T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE KOMPAKT OPERATÖRLER

Hazırlayan
Hava AYDIN

Danışman
Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

Yüksek Lisans Tezi

HAZİRAN 2016
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Hava AYDIN

YÖNERGEYE UYGUNLUK

"Bazı Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri ve Kompakt Operatörler" adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi' ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan | Danışman

Hava AYDIN | Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ danışmanlığında **Hava AYDIN** tarafından hazırlanan "**Bazı Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri ve Kompakt Operatörler"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

03/06/2016

JÜRİ:

Danışman : Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ ………………..

Üye : Doç. Dr. A. Nihal TUNCER ………………..

Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Cemil BİŞGİN ………………..

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun …………… tarih ve …………………. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…….. /…….. /……..

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"**Bazı Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri ve Kompakt Operatörler"** isimli tez çalışmamda bana yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana her türlü desteği sağlayan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Hava AYDIN

Kayseri, Haziran 2016

BAZI DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE KOMPAKT OPERATÖRLER

Hava AYDIN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2016

Danışman: Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşur.

Giriş bölümünde, toplanabilme ve dizi uzayları teorisindeki bazı problemlerden bahsedildi. Ayrıca kompakt operatörlerle ilgili bilgiler verildi.

Birinci bölümde, fonksiyonel analiz, topoloji ,kompaktlık ve kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi

İkinci bölümde, *B(r,s)* matrisinin etki alanı yardımıyla bazı dizi uzayları tanımlandı. Daha sonra bu uzaylardan bazıları için matris sınıfları karakterize edildi. Son olarak bu uzaylar ile klasik dizi uzayları arasında tanımlı operatörlerin hangi şartlar altında kompakt olduğu incelendi.

Üçüncü bölümde, *B(r,s,t)* matrisinin c_0 ve ℓ_∞ dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla $c_0(B)$ ve $\ell_\infty(B)$ şeklinde dizi uzayları tanımlandı. Daha sonra kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü kullanılarak bu uzaylarda kompakt operatörlerin bazı sınıfları karakterize edildi.

Tezin son bölümünde ise yapılan çalışmaların sonuçları ve ileriki çalışmalar için öneriler verildi.

Anahtar Kelimeler: Kompakt Operatörler, Kompaktsızlığın Hausdorff Ölçüsü, Etki Alanı, , Matris sınıfları

MATRIX TRANSFORMATIONS IN SOME SEQUENCE SPACES AND COMPACT OPERATORS

Hava AYDIN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2016

Supervisor: Assoc. Prof. Abdulcabbar SÖNMEZ

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the introduction, some problems in the sequence spaces and summability theory are mentioned. Furthermore, some informations about compact operators are given.

In the first chapter, basic definitions and theorems related to functional analysis, topology, compactness and Hausdorff measure of noncompactness are given.

In the second chapter, some sequence spaces are defined by the matrix domain of *B(r,s)* matrix. Afterword the matrix classes are characterized for some of those space. Finally, the operators between these spaces and classical sequence spaces to be compact are investigated under what conditions.

In the third chapter, $c_0(B)$ and $\ell_\infty(B)$ sequence spaces are defined over c_0 and ℓ_∞ sequence spaces by the matrix domain of *B(r,s,t)* matrix. Moreover, some class of compact operators are characterized by using the Hausdorff measure of noncompactness.

In the last chapter, the results of this study and suggestions for future study are given.

Keywords: Compact Operators, Hausdorff measure of noncompactness, Matrix Domain, Matrix Classes.

İÇİNDEKİLER

BAZI DİZİ UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE KOMPAKT OPERATÖRLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI……………………………………………i

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI……………………………………………….ii

KABUL VE ONAY SAYFASI…………………………………………………………iii

TEŞEKKÜR……………………………………………………………………………….iv

ÖZET……………………………………………………………………………………….v

ABSTRACT……………………………………………………………………………….vi

İÇİNDEKİLER……………………………………………………………………………vii

SEMBOLLER……………………………………………………………………………..ix

GİRİŞ ……………………………………………………………………………….. 1

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER ……………………………………………… 4

2. BÖLÜM

B(r,s) MATRİSİ İLE İLGİLİ BAZI UZAYLARDA KOMPAKT OPERATÖRLER

2.1. B(r,s) Matrisinin Etki Alanı Yardımıyla Oluşturulan Bazı Dizi Uzayları……23

2.2. Kompakt Operatörlerin Belirli Alt sınıflarının Karakterizasyonu …………28

3. BÖLÜM

ÜÇLÜ BAND MATRİSLERİNİN BAZI DİZİ UZAYLARINDA KOMPAKTSIZLIĞININ HAUSDORFF ÖLÇÜSÜ

3.1. $c_0(B)$ ve $\ell_\infty(B)$ Dizi Uzayları ……………………………………………..…... 35

3.2. $c_0(B)$ ve $\ell_\infty(B)$ Uzaylarında Kompakt Operatörler ……………………….. 38

4. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER……………………………………………………45

KAYNAKLAR ………………………………………………………………….47

ÖZGEÇMİŞ ……………………………………………………………………50

SİMGELER

Sembol	**Anlamı**
IN	Doğal sayılar kümesi
IR	Reel sayılar kümesi
¢	Kompleks sayılar kümesi
w	Reel veya kompleks terimli diziler uzayı
ϕ	Sonlu dizilerin kümesi
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
c	Yakınsak diziler uzayı
ℓ_p	p. dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı
cs	Yakınsak seri teşkil eden diziler uzayı
bs	Sınırlı seri teşkil eden diziler uzayı

GİRİŞ

Toplanabilme daha çok analiz ve uygulamalı matematik de kullanılan bir teoridir. 19. yüzyılın sonlarında toplanabilme ile ilgili önemli adımlar atılmıştır. Newton ve Leibnitz sonsuz serileri kullanan ilk matematikçilerdir.

Toplanabilme teorisinde genel olarak seriler, ıraksak ve yakınsak seriler olmak üzere iki ana grupta incelenir. Iraksak seriler de, kendi aralarında belirsiz ıraksak seriler ve belirli ıraksak seriler diye iki grupta incelenebilir. Burada belirsiz ıraksak seriler , kısmi toplamlar dizisi en az iki adet limit noktasına sahip olan serilerdir. Belirli ıraksak seriler de,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \quad \text{veya} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$$

şeklindeki serilerdir.

Belirsiz ıraksak serilerin kısmi toplamlar dizisi en az iki adet limit noktasına sahip olduğundan bu tür dizilerin denk geldiği bir değeri bulmak için çeşitli toplanabilme metodları tanımlanmıştır.

Toplanabilme teorisi Cesàro, Riesz, Nörlund, Abel, Borel,… tarafından kullanılan metodlar ile elde edilmiştir. Daha sonra bu klasik metodların yerine daha genel bir matris metodu kullanılarak, matris dönüşümü teorisi harekete geçirilmiştir. Iraksak bir seriyi veya ıraksak bir diziyi toplamanın veya yakınsatmanın en yaygın yöntemi sonsuz matrisleri kullanmaktır.

Birçok matematikçi tarafından bir matrisin etki alanı yardımıyla yeni dizi uzayları tanımlanmıştır ve tanımlanan bu dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Bu uzaylar ile literatürde var olan dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları araştırılmıştır. Dahası bu uzayların varsa Schauder bazı ile $\alpha-$, $\beta-$, ve

$\gamma -$ dualleri belirlenmiştir. Ayrıca tanımlanan bu dizi uzayları ile literatürde var olan dizi uzayları arasındaki matris sınıfları karakterize edilmiştir. Dizi uzayları arasında matris dönüşümleri yardımıyla tanımlanan operatörlerin hangi koşullar altında kompakt olduğu incelenmiştir. Bunun için X ve Y herhangi iki FK- uzayı olmak üzere $(X,Y) \subset B(X,Y)$, yani $\forall A \in (X,Y)$ matrisinin $L_A(x) = A(x),\ L_A \in B(X,Y)$ olacak şekilde lineer bir operatör tanımlanmıştır.

Kompaktlık, matematiğin çeşitli alanlarında birçok farklı yolla kullanılan çok güçlü bir özelliktir. 19. yüzyılda birbirinden tamamen farklı olan bazı matematiksel özellikler kompaktlığın doğal sonuçları şeklinde anlaşılmaya başlanmıştır. Bu kavramın temelleri 1817 yılında Bernard Bolzano'nun "Her sınırlı nokta dizisi, limit noktası olarak adlandırılan diğer bazı noktalara keyfi biçimde yaklaşan bir alt diziye sahiptir" ifadesinin farkına varmasıyla atılmıştır.

Kompakt operatörler teorisinin kökeni integral denklemler teorisine dayanır. İntegral operatörleri kompakt operatörlerin somut örnekleridir. Bir Fredholm integral denklemi fonksiyon uzaylarında kompakt bir K fonksiyonu meydana getirir. Kompakt operatörlerin en önemli özelliği Fredholm alternatifidir. Bu teori K kompakt operatör, f verilen fonksiyon ve u çözülmesi gereken bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere $(\lambda K + I)u = f$ tipindeki lineer denklemlerin çözümünün var olduğunu iddia eder. Daha genel olarak bir Fredholm alternatifi K 'nın kompakt olması durumunda geçerlidir. Kompakt operatörler Spektral teori ile de ilgilidir. Bu teori, bir K kompakt operatörünün spektrumunun sıfırdan farklı elemanlarının operatörün özdeğerleri olduğunu iddia eder. Kompakt operatörlerin önemli bir örneği de Sobolev uzaylarının kompakt gömmesi olmasıdır. Bu, eliptik sınır değer problemini Fredholm integral denklemlere dönüştürmede kullanılır. [1]

İntegral denklemler ile ilgili kabul edilmiş en genel bakış bu teorinin "inverse problem" ile başladığıdır. Birinci çeşit integral denklem olarak formülize edilebilen inverse problemlere; Yerçekimi Problemi, Bant-Sınırlı Sinyal Kestirimi, Isı Geçmişi Bilimi, Bağışıklık Bilimi Problemi, Kararlı Isı Dağılımı ve Santrifüjde Polimer Çökelme örnekleri verilebilir. [1]

Kompakt operatör tanımlamak için, FK-uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin koşullarını belirlemek gerekir. Bunun için de kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü kullanılır.

Son zamanlarda çeşitli yazarlar kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsünü kullanarak bazı dizi uzaylarında sonsuz matrisleri veren kompakt operatörlerin sınıflarını karakterize ettiler. Örneğin; [2, 3] de Mursaleen ve Noman, [4] da Malkowsky ve $Rako\breve{c}evic'$, [5] de $Djolovic'$ ve Malkowsky ve [6, 7] de Kara ve Başarır normlu operatörler ve keyfi bir BK uzayındaki sonsuz matrisler tarafından verilen lineer operatörün kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü ya da keyfi BK uzayındaki üçgensel matrislerin etki alanı için bazı özdeşlikler ve hesaplamalar kurmuşlardır. Ayrıca kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü kullanılarak bu uzaylarda kompakt operatörlerin bazı sınıflarını karakterize ettiler.

1.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. [8] w; ile reel ya da kompleks değerli tüm dizilerin uzayı gösterilsin. w toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. w nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir. Sırasıyla, ℓ_∞, c , c_0 ve ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ ile sınırlı, yakınsak , sıfıra yakınsak ve p . mertebeden mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayını gösterelim. Yani,

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in IN} |x_k| < \infty \right\}$$

$$c = \{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \to \infty} x_k \text{ mevcut} \}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \right\}$$

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty, 1 \le p < \infty \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2. [8] Boştan farklı X kümesi üzerinde d dönüşümü

$$d : XxX \to IR$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$ (Simetri)

(iii) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (Üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanırsa d ye X kümesi üzerinde metrik, (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

Örnek 1.3. [8] IR üzerinde d dönüşümü

$$d: XxX \to IR$$
$$(x,y)\mapsto d(x,y)=|x-y|$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (IR,d) bir metrik uzaydır. Bu metriğe alışılmış metrik veya mutlak değer metriği denir.

Örnek 1.4. [8] w üzerinde d dönüşümü

$$d: wxw \to IR$$
$$(x,y)\mapsto d(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (w,d) bir metrik uzaydır.

Örnek 1.5. [8] $X\in\{\ell_\infty,c,c_0\}$ olmak üzere d_∞ dönüşümü

$$d_\infty : XxX \to IR$$
$$(x,y)\mapsto d_\infty(x,y)=\sup_{k\in IN}|x_k-y_k|$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X,d_∞) bir metrik uzaydır.

Örnek 1.6. [8] $1\le p<\infty$ için ℓ_p üzerinde d_p dönüşümü

$$d_p : \ell_p x \ell_p \to IR$$
$$(x,y)\mapsto d_p(x,y)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (ℓ_p, d_p) bir metrik uzaydır.

Tanım 1.7. [8] (X,d) bir metrik uzay, (x_n) terimleri X de olan bir dizi ve $a \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0^{(\varepsilon)}$ olduğunda $d(x_n, a) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0^{(\varepsilon)} \in IN$ varsa, yani

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$$

ise (x_n) dizisi a noktasına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \text{veya} \quad x_n \to a \ , \ n \to \infty$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.8. [8] (X,d) bir metrik uzay, (x_n) terimleri X de olan bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m > n_0^{(\varepsilon)}$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0^{(\varepsilon)} \in IN$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.9. [8] Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Örnek 1.10. [8] (IR, d) tam metrik uzaydır. Burada d alışılmış metriktir.

Örnek 1.11. [8] (ℓ_∞, d_∞), (c, d_∞), (c_0, d_∞) ve (ℓ_p, d_p) metrik uzayları birer tam metrik uzaydır.

Tanım 1.12. [8] X , IR cismi üzerinde vektör uzayı olsun. $\|.\|$ dönüşümü

$$\begin{aligned} \|.\| &: X \to IR \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\forall \alpha \in IR$ ve $\forall x, y \in X$ için

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ dönüşümüne X üzerinde bir norm, $(X,\|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Önerme 1.13. [9] $(X,\|.\|)$ normlu uzay olmak üzere d dönüşümü

$$\begin{aligned} d &: XxX \to IR \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \|x-y\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre (X,d) bir metrik uzaydır. Bu şekilde elde edilen d metriğine $\|.\|$ normuna indirgenmiş metrik denir.

Lemma 1.14. [9] $(X,\|.\|)$ normlu uzay ve $\alpha \in IR$ olsun. $x,y \in X$ için

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\forall x,y,z \in X$ için

(i) $d(x+z,y+z) = d(x,y)$ (Öteleme özelliği)

(ii) $d(\alpha x,\alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ (Mutlak Homojenlik Özelliği)

ifadeleri sağlanır.

Sonuç 1.15. [9]

(i) Her normlu uzay bir metrik uzaydır.

(ii) Bir (X,d) lineer metrik uzayındaki d metriği Lemma 1.14. deki (i) ve (ii) şartlarını sağlıyorsa

$$\|x\| = d(x,\theta)$$

tanımı ile $(X,\|.\|)$ bir normlu uzaydır.

Lemma 1.16. [9] (X,d) metrik vektör uzayı ve d metriği öteleme ve mutlak homojenlik koşullarını sağlasın. Bu durumda $x \in X$ için

$$\|x\| = d(x,\theta)$$

olmak üzere (X,d) ve $(X,\|.\|)$ uzaylarının topolojik yapıları aynıdır. Yani (X,d) uzayında her sınırlı, yakınsak ve Cauchy dizisi, $(X,\|.\|)$ uzayı için de sırasıyla sınırlı, yakınsak ve Cauchy dizisidir ve aynı zamanda tersi de doğrudur.

Tanım 1.17. [8] $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer bu uzayda alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayın bir elemanına yakınsıyor ise $(X,\|.\|)$ uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Sonuç 1.18. [9] (X,d) metrik vektör uzayı ve d metriği öteleme ve mutlak homojenlik koşullarını sağlasın. Bu durumda $x \in X$ için

$$\|x\| = d(x,\theta)$$

olmak üzere $(X,\|.\|)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Sonuç 1.19. [8]

(i) ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in IN} |x_k|$$

normu ile birlikte birer Banach uzayıdırlar.

(ii) $p \geq 1$ olmak üzere ℓ_p dizi uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.20. [10] X bir lineer topolojik dizi uzayı olmak üzere $\forall n \in IN$ için

$$p_n : X \to IR$$
$$x \mapsto p_n(x) = x_n$$

şeklinde tanımlı koordinat dönüşümleri sürekli ise X dizi uzayına **K-uzayı** (Koordinat Uzayı) denir.

Tanım 1.21. [10] X bir **K-uzayı** olsun. Ayrıca X tam lineer metrik uzay ise X dizi uzayına **FK-uzayı** (Fréchet Koordinat Uzayı) denir.

Tanım 1.22. [10] X bir FK- uzayı olsun. Ayrıca X uzayının metriği normlanabiliyorsa bu uzaya **BK-uzayı** (Banach Koordinat Uzayı) denir.

Örnek 1.23. [10] ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in IN} |x_k|$$

normuna göre, ℓ_p dizi uzayı da

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre birer BK-uzayıdırlar.

Tanım 1.24. [10] w ve ϕ ile sırasıyla , tüm kompleks ve sonlu dizilerin kümesini göstersin. $X \subset w$ bir Banach uzayı ve $\forall n \in IN$ için p_n :x→x_n izdüşüm fonksiyonu sürekli ise bu uzay aynı zamanda bir BK uzayıdır. Bir BK uzayı olan $X \supset \phi$ her $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in X$ dizisi için $x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} x_k e^{(k)} \to x \quad (m \to \infty)$ ise X uzayına AK özelliğine sahiptir denir. Burada e=(1,1,1…) ve $(n = 0,1,\ldots)$ için $e^{(n)}$, $e_n^{(n)} = 1$ ve $e_k^{(n)} = 0 \quad (k \neq n)$ şeklindedir.

Tanım 1.25. [8] $\left(X, \|.\|_X\right)$ normlu uzay ve (y_k) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\| x-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k y_k \right\|_X = 0$$

olacak şekilde bir tek (λ_k) skaler dizisi varsa (y_k) dizisine X dizi uzayının ***Schauder Bazı*** denir. Burada ,

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k y_k$$

gösterimine x dizisinin (y_k) ***Schauder bazına*** göre açılımı denir.

Örnek 1.26. [8]

$e^{(0)}=(1,0,0,\ldots)$, $e^{(1)}=(0,1,0,\ldots)$, $e^{(2)}=(0,0,1,\ldots)$ $\ldots$ olmak üzere $\left(e^{(k)}\right)$ dizisi c_0 ve ℓ_p dizi uzayları için birer ***Schauder bazıdır.***

Gerçekten, $\forall n\in IN$ için

$$x^{[n]}=\sum_{k=0}^{n}x_k e^{(k)}=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$$

ifadesi x dizisinin n. kısmını göstersin. Buna göre

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x-x^{[n]}\right\|_{c_0}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x-x^{[n]}\right\|_{\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k>n}|x_k|=0$

olacağından $\left(e^{(k)}\right)$ dizisi c_0 dizi uzayı için bir ***Schauder bazıdır.***

(ii) Yakınsak her seride kalan terimin limitinin sıfır olacağı göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-x^{[n]}\right\|_{\ell_p}=\lim_{n\to\infty}\left\|x-x^{[n]}\right\|_{p}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0$$

elde edilir. Bundan dolayı $\left(e^{(k)}\right)$ dizisi ℓ_p dizi uzayı için bir ***Schauder bazıdır***.

Örnek 1.27. [8] $e^{(0)} = (1,0,0,\dots)$, $e^{(1)} = (0,1,0,\dots)$, $e^{(2)} = (0,0,1,\dots)$ … ve $e = (1,1,1,...)$ olmak üzere $\{e, e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, ...\}$ kümesi c dizi uzayı için bir ***Schauder bazıdır***.

Gerçekten, $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ olmak üzere $\forall n \in IN$ için

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} (x_k - l) e^{(k)} = (x_0 - l, x_1 - l, x_2 - l, ..., x_n - l, 0, 0, ...)$$

İfadesini göz önüne alırsak bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - le - x^{[n]} \right\|_c = \lim_{n\to\infty} \left\| x - le - x^{[n]} \right\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} |x_k - l| = 0$$

olacağından $\{e, e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, ...\}$ kümesi c dizi uzayı için bir ***Schauder bazıdır***.

Tanım 1.28. [11] $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

olmak üzere , $\forall n \in IN$ için

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$$

şeklinde bir (t_n) dizisi tanımlayalım. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} t_n = L$$

ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi L değerine 1. mertebeden Cesàro toplanabilirdir denir ve bu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L(C,1)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 1.29. [11] $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ serisi $\frac{1}{2}$ değerine 1. mertebeden Cesàro toplanabilirdir.

Bu serinin kısmi toplamlar dizisi $\forall n \in IN$ için

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

elde edilir. (s_n) dizisinin yakınsak olmadığı açıktır.

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1}\right)$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \frac{1}{2}(C,1)$$

yazılabilir.

Tanım 1.30. [12] $A=(a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x=(x_n)\in w$ herhangi bir dizi olsun. Buna göre A matrisi ve x dizisinin çarpımı

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0k} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k}x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpımın anlamlı olması $\forall n \in IN_0$ için

$$\left(Ax\right)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serilerinin yakınsak olmasıyla mümkündür. Burada $y = \left(y_n\right) = \left(\left(Ax\right)_n\right)$ şeklinde tanımlı diziye $x = \left(x_n\right)$ dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi veya kısaca **A-dönüşümü** denir.

Tanım 1.31. [10] $A = \left(a_{nk}\right)$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve X de herhangi bir dizi uzayı olsun. $A = \left(a_{nk}\right)$ matrisinin X dizi uzayı üzerindeki etki alanı X_A ile gösterilir ve

$$X_A = \left\{x = \left(x_k\right) \in w : Ax \in X\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.32. [10] $A = \left(a_{nk}\right)$ sonsuz bir matris olsun.

$$c_A = \left\{x = \left(x_k\right) \in w : Ax \in c\right\}$$

şeklinde tanımlı kümeye $A = \left(a_{nk}\right)$ matrisinin toplanabilirlik alanı denir.

Tanım 1.33. [10] Toplam matrisi $S = \left(s_{nk}\right)$ $\forall n, k \in IN_0$ için

$$s_{nk} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ile tanımlı olmak üzere

$$cs = \left\{x = \left(x_k\right) \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c\right\} = c_S$$

ve

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\} = (\ell_\infty)_S$$

uzaylarına sırasıyla, yakınsak ve sınırlı seri teşkil eden dizi uzayları denir.

Tanım 1.34. [10] X ve Y herhangi iki dizi uzayı olsun. Buna göre X ve Y nin çarpım kümesi

$$M(X,Y) = \{ y = (y_k) \in w : \forall x \in X, xy = (x_k y_k) \in Y \}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu ve yukarıdaki tanım göz önüne alınırsa keyfi bir X dizi uzayının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-duali$ sırasıyla

$$X^\alpha = M(X, \ell_1),\ \ X^\beta = M(X, cs) \ \text{ ve } \ X^\gamma = M(X, bs)$$

şekillerinde tanımlanır.

$\ell \subset cs$ ve yakınsak her dizi aynı zamanda sınırlı olacağından $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ olacağı açıktır.

Ayrıca $Y \subset X$ ise $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere $X^\xi \subset Y^\xi$ kapsamaları geçerlidir.

Lemma 1.35. [10] $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere

(i) $c_0^\xi = c^\xi = \ell_\infty^\xi = \ell$

(ii) $1 < p, q < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ için $\ell_p^\xi = \ell_q$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 1.36. [10] X ve Y herhangi iki dizi uzayı olmak üzere X ile Y arasındaki matrislerin sınıfı

$$(X,Y) = \{ A = (a_{nk}) \mid \forall x \in X, Ax \in Y \}$$

şeklinde tanımlanır . Bu takdirde $A=\left(a_{nk}\right)_{n,k=0}^{\infty}$ kompleks sonsuz matris yardımıyla $x=\left(x_k\right)$ dizisinin

$$A_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_k$$

dönüşüm dizisini göz önüne alalım . $A\left(x\right)=\left(A_n\left(x\right)\right)_{n=0}^{\infty}$ olmak üzere,

$A\in\left(X,Y\right)\Leftrightarrow$ $\forall n\in IN$ ve $\forall x\in X$ için $A_n\left(x\right)$ yakınsak ve $A\left(x\right)\in Y$ olmasıdır.

Biz çalışmalarımızda genel olarak üçgensel matrislerin etki alanlarıyla ilgileneceğiz. Bundan dolayı üçgen matrisin tanımını verelim.

Tanım 1.37. [12] $\forall n,k\in IN_0$ için $t_{nk}\in IR$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $T=\left(t_{nk}\right)_{n,k=0}^{\infty}$ sonsuz bir matris olsun. Eğer $\forall n,k\in IN_0$ için $k>n$ olduğunda $t_{nk}=0$ ve $t_{nn}\neq 0$ ise $T=\left(t_{nk}\right)_{n,k=0}^{\infty}$ matrisine **üçgen matris** denir.

Böyle bir matrisin tersi vardır.([10, 1.4.8, s. 9], [12, Uyarı 22 (a), s. 22]). Çalışmamız boyunca, üçgensel matrisleri *T*, tersini *S* ve *S* nin transpozunu da *R* ile göstereceğiz .

Eğer $X\supset\phi$ bir BK uzayı ve $a\in w$ ise

$$\left\|a\right\|_x^*=\sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx_k\right|:\left\|x\right\|=1\right\}$$

yazarız.

Tanım 1.38. [8] *X* ve *Y* normlu uzaylar olsun. $X\rightarrow Y$ olan tüm sınırlı (sürekli) lineer operatörlerin kümesi $B\left(X,Y\right)$ ile gösterilsin. Yani,

$$B\left(X,Y\right)=\{L|\ L:X\rightarrow Y \text{ sınırlı (sürekli) lineer}\}$$

olsun. Bu takdirde $B\left(X,Y\right)$, $\left\|L\right\|=\sup_{x\in S_X}\left\|L\left(x\right)\right\|_Y$ normuna göre bir Banach uzayıdır. Burada S_X, X de birim küre olarak tanımlanır.

Lemma 1.39. [13] $X \supset \phi$ ve Y bir $BK-uzayı$ olsun. O zaman $(X,Y) \subset B(X,Y)$, yani, her $A \in (X,Y)$ matrisi her $x \in X$ için $L_A(x) = Ax$ tarafından bir $L_A \in B(X,Y)$ operatörü tanımlar.

Lemma 1.40. [14] *T* bir üçgensel matris olsun. Bu takdirde

(a) X , $Y \subset w$ için $A \in (X, Y_T) \Leftrightarrow B = TA \in (X,Y)$ olmasıdır.

(b) Eğer X ve Y birer BK uzayı ve $A \in (X, Y_T) \Rightarrow \|L_A\| = \|L_B\|$ dir.

İspat:

(a) İspatın (a) kısmı açıktır.

(b) $A \in (X, Y_T)$ olsun. Y bir BK uzayı ve *T* üçgensel matris olduğu için Y_T

$$\|y\|_{Y_T} = \|T(y)\|_Y \quad (y \in Y_T) \tag{1.1}$$

normu ile birlikte bir BK uzayıdır. Böylece A ve B sürekli olduğundan

$$\|L_A\| = \sup\left\{\|L_A(x)\|_{Y_T} : \|x\| = 1\right\} = \sup\left\{\|A(x)\|_{Y_T} : \|x\| = 1\right\} < \infty \tag{1.2}$$

$$\|L_B\| = \sup\left\{\|L_B(x)\|_Y : \|x\| = 1\right\} = \sup\left\{\|B(x)\|_Y : \|x\| = 1\right\} < \infty \tag{1.3}$$

eşitliklerini yazarız.

Diğer taraftan $x \in X$ olsun. Her $n = 0,1,\ldots$ için $A_n \in X^\beta$ olduğu için $x \in w_A$ elde ederiz. Daha sonra T üçgensel matris olduğundan $(n = 0,1,\ldots)$ için $T_n \in \phi$ dir. Böylece $B(x) = (TA)(x) = T(A(x))$ dir. (1.1),(1.2) ve (1.3) den (b) elde edilir.

Lemma 1.41. [15] $X \supset \phi$ bir $BK-uzayı$ ve Y ; c_0, c ya da ℓ_∞ uzaylarından herhangi biri olsun. $A \in (X,Y)$ ise bu takdirde;

$$\|L_A\| = \|A\|_{(X,\ell_\infty)} = \sup_n |A_n|_X^* < \infty \ .$$

Lemma 1.42. [14] X ; c_0, c ya da ℓ_∞ uzaylarından herhangi biri olarak gösterilsin. Eğer $X^\beta = \ell_1$ ise bu takdirde her $a \in \ell_1$ dizisi için $\|a\|_X^* = \|a\|_{\ell_1}$.

Tanım 1.43. [9] (X,d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer *M*'deki her (x_n) dizisinin *M*'de yakınsak bir alt dizisi varsa *M*'ye **kompakttır** denir.

Tanım 1.44. [14] X ve Y iki Banach uzayı ve $L: X \to Y$ bir lineer operatör ve $T(L) = X$ olsun. Eğer X de sınırlı her $(x_n) \in X$ dizisi için $(L(x_n))$ dizisi *Y* de yakınsak bir alt diziye sahip ise L operatörüne **Kompakt'tır** denir. Bu şekildeki operatörlerin sınıfı *K(X,Y)* ile gösterilir. (Burada *T(L)* , *L*' nin tanım kümesini göstermektedir.)

Tanım 1.45. [14] *(X,d)* bir metrik uzay, $Q \subset X$ sınırlı bir küme ve $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ x merkezli r yarıçaplı açık bir yuvar olsun. Q nun kompaktsızlığının Hausdorff ölçüsü $\chi(Q)$ ile gösterilir ve

$$\chi(Q) = \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)\ , x_i \in X\ , r_i < \varepsilon\ \ ,(i = 1, \ldots, n; n \in IN)\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.46. [14] *Q*, *Q₁* ve *Q₂*, (X,d) metrik uzayının sınırlı alt kümeleri olsun. Bu takdirde

$$\chi(Q) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ total sınırlıdır}$$

$$\chi(Q) = \chi(\bar{Q})$$

$$Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$$

$$\chi(Q_1 \cup Q_2) = \max\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$$

$$\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$$

ifadeleri sağlanır.

Teorem 1.47. [14] Q, Q_1 ve Q_2, X normlu uzayının sınırlı alt kümeleri olsun. Bu takdirde

$$\chi(Q_1+Q_2)\leq\chi(Q_1)+\chi(Q_2)$$

$$\chi(Q+x)=\chi(Q)\quad(\forall x\in X)$$

$$\chi(\lambda.Q)=|\lambda|.\chi(Q)\quad \text{her } \lambda\in ¢ \text{ için}$$

ifadeleri sağlanır.

Tanım 1.48. [14] X ve Y herhangi iki Banach uzayı ve χ_1 ve χ_2 de X ve Y üzerinde Hausdorff ölçüleri olsun. Eğer X in sınırlı her Q alt kümesi için $L(Q)$, Y de sınırlı ve

$$\chi_2(L(Q))\leq K.\chi_1(Q)$$

olacak şekilde pozitif bir K sabiti varsa $L:X\rightarrow Y$ operatörüne $(\chi_1,\chi_2)-$*sınırlı* denir.

Eğer $L:X\rightarrow Y$ operatörü $(\chi_1,\chi_2)-$*sınırlı* ise

$$\|L\|_{(\chi_1,\chi_2)}=\inf\{K>0\,|\,\chi_2(L(Q))\leq K\chi_1(Q), \textit{sınırlı her } Q\subset X \textit{ için}\}$$

ifadesine L nin kompaktsızlığının $(\chi_1,\chi_2)-$*ölçüsü* denir. Özel olarak $\chi_1=\chi_2=\chi$ ise $\|L\|_{(\chi_1,\chi_2)}=\|L\|_\chi$ yazılır.

Lemma 1.49. [14] X ve Y iki Banach uzayı ve $L\in B(\mathrm{X},Y)$ olsun. Bu takdirde,

$$\|L\|_\chi=\chi(L(\overline{B}_X))=\chi(L(S_X)) \tag{1.4}$$

$$L\in K(X,Y)\Leftrightarrow\|L\|_\chi=0 \tag{1.5}$$

$$\|L\|_\chi\leq\|L\| \tag{1.6}$$

ifadeleri sağlanır.

Lemma 1.50.($Golden\check{s}tein,\ Gohberg,\ Markus$). [14] $X,\ \{e_1,e_2,\ldots\}$ Schauder bazına sahip bir Banach uzayı, $Q \subset X$ sınırlı bir küme ve $P_n : X \to X$ $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ kümesinin lineer gereni üzerine bir dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{a}\limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\left\|(I-P_n)(x)\right\|\right) \le \chi(Q) \le \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\left\|(I-P_n)(x)\right\|\right), \tag{1.7}$$

olur. Burada $a = \limsup_{n\to\infty}\left\|I-P_n\right\|$ dir .

Lemma 1.51. [16] X sonsuz boyutlu normlu bir uzay ve B_X, X 'in kapalı birim yuvarı olsun. Bu takdirde

$$\chi(B_X) = 1$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 1.52. [5] X, AK özellikli bir BK uzayı ve $L \in B(X,c)$ olsun. Bu takdirde $\forall n \in IN$ ve $\forall x \in X$ için

$$\left(L(x)\right)_n = A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

şeklinde bir $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ kompleks matris ile gösterilebilirdir.

L nin kompaktsızlığının Hausdorff ölçüsü,

$$\frac{1}{2}.\limsup_{r\to\infty}\left(\sup_{n\ge r}\left\|A_n-\alpha\right\|_X^*\right) \le \left\|L\right\|\chi \le \limsup_{r\to\infty}\left(\sup_{n\ge r}\left\|A_n-\alpha\right\|_X^*\right) \tag{1.8}$$

şeklindedir. Burada,

$$\forall k \in IN \ \text{ ve } \ \forall \alpha = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \ \text{skaler dizisi için} \quad \lim_{k\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \ . \tag{1.9}$$

Lemma 1.53. [17] X, $1 \le p < \infty$ için ℓ_p ya da c_0 dizi uzaylarından herhangi biri olmak üzere Q, normlu X uzayının sınırlı bir alt kümesi olsun. Eğer; $\forall x = (x_k) \in X$ için

$$\begin{aligned} p_r : \quad & X \to X \\ & x \mapsto p_r(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir operatör ise bu takdirde,

$$\chi(Q) = \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\left\|(I - p_r)(x)\right\|_{\ell_\infty}\right),$$

olur. Burada I, X de birim operatördür.

[14, Teorem 1.10] dan biliyoruz ki $z = \overline{z}e + \sum_n^\infty (z_n - \overline{z})e^{(n)}$ şeklinde tanımlıdır ve $\forall z = (z_k) \in c$ tek bir gösterime sahiptir.

Burada $\lim_{n\to\infty} z_n = \overline{z}$ dir.

Böylece $\forall z = (z_k) \in c$ ve $(r \in IN)$ için

$$\begin{aligned} p_r : \quad & c \to c \\ & z \mapsto p_r(z) = \overline{z}e + \sum_{n=0}^{r} (z_n - \overline{z})e^{(n)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Bu durumda BK- uzayı olan c dizi uzayının kompaktsızlığının Hausdorff ölçüsü için aşağıdaki sonuç ifade edilebilirdir.

Lemma 1.54. [13] Q, c dizi uzayında sınırlı bir küme ve $p_r : c \to c$ $(r \in IN)$, $\left(e^{(0)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(r)}\right)$ kümesinin lineer gereni üzerine bir projektör olsun. Bu takdirde,

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\left\|(I - p_r)(x)\right\|_{\ell_\infty}\right) \le \chi(Q) \le \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in Q}\left\|(I - p_r)(x)\right\|_{\ell_\infty}\right), \tag{1.10}$$

Burada I, c de birim operatör.

Lemma 1.55. [18] X AK özellikli bir BK uzayı ve $R = S^t$ olsun. Eğer $a \in (X_T)^\beta$ ise bu takdirde, her $x \in X_T$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(a) T_k(x)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 1.56. [2] X ; c_0 ya da ℓ_∞ uzaylarından herhangi biri olarak gösterilsin. Eğer $A \in (X, c)$ ise,

$$\forall k \in IN \text{ için} \lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k \text{ vardır,}$$

$$\alpha = (\alpha_k) \in \ell_1 \ ,$$

$$\sup_n \left(\sum_k^{\infty} |a_{nk} - \alpha_k| \right) < \infty \ ,$$

$$\forall x = (x_k) \in X \text{ için } \lim_{n\to\infty} A_n = \sum_k^{\infty} \alpha_k x_k \ .$$

Lemma 1.57. [19] $X \supset \phi$ bir $BK-uzayı$ olsun. Bu takdirde,

(a) Eğer $A \in (X, c_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \limsup_{n\to\infty} \|A_n\|_\chi^*$$

(b) Eğer $A \in (X, \ell_\infty)$ ise

$$0 \le \|L_A\|_\chi \le \limsup_{n\to\infty} \|A_n\|_\chi^*$$

ifadeleri sağlanır.

Şimdi, F ; IN nin bütün sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olarak tanımlansın ve $F_r\,(r \in IN)$, r den daha büyük elemanlar ile IN nin boştan farklı bütün alt kümelerinden oluşan F nin bir alt kolleksiyonu olsun.

Lemma 1.58. [20] $X \supset \phi$ bir $BK-uzayı$ olsun. Eğer $A \in (X, \ell_1)$ ise

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} = \|L_A\| \leq 4\|A\|_{(X,\ell_1)} ,$$

burada

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} = \sup_{N \in F} \left\| \sum_{n \in N}^{\infty} A_n \right\|_X^* < \infty$$

şeklindedir.

Lemma 1.59. [2] $x = (x_k) \in \ell_1$ olsun. O zaman

$$\sup_{N \in F_r} \left| \sum_{n \in N}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} |x_n| \leq 4. \sup_{N \in F_r} \left| \sum_{n \in N}^{\infty} x_n \right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 1.60. [10] $(X, \|.\|)$ bir BK- uzayı olsun. Eğer $\|.\|_T = \|T(.)\|$ ise X normlu dizi uzayının etki alanı olan X_T de bir BK- uzayıdır.

Uyarı 1.61. [18] X normlu dizi uzayının etki alanı olan X_T nin bir baza sahip olması için gerek ve yeter şart X in bir baza sahip olmasıdır.

2. BÖLÜM

B(r,s) MATRİSİ İLE İLGİLİ BAZI UZAYLARDA KOMPAKT OPERATÖRLER

2.1. B(r,s) Matrisinin Etki Alanı Yardımıyla Oluşturulan Bazı Dizi Uzayları

Bu bölümde Cesàro matrisinin Maddox dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla w_0^p, w^p ve w_∞^p şeklinde dizi uzayları tanımlanacaktır. Δ fark matrisinin w_0^p, w^p ve w_∞^p dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla $w_0^p(\Delta), w^p(\Delta)$ ve $w_\infty^p(\Delta)$ şeklinde dizi uzayları tanımlanacaktır. Δ fark matrisi, $r=1$ ve $s=-1$ için $B(r,s)$ ikili band matrisinin özel halidir. $B(r,s)$ ikili band matrisinin w_0^p, w^p ve w_∞^p dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla $w_0^p(r,s), w^p(r,s)$ ve $w_\infty^p(r,s)$ şeklinde dizi uzayları tanımlanacaktır. Elde edilen bu uzaylardan bazıları için matris sınıfları karakterize edilecektir. Son olarak bu uzaylar ile klasik dizi uzayları arasında tanımlı operatörlerin hangi şartlar altında kompakt olduğu incelenecektir.

Bu tip çalışmalara, X ve Y herhangi iki FK- uzayı olmak üzere $(X,Y) \subset B(X,Y)$, yani her $A \in (X,Y)$ matrisinin $L_A(x) = A(x)$, $L_A \in B(X,Y)$ olacak şekilde lineer bir operatör tanımlanması zemin hazırlamıştır. Kompakt operatör tanımlamak için, FK-uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin şartlarını belirlemek gerekir. Bu, kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsünü kullanmakla başarılabilir.

$C = (c_{nk})$ Cesàro matrisi $\forall n,k \in IN_0$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere [21] ve [22] numaralı kaynaklarda

$$(c_0)_C = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k = 0 \right\}$$

$$(c)_C = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k mevcut \right\}$$

$$(\ell_\infty)_C = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n\in IN} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}$$

dizi uzayları tanımlanmıştır. $p = (p_k)$ pozitif sayıların sınırlı dizisi olmak üzere; Maddox dizi uzayları

$$c_0(p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} |x_k|^{p_k} = 0 \right\}$$

$$c(p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} |x_k|^{p_k} \; mevcut \right\}$$

$$\ell_\infty(p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k\in IN} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

$1 \le p < \infty$ olsun. [23] numaralı kaynakta Maddox tarafından kuvvet C_1 −sıfıra toplanabilir, kuvvet C_1 −toplanabilir ve kuvvet C_1 −sınırlı dizilerin kümeleri sırasıyla w_0^p, w^p ve w_∞^p ile gösterilmiştir.

$$w_0^p = \left\{ x = (x_k) \in w \,|\, \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right) = 0 \right\}$$

$$w^p = \left\{ x = (x_k) \in w \,|\, \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell|^p \right) = 0 \; bazı\, kompleks\, \ell\, sayısı\, için \right\}$$

ve

$$w_\infty^p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right) < \infty \right\}$$

Maddox bu tür tanımlı uzayları elde etti ve bu uzaylar üzerinde çalıştı. Tüm bu uzaylar

$$\|x\| = \sup_{v\geq 0}\left(\frac{1}{2^v}\sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

normu ile birlikte BK uzayıdır . w_0^p AK özelliklidir, ve her $x \in w^p$ dizisi tek bir gösterime sahiptir.

$$x = \ell.e + \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - \ell)e^{(k)}$$

Burada $\lim_{k\to\infty}(x_k) = \ell$ dir.

[24] numaralı kaynakta yazarlar üçgensel matrislerin etki alanlarından elde edilen dizi uzayları üzerinde çalışmışlardır. $\Delta = (a_{nk})$ Fark matrisi $\forall n,k \in IN_0$ için

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n \\ -1, & k = n-1 \\ 0, & D.D. \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere [25] numaralı kaynakta Δ fark matrisinin w_0^p, w^p ve w_∞^p dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla sırasıyla $w_0^p(\Delta), w^p(\Delta)$ ve $w_\infty^p(\Delta)$ uzayları elde edildi ve çalışıldı.

Bazı bilim adamları bu uzaylarda kompakt operatörlerin sınıflarının karakterizasyonu üzerine gayretle çalışmışlardır. Fakat çalışmaları yalnızca bu değildir. Amaç yeni bir $B(r,s)(r \neq 0)$ matrisi ile adı geçen bu matris yerine genelleme yapmaktır.

$$B(r,s) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \dots \\ s & r & 0 & \dots \\ 0 & s & r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$B(r,s)$ matrisinde özel olarak $r=1$ ve $s=-1$ alırsak, Δ matrisini elde ederiz. $B(r,s)$ matrisi üçgensel bir matris olup dolayısıyla tersi mevcuttur. Ters matrisi $S=(s_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ ile gösterelim. Bu takdirde kolay bir hesaplama ile,

$$s_{nk}=\begin{cases}\dfrac{(-s)^{n-k}}{r^{n-k+1}} & ,1\le k\le n\\ 0 & ,k>n\end{cases}$$

olduğu görülür. $B(r,s)$ matrisinin w_0^p, w^p ve w_∞^p dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla sırasıyla $w_0^p(r,s), w^p(r,s)$ ve $w_\infty^p(r,s)$ dizi uzayları elde edilir, yani; $w_0^p(r,s)=\left(w_0^p\right)_{B(r,s)}, w^p(r,s)=\left(w^p\right)_{B(r,s)}$ ve $w_\infty^p(r,s)=\left(w_\infty^p\right)_{B(r,s)}$ şeklindedir. [26]

(X_T,Y) sınıflarının karakterizasyonu için aşağıdaki sonuçlar önemlidir.

Lemma 2.1.1. [24]

(a) $X=w_0^p$ ya da $X=w_\infty^p$ ve *Y*, *w* nın keyfi bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $A\in(X_T,Y)\Leftrightarrow$ her $n=1,2,\dots$, için $\hat{A}\in(X,Y)$ ve $W^{(n)}\in(X,c_0)$ olmasıdır. Burada $\hat{A}=(\hat{a}_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ ve $W^{(n)}=\left(w_{mk}^{(n)}\right)_{m,k=1}^{\infty}$ üçgensel matrisleri $\forall n,k\in IN$ için

$$\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}s_{jk}=\hat{a}_{nk}$$

ve her $1\le k\le m$ için

$$\sum_{j=m}^{\infty}a_{nj}s_{jk}=w_{mk}^{(n)}$$

ile tanımlanır. Üstelik, eğer $A\in(X_T,Y)$ ise bu takdirde

$$\forall z\in Z=X_T \text{ için } Az=\hat{A}(Tz) \text{ olur.}$$

(b) *Y*, *w* nın keyfi lineer bir alt uzayı olsun. Bu takdirde

$$A \in \left(w^p \left(T \right), Y \right) \Leftrightarrow \quad \hat{A} \in \left(w_0^p, Y \right) \text{, her } n \text{ için } W^{(n)} \in \left(w^p, c \right)$$

ve $\hat{A}e - \left(\rho_n \right)_{n=1}^{\infty} \in Y$ olmasıdır. Burada $\forall n \in IN$ için

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} w_{mk}^{(n)} = \rho_n \ .$$

Daha ileri olarak, eğer $A \in \left(w^p \left(T \right), Y \right)$ ise bu takdirde $\forall z \in w^p \left(T \right)$ için,

$$Az = \hat{A}\left(Tz \right) - \xi \left(\rho_n \right)_{n=1}^{\infty} \tag{2.1}$$

burada $\xi \in \mathbb{C}$ $w^p \left(T \right)$ de z nin kuvvetli limitidir, yani

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| T_k z - \xi \right|^p = 0. \tag{2.2}$$

Burada biz uygun sınıfların karakterizasyonu ile ilgili kısmı çıkaracağız. Daha önceki teorem ve [27] numaralı kaynaktaki sonuçtan bu kolayca elde edilebilir. $T = B(r,s)$ koyarak koşullar elde edeceğiz ve bundan dolayı aşağıdaki eşitlikleri kullanırsak:

$$\hat{a}_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} . \frac{\left(-s \right)^{j-k}}{r^{j-k+1}} \quad \text{her } n, k \in IN \text{ için;} \tag{2.3}$$

$$w_{mk}^{(n)} = \sum_{j=m}^{\infty} a_{nj} . \frac{\left(-s \right)^{j-k}}{r^{j-k+1}} \quad 1 \le k \le m \text{ için;} \tag{2.4}$$

Gerekli ve yeterli koşulları elde etme süresince bunları varsayacağız, yani, matris dönüşümlerinin uygun sınıflarının karakterizasyonları var.

Önerme 2.1.2. [24] Kısalık olması açısından, $\max_v = \max_{2^v \le k \le 2^{v+1}-1}$, $\sum_v = \sum_{k=2^v}^{2^{v+1}-1}$

$v = 0,1,\ldots$ ve $\mathrm{M}_p = \left\{ a \in w : \left\| a \right\|_{\mathrm{M}_p} < \infty \right\}$, gösterelim. Burada

$$\|a\|_{M^p} = \begin{cases} \sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v |a_k| & (p=1) \\ \sum_{v=0}^{\infty} 2^{\frac{v}{p}} \left(\sum_{v} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} & (1 < p < \infty;\ q = p/(p-1)) \end{cases}$$

şeklindedir.

$X = w_0^p$ ya da $X = w_\infty^p$ olsun. Eğer $a \in (X_T)^\beta$ ise bu takdirde

$$\|a\|_{X_T}^{*} = \|Ra\|_{M_p}. \tag{2.5}$$

Eğer $a \in \left(w^p(T)\right)^\beta$ ise

$$\|a\|_{w^p(T)}^{*} = \|Ra\|_{M_p} + |\eta| \tag{2.6}$$

Burada $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=m}^{\infty} a_j s_{jk} = \eta$

Burada $T = B(r,s)$ alınırsa

$$Ra = (R_k a)_{k=0}^{\infty} = \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_j \frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}} \right)_{k=0}^{\infty}$$

elde edilir.

2.2. Kompakt Operatörlerin Belirli Alt Sınıflarının Karakterizasyonu

Burada asıl amaç kompakt operatörlerin belirli alt sınıflarının karakterizasyonudur. X ; $w_0^p(r,s)$, $w_\infty^p(r,s)$ ya da $w^p(r,s)$ uzaylarından herhangi biri ve Y c_0, ℓ_∞ ya da c klasik dizi uzaylarından herhangi biri olmak üzere (X,Y) sınıfını göz önüne alınır. X uzayına göre $w_0^p(r,s)$ ve $w_\infty^p(r,s)$ dizi uzayları aynı β- dualine sahiptir. (Önerme 2.1.2, (2.6)), $K(X,Y)$ sınıfını tanımlamayı iki duruma ayıracağız.

Teorem 2.2.1. [26] X ; $w_0^p(r,s)$ ya da $w_\infty^p(r,s)$ uzaylarından herhangi biri ve $m=1,2,\ldots$ için

$$\left\|A^{\langle m\rangle}\right\| = \begin{cases} \sup\limits_{n>m}\left(\sum\limits_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left|\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_{nj}\,\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right|\right) & (p=1) \\ \sup\limits_{n>m}\left(\sum\limits_{v=0}^{\infty} 2^{\frac{v}{p}}\left(\sum_v \left|\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_{nj}\,\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) & (1<p<\infty) \end{cases} \tag{2.7}$$

ve

$$\left\|A_c^{\langle m\rangle}\right\| = \begin{cases} \sup\limits_{n>m}\left(\sum\limits_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left|\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_{nj}\cdot\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}} - \hat{\alpha}_k\right|\right) & (p=1) \\ \sup\limits_{n>m}\left(\sum\limits_{v=0}^{\infty} 2^{\frac{v}{p}}\left(\sum_v \left|\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_{nj}\cdot\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}} - \hat{\alpha}_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) & (1<p<\infty) \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanmış olsunlar. Bu takdirde,

(a) Eğer $A\in(X,c_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{m\to\infty}\left\|A^{\langle m\rangle}\right\| \tag{2.9}$$

(b) Eğer $A\in(X,\ell_\infty)$ ise

$$0\le \|L_A\|_\chi \le \lim_{m\to\infty}\left\|A^{\langle m\rangle}\right\| \tag{2.10}$$

(c) Eğer $A\in(X,c)$ ise

$$\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\left(\left\|A_c^{\langle m\rangle}\right\|\right)\le \|L_A\|_\chi \le \lim_{m\to\infty}\left(\left\|A_c^{\langle m\rangle}\right\|\right) \tag{2.11}$$

ifadeleri sağlanır. Burada

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}.\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}} = \hat{\alpha}_k \quad (k=1,2,\ldots)$$

şeklindedir.

İspat: (a) Lemma 1.49 ve Lemma 1.53 birlikte uygulanırsa

$$\|L_A\|_\chi = \chi\left(L_A\left(\overline{B}_X\right)\right) = \lim_{m\to\infty}\left[\sup_{x\in\overline{B}_X}\left\|(I-P_m)(Ax)\right\|\right] \tag{2.12}$$

elde edilir. Burada $(m=0,1,\ldots)$ ve $x=(x_k)_{k=0}^{\infty}\in c_0$ için

$$\begin{aligned} P_m :\ & c_0 \to c_0 \\ & x \mapsto P_m(x) = x^{[m]} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir projektördür.

$A^{[m]} = (\overline{a}_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$

$$\overline{a}_{nk} = \begin{cases} 0 & (0\le n\le m) \\ a_{nk} & (n>m) \end{cases}$$

ile tanımlanan sonsuz bir matris olsun. $A^{[m]}\in(X,c_0)$ olduğu için $A_n^{[m]}\in X^{\beta}$ olur bundan dolayı Lemma 1.41 ve Önerme 2.1.2 tarafından

$$\left\|A_n^{[m]}\right\|_X^* = \left\|RA_n^{[m]}\right\|_{M^p} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \max_v \left|\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right| & (p=1) \\ \displaystyle\sum_{v=0}^{\infty} 2^{\frac{v}{p}}\left(\sum_v \left|\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} & (1<p<\infty) \end{cases} \tag{2.13}$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_{x\in \bar{B}_X}\left\|\left(I-P_m\right)\left(Ax\right)\right\|=\left\|L_{A^{[m]}}\right\|=\sup_{n>m}\left\|A_n^{[m]}\right\|_X^*=\left\|A^{\langle m\rangle}\right\|. \tag{2.14}$$

sonucuna varılır.

Böylece (2.9); (2.12) ve (2.14) den elde edilir.

(b) Lemma 1.52 bu kısım için oldukça önemlidir. $A\in\left(w_0^p\left(r,s\right),c\right)$ olsun. Daha sonra Lemma 2.1.1 dikkate alınırsa $\hat{A}\in\left(w_0^p,c\right)$ olur. Şimdi (Lemma 4.1, [4]) tarafından w_0^p AK özellikli BK uzayı olduğu bilindiğinden

$$\left\|L_A\right\|_\chi=\left\|L_{\hat{A}}\right\|_\chi$$

sonucuna varılır. Şimdi Lemma 1.52 uygulanırsa

$$\frac{1}{2}.\limsup_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}\left\|\hat{A}_n-\hat{\alpha}\right\|_{w_0^p}^*\right)\leq\left\|L_A\right\|_\chi=\left\|L_{\hat{A}}\right\|_\chi\leq\limsup_{m\to\infty}\left(\sup_{n\geq m}\left\|\hat{A}_n-\hat{\alpha}\right\|_{w_0^p}^*\right) \tag{2.15}$$

elde edilir.

Ayrıca (Lemma1, [27]) uygulanırsa

$$\left\|\hat{A}_n-\hat{\alpha}\right\|_{w_0^p}^*=\begin{cases}\displaystyle\sum_{v=0}^{\infty}2^v\max{}_v\left|\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}.\frac{\left(-s\right)^{j-k}}{r^{j-k+1}}-\hat{\alpha}_k\right| & (p=1)\\ \displaystyle\sum_{v=0}^{\infty}2^{\frac{v}{p}}\left(\sum{}_v\left|\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}.\frac{\left(-s\right)^{j-k}}{r^{j-k+1}}-\hat{\alpha}_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} & \left(1<p<\infty\right)\end{cases} \tag{2.16}$$

elde edilir. Böylece (2.11) ifadesi sağlanır. $A\in\left(w_\infty^p\left(r,s\right),c\right)$ durumunu dikkate alalım. Biliyoruz ki $w_0^p\left(r,s\right)\subset w_\infty^p\left(r,s\right)$, bundan dolayı $A\in\left(w_\infty^p\left(r,s\right),c\right)\Rightarrow A\in\left(w_0^p\left(r,s\right),c\right)$ ve (2.11) de eşitsizlikler yerine getirilir.

(c) Şimdi $A\in\left(X,\ell_\infty\right)$ olsun ve $\left(m=0,1,\ldots\right)$ ve $x=\left(x_k\right)_{k=0}^{\infty}\in\ell_\infty$ için

$$P_m : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$$
$$x \rightarrow P_m(x) = x^{[m]}$$

olacak şekilde projektörünü göz önüne alalım. Ayrıca $A^{[m]} = (\overline{a}_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ yukarıdaki yöntemle tanımlanmış sonsuz bir matris olsun. Eğer X bu uzaylardan herhangi biri ise $A^{[m]} \in (X, \ell_\infty)$ olduğu açıktır.

$$L_A(\overline{B}_X) \subset P_m(L_A(\overline{B}_X)) + (I - P_m)(L_A(\overline{B}_X)) \text{ olduğundan}$$

$$\chi(L_A(\overline{B}_X)) \leq \chi(P_m(L_A(\overline{B}_X))) + \chi((I-P_m)(L_A(\overline{B}_X))) = \chi((I-P_m)(L_A(\overline{B}_X)))$$

$$\leq \sup_{x\in\overline{B}_X} \left\|(I-P_m)(Ax)\right\| = \left\|L_{A^{[m]}}\right\| = \sup_{n>m} \left\|A_n^{[m]}\right\|_X^* = \sup_{n>m} \left\|RA_n^{[m]}\right\|_{M_p}$$

elde edilir.

$$0 \leq \left\|L_A\right\|_\chi = \chi(L_A(\overline{B}_X)) \leq \sup_{n>m} \left\|RA_n^{[m]}\right\|_{M^p} \text{ olduğu için ispat tamamlanır.}$$

Sonuç 2.2.2. [26]

(a) $\left\|A^{\langle m\rangle}\right\|$, (2.7) deki gibi olmak üzere eğer $A \in (w_0^p(r,s), c_0)$ veya $A \in (w_\infty^p(r,s), c_0)$ ise bu takdirde

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \left\|A^{\langle m\rangle}\right\| = 0 \tag{2.17}$$

(b) Eğer $A \in (w_0^p(r,s), \ell_\infty)$ veya $A \in (w_\infty^p(r,s), \ell_\infty)$ ise bu takdirde L_A nın kompakt olması için (2.17) deki şart yeterlidir.

(c) $\left\|A_c^{\langle m\rangle}\right\|$, (2.8) deki gibi olmak üzere eğer $A \in (w_0^p(r,s), c)$ veya $A \in (w_\infty^p(r,s), c)$ ise bu takdirde

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \left\|A_c^{\langle m\rangle}\right\| = 0 \tag{2.18}$$

İspat: İspat Teorem 2.2.1 ve (1.5) in doğrudan bir sonucudur.

Teorem 2.2.3. [26] $r=1,2,\ldots$ için

$$\left\|B^{\langle r\rangle}\right\|=\begin{cases}\sup\limits_{n>r}\left(\sum\limits_{v=0}^{\infty}2^{v}\max_{v}\left|\sum\limits_{j=k}^{\infty}a_{nj}\dfrac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right|+\left|\eta_n\right|\right) & (p=1)\\ \sup\limits_{n>r}\left(\sum\limits_{v=0}^{\infty}2^{\frac{v}{p}}\left(\sum_{v}\left|\sum\limits_{j=k}^{\infty}a_{nj}\dfrac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left|\eta_n\right|\right) & (1<p<\infty)\end{cases} \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Burada

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=m}^{\infty}a_{nj}\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}=\eta_n \qquad n=1,2,\ldots \quad \text{için} \tag{2.20}$$

şeklindedir. Bu takdirde

(a) Eğer $A\in\left(w^{p}(r,s),c_0\right)$ ise

$$\left\|L_A\right\|_{\chi}=\lim_{r\to\infty}\left\|B^{\langle r\rangle}\right\| \tag{2.21}$$

(b) Eğer $A\in\left(w^{p}(r,s),\ell_{\infty}\right)$ ise

$$0\le\left\|L_A\right\|_{\chi}\le\lim_{r\to\infty}\left\|B^{\langle r\rangle}\right\| \tag{2.22}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat: Teorem 2.2.1 deki metod uygulanırsa, ispat benzer şekilde yapılabilirdir. İspat boyunca tek fark:

$$\left\|A_n^{[r]}\right\|_{w^{p}(r,s)}^{*}=\begin{cases}\sum\limits_{v=0}^{\infty}2^{v}\max_{v}\left|\sum\limits_{j=k}^{\infty}a_{nj}\dfrac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right|+\left|\eta_n\right| & (p=1)\\ \sum\limits_{v=0}^{\infty}2^{\frac{v}{p}}\left(\sum_{v}\left|\sum\limits_{j=k}^{\infty}a_{nj}\dfrac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left|\eta_n\right| & (1<p<\infty)\end{cases}$$

almaktır. Burada $n=1,2,\ldots$ için

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=m}^{\infty}a_{nj}\frac{(-s)^{j-k}}{r^{j-k+1}}=\eta_n$$

şeklindedir.

Sonuç 2.2.4. [26] $\left\| B^{\langle r \rangle} \right\|$, (2.19) daki gibi tanımlanmış olmak üzere eğer

(a) $A \in \left(w^p\left(r,s\right), c_0 \right)$ ise bu takdirde

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \left\| B^{\langle r \rangle} \right\| = 0 \tag{2.23}$$

(b) $A \in \left(w^p\left(r,s\right), \ell_\infty \right)$ ise bu takdirde L_A nın kompakt olması için (2.23) deki şart yeterlidir.

İspat: İspat Teorem 2.2.3 ve (1.5) in doğrudan bir sonucudur.

3. BÖLÜM

ÜÇLÜ BAND MATRİSLERİNİN BAZI DİZİ UZAYLARINDA KOMPAKTSIZLIĞININ HAUSDORFF ÖLÇÜSÜ

Bu bölümde *B(r,s,t)* üçlü band matrisinin c_0 ve ℓ_∞ dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla $c_0(B)$ ve $\ell_\infty(B)$ şeklinde dizi uzayları tanımlanacaktır. Daha sonra kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü kullanılarak bu uzaylarda kompakt operatörlerin bazı sınıfları karakterize edilecektir.

3.1. c_0(B) ve ℓ_∞(B) Dizi Uzayları

r, s ve t sıfırdan farklı reel sayılar ve $B(r,s,t)=\{b_{nk}(r,s,t)\}$ üçlü band matrisi $\forall n,k \in IN$ için

$$b_{nk}=\begin{cases} r, & k=n \\ s, & k=n-1 \\ t, & k=n-2 \\ 0, & D.D. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre bu matrisin etki alanından faydalanarak, [28] numaralı kaynakta Sönmez tarafından

$$c_0(B)=\left\{x=(x_k)\in w : \lim_{k\to\infty}\left|rx_k+sx_{k-1}+tx_{k-2}\right|=0\right\}$$

$$\ell_\infty(B)=\left\{x=(x_k)\in w : \sup_{k\in IN}\left|rx_k+sx_{k-1}+tx_{k-2}\right|<\infty\right\}$$

dizi uzayları tanımlanmış, bu dizi uzaylarının

$$\|x\|_{\ell_\infty(B(r,s,t))} = \|B(r,s,t)(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |B_n(r,s,t)(x)| \tag{3.1}$$

normuna göre $BK-uzayları$ olduğunu göstermiştir.

Herhangi $x=(x_k)\in w$ dizisinin *B(r,s,t)* dönüşümü olarak $y=(y_k)$ dizisi yukarıda

$$y_k = rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$\lambda_{B(r,s,t)}$ ve λ normlu uzayları izomorfik iseler o zaman $x=(x_k)\in\lambda_{B(r,s,t)} \Leftrightarrow$ $y=(y_k)\in\lambda$ olduğu açıktır. Ayrıca $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ dizileri (3.2) ifadesi ile birlikte düşünülürse

$$\|x\|_{\ell_\infty(B(r,s,t))} = \|y\|_{\ell_\infty}$$

elde edilir. Burada λ ; c_0 veya ℓ_∞ dizi uzaylarından herhangi birini göstermektedir.

Eğer $(\|.\|, X)$ bir normlu dizi uzayı ise,

$$\|a\|_X^* = \sup_{x\in S_X} \sum_{k=n}^{\infty} |a_k x_k| \tag{3.3}$$

eşitliğini yazarız. Ayrıca X bir $BK-uzayı$ ve $a\in w$ için $a\in X^\beta$ olduğunda (3.3) ifadesi sınırlıdır. [20]

Lemma 3.1.1. [29] X ; $c_0(B)$ veya $\ell_\infty(B)$ uzaylarından herhangi biri olarak gösterilsin. Eğer $a=(a_k)\in X^\beta$ ise bu takdirde $\hat{a}=(\hat{a}_k)\in\ell_1$ ve $\forall x=(x_k)\in X$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k y_k \tag{3.4}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $y = B(r,s,t)(x)$ (3.2) deki gibi ve

$$\hat{a}_k = \frac{1}{r}\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=0}^{k-j}\left(\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{j-k-i}\left(\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{i} a_j$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Lemma 3.1.2. [29] X ile, $c_0(B)$ veya $\ell_\infty(B)$ uzaylarından herhangi birini göstersin. Bu takdirde $\forall a=(a_k)\in X^\beta$ için

$$\|a\|_X = \|\hat{a}\|_{\ell_1} = \sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_k| < \infty$$

elde ederiz. Burada $\hat{a}=(\hat{a}_k)$ lemma 3.1.1 deki gibidir.

İspat: Y, c_0 veya ℓ_∞ uzaylarından herhangi biri olsun ve keyfi bir $a=(a_k)\in X^\beta$ alalım. Bu takdirde Lemma 3.1.1 den dolayı her $x=(x_k)\in X$ ve $y=(y_k)\in Y$ dizileri için $\hat{a}=(\hat{a}_k)\in\ell_1$ ve (3.4) eşitliğini elde ederiz. Daha sonra (3.1) eşitliğinden $x\in S_X \Leftrightarrow y\in S_Y$ olur. Bu nedenle (3.3) ile (3.4) ü alırsak;

$$\|a\|_X = \sup_{x\in S_X}\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k\right| = \sup_{y\in S_Y}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\hat{a}_k y_k\right| = \|\hat{a}\|_Y ,$$

ve $\hat{a}\in\ell_1$ olduğu için Lemma 1.42 den

$$\|a\|_X^* = \|\hat{a}\|_Y^* = \|\hat{a}\|_{\ell_1}^* < \infty$$

elde edilir.

Lemma 3.1.3. [29] Z; bir dizi uzayı ve $A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris olmak üzere; X; $c_0(B)$ veya $\ell_\infty(B)$ uzaylarından birini, Y de; c_0 ya da ℓ_∞ uzaylarından birini göstersin. Eğer $A\in(X,Z)$ ise her $x\in X$ ve $y\in Y$ dizileri için $Ax=\hat{A}y$ olacak şekilde $\hat{A}\in(Y,Z)$ vardır. Burada $\hat{A}=(\hat{a}_{nk})$

$$\hat{a}_{nk} = \frac{1}{r}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-j}\left(\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{j-k-i}\left(\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{i} a_{nj} \tag{3.5}$$

ile tanımlı bir matristir.

İspat: [3, Lemma 2.3] deki gibi aynı yöntemle benzer bir şekilde ispatlanabilir.

Teorem 3.1.4. [29] X ; $c_0(B)$ veya $\ell_\infty(B)$ uzaylarından herhangi biri, $A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $\hat{A}=(\hat{a}_{nk})$ birleştirilmiş matris olsun. Eğer A; $(X,c_0),(X,c)$ ya da (X,ℓ_∞) sınıflarından herhangi biri ise bu takdirde

$$\|L_A\| = \|A\|_{(X,\ell_\infty)} = \sup_n\left(\sum_n|\hat{a}_{nk}|\right) < \infty \ .$$

İspat: Lemma 1.40 ve Lemma 3.1.2 birlikte düşünülürse ispat elde edilir.

3.2. c₀(B) ve ℓ∞(B) Uzaylarında Kompakt Operatörler

Bu alt bölümde, $c_0(B)$ ve $\ell_\infty(B)$ uzaylarında belirlenmiş matris operatörlerin kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü için özdeşlikler ve hesaplamalar kuralım. Daha sonra, bu uzaylarda kompakt operatörlerin bazı sınıflarını karakterize etmek için sonuçlarımızı uygulayalım.

Teorem 3.2.1. [29] X ; $c_0(B)$ veya $\ell_\infty(B)$ uzaylarından herhangi biri olarak gösterilsin. Bu takdirde,

(a) Eğer $A\in(X,c_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\right) \tag{3.6}$$

ve

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{a}_{nk}|\right) = 0 \,. \tag{3.7}$$

(b) Eğer $A \in (X, \ell_\infty)$ ise

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| \right)$$

ve

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| \right) = 0 .$$

İspat: $A \in (X, c_0)$ olsun. $\forall k \in IN$ için $A_n \in X^\beta$ olduğundan, $\forall k \in IN$ için Lemma 3.1.2 den

$$\|A_n\|_X = \|\hat{A}_n\|_{\ell_1} = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk}| \tag{3.8}$$

elde edilir. Böylece (3.8) ve Lemma 1.57(a) dan (3.6) ve (3.7) yi elde ederiz. Lemma 1.57(b) kullanılarak benzer şekilde teoremin (b) kısmı ispatlanabilir.

Teorem 3.2.2. [29] X ; $c_0(B)$ veya $\ell_\infty(B)$ uzaylarından herhangi biri olarak gösterilsin. Eğer $A \in (X, c)$ ise bu takdirde,

$$\frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| \right) \leq \|L_A\|_\chi \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| \right) \tag{3.9}$$

ve

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k| \right) = 0 \tag{3.10}$$

dır. Burada $\lim_{n\to\infty} \hat{a}_{nk} = \hat{\alpha}_k$

İspat: Lemma 3.1.3 ve Lemma 1.56 birleştirilerek (3.9) da var olan ifadeden bu sonuç çıkar. Kısalık açısından $S = S_X$ yazalım. Daha sonra (1.4) ile Lemma 1.39 dan

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AS) \tag{3.11}$$

elde edilir ve $AS \in M_c$ dir. Burada M_c; c nin bütün sınırlı alt cümlelerin bir sınıfıdır. Bu takdirde (3.11) deki $\chi(AS)$nin değerini hesaplamak için Lemma 1.54 uygulayacağız. Bunun için $p_r : c \to c$ (1.10) ile tanımlanan projektör olsun. Bu takdirde $\forall r \in IN$ için $(I-p_r)(z) = \sum_{n=r+1}^{\infty}(z_n - z)e^n$ olup bunun sonucu olarak, $\forall z \in c$ ve $\forall r \in IN$ için

$$\left\|(I-p_r)(z)\right\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}\left|z - \overline{z}\right| \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.11) ve Lemma 1.54 birlikte uygulanılırsa,

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\left\|(I-p_r)(Ax)\right\|_{\ell_\infty}\right) \le \left\|L_A\right\|_\chi \le \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in S}\left\|(I-p_r)(Ax)\right\|_{\ell_\infty}\right) \tag{3.13}$$

elde edilir.

Şimdi, her $x \in X$ için (3.2) tarafından tanımlanan $y \in Y$ veren bir dizi uzayı olsun. Burada Y; sırasıyla c_0 ya da ℓ_∞ uzaylarından herhangi biridir. $A \in (X,c)$ olduğundan Lemma 3.1.3 uygulanırsa $\hat{A} \in (Y,c)$ ve $Ax = \hat{A}y$ elde edilir. Daha ileri olarak Lemma 1.56 nın sonucu olarak her k ve her $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_k) \in \ell_1 = Y^\beta$ için $\hat{\alpha}_k = \lim_{n\to\infty}\hat{a}_{nk}$ ve $\lim_{n\to\infty}\hat{A}_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{\alpha}_k y_k$ limitleri vardır . Böylece (4.7) den $r \in IN$ için

$$\left\|(I-p_r)(Ax)\right\|_{\ell_\infty} = \left\|(I-p_r)(\hat{A}y)\right\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}\left|\hat{A}_n(y) - \sum_{k=0}^{\infty}(\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k)y_k\right|$$

elde edilir. Daha sonra $x \in S = S_X$ olduğu için $\Leftrightarrow y \in S_Y$ olur. (3.3) ve Lemma 1.39 tarafından her $r \in IN$ için

$$\sup_{X\in S}\left\|(I-p_r)(Ax)\right\|_{\ell_\infty} = \sup_{n>r}\left(\sup_{Y\in S_Y}\left|\sum(\hat{a}_{nk} - \hat{\alpha}_k)y_k\right|\right) = \sup_{n>r}\left\|\hat{A}_n - \hat{\alpha}\right\|_Y^* = \sup_{n>r}\left\|\hat{A}_n - \hat{\alpha}\right\|_{\ell_1}$$

elde edilir. Böylece (3.13) ve (1.5) den sırasıyla (3.9) ve (3.10) elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3. [29] X ; $c_0(B)$ ya da $\ell_\infty(B)$ uzaylarından herhangi biri olarak gösterilsin. Eğer $A \in (X, \ell_1)$ ise bu takdirde,

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|_{(X,\ell_1)}^{(r)} = \|L_A\| \le 4 \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(X,\ell_1)}^{(r)} \tag{3.14}$$

ve

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(X,\ell_1)}^{(r)} = 0 \ ,$$

burada

$$\|A\|_{(X,\ell_1)}^{(r)} = \sup_{N\in F} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in N} \hat{a}_{nk} \right| \qquad (r \in IN)$$

şeklindedir.

İspat: $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \ldots$ olduğu için negatif olmayan reellerin $\left(\|A\|_{(X,\ell_1)}^{(r)} \right)_{r=0}^{\infty}$ dizisi, Lemma 1.58 göre artmayan ve sınırlıdır. Böylece limit, (3.14) ile bulunur.

Şimdi $S = S_X$ olsun. Bu takdirde Lemma 1.40(a) ya göre $L_A(S) = AS \in M_{\ell_1}$ olur. Bundan dolayı (1.4) ve Lemma 1.53 den

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AS) = \lim_{r\to\infty} \left(\sup_{x\in S} \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |A_n(x)| \right) \right) \tag{3.15}$$

elde edilir.

$A \in (X, \ell_1)$ olduğu için Lemma 1.59 dan $\forall x \in X$ ve $\forall r \in IN$ için

$$\sup_{N\in F_r} \left| \sum_{n\in N}^{\infty} A_n(x) \right| \le \sum_{n=r+1}^{\infty} |A_n(x)| \le 4.\sup_{N\in F_r} \left| \sum_{n\in N}^{\infty} A_n(x) \right| \tag{3.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\forall n \in IN$ için $A_n \in X^\beta$ olduğundan (3.3) ve Lemma 1.42 den $\forall N \in F_r \,(r \in IN)$ için

$$\sup_{x\in S}\left|\sum_{n\in N}^{\infty} A_n(x)\right| = \sup_{x\in S}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n\in N} A_n\right)x_k\right| = \left\|\sum_{n\in N}^{\infty} A_n\right\|_X^* = \left\|\sum_{n\in N}\hat{A}_n\right\|_{\ell_1}$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuç (3.16) ile birlikte uygulanırsa $\forall r \in IN$ için

$$\sup_{N\in F_r}\left\|\sum_{n\in N}\hat{A}_n\right\|_{\ell_1} \le \sup_{x\in S}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}|A_n|\right) \le 4.\sup_{N\in F_r}\left\|\sum_{n\in N}\hat{A}_n\right\|_{\ell_1} \tag{3.17}$$

sonucuna varılır. Böylece (3.15) kullanılarak (3.17) de $r\to\infty$ iken limite geçilirse (3.14) elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.4. [29] X ; $c_0(B)$ ya da $\ell_\infty(B)$ uzaylarından herhangi biri olarak gösterilsin. Bu takdirde

(a) Eğer $A\in(X,cs_0)$ ise

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{n\to\infty}\sup\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_{nk}\right|\right) \tag{3.18}$$

ve

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_{nk}\right|\right) = 0 \tag{3.19}$$

(b) Eğer $A\in(X,bs)$ ise

$$0 \le \|L_A\|_\chi \le \lim_{n\to\infty}\sup\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_{nk}\right|\right) \tag{3.20}$$

ve

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_{nk}\right|\right) = 0 \tag{3.21}$$

(c) Eğer $A\in(X,cs)$ ise

$$\frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_{nk}-\hat{b}_k\right|\right)\le\left\|L_A\right\|_{\chi}\le\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_{nk}-\hat{b}_k\right|\right) \tag{3.22}$$

ve

$$L_A \text{ kompaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_{nk}-\hat{b}_k\right|\right)=0 \tag{3.23}$$

Burada $\hat{b}_{nk}=\sum_{m=0}^{n}\hat{a}_{mk}$ ve $\lim_{n\to\infty}\hat{b}_{nk}=\hat{b}_k$.

İspat: $A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $S=(s_{nk})$ toplam matrisi olsun ve $B=(b_{nk})$ $\forall n,k\in IN$ için

$$b_{nk}=\sum_{m=0}^{n}a_{mk}$$

ile tanımlansın yani, $B=SA$ ve bundan dolayı

$$B_n=\sum_{m=0}^{n}s_{nm}A_{mk}=\left(\sum_{m=0}^{n}a_{mk}\right)_{k=0}^{\infty} \qquad (n,k\in IN)$$

olur.

Ayrıca $\hat{A}=(\hat{a}_{nk})$ ve $\hat{B}=(\hat{b}_{nk})$ sırasıyla tanımlanmış matrisler olsun. Açıkça görülür ki $\forall n,k\in IN$ için

$$\hat{b}_{nk}=\sum_{m=0}^{n}\hat{a}_{mk}$$

olur ve bundan dolayı

$$\hat{B}_n=\sum_{m=0}^{n}s_{nm}\hat{A}_{mk}=\left(\sum_{m=0}^{n}\hat{a}_{mk}\right)_{k=0}^{\infty} \qquad (n,k\in IN)$$

olur. Daha ileri olarak $\hat{b}=(\hat{b}_{nk})$ dizisi

$$\hat{b}_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n}\hat{a}_{mk} \quad \text{her } (n,k\in IN) \text{ için} \tag{3.24}$$

ile tanımlanır (3.24) deki limitler $A\in(X,cs)$ olduğu durumlarda $\forall k\in IN$ için vardır.

$bs=(\ell_\infty)_S, cs_0=(c_0)_S$ ve $cs=(c)_S$ olduğu için (3.18)- (3.23) eşitlikleri Lemma 1.40 kullanılarak Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 den elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ikili ve üçlü band matrislerinin bazı dizi uzayları üzerinde etki alanı yardımıyla yeni dizi uzayları elde edilmiştir. Elde edilen bu uzaylardan bazıları için matris sınıfları karakterize edilmiştir. Daha sonra bu uzaylar ile klasik dizi uzayları arasında tanımlı operatörlerin hangi şartlar altında kompakt olduğu incelenmiştir. Ayrıca kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü kullanılarak bu uzaylarda kompakt operatörlerin bazı sınıfları karakterize edilmiştir.

$\lambda - yakınsaklık$ kavramını ilk kullananlar Mursaleen ve Noman olmuştur [30].

$\lambda = (\lambda_k)$ dizisi

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < ... \text{ ve } \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$$

şeklinde tanımlı bir dizi olmak üzere, Lamda matrisi $\Lambda = (\lambda_{nk})$ $\forall n,k \in IN_0$ için

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu matrisin etki alanı yardımıyla [30] numaralı kaynakta Mursaleen ve Noman tarafından $c_0(\lambda)$, $c(\lambda)$ ve $\ell_\infty(\lambda)$ dizi uzayları tanımlanmıştır.

r ve s sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere m. mertebeden genelleştirilmiş fark matrisi $G^m(r,s) = \left(g_{nk}^m(r,s)\right)$,$\forall n,k \in IN$ için

$$g_{nk}^m(r,s) = \begin{cases} \dbinom{m-1}{n-k} r^{m-n+k-1} s^{n-k} & , \quad \max\{0, n-m+1\} \le k \le n \\ 0 & , \quad D.D \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.[31]

Diğer taraftan $T^{m\lambda}(r,s)=\left(t_{nk}^{m\lambda}(r,s)\right)$ matrisi $\forall n,k\in IN_0$ ve $\forall m\in IN_2$ için

$$t_{nk}^{m\lambda}(r,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\sum_{\vartheta=0}^{m-1}\binom{m-1}{\vartheta}r^{m-\vartheta+1}s^{\vartheta}\left(\lambda_{k+\vartheta}-\lambda_{k+\vartheta-1}\right) & , \quad k<n-m+2\\ \dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\sum_{\vartheta=1}^{m-1}\binom{m-1}{\vartheta-1}r^{m-\vartheta}s^{\vartheta-1}\left(\lambda_{n-m+\vartheta+1}-\lambda_{n-m+\vartheta}\right) & , \quad k=n-m+2\\ \dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\sum_{\vartheta=2}^{m-1}\binom{m-1}{\vartheta-2}r^{m-\vartheta+1}s^{\vartheta-2}\left(\lambda_{n-m+\vartheta+1}-\lambda_{n-m+\vartheta}\right) & , \quad k=n-m+3\\ . & , \quad .\\ . & , \quad .\\ . & , \quad .\\ \dfrac{r^{m-1}\left(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}\right)+(m-1)r^{m-2}s\left(\lambda_n-\lambda_{n-1}\right)}{\lambda_n} & , \quad k=n-1\\ \dfrac{r^{m-1}\left(\lambda_n-\lambda_{n-1}\right)}{\lambda_n} & , \quad k=n\\ 0 & , \quad k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere [32] numaralı kaynakta $c_0^{\lambda}\left(G^m\right)$ ve $c^{\lambda}\left(G^m\right)$ dizi uzayları tanımlanmıştır.

Bu tez çalışmasında kullanılan ikili ve üçlü band matrisinin bir genellemesi olan m. mertebeden genelleştirilmiş fark matrisi $G^m(r,s)=\left(g_{nk}^m(r,s)\right)$ nin $c_0(\lambda)$, $c(\lambda)$ $\ell_\infty(\lambda)$ ve $\ell_p(\lambda)$ dizi uzayları üzerindeki etki alanı yardımıyla $c_0^{\lambda}\left(G^m\right)$, $c^{\lambda}\left(G^m\right)$, $\ell_\infty^{\lambda}\left(G^m\right)$ ve $\ell_p^{\lambda}\left(G^m\right)$ dizi uzayları tanımlanıp, bu uzaylar için kompaktsızlığın Hausdorff ölçüsü kullanılarak, kompakt operatörlerin bazı sınıfları karakterize edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.
2. Mursaleen, M., Noman, A.K., 2010. Applications of the Hausdorff measure of noncompactness in some sequence spaces of weighted means. **Comput. Math. Appl.,** 60: 1245-1258.
3. Mursaleen, M., Noman, A.K., 2012. Compactness of matrix operators on some new difference sequence spaces. **Linear Algebra Appl.,** 436: 41-52.
4. Malkowsky, E., Rakočević, V., 2007. On matrix domains of triangles**. Appl. Math. Comput., 189** (2): 1146-1163.
5. Djolović, I., Malkowsky, E., 2008. A note on compact operators on matrix domains. **J. Math. Anal. Appl., 340** (1): 291-303.
6. Kara, E.E., Başarır, M., 2011. On compact operators and some Euler $B^{(m)}$-difference sequence spaces. **J. Math. Anal. Appl.,** 379: 499-511.
7. Kara, E.E., Başarır, M., 2012. On the B-difference sequence space derived by generalized weighted mean and compact operators. **J. Math. Anal. Appl.,** 391: 67-81.
8. Maddox, I. J., 1970. Elements Of Functional Analysis, Cambridge University Pres, Great Britain.
9. Çakar, Ö., 2007. Fonksiyonel Analize Giriş 1, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.
10. Wilansky, A., 1984. Summability Through Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 85, Amsterdam.
11. Boos, J., 2001. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, New York.
12. Cooke, R.C., 1950. Infinite Matrices and Sequence Spaces, MacMillian and Co. Ltd, London.
13. Malkowsky, E., 2010. Compact matrix operators between some BK spaces. In, Mursaleen, M (ed.) Modern Methods of Analysis and Its Applications, pp. 86-120. Anamaya Publ., New Delhi.
14. Malkowsky, E., Rakočević, V., 2000. An introdiction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness. **Zbornik radova, Matematički institut SANU, Belgrade, 9** (17): 143-234.

15. Djolović, I., Malkowsky, E., 2008. Matrix transformations and compact operators on some new mth-order difference sequences. **Appl. Math. Comput., 198** (2): 700-714.
16. Rakočević, V., 1998. Measures of noncompactness and some applications. **Filomat, 12** (2): 87-120.
17. Djolović, I., Malkowsky, E., 2009. A note on Fredholm operators on $(c_0)T$. **Appl. Math. Lett., 22** (11): 1734-1739.
18. Jarrah, A.M., Malkowsky, E., 2003. Ordinary absolute and strong summability and matrix transformations. **Filomat,** 17: 59-78.
19. Mursaleen, M., Noman, A.K., 2010. Compactness by the Hausdorff measure of noncompactness. **Nonlinear Anal.,** 73: 2541-2557.
20. Malkowsky, E., Rakočević, V., Živković, S., 2004. Matrix transformations between the sequence spaces $w_0^p(\Lambda), v_0^p(\Lambda), c_0^p(\Lambda)$ $1 < p < \infty$ and certain *BK* spaces. **Appl. Math. Comput., 147** (2): 377-396.
21. Ng, P.N., Lee, P.Y., 1978. Cesaro sequence spaces of non-absolute type. **Comment. Math. (Prace Mat), 20** (2): 429-433.
22. Şengönül, M., Başar, F., 2005. Some new Cesaro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c_0 and c. **Soochow J. Math., 31**(1): 107-119.
23. Maddox, I.J., 1968. On Kuttner's Theorem. **J. London Math. Soc.,** 43: 258-290.
24. Başar, F., Malkowsky, E., Altay, B., 2008. Matrix transformations on the matrix domains of triangles in the spaces of strongly C_1- summable and bounded sequences. **Publ. Math. Debrecen**, **73** (1-2): 193-213.
25. Altay, B., Başar, F., Malkowsky, E., 2009. Matrix transformations on Some Sequence Spaces related to Strong Cesàro Summability and Boundedness. **Appl. Math. Comput., 211** (2): 255-264.
26. Djolović, I., 2010. On compact operators on some spaces related to matrix B(r,s). **Filomat, 24** (2): 41-51.
27. Malkowsky, E., Rakočević, V., 2000. The measure of noncompactness of linear operators between spaces of strongly C_1- summable and bounded sequences. **Acta Math. Hungar., 89** (1-2): 29-45.

28. Sönmez, A., 2011. Some new sequence spaces derived by the domain of the triple band matrix. **Comput. Math. Appl.,** 62: 641-650.

29. Karaisa, A., 2013. Hausdorff measure of noncompactness in some sequence spaces of a triple band matrix. **J. Inequal. Appl.,** doi:10.1186/1029-242X-2013-503.

30. Mursaleen, M., Noman, A.K., 2010. On the spaces of λ-convergent and bounded sequences. **Thai. J. Math., 8** (2): 311-329.

31. Başarır, M., Kayıkçı, M.,2009. On generalized B^m -Riesz difference sequence space and β -property. **J. Inequal. Appl.,** Article ID 385029.

32. Bişgin, M.C., 2014. Bazı yeni dizi uzayları ve topolojik özellikleri. Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Kayseri, 66 s.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Hava AYDIN

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 9 Mart 1987, Merkez / KIRŞEHİR

Medeni Durumu: Bekâr

Tel: +90 5459686027

email: havaaydin2015.12@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Tezsiz Yüksek Lisans	Ahi Evran Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü	2010
Lisans	Erciyes Ü., Fen Fakültesi, Matematik	2009
Lise	Aydınlıkevler Lisesi, Kayseri	2004
İlköğretim	Yahya Kemal Beyatlı İ.Ö.O, Kayseri	2001

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2013- Halen	Pazarören Anadolu Lisesi, Kayseri	Matematik Öğretmenliği
2011-2013	İdil Cumhuriyet Anadolu Lisesi, Şırnak	Matematik Öğretmenliği

YABANCI DİL

İngilizce