T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK RADİKALLER

Hazırlayan
Betül ERDAL

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Yüksek Lisans Tezi

Aralık 2015
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ESNEK RADİKALLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Betül ERDAL

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Aralık 2015
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Betül ERDAL

YÖNERGEYE UYGUNLUK

Esnek Radikaller adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Betül ERDAL

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN danışmanlığında **Betül ERDAL** tarafından hazırlanan "**Esnek Radikaller**" adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

30/12/ 2015

JÜRİ:

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN ....

Üye : Doç. Dr. Hacı AKTAŞ ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Orhan SÖNMEZ ....

ONAY:
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 12/01/2016 tarih ve 2016/02-3.1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

12/01/2016

Prof. Dr. Kâzım KEŞLİOĞLU

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana verdiği, çalışmalarım boyunca bilgisini, emeğini ve desteğini esirgemediği, zor zamanlarımda bana moral ve motivasyon verdiği, sıkıntılarımı dinleyip bana her daim anlayış gösterdiği için değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kıymetli hocamız Akın Osman ATAGÜN' e, bize zamanını ayırıp, sağladığı destek için ayrıca çok teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, çalışmalarım boyunca sıkıntılarımı çeken ve paylaşan, her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Betül ERDAL

Aralık 2015, KAYSERİ

ESNEK RADİKALLER

Betül ERDAL

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Aralık 2015
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Emin AYGÜN

ÖZET

Cebirsel yapılar, Molodtsov [1] tarafından ortaya atılan esnek küme teorisine iki farklı şekilde uygulandı. Bunlardan birincisi esnek gruplar, esnek halkalar, esnek cisimler, esnek vektör uzaylar, esnek modüller gibi esnek cebir yapılardır. İkincisi ise bir grubun esnek alt grubu, bir halkanın esnek alt halkası, bir halkanın esnek ideali ve bir modülün esnek alt modülü gibi cebirsel yapıların esnek cebirsel alt yapılarıdır. Bu tezde, bir halkanın esnek ideali ve bir esnek halkanın esnek ideali şeklinde ki iki farklı tanım kullanılarak bir idealin esnek radikali tanımlanmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümde esnek kümeler, esnek cebirsel yapılar ve radikaller hakkında temel tanım, özellik ve teoremlerin literatür çalışması yer almaktadır. Tezin üçüncü bölümü ise orijinal bir çalışmadan oluşmaktadır ve esnek küme teorisinde yeni bir yapı olan bir idealin radikali tanımlanarak örnekler verilmiştir. Tezin son bölümünde ise yapılan çalışmaların sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Radikal, nil radikal, esnek radikal, esnek ideal

SOFT RADICALS

Betül ERDAL

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, December 2015
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Emin AYGUN

ABSTRACT

The algebraic structures have been transferred to soft set theory which was introduced by Molodtsov [1] as a new concept in two different types: The first one is the soft algebraic structures such as soft groups, soft rings, soft fields, soft vector spaces, soft near-rings, soft modules etc. The second one is the soft substructures of algebraic structures such as soft subgroup of a group, soft subring of a ring, soft ideal of a ring, soft submodule of a module etc. In this thesis, we define a radical of an ideal in soft set theory by using different soft ideal concepts: a soft ideal of a ring and a soft ideal of a soft ring.

This thesis consists of four chapters. In the first and the second chapter, the literature study of basic definitions, properties and theorems about soft set theory, soft algebraic structures and radicals has been given. The third chapter of the thesis, consists of an original study, a radical of an ideal which is a new structure in soft set theory has been defined and given with several examples. The results of this study have been given in the last chapter.

Keywords: Radical, Nil radical, Soft radical, Soft ideal

İÇİNDEKİLER

ESNEK RADİKALLER

KISALTMA VE SİMGELER

G	: Grup
R	: Halka
I	: İdeal
N	: Yakın halka
$\widetilde{\subseteq}$	: Esnek alt küme
$<$	: Alt grup
$\widetilde{\trianglelefteq}_l$	: Esnek sol ideal
$\widetilde{\trianglelefteq}_r$	: Esnek sağ ideal
$\widetilde{\trianglelefteq}$	: Esnek ideal
$\widetilde{<}$	: Esnek alt grup
$\sqrt{I}$	: Bir idealin radikali
$J(R)$	: Jacopson radikali
$N(R)$	: Nil (asal) radikal
$J_l(R)$	: Sol Jacopson radikali
$J_r(R)$	: Sağ Jacopson radikali
$\sqrt{F_I}$	: Bir idealin esnek radikali
$\sqrt{(G,I)}$	: Bir esnek idealin radikali

GİRİŞ

Esnek küme teorisi, 1999 yılında Molodtsov [1] tarafından belirsizliklerle başa çıkmak için ortaya atılmış matematiksel bir araçtır. Molodtsov [1], bu teoriyi kullanarak sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, işlem araştırmaları, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, olasılık, ölçüm teorisi gibi birçok alanda başarılı çalışmalar yapmıştır. Ayrıca, yazar yaklaşık nesne kavramını formüle etmiş ve esnek küme teorisi isimli bir kitap yayımlamıştır.

Esnek küme teorisi ortaya çıktığı zamandan bugüne dek ilgi çekici bir teori olmuş ve birçok alanda uygulanmıştır. Maji ve ark. [2,5], Pawlak'ın [19] yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını sunmuş ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımlamıştır. Xiao ve ark. [32] esnek küme temelli iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine bir çalışma yapmıştır. Yang ve ark. [36], esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi ve indüksiyon başlıklı bir çalışma yapmıştır. Chen ve ark. [3] ile Kong ve ark. [4] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yapmıştır.

Belirsizliklerle başa çıkmak için ortaya atılan önemli teorilerden birisi de Zadeh'in [39] bulanık kümeler teorisidir. Bu teori esnek küme teorisiyle beraber birçok çalışmada yer almıştır. Maji ve ark. [34] , bulanık esnek kümeleri tanımlamıştır. Roy ve Maji [35] bir karar verme probleminde bulanık esnek kümelerin bir uygulaması üzerinde bazı sonuçlar ortaya koymuştur. Yang ve ark. [41] bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlamış, bulanık esnek kümeler yoluyla bir karar verme problemini analiz etmiştir. Enginoğlu [42], esnek küme işlemlerinin daha işlevsel olan yeni tanımlarını vermiş, esnek çarpımı tanımlamış, geliştirilen esnek yaklaşım metotları sunmuştur ve bu metotların karar verme problemleri üzerine iki uygulamasını vermiştir.

Esnek kümelerin cebirsel yapılar üzerine uygulanması bazı yazarlar tarafından çalışılmaktadır. Feng ve ark. [25] esnek küme teorisini kullanarak esnek halkalar çalışmasını sunmuş ve ilgili bazı özeliklerini incelemiştir. Sun ve ark. [33] esnek modüllerin tanımını vermiş, ayrıca modülleri ve Molodtsov ‘un esnek küme tanımını kullanarak bazı temel özelikleri inşa etmiştir. Ali ve ark. [6] esnek kümeler üzerinde bazı yeni işlemler tanımlayarak teorik olarak esnek kümeler üzerinde yapılan çalışmaları genişletmişlerdir. Aktaş ve Çağman [10] esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırmışlar, ayrıca pek çok yeni çalışmanın önünü açan “Esnek Grup Teorisi”ni literatüre kazandırmışlardır. Esnek grup yapısı üzerinde esnek alt grup, normal esnek alt grup, esnek homomorfizm gibi cebirsel yapılar tanımlamışlardır. Feng ve ark. [25] esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halka kavramını tanıtmış, esnek yakın halka üzerinde esnek alt yarı halka, esnek ideal, idealistik esnek yakın halka ve esnek yakın halka homorfizmi gibi cebirsel yapılar inşa etmişlerdir.

Sezgin ve Atagün [7] esnek küme üzerinde bazı işlemler tanımlamışlar ve birbirleri arasındaki bağlantıları göstermişlerdir. Ayrıca Sezgin ve Atagün [11], [10] daki bazı problemli durumları doğrulamışlar ve normal esnek grup kavramlarını oluşturmuşlardır. Atagün ve Sezgin [9] bir halkanın esnek alt halkası, bir halkanın esnek ideali, bir cismin esnek alt cismi, bir sol modülün esnek alt modülü gibi cebirsel yapıların tanımlarını yapmışlardır. Acar, Koyuncu ve Tanay [13] bir halkanın alt halkalarını parametrize eden esnek halka notasyonları üzerinde çalışmışlar, esnek halka ve esnek halkanın esnek ideali gibi cebirsel yapıları da tanımlamışlardır.

Jacobson radikali ilk defa 1945 yılında Nathan Jacobson [37] tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra radikal konusu cebir yapıları arasında önemli bir yer almış ve birçok çalışmaya konu olmuştur. Bizim çalışmamızda kullandığımız bir idealin radikali konusu M. Atiyah, I.G. Macdonald’ ın Introduction to Commutative Algebra isimli kitabında yer almaktadır [14]. Ayrıca çeşitli halka ve modül yapılarının da radikalleri mevcut olup, bu yapılar üzerinde de yapılan çalışmalar devam etmektedir.

Bu tez çalışmasında, Atagün ve Sezgin [9]'in bir halkanın esnek ideali tanımı ve Acar, Koyuncu ve Tanay [13]'ın bir esnek halkanın esnek ideal tanımı kullanılarak, esnek kümeler üzerinde bir idealin radikali tanımı yapılmış, örneklendirilmiş ve ulaşılan sonuçlar gösterilmiştir.

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde verilen yeni tanımların daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla esnek küme teorisiyle ilgili temel kavramlar, Molodtsov [1], Maji ve ark. [5], Feng ve ark. [25] ile Ali ve ark. [6] çalışmalarından derlenerek verilmiştir.

Temel Kavramlar

Tanım 1.1. U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $P(U)$, U 'nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olarak gösterilsin.

Bir (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde esnek küme olarak adlandırılır. Burada F,

$$F: A \longrightarrow P(U)$$

ile verilen bir dönüşümdür. Diğer bir ifadeyle, U üzerinde bir esnek küme,

U evreninin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$,

(F,A) esnek kümesinin ε $-$yaklaşımlı elemanlarının cümlesi olarak göz önüne alınabilir [1].

Örnek 1.2. Kabul edelim ki U, göz önüne alınan şartlar altındaki arabaların kümesi ve E, parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da cümledir.

E={güzel, hızlı, konforlu, tasarruflu, ucuz }.

Bu durumda tanımlayacağımız bir esnek küme hızlı arabalar, ucuz arabalar ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir. (F,E) esnek kümesi, Mrs. Erdal' in satın alacağı arabaların çekiciliğini belirtiyor. Kabul edelim ki, $U = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$ ile verilen U evreninde 7 araba olsun ve e_1 *"güzel"* parametresini, e_2 *"hızlı"* parametresini, e_3 *"konforlu"* parametresini, e_4 *"tasarruflu"* parametresini, e_5 *"ucuz"* parametresini göstermek üzere, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde verilsin. Kabul edelim ki, $F(e_1) = \{ h_2, h_5, h_7\}$, $F(e_2) = \{h_6, h_7\}$, $F(e_3) = \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$, $F(e_4) = \{h_1\}$ ve $F(e_5) = \{h_2, h_4, h_5, h_7\}$ olsun. *(F,E)* esnek kümesi U kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i), i = 1,2,3,4,5\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir koleksiyonunu verir.

Göz önüne alınan F dönüşümü "arabalar (.)" şeklindedir. Burada nokta (.), bir $\varepsilon \in E$ parametresi ile doldurulur. Bu yüzden $F(e_1)$ fonksiyonel değeri $\{ h_2, h_5, h_7\}$ kümesi olan "arabalar güzel " anlamına gelir.

Bu nedenle, biz *(F,E)* esnek kümesini aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz:

(F,E)= { *güzel arabalar* = $\{ h_2, h_5, h_7\}$, *hızlı arabalar* = $\{h_6, h_7\}$,

konforlu arabalar = $\{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$, *tasarruflu arabalar* = $\{h_1\}$,

ucuz arabalar = $\{h_2, h_4, h_5, h_7\}$ }.

Burada her bir yaklaşımın iki kısmı vardır:

i) Bir tahmini p ; ve

ii) Bir v yaklaşık değer kümesi (veya basitçe v değer kümesi)

Örneğin güzel arabalar = $\{ h_2, h_5, h_7\}$ yaklaşımı için aşağıdaki özeliklere sahibiz.

i) Tahmini isim yaklaşık arabalardır; ve

ii) Yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi $\{ \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_5, \mathrm{h}_7\}$' dir.

Tanım 1.3. U üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için, eğer

i) $A \subseteq B$ ve

ii) $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar olmak üzere $F(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$

ise (F,A), (G,B)'nin esnek alt kümesidir ve $(F,A) \tilde{\subset} (G,B)$ ile gösterilir.

Eğer (G,B), (F,A)' nın esnek alt kümesi ise (F,A)'ya (G,B)'nin esnek üst kümesidir denir ve $(F,A) \tilde{\supseteq} (G,B)$ ile gösterilir [5].

Örnek 1.4. $U=\{h_{1,}, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$ arabaların cümlesi üzerinde, parametre cümleleri

$A=\{e_2, e_3, e_7\}$, $B=\{e_7\}$ olan ve *(F,A),* $F(e_2)=\{h_2, h_5\}$, $F(e_3)=\{h_4, h_6\}$,

$F(e_7)= \{h_5, h_6, h_7\}$ ile *(G,B),* $G(e_7)=\{ h_6, h_7\}$ ile tanımlanan iki esnek küme olsun. Buna göre $B \subseteq A$ ve $e_7 \in B$ için $G(e_7) \subseteq F(e_7)$ olduğundan $(F,A) \tilde{\supseteq} (G,B)$ dir.

Tanım 1.5. (F,A), U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)=U$ oluyorsa (F,A) esnek kümesi *mutlak esnek küme* olarak isimlendirilir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir [5].

Tanım 1.6. (F,A), U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)=\emptyset$ (boş küme) ise (F,A) esnek kümesi *boş esnek küme* olarak isimlendirilir ve Φ ile gösterilir [5].

Tanım 1.7. (F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. $(F,A) \wedge (G,B)$ ile gösterilen "$(F,A)\ VE\ (G,B)$" işlemi $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta), \forall (\alpha,\beta) \in A \times B$ şeklindedir [5].

Örnek 1.8. $U=\{h_{1,}, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ cümlesi üzerinde, parametre cümleleri

$A=\{e_1, e_2, e_3\}$, $B=\{e_5\}$ olan ve *(F,A),* $F(e_1)=\{h_2, h_5, h_4\}$, $F(e_2)=\{h_4\}$,

$F(e_3)$= $\{h_1, h_6\}$ ile *(G,B)*, $G(e_5)$=$\{h_6, h_5\}$ ile tanımlanan iki esnek küme olsun. O halde

$A \times B = \{(e_1, e_5), (e_2, e_5), (e_3, e_5)\}$ olmak üzere $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ ve $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta), \forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ olduğundan,

$H(e_1, e_5) = F(e_1) \cap G(e_5) = \{h_5\}$, $H(e_2, e_5) = F(e_2) \cap G(e_5) = \emptyset$

$H(e_3, e_5) = F(e_3) \cap G(e_5) = \{h_6\}$ elde edilir ve

$(H, A \times B) = \{((e_1, e_5), \{h_5\}), ((e_2, e_5), \emptyset), ((e_3, e_5), \{h_6\})\}$ bulunur.

Tanım 1.9. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. $(F, A) \vee (G, B)$ ile gösterilen "$(F, A)\ VEYA\ (G, B)$" işlemi $(F, A) \vee (G, B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta), \forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ şeklindedir [5].

Örnek 1.10. Örnek 1.8. den $A \times B = \{(e_1, e_5), (e_2, e_5), (e_3, e_5)\}$ olmak üzere $(F, A) \vee (G, B) = (H, A \times B)$ ve $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta), \forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ olduğundan,

$H(e_1, e_5) = F(e_1) \cup G(e_5) = \{h_2, h_5, h_4, h_6\}$,

$H(e_2, e_5) = F(e_2) \cup G(e_5) = \{h_6, h_5, h_4\}$

$H(e_3, e_5) = F(e_3) \cup G(e_5) = \{h_6, h_5, h_1\}$ elde edilir ve

$(H, A \times B) = \{((e_1, e_5), \{h_2, h_5, h_4, h_6\}), ((e_2, e_5), \{h_6, h_5, h_4\}), ((e_3, e_5), \{h_6, h_5, h_1\})\}$ bulunur.

Tanım 1.11. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu *esnek kümelerin birleşimi* (H, C)'dir. Burada, $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & eğer \quad e \in A - B, \\ G(e) & eğer \quad e \in B - A, \\ F(e) \cup G(e) & eğer \quad e \in A \cap B. \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ şeklinde yazılır. [5].

Örnek 1.12. U={$h_{1,}, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$} cümlesi üzerinde

A={e_1, e_2}, B={e_2, e_3, e_4, e_5} parametre cümleleri verilsin.

(F,A), F(e_1)={h_2, h_8}, *F(e_2)*={h_4, h_6, h_7} ile *(G,B), G(e_2)*= {h_5, h_6, h_7} *G(e_3)*={h_7} *G(e_4)*= {h_1, h_2, h_3} ve *G(e_5)*= {h_3, h_6, h_7} ile tanımlanan iki esnek küme olsun.

$\forall e \in C$ için $C = A \cup B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dir. $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_8\}$, $H(e_2) = F(e_2) \cup G(e_2) = \{h_4, h_5, h_6, h_7\}$, $H(e_3) = G(e_3) = \{h_7\}$, $H(e_4)$=*G(e_4)*={h_1, h_2, h_3} ve $H(e_5)$=*G(e_5)*={h_3, h_6, h_7} bulunacağından (F, A) ve (G, B) kümelerinin esnek birleşimi;

$(F, A)\,\tilde{\cup}\,(G, B) = (H, C)$ =$(H, A \cup B)$= {(e_1,{h_2, h_8}),(e_2,= {h_4, h_5, h_6, h_7}), (e_3, {h_7}), (e_4, {h_1, h_2, h_3}), (e_5, {h_3, h_6, h_7})} bulunur.

Tanım 1.13. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu *esnek kümelerin kesişimi* (H, C)'dir. Burada $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için $H(e) = F(e)$ veya $G(e)$, (her ikisi de aynı küme olduğunda) ile tanımlanır ve $(F, A)\,\tilde{\cap}\,(G, B) = (H, C)$ şeklinde yazılır [5].

Örnek 1.14. Örnek 1.12. deki esnek kümeleri göz önüne alalım.

$\forall e \in C$ için $C = A \cap B = \{e_2\}$ dir. *F(e_2)*={h_4, h_6, h_7} ve *G(e_2)*={h_4, h_6, h_7} şeklinde tanımlı olursa;

(F, A) ve (G, B) kümelerinin esnek kesişimi;

$(F, A)\,\tilde{\cap}\,(G, B) = (H, C)$ =$(H, A \cap B)$={(e_2, {h_4, h_6, h_7})} dir.

Yukarıda verilen kesişim tanımından farklı olarak Feng ve ark. [25] aşağıdaki şekilde ikili kesişim tanımlamışlardır:

Tanım 1.15. (F, A) ve (G, B), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek *kümelerin ikili kesişimi* (H, C)'dir. Burada, $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $H : C \to P(U)$

dönüşümü $H(x)=F(x)\cap G(x)$ şeklinde tanımlıdır ve $(F,A)\tilde{\sqcap}(G,B)=(H,C)$ şeklinde yazılır [25].

Bir genelleme olması açısından yine Feng ve ark. [25] indisler ailesi üzerinde aşağıdaki tanımları vermişlerdir.

Tanım 1.16. $(F_i,A_i)_{i\in I}$, U üzerinde boştan farklı esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu *esnek kümelerin birleşimi,* $B=\bigcup_{i\in I}A_i$, $I(x)=\{i\in I, x\in A_i\}$, $\forall x\in B$ için $G(x)=\bigcup_{i\in I(x)}F_i(x)$ olmak üzere (G,B) olarak tanımlanır ve $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)=(G,B)$ şeklinde yazılır [25].

Tanım 1.17. $(F_i,A_i)_{i\in I}$, U üzerinde boştan farklı esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu esnek kümelerin $\wedge_{i\in I}(F_i,A_i)$ VE-esnek kümesi $B=\prod_{i\in I}A_i$ ve $\forall x=(x_i)_{i\in I}\in B$ için $H(x)=\bigcap_{i\in I(x)}F_i(x)$ olmak üzere (H,B) olarak tanımlanır ve $\wedge_{i\in I}(F_i,A_i)=(H,B)$ şeklinde yazılır.

Burada hemen şuna dikkat çekelim: Eğer ki $\forall i\in I$ için $A_i=A$ ve $F_i=F$ ise $\wedge_{i\in I}(F_i,A_i)$, $\wedge_{i\in I}(F,A)$ olarak gösterilir. Ayrıca $\prod_{i\in I}A_i=\prod_{i\in I}A$, A^I 'nın direk kuvveti anlamına gelir [25].

Bu tanımlara ek olarak Ali ve ark. [6] aşağıdaki işlemleri tanımlamışlardır.

Tanım 1.18. (F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin *genişletilmiş kesişimi* (H,C) 'dir. Burada, $C=A\cup B$ ve $\forall e\in C$ için,

$$H(e)=\begin{cases} F(e) & eğer \quad e\in A-B, \\ G(e) & eğer \quad e\in B-A, \\ F(e)\cap G(e) & eğer \quad e\in A\cap B. \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F,A)\sqcap_{\varepsilon}(G,B)=(H,C)$ şeklinde yazılır [6].

Örnek 1.19. Örnek 1.12. deki esnek kümeleri göz önüne alalım.

$\forall e \in C$ için $C = A \cup B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dir. $H(e_1) = F(e_1) = \{h_2, h_8\}$, $H(e_2) = F(e_2) \cap G(e_2) = \{h_6, h_7\}$, $H(e_3) = G(e_3) = \{h_7\}$, $H(e_4) = G(e_4) = \{h_1, h_2, h_3\}$ ve

$H(e_5) = G(e_5) = \{h_3, h_6, h_7\}$ bulunacağından

(F, A) ve (G, B) kümelerinin genişletilmiş kesişimi;

$(F,A) \prod_{\varepsilon} (G,B) = (H,C) = \{(e_1, \{h_2, h_8\}), (e_2, \{h_6, h_7\}), (e_3, \{h_7\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3\}),$

$(e_5, \{h_3, h_6, h_7\})\}$ olarak bulunur.

Tanım 1.20. (F, A) ve (G, B), U üzerinde $A \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F, A) \lozenge (G, B)$ ile gösterilen *kısıtlanmış kesişimi* $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olmak üzere $(F, A) \lozenge (G, B) = (H, C)$ olarak tanımlanır [6].

Örnek 1.21. Örnek 1.12. deki esnek kümeleri göz önüne alalım.

$A \cap B \neq \emptyset$ ve $C = A \cap B = \{e_2\}$ dir. $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olmak üzere; $H(e_2) = F(e_2) \cap G(e_2) = \{h_6, h_7\}$ dir ve (F, A) ve (G, B) kümelerinin kısıtlanmış kesişimi $(F, A) \lozenge (G, B) = (H, C) = \{(e_2, \{h_6, h_7\})\}$ olarak bulunur.

Tanım 1.22. (F, A) ve (G, B), U üzerinde $A \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin $(F,A) \cup_{\Re} (G,B)$ ile gösterilen *kısıtlanmış birleşimi*

$C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cup G(x)$ olmak üzere $(F,A) \cup_{\Re} (G,B) = (H,C)$ olarak tanımlanır [6].

Örnek 1.23. $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$ cümlesi üzerinde

$A = \{e_1, e_4, e_6\}$, $B = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ parametre cümleleri verilsin.

(F,A), $F(e_1)=\{h_2\}$, $F(e_4) = \{h_2, h_4\}$ ve $F(e_6)=\{h_1, h_3, h_5\}$ ile

(G,B), $G(e_2)= \{h_5, h_6, h_7\}$ $G(e_3)=\{h_7\}$ $G(e_4)= \{h_1\}$, $G(e_5)= \{h_3, h_6, h_7\}$ ve $G(e_6)=\{h_1, h_2, h_6, h_7\}$ ile tanımlanan iki esnek küme olsun.

$C = A \cap B =\{e_4, e_6\}$ ve $\forall x \in C$ için $H(e_4) = \{ h_1, h_2, h_4\}$ ve

$H(e_6) =\{h_{1,}, h_2, h_3, h_5, h_6, h_7\}$ dir.

O halde, (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin kısıtlanmış birleşimi;

$(F,A) \cup_{\Re} (G,B) = (H,C) =\{(e_4, \{ h_1, h_2, h_4\}), (e_6, \{h_{1,}, h_2, h_3, h_5, h_6, h_7\})\}$ bulunur.

2. BÖLÜM

ESNEK CEBİRSEL YAPILAR VE RADİKALLER

Bu bölümde, tezin diğer kısımlarında sıkça kullandığımız cebirsel yapılar verilerek çalışmamıza ışık tutmak amaçlanmaktadır. Çalışmamızın temelini oluşturan esnek cebirsel yapılar ve bu yapılar üzerine yapılan çalışmalardan alının bilgiler derlenerek sunulmuştur. Esnek cebirsel yapılar üzerinde yapılan iki farklı ideal tanımı için Acar ve Koyuncu [13] ile Atagün ve Sezgin'in [9] makaleleri temel kaynak olarak kullanılmıştır. Ayrıca üzerinde çalıştığımız cebirsel yapı olan bir idealin radikali Atiyah ve Macdonald'ın [14] Introduction to Commutative Algebra kitabı temel alınarak verilmiştir.

2.1. Esnek Grup ve Cebirsel Alt Yapıları

Burada esnek grup ve cebirsel alt yapıları ile ilgili tanımlar Aktaş ve Çağman [10] ile Atagün Sezgin'in [9] makalelerinden derlenmiş ve esnek alt grup yapısı için de iki farklı tanım verilmiştir.

Tanım 2.1.1. *G* bir grup, *A* boştan farklı bir küme olmak üzere *(F,A)*, *G* üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x \in A$ için *F(x)*, *G* nin bir alt grubu ise *(F,A)*'ya *G* üzerinde bir *esnek grup* denir [10].

Örnek 2.1.2. Kabul edelim ki $G=A=S_3=\{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$ olsun.

$F(x) = \{y \in G: xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in \mathbb{N}\}$

şeklinde bir küme değerli fonksiyon tanımlansın. Bu durumda *(F,A)* esnek grubu *G*'nin alt gruplarının bir koleksiyonunu veren $\{F(x): x \in A\}$ alt kümelerinin paremetrelenmiş bir ailesidir. Yani *(F,A)* esnek kümesini F dönüşümü ile tanımlanmış aşağıdaki G'nin alt gruplarının bir koleksiyonu olarak düşünebilir:

$F(e)=\{e\}$, $F(12)=\{e,(12)\}$, $F(13)=\{e,(13)\}$, $F(23)=\{e,(23)\}$ ve

$F(123)=F(132)=\{e,(123),(132)\}$

$\forall x \in A$ için $F(x)$' ler G grubunun alt grubu olduğu için *(F,A)*, G üzerinde bir esnek gruptur.

Tanım 2.1.3. G bir grup, (F,A) ve (H,B) , G üzerinde iki esnek grup olsun.

i) $B \subset A$,

ii) $\forall x \in B$ için $H(x) < F(x)$

şartları sağlanıyorsa, (H,B) esnek kümesine (F,A)' nın *esnek alt grubu* denir ve $(H,B) \lesssim (F,A)$ ile gösterilir [10].

Örnek 2.1.4. Örnek 2.1.2' deki (F,A), $G=S_3$ grubu üzerinde bir esnek gruptur.

(H,B), G üzerinde bir esnek küme $B=A_3$ ve $H: B \to P(G)$ fonksiyonu $\forall x \in B$ için $H(x)=\{y \in A_3 : xRy \Leftrightarrow y \in \langle x \rangle\}$

şeklinde tanımlanıyor. Buradan (H,B), G üzerinde bir esnek gruptur.

Ayrıca $\forall x \in A_3=\{(1),(123),(132)\}$ için $A_3 < S_3$ ve $H(x) < F(x)$ olduğundan $(H,B) \lesssim (F,A)$ dır.

Tanım 2.1.5. (F,A), G grubu üzerinde bir esnek küme ve (H,B), (F,A)'nın bir esnek alt grubu olsun. Eğer $\forall x \in B$ için $H(x)$, $F(x)$'in bir normal alt grubu ise (H,B), (F,A)'nın *normal esnek alt grubudur* ve $(H,B) \mathrel{\tilde{\trianglelefteq}} (F,A)$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.1.6. S, G grubunun boştan farklı bir alt grubu ve (F,S), G üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x,y \in S$ için, $F(x-y) \supseteq F(x) \cap F(y)$ şartı sağlanıyorsa, (F,S)'ye G'nin bir *esnek alt grubu* denir [9].

Örnek 2.1.7. $G = (\mathbb{Z}_3, +)$ grubu göz önüne alınsın. $S = \mathbb{Z}_3 < G$ ve $F: S \to P(\mathbb{Z}_3)$ küme değerli fonksiyonu $\forall x \in S$ için $F(0) = \mathbb{Z}_3$ ve $F(1) = F(2) = \{1,2\}$ şeklinde veriliyor. Buradan (F, S) , G'nin esnek alt grubudur.

Feng ve ark. [25] esnek grup yapısı tanımlanırken bazı durumlarda yanlış anlaşılmalara sebep olabilecek bir eksikliğin olduğunu fark etmiş esnek yarıhalka tanımını verirken bunu da göz önünde bulundurarak bir esnek kümenin desteği anlamına gelen "Supp" kavramını kullanmışlardır. Aslında "Supp" kavramı hem bulanık kümeler hem formal kuvvet serileri için literatürde kullanılmaktadır. (F, A) esnek kümesi için

$$Supp(F, A) = \{x \in A : F(x) \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Esnek Halka ve Cebirsel Alt Yapıları

Bu kısımda esnek halka ve cebirsel alt yapıları ile ilgili tanımlar Acar ve Koyuncu [13] ile Atagün Sezgin'in [9] makalelerinden derlenmiş, esnek alt halka ve esnek ideal yapısı için de iki farklı tanım verilmiştir.

Tanım 2.2.1. R bir halka ve (F, A), R üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. $\forall x \in A$ için $F(x)$, R' nın alt halkası ise (F, A) esnek kümesine R üzerinde *esnek halka* denir [13].

Örnek 2.2.2. R=A=$\mathbb{Z}_6$ halkası göz önüne alınsın.

$F: A \to P(\mathbb{Z}_6)$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in A$ için, $F(x) = \{y \in R : xy = 0\}$ olmak üzere $F(0) = \mathbb{Z}_6$, $F(4) = F(2) = \{0,3\}$, $F(3) = \{0,2,4\}$ ve $F(5) = \{0\}$ dır. Biliyoruz ki bu kümeler $\mathbb{Z}_6$ halkasının alt halkalarıdır. O halde (F, A), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir esnek halkadır.

Örnek 2.2.3. $(\mathbb{Z}_5, +, .)$ halkasını göz önüne alalım.

(F, A), $\mathbb{Z}_5$ üzerinde bir esnek küme $A = \{0,1,2\}$ ve $F: A \to P(\mathbb{Z}_5)$ fonksiyonu $\forall x \in A$ için,

$$F(x) = \{y \in \mathbb{Z}_5 : xRy \Leftrightarrow xy = 0\}$$

şeklinde tanımlanıyor. Buradan $F(0) = \mathbb{Z}_5$, $F(1) = F(2) = \{0\}$ dır. Böylece;

(F, A), $\mathbb{Z}_5$ üzerinde bir esnek halkadır.

Tanım 2.2.3. R bir halka, (F, A) ve (H, B) , R üzerinde iki esnek halka olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (H, B) esnek kümesine (F, A)' nın *esnek alt halkası* denir.

i) $B \subset A$,

ii) $\forall x \in Supp(H, B)$ için $H(x), F(x)$ 'in bir alt halkasıdır [13].

Örnek 2.2.4. $R = A = 2\mathbb{Z}$ ve $B = 6\mathbb{Z} \subset A$ olsun. $F(x) = \{nx : n \in \mathbb{Z}\}$ ve

$G(x) = \{7nx : n \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlı $F\colon A \to P(R)$ ve $G\colon B \to P(R)$ küme değerli fonksiyonları dikkate alınsın. Kolayca görülür ki; $\forall x \in B$ için

$G(x) = 7x\mathbb{Z}, F(x) = x\mathbb{Z}$ in alt halkasıdır. Böylece (G, B) , (F, A) nın esnek alt halkasıdır.

Tanım 2.2.5. S, R 'nin alt halkası ve (F, S), R üzerinde bir esnek küme olsun.

$\forall x, y \in S$ için,

i) $F(x-y) \supseteq F(x) \cap F(y)$ ve

ii) $F(xy) \supseteq F(x) \cap F(y)$

şartları sağlanıyorsa, $(F, S)'$ ye R'nin bir esnek alt halkası denir ve $(F, S) \precsim R$ ile gösterilir [9].

Örnek 2.2.6. Matrislerin toplamı ve çarpımı işlemleri altında $R = M_2(\mathbb{Z}_4)$ bir halkadır.

$B = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\}$, R' nin alt halkasıdır. $H: B \to P(R)$ küme değerli fonksiyonu

$H\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\}$ ve $H\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\}$

şeklinde tanımlanıyor. Böylece $(H, B) \,\tilde{<}\, R$ dir.

Şimdi esnek küme teorisi üzerindeki ideal tanımları verilsin.

Tanım 2.2.7. *(F,A),* R halkası üzerinde bir esnek küme olsun. A boştan farklı bir küme olmak üzere;

i) $I \subseteq A$,

ii) Her x∈ $Supp(\gamma, I)$ için $\gamma(x)$, *F(x)* in bir idealidir,

şartları sağlanıyorsa (γ, I), *(F,A)*'nın *esnek idealidir* ve $(\gamma, I) \,\tilde{\trianglelefteq}\,$ *(F,A)* ile gösterilir [13].

Örnek 2.2.8. $R = A = \mathbb{Z}_4$ halkası ve bu halkanın $I = \{0,2\}$ ideali göz önüne alınsın.

$F: A \longrightarrow P(R)$ fonksiyonu $F(x) = \{y \in R\colon\ x.y \in \{0,2\}\}$

şeklinde tanımlanıyor.

Buradan; *F(0)=R, F(1)={0}, F(2)=R* ve *F(3)={0,2}* bulunur.

Bu kümeler R nin alt halkaları olduğundan *(F,A),* R halkası üzerinde esnek halkadır. Ayrıca ;

$\gamma: I \longrightarrow P(R)$ tanımlı olmak üzere $\gamma(x) = \{y \in R\colon x.y = 0\}$

şeklinde veriliyor.

$\gamma(0) = R \lhd R,\ \gamma(1) = \{0\} \lhd F(1) = \{0\}$ ve $\gamma(2) = \{0,2\} \lhd F(2) = R$ olduğundan (γ, I), *(F,A)*'nın esnek idealidir.

Tanım 2.2.9. I, R halkasının bir ideali ve $(F, I), R$ üzerinde bir esnek küme olsun.

$\forall x, y \in I$ ve $r \in R$ için,

i) $F(x-y) \supseteq F(x) \cap F(y)$ ve

ii) $F(rx) \supseteq F(x)$

iii) $F(xr) \supseteq F(x)$

şartları sağlanıyorsa, $(F, I)'$ya R halkasının bir *esnek ideali* denir ve $(F, I) \tilde{\trianglelefteq} R$ ile gösterilir [9].

Örnek 2.2.10. $R = (\mathbb{Z}_{12}, +, .)$ halkası ele alınsın. $I_1 = \{0,6\} \lhd R$ ve (F, I_1), R üzerinde esnek küme olmak üzere $F: I_1 \longrightarrow P(R)$ küme değerli fonksiyonu

$F(0) = \mathbb{Z}_{12}$, $F(6) = \{1,7\}$ şeklinde tanımlanıyor. Buradan $(F, I_1) \tilde{\trianglelefteq} R$ dir.

$I_2 = \{0,4,8\} \lhd R$ ve (G, I_2), R üzerinde esnek küme olmak üzere $G: I_2 \longrightarrow P(R)$ küme değerli fonksiyonu $G(0) = \mathbb{Z}_{12}$, $G(4) = G(8) = \{3,9\}$ şeklinde tanımlanıyor. Buradan

$(G, I_2) \tilde{\trianglelefteq} R$ dir.

Fakat (H, I_2) esnek kümesini $H: I_2 \longrightarrow P(R)$ olmak üzere $H(0) = \mathbb{Z}_{12}$, $H(4) = \{1,3\}$, $H(8) = \{1,2\}$ şeklinde tanımlanırsa;

$H(5.4) = H(8) = \{1,2\} \not\supseteq H(4) = \{1,3\}$ olduğundan (H, I_2), R nin esnek ideali değildir.

2.3. Esnek Yakın Halka ve Cebirsel Alt Yapıları

Tanım 2.3.1. *(F,A),* N yakın-halkası üzerinde boştan faklı bir esnek küme olsun. $\forall x \in Supp(F, A)$ için, $F(x)$, N yakın-halkasının alt yakın-halkası oluyorsa, (F, A) 'ya N üzerinde bir *esnek yakın-halka* denir [26].

Örnek 2.3.2. $(\mathbb{Z}_6, +)$ toplamsal grubu ele alınsın. Aşağıdaki şekilde verilen çarpma işlemi tablosuna göre $(\mathbb{Z}_6, +, .)$ bir (sağ) yakın halkadır.

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

$A = \mathbb{Z}_6$ ve $F: A \to P(\mathbb{Z}_6)$ küme değerli fonksiyonu $\forall x \in A$ için

$$F(x) = \{y \in \mathbb{Z}_6 : xRy \Leftrightarrow xy \in \{0,3\}\}$$

olacak şekilde (F, A), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir esnek küme olsun. Buradan,

$F(0) = F(3) = \mathbb{Z}_6$ ve $F(1)=F(2)=F(4)=F(5)=\{0,3\}$ olur ki

$\mathrm{Supp}(F, A) = \mathbb{Z}_6$ olmak üzere $\forall x \in Supp(F, A)$ için $F(x)$, $\mathbb{Z}_6$'nın altyakın-halkasıdır. Dolayısıyla (F, A), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir esnek yakın-halkadır.

$A = \mathbb{Z}_6$ ve $G: A \to P(\mathbb{Z}_6)$ küme değerli fonksiyonu $\forall x \in A$ için,

$$G(x) = \{y \in \mathbb{Z}_6 : xRy \Leftrightarrow xy \in \{1,2,3\}\}$$

olacak şekilde (G, A), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir esnek küme olsun. $G(1)=\{0,1,3,4\}$ olup $\{0,1,3,4\}$, $\mathbb{Z}_6$ 'nın altyakın-halkası olmadığı için (G, A), $\mathbb{Z}_6$ üzerinde bir esnek yakın-halka değildir.

Tanım 2.3.4. N bir yakın halka, (F, A) ve (G, B) , N üzerinde esnek yakın halkalar olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa (G, B)' ye *(F,A)*'nın *esnek alt yakın-halkası* denir.

i) $B \subset A$,

ii) $\forall x \in Supp(G,B)$ için $G(x), F(x)$ 'in bir alt yakın halkasıdır [26].

Örnek 2.3.5. $N = (\mathbb{Z}_6, +, .)$ yakın halkası ele alınsın. (F,A), N üzerinde esnek küme ve $A = \{1,2,3\}$ olsun. $F: A \longrightarrow P(N)$ küme değerli fonksiyonu, $\forall x \in A$ için ,

$$F(x) = \{0\} \cup \{y \in N : xRy \Leftrightarrow 3x = y\}$$

olarak tanımlansın. Buradan $F(1) = F(2) = F(3) = \{0,3\}$ olur. $F(x)$ 'ler N 'nin alt yakın halkası olduğundan dolayı (F,A), N üzerinde esnek yakın halkadır.

(G,B), N üzerinde esnek küme ve $B = \{2\}$ olsun. $G: B \to P(N)$ küme değerli fonksiyonu, $\forall x \in B$ için,

$$G(x) = \{y \in N : xRy \Leftrightarrow x.0 = y\}$$

şeklinde tanımlanıyor. Buradan $G(2) = \{0\}$ olup N'nin alt yakın halkası olduğundan (G,B), N üzerinde esnek yakın halkadır. Ayrıca $B \subset A$ ve $\forall x \in Supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$ 'in alt yakın halkası olduğundan (F,A), (G,B) ' nin esnek alt yakın halkasıdır.

Tanım 2.3.6. N bir yakın halka ve (F,A) , N üzerinde bir esnek yakın halka olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan N üzerindeki (G,I) boştan farklı esnek kümesine

(F,A) 'nın bir *esnek sol (sırasıyla sağ) ideali* denir ve $(G,I) \,\tilde{\triangleleft}_l\, (F,A)$ (sırasıyla $(G,I) \,\tilde{\triangleleft}_r\, (F,A)$) ile gösterilir.

i) $I \subset A$,

ii) $\forall x \in Supp(G,I)$ için $G(x) \,\tilde{\triangleleft}_l\, F(x)$ (sırasıyla $G(x) \,\tilde{\triangleleft}_r\, F(x)$)

Eğer (G,I), (F,A) 'nın hem esnek sol ideali hem esnek sağ ideali ise, (G,I) 'ya (F,A) 'nın *esnek ideali* denir ve $(G,I) \,\tilde{\triangleleft}\, (F,A)$ ile gösterilir [26].

Örnek 2.3.7. $N = (\mathbb{Z}_6, +, .)$ yakın-halkasını ele alalım. $F : A \rightarrow P(N)$ küme değerli fonksiyonu $\forall x \in A = \mathbb{Z}_6$ için,

$$F(x) = \{y \in A : xRy \Leftrightarrow xy \in \{0,2,4\}\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (F, A), N üzerinde boştan farklı bir esnek kümedir.

Buradan, $F(0) = F(2) = F(4) = \mathbb{Z}_6$ ve $F(1) = F(3) = F(5) = \emptyset$ olur.

$I = \{0,2,4\}$ ve $G : I \rightarrow P(N)$ küme değerli fonksiyonu $\forall\, x \in I$ için,

$$G(x) = \{y \in I : xRy \Leftrightarrow xy \in \{0,3\}\}$$

olarak tanımlansın.

$G(0) = \mathbb{Z}_6$, $G(2) = G(4) = \{0,3\}$ olur. Dolayısıyla $Supp(G, I) = \{0,2,4\}$.

$\forall\, x \in Supp(G, I)$ için $G(x) \lhd F(x)$ olduğundan dolayı $(G, I) \,\tilde{\lhd}\, (F, A)$ sağlanır.

2.4. Cisim ve Modüllerin Esnek Cebirsel Alt Yapıları

Tanım 2.4.1. F bir cisim, S kümesi F nin bir alt cismi ve (G, S), F cismi üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. $\forall\, x, y \in S$ için,

i) $G(x - y) \supseteq G(x) \cap G(y)$

ii) $G(xy^{-1}) \supseteq G(x) \cap G(y)$, ($y \neq 0_F$)

şartları sağlanıyorsa (G, S)' ye F nin *esnek alt cismi* denir ve $(G, S) \lesssim F$ ile gösterilir [9].

Örnek 2.4.2. $F = (\mathbb{Z}_3, +, .)$ cismini göz önüne alalım. $S = \mathbb{Z}_3 < \mathbb{Z}_3$, yani kendisinin alt cismi ve $G : S \longrightarrow P(F)$ ye $G(\bar{0}) = \mathbb{Z}_3$, $G(\bar{1}) = G(2) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ şeklinde tanımlı olmak üzere (G, S), $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde bir esnek kümedir. Ayrıca kolayca görülür ki; esnek alt cisim olma şartları sağlanacağından $(G,S) \lesssim F$ dir. Yani (G,S), F nin esnek alt cismidir.

Fakat , $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde $H: S \longrightarrow P(F)$ ye $H(\bar{0}) = \mathbb{Z}_3$, $H(\bar{1}) = \{\bar{1},\bar{2}\}$ ve $H(2) = \{\bar{0},\bar{1}\}$ şeklinde tanımlansın. O halde;

$H(\bar{2}.\bar{2}^{-1}) = H(\bar{2}.\bar{2}) = H(\bar{1}) = \{\bar{1},\bar{2}\} \not\supseteq H(\bar{2}) \cap H(\bar{2}) = \{\bar{0},\bar{1}\}$ olacağından (H,S), F nin bir esnek alt cismi değildir.

Tanım 2.4.3. *N*, bir M modülünün alt modülü ve (F,N) , M modülü üzerinde bir esnek küme olsun. Her *x, y* $\in N$ ve $r \in M$ için,

i) $F(x-y) \supseteq F(x) \cap F(y)$

ii) $G(rx) \supseteq F(x)$

şartları sağlanıyorsa (F,N) ye M nin bir *esnek alt modülü* denir ve $(F,N) \lesssim M$ ile gösterilir [9].

Örnek 2.4.4. $R = (\mathbb{Z}_{10}, +, .)$ ve $M = R = (\mathbb{Z}_{10}, +, .)$ bir sol R-modül olsun.

$N_1 = \{\bar{0},\bar{5}\}$, M nin bir alt modülüdür. $F: N_1 \longrightarrow P(M)$ ye $F(\bar{0}) = \{\bar{0},\bar{3},\bar{4},\bar{9}\}$ ve $F(\bar{5}) = \{\bar{0},\bar{9}\}$ şeklinde tanımlı olmak üzere $(F,N_1) \lesssim M$ dir. Yani, (F,N_1) ye M nin bir esnek alt modülüdür.

Ayrıca , $N_2 = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8}\} < M$ olmak üzere $G: N_2 \longrightarrow P(M)$ ye $G(\bar{0}) = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8}\}$ ve $G(\bar{2}) = G(\bar{4}) = G(\bar{6}) = G(\bar{8}) = \{\bar{2},\bar{9}\}$ şeklinde tanımlansın. O halde ;

$(G,N_2) \lesssim M$dir.

2.5. Bir İdealin Radikali

Bu tezde esas aldığımız cebirsel yapı olan bir idealin radikali, Atiyah ve Macdonald'ın Introduction to Commutative Algebra kitabı temel alınarak verilmiştir [14].

Tanım 2.5.1. *I, R* değişmeli halkasının bir ideali olsun.

$$\sqrt{I}=\{\, r \in R : \text{ bir } n \in \mathbb{N} \text{ için, } r^n \in I\}$$

kümesi de *R* halkasının *I* yı kapsayan bir idealidir. Bu ideale, *I idealinin radikali* denir ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir [14].

Örnek 2.5.2. *($\mathbb{Z}_6$,+, .)* halkası göz önüne alınsın. $I=\{\bar{0}, \bar{2}\ , \bar{4}\}$ kümesi $\mathbb{Z}_6$ halkasının bir idealidir. Bu *I* idealinin $\sqrt{I}$ radikalini aşağıdaki gibidir;

$\exists n \in \mathbb{N}$ için ; 0^n , $2^n, 4^n \in I$ fakat $1^n, 3^n, 5^n \notin I$ dır. O halde; $\sqrt{I}=\{\bar{0}, \bar{2}\ , \bar{4}\}$ bulunur.

Tanım 2.5.3. *I=0* ideali için,

$$\sqrt{0}=\{\, r \in R : \text{ bir } n \in \mathbb{N} \text{ için, } r^n = 0\}$$

ideali, halkanın tüm nilpotent elemanlarının oluşturduğu kümedir. Bu ideale, *nil radikal* veya *asal radikal* denir ve *N=N(R)* ile gösterilir [14].

Örnek 2.5.4. ($\mathbb{Z}_8$, +, .) halkası göz önüne alınsın.

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ için $\bar{0}^n = \bar{2}^n = \bar{4}^n = \bar{6}^n = \bar{0}$ dır. O halde $\sqrt{0}=\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ bulunur. Bu ideale $\mathbb{Z}_8$ halkası üzerindeki asal radikal veya nil radikal denir.

Önerme 2.5.5. *R* halkasının bir *I* ideali için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $I=\sqrt{J}$ olacak şekilde bir $J \in$ *I(R)* bulunabilir.

ii) *I, R* nin bir takım asal ideallerinin arakesitidir.

iii) $I=\sqrt{I}$ dır.

Tanım 2.5.6. Yukarıdaki önermenin denk koşullarından birini sağlayan ideale *radikal ideal* denir.

Örnek 2.5.7. Değişmeli bir halkanın kendisi kendi üzerinde bir radikal idealdir. Yani; R=$\sqrt{R}$ dir.

2.6. Jacobson Radikali

Jacobson radikaline dair tanım ve özellikler, Hungerford'un Algebra isimli kitabından derlenmiştir [29].

Tanım 2.6.1. Herhangi bir *R* halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine *Jacobson radikali* denir ve *J(R)* ile gösterilir. O halde;

$$J(R) = \cap_{M,mak.ideal} M$$

dir. Lokal bir halkanın Jacobson radikali, tek maksimal idealdir. Bir başka deyişle; $\forall a \in A$ için *1-a, R* de bir birim ise 2-taraflı bir *I* idealine *R* halkasının *Jacobson radikali* denir ve *J(R)* ile gösterilir. Yani, *J(R)* , $\forall a \in J(R)$ için *1-a* birim olmak üzere *R* nin *2-taraflı* en geniş idealidir.

Örnek 2.6.2. $\mathbb{Z}$ cismi için veya bir *R* bölümlü halkası için, *J*($\mathbb{Z}$)*=(0)* ve *J*($\mathbb{Z}$)*=(0)* dır.

Örnek 2.6.3. $M_r(D)$, *(0)* ve $M_r(D)$ den başka *2-taraflı* ideal içermediğinden bir *D* bölümlü halkası için *J*($M_r(D)$=(0) dır ve eğer *R, M, R* nin yegane maksimal ideali olmak üzere komutatif bir lokal halka ise, bu takdirde *J(R)=M* olduğu açıktır.

Tanım 2.6.4. Bir *R* halkası için, *R* nin bütün maksimal sol ideallerinin arakesitine, *sol Jacobson radikali* ya da kısaca *R nin sol radikali* ya da kısaca *R nin sol radikali* denir ve $J_l(R)$ ile gösterilir.

Örnek 2.6.5.

1. Bir bölüm halkasının sol radikali *(0)* dır.

2. $\mathbb{Z}$ halkasının radikali *(0)* dır.

3. Bir lokal halkanın radikali, bu halkanın yegane maksimal idealidir.

4. $M_n(D)$ nin sol radikali, herhangi bir D bölümlü halkası için *(0)* dır.

Örnek 2.6.6. *m, n* nin bütün farklı asal bölenlerinin çarpımı olsun.

O halde, $\mathbb{Z}\,/\,n\,\mathbb{Z}$ bölüm halkasının radikali $m\,\mathbb{Z}\,/\,n\,\mathbb{Z}$ dir. Mesela $J_l(\mathbb{Z}\,/36\,\mathbb{Z}) = 6/\,\mathbb{Z}\;36\,\mathbb{Z}$, $J_l(\mathbb{Z}\,/180\,\mathbb{Z}) = 30\,\mathbb{Z}\,/180\,\mathbb{Z}$ dir.

Teorem 2.6.7. Bir R halkası için, bu halkanın $J_l(R)$ sol radikali, R nin üzerindeki tüm basit sol modülerin sıfırlayanların bir arakesitidir. Ayrıca $J_l(R)$, R nin *2-taraflı* bir idealidir.

Sonuç 2.6.8. $J_l(R)$ sol radikaliyle bir R halkası verilsin. $R/J_l(R)$ bölümünün sol radikali sıfırdır, yani, $J_l(J_l(R))=(0)$ dır.

Teorem 2.6.9. $J_l(R) = \{x \in R\colon 1 - yx$, bir birimdir, $\forall y \in R\ \}$ dir.

Teorem 2.6.10. $J_l(R)$, $1 - a$, her $a \in J_l(R)$ için bir birim olmak üzere, R nin en geniş sol idealidir.

Tanım 2.6.11. R nin tüm maksimal sağ ideallerinin kesişimine sağ Jacobson radikal veya kısaca R nin sağ radikali denir $J_r(R)$ ile gösterilir.

Uyarılar 2.6.12. Yukarıdaki gibi hareket ederek $J_r(R)$ nin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir.

1. $J_r(R)$, R nin iki taraflı bir idealidir.

2. $J_r(R)=\{\ x\in R : 1\text{-}xy$, bir birimdir, $\forall y \in R\ \}$

3. $J_r(R)$, $1\text{-}b$, her $b \in J_r(R)$ için bir birim olmak üzere, R halkasının en geniş sağ idealidir.

Teorem 2.6.13. Herhangi bir R halkası için sağ ve sol Jacobson radikalleri benzerdir ve *2-taraflı* $J(R)= J_l(R)= J_r(R)$ ideali, R halkasının Jacobson radikalidir. Ayrıca, lokal bir halkanın Jacobson radikali onun biricik maksimal idealidir.

3. BÖLÜM

ESNEK RADİKALLER

Bu bölümde Atagün ve Sezgin [9]'in bir halkanın esnek ideali tanımı ve Acar, Koyuncu ve Tanay [13]'ın bir esnek halkanın esnek ideal tanımı kullanılarak, esnek kümeler üzerinde bir idealin radikali tanımlanarak örneklerle gösterilmiştir. Burada ki çalışmalar tamamen orijinal olup indeksli bir dergiye gönderilmiştir [43].

3.1. Bir idealin esnek radikali

Atagün ve Sezgin [9]'in bir halkanın esnek ideali tanımı temel alınarak aşağıdaki radikal tanımı elde edilmiştir. Ayrıca elde edilenlerden yola çıkarak çeşitli idealin radikali teoremleri ispatlanmıştır.

Tanım 3.1.1. R değişmeli bir halka ve I ‘ R halkasının boştan farklı bir ideali olmak üzere; F_I, R üzerinde tanımlı bir esnek ideal olsun. Bu takdirde;

$\sqrt{F} : R \rightarrow P(R)$ ile tanımlı $\sqrt{F}(r) = \begin{cases} F(r^n), & r^n \in I \\ \emptyset, & r^n \notin I \end{cases}$, $\forall\, r \in R$ ve $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için,

$(\sqrt{F}\ ,R\ )$ ifadesine R halkası üzerinde I *idealinin esnek radikali* denir ve $\sqrt{F_I}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.2. Örnek 2.5.2 de göz önüne alınan $(\mathbb{Z}_6\ ,+,\ .\ )$ halkası ve onun $I=\{\bar{0}, \bar{2}\ , \bar{4}\}$ ideali için,

$$F: I \rightarrow P\,(\mathbb{Z}_6)$$

$$\bar{0} \rightarrow \mathbb{Z}_6$$

$$\bar{2} \rightarrow \{\bar{2},\bar{4}\}$$

$$\bar{4} \rightarrow \{\bar{2}\ \bar{4}\}$$

şeklinde tanımlı F_I esnek kümesi $\mathbb{Z}_6$ halkasının bir esnek ideali olur.

$$F_I = \{\ (\bar{0}, \mathbb{Z}_6)\ , (\bar{2},\{\ \bar{2}, \bar{4}\ \})\ , (\bar{4},\{\ \bar{2}, \bar{4}\})\ \}$$

şeklindedir. I idealinin esnek radikali aşağıdaki gibi bulunur,

$\sqrt{F} = \mathbb{Z}_6 \rightarrow P\,(\mathbb{Z}_6)$ $\quad \sqrt{F}(r) = \begin{cases} F(r^n)\ , & r^n \in I \\ \emptyset\ , & r^n \notin I \end{cases}$ olmak üzere;

$\exists n \in \mathbb{N}$ için ; $0^n\ , 2^n, 4^n \in I$ fakat $1^n\ , 3^n, 5^n \notin I$ dır.

$(\sqrt{F}\ , \mathbb{Z}_6) = \{(\bar{0},\mathbb{Z}_6),(\bar{1},\emptyset), (\bar{2},\{\bar{2},\bar{4}\}),(\bar{3},\emptyset),(\bar{4},\{\bar{2},\bar{4}\}), (\bar{5},\emptyset)\}$ esnek radikali elde edilir.

Örneğimizde $\sqrt{F_I} \supseteq F_I$ olduğu açıktır.

Şimdi bununla bağlantılı olan bir teorem verilecektir. Fakat öncelikle ispat için yarayışlı olacak olan bir lemma aşağıdaki gibidir.

Lemma 3.1.3. F_I, bir R değişmeli halkasının esnek ideali olmak üzere; $\forall\, r, s \in R$ ve $x, y \in I$ için, $F(rx\text{-}sy) \supseteq F(rx) \cap F(sy)$ dir.

İspat : $\forall\, r, s \in R$ ve $x, y \in I$ için $rx=k \in I$ ve $sy=t \in I$ olacak şekilde I idealinin k ve t elemanı vardır. F_I , R halkasının esnek ideali olduğundan $F(k\text{-}t) \supseteq F(k) \cap F(t)$ dir. Böylelikle $F(rx\text{-}sy) \supseteq F(rx) \cap F(sy)$ olur.

Teorem 3.1.4. R değişmeli halkasının boştan farklı bir I ideali için R üzerinde F_I esnek ideali tanımlı olsun. $\sqrt{F_I}$ esnek radikali , F_I esnek idealini kapsayan, R halkasının bir esnek idealidir.

İspat: Boş kümeden farklı bir R halkası ve I ideali üzerinde F_I esnek ideali tanımlı olsun. $\forall\, r \in R$ ve $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için, $(r, F(r)\,) \in F_I$ olsun. $\forall r \in I$ için $r^n \in I$ dır.

O halde $(r, F(r^n)) \in \sqrt{F_I}$ dır. $\sqrt{F_I}$ esnek radikali boş kümeden farklıdır.

Şimdi bu radikalin R halkasının esnek ideali olduğunu gösterilecektir. Esnek idealin ilk şartı olarak;

$$\forall\, x, y \in R \text{ için } \sqrt{F}(x\text{-}y) \supseteq \sqrt{F}(x) \cap \sqrt{F}(y)$$

olmalıdır. Burada dört durum ile karşılaşılır.

Birinci durum : $\forall\, x, y \in R$, $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ için;

$x^m \in I$ ve $y^n \in I$ ise; $(x, F(x^m))$ ve $(x, F(y^n)) \in \sqrt{F_I}$ dır.

Ayrıca $(x\text{-}y,\ F((x-y)^{m+n})) \in \sqrt{F_I}$ olur. O halde $\sqrt{F}(x\text{-}y) \supseteq \sqrt{F}(x) \cap \sqrt{F}(y)$ olması için $F((x-y)^{m+n}) \supseteq F(x^m) \cap F(y^n)$ olmalıdır.

$$(x-y)^{m+n} = \binom{m+n}{0}x^{m+n} - \binom{m+n}{1}x^{m+n-1}\,y + \binom{m+n}{2}x^{m+n-2}\,y^n \ldots$$

$$- \binom{m+n}{m+n-1}x\,y^{m+n-1} + \binom{m+n}{m+n}y^{m+n}$$

ifadesindeki her bir terim I idealinin elmanı olacağından $(x-y)^{m+n} \in I$ dır.

Öyleyse *Lemma 3.1.3.* eşitsizliğinden;

$$F((x-y)^{m+n}) = F\Big(\binom{m+n}{0}x^{m+n} - \binom{m+n}{1}x^{m+n-1}\,y + \binom{m+n}{2}x^{m+n-2}\,y^n \ldots$$

$$- \binom{m+n}{m+n-1}x\,y^{m+n-1} + \binom{m+n}{m+n}y^{m+n}\Big)$$

$$= F((\ldots)x^m + (\ldots)y^n) \supseteq F(x^m) \cap F(y^n) \text{ elde edilir.}$$

Diğer üç durum $\forall\, x, y \in R$, $\forall\, x, y \in R$ ve $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$x^m \notin I \text{ ve } y^n \in I$$

$x^m \notin I$ ve $y^n \notin I$

$x^m \in I$ ve $y^n \notin I$ şeklindedir.

Bu durumlarda $F(x^m) \cap F(y^n)=\emptyset$ olacak ve her küme boş kümeyi kapsayacağından esnek ideal olmanın ilk şartı sağlanacaktır. Diğer şartlar için,

$\forall\, r \in R$, $x \in I$ ve $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{F}(rx) \supseteq \sqrt{F}\,(x)$ olduğu gösterilmelidir.

$(x, F(x^n)) \in \sqrt{F_I}$ ve $(rx, F((rx)^n)) \in \sqrt{F_I}$ için $\sqrt{F}((rx)^n) \supseteq \sqrt{F}\,(x^n)$ olmalıdır.

O halde burada $x^n \in I$ ve $x^n \notin I$ olması şeklinde iki durumla karşılaşılır.

R değişmeli halkası üzerinde, $\forall x \in I$ ve $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in I$ ise;

$((rx)^n)$ =(rx)(rx)(rx)…(rx) $=r^n.x^n \in I$ dır. O halde F_I esnek ideal olduğundan

$F(r^n.x^n) \supseteq F(x^n)$ ve böylece $F(r^n.x^n) \supseteq F(x^n) \Rightarrow \sqrt{F}(rx) \supseteq \sqrt{F}\,(x)$ dir.

$x^n \notin I$ ise; $((rx)^n)$ = (rx)(rx)(rx)…(rx) $=r^n.x^n \notin I$ dır.

Bu durumda $\sqrt{F}(rx)=\emptyset \supseteq \emptyset = \sqrt{F}\,(x)$ olur. Halka değişmeli olduğundan üçüncü şart olan $\sqrt{F}(xr) \supseteq \sqrt{F}\,(x)$ elde edilir. Böylelikle esnek ideal olma şartları sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.5. *R* değişmeli halkasının F_I esnek ideali olmak üzere $F_I = \sqrt{F_J}$ olacak şekilde *R* üzerinde F_J esnek radikali vardır $\Leftrightarrow$ $F_I = \sqrt{F_I}$ dır.

İspat: Kabul edelim ki *R* değişmeli halkası üzerinde $F_I = \sqrt{F_J}$ olacak şekilde F_J esnek ideali bulunsun. O halde;

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ ve $(x_k)^n \in J$ olan ve *k* indisi ile verilen $x_k \in R$ için;

$(x_k, F((x_k)^n) \in \sqrt{F_J} \Leftrightarrow (x_k, F((x_k)^n) \in F_I$

$\Leftrightarrow (x_k)^n \in$ I

$$\Leftrightarrow (x_k, F((x_k)^n) \in \sqrt{F_I} \ldots(1)$$

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ ve $(x_t)^n \notin J$ olan ve t indisi ile verilen $x_t \in R$ için;

$(x_t, \emptyset) \in \sqrt{F_J} \Leftrightarrow (x_t, \emptyset) \in F_I$

$$\Leftrightarrow (x_t, \emptyset) \in \sqrt{F_I} \ldots(2)$$

(1) ve (2) den, $F_I = \sqrt{F_J} \Leftrightarrow F_I = \sqrt{F_I}$ bulunur.

Tanım 3.1.6. Yukarıdaki teoremde belirtilen F_I esnek idealine *esnek radikal ideal* denir.

Örnek 3.1.7. R değişmeli bir halka olmak üzere $F_R = \sqrt{F_R}$ dir. F_R bir esnek radikal idealdir.

Tanım 3.1.8. R değişmeli halkasının $I = \{0\}$ ideali için F_I aşikâr esnek idealidir.

$\sqrt{F} : R \to P(R)$ ile tanımlı $\sqrt{F}(r) = \begin{cases} F(0), & r^n = 0 \\ \emptyset\ , & r^n \neq 0 \end{cases}$, $\forall\, r \in R$ ve $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için,

$(\sqrt{F}\ ,R\ )$ ifadesine R halkası üzerinde *idealin esnek nil radikali* veya *idealin esnek asal radikali* denir.

Örnek 3.1.9. Örnek 2.5.4. deki $(\mathbb{Z}_8\ , +, .)$ halkası göz önüne alınsın.

$\mathbb{Z}_8$ halkasında $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için $\bar{0}^n = \bar{2}^n = \bar{4}^n = \bar{6}^n = \bar{0}$ dır. O halde $\mathbb{Z}_8$ halkası üzerindeki esnek nil radikal;

$(\sqrt{F}, \mathbb{Z}_8)$=$\{ (\bar{0}, F(\bar{0})), (\bar{1}, \emptyset), (\bar{2}, F(\bar{0})), (\bar{3}, \emptyset), (\bar{4}, F(\bar{0})), (\bar{5}, \emptyset), (\bar{6}, F(\bar{0})), (\bar{7}, \emptyset)\}$ olacaktır.

$F(\bar{0})=\{\bar{3},\bar{5},\bar{7}\}$ olsun. O halde;

$\sqrt{F_{\mathbb{Z}_8}}$=$\{(\bar{0}, \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}), (\bar{1}, \emptyset), (\bar{2}, \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}), (3, \emptyset), (\bar{4}, \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}), (\bar{5}, \emptyset),$
$(\bar{6}, \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}), (\bar{7}, \emptyset)\}$ olur.

3.2. Bir esnek idealin radikali

Acar, Koyuncu ve Tanay [13]'ın bir esnek halkanın esnek ideal tanımı temel alınarak aşağıdaki radikal tanımı elde edilmiştir.

Tanım 3.2.1. *R* bir halka, *A* kümesi *R* halkasının boş kümeden farklı bir alt cümlesi ve *A* kümesi üzerinde tanımlı bir esnek halka *(F,A)* olsun. *(G,I)* , *(F,A)* esnek halkasının esnek ideali olmak üzere;

$\sqrt{G} : A \to P(R)$ ile tanımlı $\sqrt{G}(r) = \begin{cases} G(r), & (r^n,\ G(r^n)) \in (G,I) \\ \emptyset, & (r^n,\ G(r^n)) \notin (G,I) \end{cases}$,

$\forall r \in A$ ve $\exists\, n \in N$ için, $(\sqrt{G}\ ,A\ )$ ifadesine *R* halkası üzerinde *(G,I) esnek idealinin radikali* denir ve $\sqrt{(G,I)}$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.3. $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde tanımlı $(F,\mathbb{Z}_6)$ esnek halkası aşağıdaki gibi olsun.

$(F,\mathbb{Z}_6) = \{(\bar{0},\mathbb{Z}),(\bar{1},7\mathbb{Z}),(\bar{2},2\mathbb{Z}),(\bar{3},3\mathbb{Z}),(\bar{4},\mathbb{Z}),(\bar{5},5\mathbb{Z})\}$

$I=\{\bar{0},\bar{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ olmak üzere;

$G : I \to P(\mathbb{Z}_6)$ olmak üzere $\forall x \in I$ için, $G(x)= \{\bar{0}\}$ şeklinde tanımlansın. O halde $\{\bar{0}\}$, $\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$ nin ideali olduğundan *(G,I)*, (F,Z_6) esnek halkasının esnek idealidir. Şimdi bu esnek idealin radikalini bulalım.

$\sqrt{G} : \mathbb{Z}_6 \to P(\mathbb{Z})$ tanımlı olmak üzere; $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için, $\bar{0}^n = \bar{0}\ ve\ \bar{3}^n = \bar{3} \in I$ olduğundan,

$(\bar{0}^n , G(\bar{0}^n)), (\bar{3}^n , G(\bar{3}^n)) \in (G,I) \Rightarrow (\bar{0}, G(\bar{0})), (\bar{3} , G(\bar{3})) \in \sqrt{(G,I)}$ dır.

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ için $\bar{1}^n,\bar{2}^n,\bar{4}^n$ ve $\bar{5}^n \notin I$ olduğundan,

$(\bar{1},\emptyset), (\bar{2},\emptyset), (\bar{4},\emptyset)$ ve $(\bar{5},\emptyset) \in \sqrt{(G,I)}$ dır. Böylece

$\sqrt{(G,I)} = \{(\bar{0},\{\bar{0}\}),(\bar{1},\emptyset),(\bar{2},\emptyset),(\bar{3},\{0\}),(\bar{4},\emptyset),(\bar{5},\emptyset)\}$ esnek radikali elde edilir.

Sonuç 3.2.4. *R* halkası üzerinde *(F,A)* esnek halkası ve bu esnek halkanın *(G,I)* esnek ideali tanımlı olmak üzere $\sqrt{(G,I)}$ radikali *(G,I)* esnek idealini kapsar fakat *(F,A)* esnek halkasının bir esnek ideali değildir.

İspat: *R* halkası üzerinde *(F,A)* esnek halkası ve bu esnek halkanın (G,I) esnek ideali tanımlı olsun. $\forall\, r \in A$ ve $\exists\, n \in \mathbb{N}$ için, *(r, G(r))* $\in (G,I)$ olsun. $\forall\, r \in I$ için,

(r, G(r)) $\in (G,I) \Longrightarrow$ *(r,G(r))* $\in \sqrt{(G,I)}$ dır. $\sqrt{(G,I)}$ radikali boş kümeden farklıdır ve $\sqrt{(G,I)}$ radikali *(G,I)* esnek idealini kapsar.

Ayrıca $x \in I \subseteq A$ ise ; $x^n \in I \Rightarrow \left(x^n, G(x^n)\right) \in (G,I) \Rightarrow (x, G(x)) \in \sqrt{(G,I)}$ dır. O halde (G,I) , *(F,A)* esnek halkasının ideali olduğundan $\sqrt{G}$(x) kümesinin *F(x)* in idealidir. $x \in A$ fakat $x \notin I$ ise ; $x^n \notin I \Rightarrow \left(x^n, G(x^n)\right) \notin (G,I) \Rightarrow (x, \emptyset) \in \sqrt{(G,I)}$ dır. Boş küme ideal olmadığından $\sqrt{(G,I)}$, *(F,A)* esnek halkasının esnek ideali değildir.

Teorem 3.2.5. *R* değişmeli halkası üzerinde *(F,A)* esnek halkası ve bu esnek halkanın *(G,I)* esnek ideali tanımlı olmak üzere; *(G,I)*= $\sqrt{(G,J)}$ olacak şekilde *(G,J)* esnek ideali vardır $\Leftrightarrow$ *(G,I)*= $\sqrt{(G,I)}$ dır.

İspat: Kabul edelim ki ; *(G,I)*= $\sqrt{(G,J)}$ olacak şekilde *(G,J)* bulunsun. O halde

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ ve $(x_k)^n \in J$ olan *k* indisi ile verilen $x_k \in J \subseteq A$ için;

$(x_k)^n \in J \Rightarrow (\,(x_k)^n, G(\,(x_k)^n\,)) \in (G,J) \Rightarrow (x_k, G(x_k\,)) \in \sqrt{(G,J)}$ dir.

$(x_k, G(x_k\,)) \in \sqrt{(G,J)} \Leftrightarrow (x_k, G(x_k)) \in (G,I)$

$$\Leftrightarrow (x_k, G(x_k\,)) \in \sqrt{(G,I)} \quad \ldots(3)$$

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ ve $(x_t)^n \notin J$ olan *t* indisi ile verilen $x_t \in A$ için;

$(\,x_t, \emptyset\,) \in \sqrt{(G,J)} \Leftrightarrow (\,x_t, \emptyset\,) \in (G,I)$

$$\Leftrightarrow (\,x_t, \emptyset\,) \in \sqrt{(G,I)} \quad \ldots(4)$$

(3) ve (4) den $(G,I)= \sqrt{(G,J)} \Leftrightarrow (G,I)= \sqrt{(G,I)}$ bulunur.

Tanım 3.2.6. Yukarıdaki teoremde belirtilen (G,I) esnek idealine *esnek radikal ideal* denir.

Tanım 3.2.7. R halkası üzerinde tanımlı *(F,A)* esnek halka olmak üzere, $I = \{0\}$ ideali için *(G,I)* , *(F,A)* esnek halkasının esnek ideali olsun.

$\sqrt{G} : A \rightarrow P(R)$ ile tanımlı olmak üzere;

$$\sqrt{G}(r) = \begin{cases} G(0), & r^n = 0 \\ \emptyset\ , & r^n \neq 0 \end{cases}, \ \forall r \in A \text{ ve } \exists n \in \mathbb{N} \text{ için,}$$

oluşan esnek kümeye *esnek idealin nil radikali* veya *esnek idealin asal radikali* denir.

Örnek 3.2.8. $R=A=(\mathbb{Z}_8,+,.)$ halkası göz önüne alınsın. $F:A \longrightarrow P(\mathbb{Z}_8)$ tanımlı olmak üzere; $\forall x \in A$ için, $F(x)= \mathbb{Z}_8$ şeklinde veriliyor. O halde *(F,A)*, $\mathbb{Z}_8$ halkası üzerinde esnek halka olur. Ayrıca $I = \{\bar{0}\}$, $\mathbb{Z}_8$ halkasının aşikar ideali için $G: I \longrightarrow P(\mathbb{Z}_8)$ olmak üzere $G(x)= \{\bar{0}\}$ şeklinde tanımlanan *(G,I)* esnek kümesi *(F,A)* esnek halkasının esnek idealidir. Bu esnek idealin nil radikali;

$(\sqrt{G},I)=\{(\bar{0},\{\bar{0}\}),(\bar{1},\emptyset), (\bar{2},\{\bar{0}\}),(\bar{3},\emptyset), (\bar{4},\{\bar{0}\}),(\bar{5},\emptyset), (\bar{6},\{\bar{0}\}),(\bar{7},\emptyset)\}$ olarak bulunur.

4. BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında birçok çalışmanın önünü açmış olan ve belirsizliklerle başa çıkmak için büyük bir öneme sahip olan ‘’Esnek Küme Teorisi’’ üzerinde yeni bir cebirsel yapı inşa etmek hedeflenmiştir. Esnek küme teorisiyle ilgili temel bilgiler tezin birinci bölümünde sunulmuştur. Ayrıca tezin hedefine ışık tutan çalışmalardan esnek cebirsel yapılar, esnek cebirsel alt yapılar ve radikaller konuları incelenerek, gerekli literatür çalışmaları yapılmış, bu konuda ki bilgiler de tezin ikinci bölümünde verilmiştir.

Esnek cebirsel yapılar konusu incelendiğinde elde edilen verilere göre esnek kümeler üzerinde iki farklı ideal tanımı yer almaktadır. İlk tanım bir halka yapısının esnek ideali iken, ikinci tanım esnek bir halkanın esnek ideali şeklindedir. Tezin temel konusunu oluşturan bir idealin radikali tanımının esnek kümeler üzerine aktarılabilmesi için ise bu farklı ideal tanımlarının her ikisi de göz önüne alınmış ve her iki esnek ideal tanımı için de esnek radikal elde edilmiştir.

Aynı vizyon öngörülerek yapılan her iki esnek radikal tanımı için, bir halkadan elde edilen esnek idealin radikali genel anlamıyla radikal teoremlerini sağlarken, esnek bir halkadan elde edilen esnek idealin radikali bu konuda sınırlı bir çerçevede kalmıştır. Örneğin; ‘’Bir idealin radikali aynı zamanda halkanın da bir idealidir’’ önermesini esnek radikal yapıya aktarırken, bir halkanın esnek idealinden elde edilen esnek radikal aynı zamanda halkanın esnek ideali olurken, bir esnek halkanın esnek idealinden elde edilen esnek radikal bu halkanın esnek ideali olamamıştır.

Elde edilen sonuçların neticesinde yapılan çalışmaların geliştirilmesi ve bu konu üzerinde daha kapsamlı bilgilere ulaşılması hedeflenmektedir. Ayrıca tezde yapılan bu çalışmalar orjinal olup, indeksli bir dergiye de makale olarak gönderilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Molodtsov D, (1999). *Soft Set Theory Results*, Comput. **Math. Appl. 37:**19-31.

2. Maji PK, Roy AR and Biswas R, (2002). An application of soft sets in a decision making problem, **Comput. Math. Appl. 44:**1077-1083.

3. Chen D, Tsang ECC, Yeung DS and Wang X, (2005). The parametrization reduction of soft sets and its applications, **Comput. Math. Appl. 49:**757-763.

4. Kong Z, Gao L, Wang L and Li S, (2008). The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, **Comput. Math. Appl. 56**(12):3029-3037.

5. Maji PK, Biswas R, Roy AR, (2003). Soft set theory, **Comput. Math. Appl. 45:**555-562.

6. Ali MI, Feng F, Liu X, Min WK and Shabir M, (2009). On some new operations soft set theory, **Comput. Math. Appl. 57** (9):1547-1553.

7. Sezgin A and Atagün AO, (2011). On operations of soft sets, **Comput. Math. Appl. 61** (5):1457-1467.

8. Yang CF, (2003). A note on soft set theory, **Comput. Math. Appl. 45** (4-5):555-562.

9. Atagün A.O. and Sezgin A., (2011). Soft substructures of rings, fields and modules, **Comput. Math. Appl. 61** (3):592-601.

10. Aktaş H and Çağman N, (2007). Soft sets and soft groups, **Inform. Sci. 177:**2726-2735.

11. Sezgin A and Atagün AO, (2011). Soft groups and normalistic soft groups, **Comput. Math. Appl. 62** (2): 685-698.

12. Sezgin A and Atagün AO and Çağman N, (2012). Soft intersection near-rings with its applications, **Neural Comput. & Applic.,** 21, 221-229.

13. Acar U, Koyuncu F and Tanay B, (2010) Soft Sets and Soft Rings, **Comput. Math. Apll. 59**:3458-3463.

14. Atiyah M, Macdonald IG.,(1994) Introduction to commutative Algebra, Addison Wesley, ISBN 0-201-40751-5

15. Atanassov K, (1994). Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, **Fuzzy Sets and Systems, 64:**159-174.

16. Atanassov K, (1986). Intuitionistic fuzzy sets, **Fuzzy Sets and Systems 20:**87- 96.

17. Gau WL and Buehrer DJ, (1993). Vague sets, **IEEE Tran. Syst. Man. Cybern. 23:**610 -614.

18. Gorzalzany MB, (1987). A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, **Fuzzy Sets and Systems, 21:**1-17.

19. Pawlak Z, (1982). Rough sets, **Int. J. Inform. Comput. Sci.** 11:341-356.

20. Pawlak Z and Skowron A, (2007). Rudiments of soft sets, **Inform. Sci. 177:**3-27.

21. Pilz G, Near-rings, (1983). North Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford.

22. Atagün AO, Sezgin Sezer A, (2015). Soft sets, soft semimodules and soft substructures of semimodules, **Math. Sci. Lett.**,4, No. 3, 235-242.

23. Zadeh LA, (2005). Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)-an outline, **Inform. Sci. 172:**140.

24. Zhou L and Wu WZ, On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation.

25. Feng F., Jun YB, Zhao X., (2008). Soft semirings, **Comput. Math. Appl., 56** (10), 2621-2628.

26. Sezgin A, Atagün AO and Aygün E, (2011). A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings, **Filomat, 25**(1):53 - 68.

27. Sezgin A, Atagün AO, Çağman N, (2012). Union soft substructures of near-rings and N-groups, Neural Computing and Applications, 21 (Issue 1-Supplement) 133 - 143.

28. Sezgin Sezer A, (2012). A new view to ring theory via soft union rings, ideals and bi-ideals, **Knowledge-Based Systems, 36:**300-314.

29. Hungerford TW, (1974), Algebra, Graduate Texts in Mathematics, New York.

30. Jacobson N, (1974). Basic Algebra I, W. H. Freeman and Company.

31. Dickson LE, (1905). Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, **Trans. Amer. Math. Soc., 6:**198-204.

32. Xiao Z, Chen L, Zhong B, Ye S, (2005). Recognition for Soft Information Basedon the Theory of Soft Sets, In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J. Chen), **IEEE, 2:**1104-1106.

33. Sun, Q-M, Zhang, Z-L, Liu J, (2008). Soft Sets and Soft Modules. (In Guoyin Wang, Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse, Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu 54 Yao Eds.), Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT, Proceedings, Springer, 403-409.

34. Maji PK, Biswas R, Roy AR, (2001). Fuzzy soft sets, **Journal of Fuzzy Mathematics, 9** (3):589-602.

35. Roy AR and Maji PK, (2007). A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, **Journal of Computational and Applied Mathematics, 203** (1): 412-418.

36. Yang H, Qu C, Li NC, (2004). The induction and decision analysis of clinical diagnosis based on rough sets and soft sets, **(Fangzhi Gaoxiao Jichukexue Xuebao Ed.), 17** (3), 208-212.

37. Jacobson N. (1945), "The radical and semi-simplicity for arbitrary rings", **American Journal of Mathematics 67**: 300–320, doi:10.2307/2371731, ISSN 0002-9327, MR 12271.

38. Atagün AO, Aygün E, (2015), Groups of Soft Sets, **Journal of Intelligent &Fuzzy Systems**, vol. Preprint. pp1-5.

39. Zadeh LA, (1965). Fuzzy Sets, **Inform. and Control, 8** (1), 338-353.

40. Altındiş H, Aygün E. and Atagün AO**,** (2006). Prime and Special Radicals in Near-rings, **Algebras Groups and Geometries**, 23, 209-218.

41.Yang X, Yu D. Yang J, Wu C, (2007). Generalization of Soft Set Theory: From Crisp to Fuzzy Case. In Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, (Bing-Yuan Cao Ed.), Advances in Soft Computing, Springer, 345-355.

42. Enginoğlu S, (2008). Esnek Karar Verme Metodları, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

43. Aygün E, Atagün AO, Erdal B, Soft radicals, **Bullettin of Korea**, submitted.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı	: Betül ERDAL
Uyruğu	: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri	: 21 Nisan 1989 Kayseri
Medeni Durumu	: Bekâr
Tel	: +90 5395811345
e-mail	: b-rdal@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
İlköğretim	Gazipaşa İÖO	2003
Ortaöğretim	Nuh Mehmet Küçükçalık Anadolu Lisesi	2007
Lisans	Erciyes Üniversitesi	2013

YABANCI DİL

İngilizce