;

$$(EDE^T)_{ij} = \quad {}^{n}_{k=1}\, e_{ik} d_{kk} e_{jk}$$

$$= {}_{\substack{x_k|x_i \\ x_k|x_j}}\, d_{kk}$$

$$= \quad {}_{x_k|(x_i,x_j)}\, g \;\; x_k$$

$$=F \;\; {}_{x_i,x_j} \;\; {}_{+1}$$

bulunur ki; $(S_F)= EDE^T$ olarak ta yazılabilir.

$U=(u_{ij})$ matrisini

$$u_{ij} = \begin{cases} \mu\left(\frac{x_i}{x_j}\right) & , \ x_j|x_i \ \ ise \\ 0 & , \ diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım,

$$(EU)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}u_{kj}$$

$$= \sum_{\substack{x_k|x_i \\ x_j|x_k}} \mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

$$= \sum_{x_k|\frac{x_i}{x_j}} \mu(x_k)$$

$$= \begin{cases} 1 & , \quad i = j \ \ ise \\ 0 & , \quad i \neq j \ ise \end{cases}$$

olur ki; bu da $E^{-1} = U$ demektir. Teorem (3.5.12) den

$$(S_F{}^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{g(x_k)} u_{ki}u_{kj} = \sum_{\substack{x_i|x_k \\ x_j|x_k}} \frac{1}{g(x_k)} \mu\left(\frac{x_k}{x_i}\right) \mu\left(\frac{x_k}{x_j}\right)$$

olur.

4.2. Reciprocal Fibonacci-Gcd Matrisi

S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ pozitif tamsayıların çarpan kapalı bir kümesi olsun.(S)= $S_{ij}= \frac{1}{(x_i, x_j)}$ matrisine S kümesi üzerinde reciprocal GCD matrisi denir. Bu matrisin yapısını belirleyen aritmetik fonksiyon;

$$_{d|n} g \ d \ = \frac{1}{n}$$

fonksiyonudur. Şimdi biz $_{d|n} g \ d \ = \frac{1}{F_{n+1}}$ şeklinde bir aritmetik g fonksiyonunun Fibonacci dizisine karşılık gelen değerlerini Mobius Inversiyon Formülünden bulalım. Burada $_{d|n} g \ d \ = \frac{1}{F_n}$ tanımlayamamızın nedeni; S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ kümesinin S={1,2…..n} olması halinde $F_1 = F_2 = 1$ olmasının, g(2)=0 olmasını gerektireceğinden, meydana gelen matrisin tekilliğini kaldırmaktır. Bir A=(a_{ij}) n$\times n$ matrisi

$$a_{ij} = \begin{matrix} \overline{g(x_j)} \ , \ x_j | x_i \ \ ise \\ 0 \ \ \ , \ diğer \end{matrix}$$

şeklinde tanımlanırsa;

$$AA^T \ _{ij} = \ _{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

$$= \ _{\substack{x_k | x_i \\ x_k | x_j}} \ \overline{g \ x_k}^{\ 2}$$

$$= \ _{x_k | (x_i, x_j)} g \ x_k$$

$$= \frac{1}{F_{(x_i, x_j)+1}}$$

$$=\frac{1}{(S_F)}_{ij}$$

olacağından $\frac{1}{(S_F)}= AA^T$ yazılabilir. A alt üçgensel olduğundan determinantı köşegen elemanlarının çarpımıdır.

$$\frac{1}{(S_F)} = A \ A^T = A^2 = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \neq 0$$

olacağından $\frac{1}{(S_F)}^{-1}$ vardır. $g\ 2\ = 0$ olarak tanımlandığında rank$\frac{1}{(S_F)}$= n-1 olacaktır.

4.3. Fibonacci dizisi üzerinde GCD matrisi

$F_2, F_3, F_4, \dots, F_{n-1}, F_n, F_{n+1}$ n elamanlı Fibonacci dizisi olsun. Bu dizi üzerinde (S_F) =$(s_{ij})_{n\times n}$=(F_{i+1}, F_{j+1}) 1≤ $i,j \leq n$ matrisini Fibonacci-GCD matrisi olarak tanımlayalım.

Fibonacci-GCD matrisinin yapısını inceleyelim;

A=(a_{ij}) 1≤ $i,j \leq n$ matrisini

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum_{\substack{d|F_{j+1} \\ d\nmid F_t \\ t<j+1}} \phi\ d & , \quad F_{j+1}|F_{i+1} \ ise \\ 0 & , \quad diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

B=(b_{ij}) 1≤ $i,j \leq n$ matrisini de;

$$b_{ij} = \begin{matrix} 1 & , & F_{j+1}|F_{i+1} \;\; ise \\ 0 & , & di\breve{g}er \end{matrix}$$

şeklinde tanımlayalım,

$$(AB^T)_{ij} = {}_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk}$$

$$= {}_{\substack{F_{k+1}|F_{i+1} \\ F_{k+1}|F_{j+1}}} a_{ik}.1$$

$$= {}_{F_{k+1}|(F_{i+1},F_{j+1})} \; {}_{\substack{d|F_{k+1} \\ d\nmid F_t \\ t<k+1}} \phi \;\; d$$

$$= {}_{d|(F_{i+1},F_{j+1})} \phi \;\; d$$

$$=(F_{i+1}, F_{j+1})$$

$$= s_{ij}$$

olur. Buradan Fibonacci-GCD matrisi A alt üçgensel , B^T da üst üçgensel olmak üzere AB^Tşeklinde ayrıştırılmış olur. A alt üçgensel, B^T da üst üçgensel olduklarından, B =1, $A \;=\; {}_{i=1}^{n} a_{ii}$ olduğundan

$$(S_F) \;=\; {}_{i}^{n} a_{ii}$$

olur. $(S_F) \;\; > 0$ olduğundan (S_F) matrisi pozitif tanımlıdır. Terslenebilirdir, rank(S_F) =n ve (S_F) =(S_F) ^{T} olacağından n farklı özdeğere sahiptir.

Çarpan kapalı bir S= $x_1, x_2, \ldots . x_n$ kümesi üzerinde oluşturulan GCD matrisinin determinantı ${}_{i=1}^{n} \phi(x_i)$ olacağından ve aynı zamanda

$$a_{ii} \geq \phi(x_i)$$

olacağından

$$^{n}_{i}\, a_{ii} \geq \quad ^{n}_{i}\, \phi(x_i)$$

olur ki, n elemanlı bir Fibonacci dizisi çarpan kapalı olamayacağından,

$$(S_F) \;\geq\; ^{n}_{i}\, \phi(x_i)$$

elde edilir.

S={x_1, x_2,…, x_n} pozitif tamsayıların sıralı bir kümesi olmak üzere;

$$C_s = \; f; (f * \mu) \;\; d \;\; \geq 0; d|x_i$$

sınıfına değinmiştik. Bu çalışmamızda f(n)=F_{n+1} şeklinde tanımlı fonksiyonun bu sınıfa ait olduğunu gösterdik.

4.3.1.Teorem: f: ℕ → ℕ

$$f(n)=F_{n+1}$$

Fibonacci dizisinin genel terimini bir fonksiyon olarak düşünebiliriz bu takdirde f, C_s sınıfına aittir.

İspat: İspatı tümevarımla yapalım;

1.(f$*\ \mu$) $1 \;\; = 1$ olduğu açıktır

2. n’e kadar olan d’ ler için (f$*\,\mu$) d ≥ 0

olduğunu kabul edelim

3.(n,n± 1)=1 olduğundan d|(n± 1) için d$\leq n$ dir şimdi,

$$(f*\mu)\ (n+1)= {}_{d|(n+1)} f\ \ d\ \ \mu(\frac{n+1}{d})$$

$$=f(1)\,\mu(n+1)+f(n+1)\,\mu(1)+ {}_{\substack{d|(n+1)\\ d\neq 1\\ d\neq n+1}} f\ \ d\ \ \mu(\frac{n+1}{d}) \qquad (1)$$

$$=1.\,\mu(n+1)+ F_{n+2}.\mu(1)+ {}_{\substack{d|(n+1)\\ d\neq 1\\ d\neq n+1}} f\ \ d\ \ \mu(\frac{n+1}{d})$$

(1) eşitliğindeki,

$${}_{\substack{d|(n+1)\\ d\neq 1\\ d\neq n+1}} f\ \ d\ \ \mu(\frac{n+1}{d})$$

ifadesini, ispatın ikinci adımından

$${}_{\substack{d|(n+1)\\ d\neq 1\\ d\neq n+1}} f\ \ d\ \ \mu(\frac{n+1}{d}) \geq 0$$

kabul etmiştik bu nedenle (1) $\geq$0 olur ki ispat tamamlanır.

5. SONUÇ

f(n)=F_{n+1} şeklinde tanımlı fonksiyon yukarıda tanımlanan C_s sınıfına ait bulunmuştur buradan hareketle; GCD matrisleri üzerinde tanımlanan F_n Fibonacci dizisine fonksiyon gibi baktığımızda, meydana gelen matrislerin norm, determinant ve öz değerlerinde ne gibi değişiklikler meydana gelir, incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Altındiş, H., 2005.Sayılar Teorisi ve Uygulamaları, İkinci Baskı, Lazer Ofset, ISBN: 975-97036-0-2, Ankara.

Apostol, T.M., 1976. An Introductıon to Analytic Number Theory. Springer-Verlag press 1st Ed.329 p,New York, USA.

Beslin,S. and Ligh S.,1989. Another Generalization of Smith's Determinant.Bull. Australian Math. Soc.,40 (1),413-415.

Beslin,S. and Ligh S.,1989. Greatest Common Divisor Matrices.Linear Algebra and Appl., 118 (1), 69-76.

Beslin S., 1991. Reciprocal GCD Matrices and LCM Matrices. Fibonacci Quarterly, 25 (1),271-274.

Beslin, S. and Ligh S., 1992. GCD-Closed Sets and the Determinants of GCD Matrices. Fibonacci Quarterly, 30 (1),157-160.

Bhat, R., 1991. On Greatest Common Divisor Matrices and Their Applications. Linear Algebra and Appl.,158 (1) 77-97.

Bourque, K. and Ligh S., 1992. On GCD and LCM matrices.Linear Algebra and Its Applications, 174 (1), 65-74.

Bourque, K. and Ligh, S.,1995.Matrices Associated with Multiplicative Functions. Linear and Multilinear Algebra, 216 (1), 267-275.

Bozkurt, D. and Solak, S., 2002. On the Norm of GCD Matrices.Mathematical Computational and Applications,7 (3),205-210.

Haukkanen,P. and Wang,J. and Silenpaa,J., 1997.On Smıth Determinant Linear Algebra and Appl.,258 (1), 251-269.

Haukkanen, P. and Korkee, I., 2005. On a General Form of Meet Matrices Associated with Incidence Functions.Linear and Multi Linear Algebra, 3 (5), 309-321.

Haukkanen, P., 2006. An Upper Bound for the l_p Norm of a GCD Related Matrix. Journal of Inequalities and Applications, 25020 (1), 1-6.

Hong, S., 1998. Bounds for Determinants of Matrices Associated with Classes of Arıthmetical Functions. Linear Algebra and Appl.,281 (1),311-322.

Jones, G.A. and Jones, J.M., 1998. Elementary Number Theory Springer Press, ISBN 3-5407-6197-7.14.

Li,Z., 1990. The Determinants of GCD Matrices. Linear Algebra and Appl.,134 (1), 137-143.

Nallı, A. and Taşçı, D., 2004.GCD Reciprocal LCM Matrices On GCD Closed Sets. Mathematical and Computational Applications, 9 (1), 101-106.

Özer, S., 2004. GCD,LCM ve HİLBERT Matrislerinin normları için sınırlar.S.Ü.Fen Bilimleri Enst. Yüksek Lisans Tezi, Konya.

Sever, M. And Gültekin, İ., 2012. Fibonacci-GCD Matrisleri.Antalya Algebra Days 2012,İzmir.

Smith, H. J., 1876. On the value of a certain arithmetical determinant. Proc. Londan Math.Soc., 7 (1),208-212.

Solak,S. and Türkmen, R. and Bozkurt, D., 2003. On GCD,LCM and Hilbert Matrices and Their Applications. Applied Mathematics and Cmputation, 146 (1),595-600.

Tasçı, D., 1994. Relations Between Norms and Determinants.Selçuk Üniversitesi Fen Dergisi, 12 (1), Konya,Türkiye.

Yılmaz, N.,2007. FM ve Reciprocal FM Matrislerinin Normları İçin Sınırlar.Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi,Konya.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Gaziantep'te doğmuştur. Öğrenimine 1991 yılında Barbaros Hayrettin Paşa İlköğretim Okulu'nda başlamış ve 1996-1999 yıllarında Ömer Özmimar İmam Hatip Lisesi'nde orta öğrenimine devam etmiştir. 2003 yılında Atatürk Lisesi'nde ortaöğretim kademesini tamamlamıştır. 2004 te Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamıştır. 2008 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başlamıştır. 2012 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yatay geçiş yapmıştır Hâlen eğitimine Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans yaparak devam etmektedir.