T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONTAK GEOMETRİDE YÜZEYLER

Hazırlayan
Hasibe İKİZ

Danışman
Doç. Dr. Nural YÜKSEL
Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

Doktora Tezi

Aralık 2016
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONTAK GEOMETRİDE YÜZEYLER

Hazırlayan
Hasibe İKİZ

Danışman
Doç. Dr. Nural YÜKSEL
Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

Doktora Tezi

Bu çalışma Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi
tarafından 5984 kodlu proje ile desteklenmiştir.

Aralık 2016
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Hasibe

Hasibe İKİZ

YÖNERGEYE UYGUNLUK

"Kontak Geometride Yüzeyler" adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

Hasibe İKİZ

Danışman

Doç.Dr.Nural YÜKSEL

Doç.Dr.Murat Kemal KARACAN

ABD Başkanı

Prof.Dr.Fuat GÜRCAN

Doç. Dr. Nural YÜKSEL ve Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN danışmanlığında **Hasibe İKİZ** tarafından hazırlanan "**Kontak Geometride Yüzeyler** " adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

.

09 /12 /2016

JÜRİ:

Danışman	:Doç.Dr.Nural YÜKSEL
Üye	:Prof.Dr.Yusuf YAYLI
Üye	:Doç.Dr.İsmail GÖK
Üye	:Doç.Dr.Ali DELİCEOĞLU
Üye	:Yrd.Doç.Dr.Nazmiye ALEMDAR

ONAY:
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 25/01/2017 tarih ve 2017/04-15 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25/01/2017

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Kontak Geometride Yüzeyler" konulu tez çalışmamın her aşamasında engin bilgisi ve tecrübeleri ile bana yol gösterip ışık tutan; bilgi, sabır ve hoşgörüsünü her daim hissettiğim hocam Sayın Doç Dr. Nural YÜKSEL'e; yönlendirmeleri ile ufkumu açan ve tezimin her aşamasında destekçi olan kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN'a, çalışmalarıyla tezimin temelini oluşturan ve yaptığı değerlendirmelerle katkı sağlayan Doç. Dr. İsmail GÖK'e teşekkür ederim.

Başta sevgili eşim Murat İKİZ olmak üzere, bugüne kadar attığım her adımda sonsuz sevgi, saygı, hoşgörü ve sabır gösteren, daima yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca maddi desteğini esirgemeyen TUBİTAK'a teşekkür ederim.

Hasibe İKİZ

Kayseri,Aralık 2016

KONTAK GEOMETRİDE YÜZEYLER

Hasibe İKİZ
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Aralık 2016
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nural YÜKSEL
Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, tezin temelini oluşturan kontak geometride eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili tanım ve teoremler kaynakları ile birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında doğrultman vektörünün özel hallerine göre dayanak eğrisi Legendre eğrisi olan regle yüzeylerin karakterizasyonu verilmiştir. Ayrıca, regle yüzeylerin; Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde, $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında dayanak eğrisi Legendre eğrisi olan regle yüzeylerin şekil operatörü matrisinin bileşenleri hesaplanmıştır. Ayrıca regle yüzeyin dayanak eğrisinin asimptotik eğri, jeodezik eğri olması ve striksiyon çizgisi ile çakışması durumları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında bazı özel yüzeyler için bazı karakterizasyonlar yapılmıştır. Öklid uzayındaki yüzeyler, kontak geometriye aktarılmıştır.

Son bölümde ise tezden elde edilen sonuçlara ve çeşitli önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kontak Geometri, Kontak Metrik Manifold, Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold, Regle Yüzey, Öteleme Yüzeyi, Dönel Yüzey.

SURFACES IN CONTACT GEOMETRY

Hasibe İKİZ
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Ph.D. Thesis, December 2016
Thesis Supervisor: Doç. Dr. Nural YÜKSEL
Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

ABSTRACT

This thesis consist of six chapter.

In the first chapter, definition and theories used in the thesis are explained.

In the second chapter, basic definitions and theorems that is about theory of curves and surfaces in contact geometry in $\mathbb{R}^3(-3)$ space are mentioned.

The third chapter,the characterization of the ruled surfaces that are generated by the base curve as Legendre curve are given in $\mathbb{R}^3(-3)$ space according to specific circumstances of the direction vector.Also, Gauss and mean curvatures of the surfaces are calculated.

In the fourth chapter, coefficients of Weingarten matrix of the ruled surfaces are calculated in $\mathbb{R}^3(-3)$ space. Whether asymptotic curve, geodesic curve, striction curve can be used as base curve are examined.

The fifth chapter, the characterization of the surface of revolution and translational surfaces are given in $\mathbb{R}^3(-3)$

The last chapter consists of results derived out of the thesis and various suggestions.

Keywords: Contact Geometry, Contact Metric Manifold, Almost Contact Manifold, Ruled Surface, Offset Surface, Rotational Surface.

İÇİNDEKİLER

KONTAK GEOMETRİDE YÜZEYLER

6. BÖLÜM
TARTIŞMA- SONUÇ VE ÖNERİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

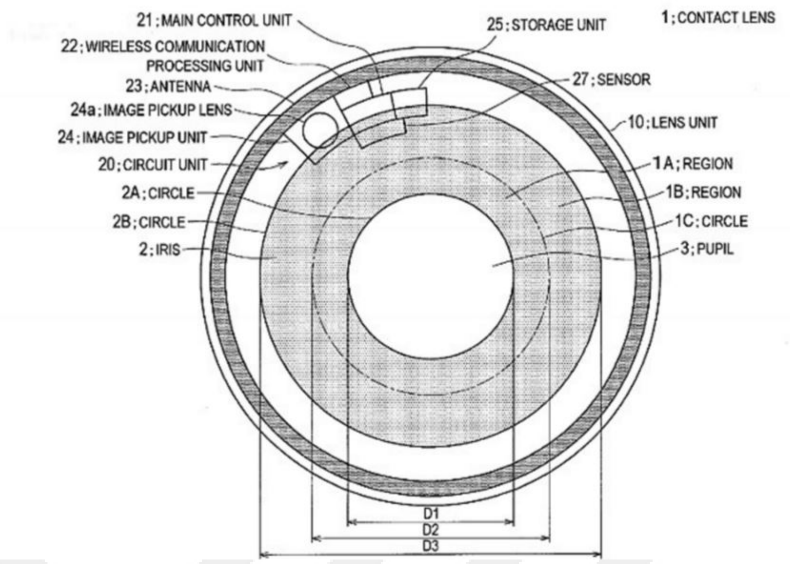
GİRİŞ

İlk olarak Christian Huygens, Barrow ve Isaac Newton'nun çalışmalarıyla ortaya çıkan kontak geometri günümüzde pek çok matematikçinin ilgisini çekmektedir. Özellikle D.E.Blair ve Japon matematikçi K.Yano'nun konu ile ilgili kitap ve makaleleri bulunmaktadır [1],[2].

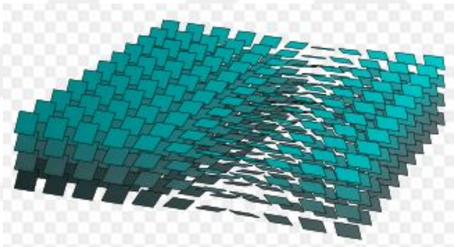
Kontak manifoldlarda önemli bir yeri olan Sasaki manifoldlarının tanımı 1960' lı yıllarda Japon matematikçi S.Sasaki tarafından verilmiştir. Yine aynı yıllarda yaşayan M.Gray, K.Ogiue ve W.M.Bootby gibi matematikçilerin bu konuyla ilgili çalışmaları dikkat çekmektedir [3], [4].

Kontak geometrinin bir çok alanda uygulamaları vardır. H.Geiges makalesinde kontak geometrinin fizik, mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisi alanlarında nasıl uygulandığını anlatmıştır [5]. Örneğin

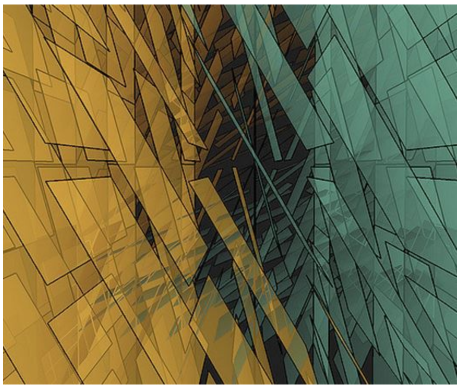
Şekil G.1. Kontak Lens



Şekil G.2. Kontak Lens Yapısı



Şekil G.3. Termodinamik Yapılar



Şekil G.4. Termomodinamik Yapılar

kontak geometrik yapı örnekleridir.

Eğriler teorisi çalışılırken; bir eğrinin Serret-Frenet denklemlerinin bulunması ve eğriliklerinin hesaplanması çok önemlidir. Öklid uzayında eğrilikleri ve Serret-Frenet denklemlerini hesaplamak kolaydır. Fakat kontak geometride Serret-Frenet denklemlerini bulmak ve denklemlerde geçen çatılarda çalışmak çok da kolay değildir. Baikoussis ve Blair, üç boyutlu Sasaki uzayında Legendre eğrileri için Serret-Frenet denklemlerini vermişlerdir [6].

Belkelfa ve arkadaşları Lorentz geometrisinde, üç boyutlu Sasaki uzayı için bir Legendre eğrisinin Serret-Frenet denklemlerini vermişlerdir [7].

Camcı doktora tezinde ilk kez Kontak manifoldlarda vektörel çarpım tanımını yapmıştır [8]. Baikoussis ve Blair, 1994'deki çalışmaları ile '$\mathbb{E}^3(-3\epsilon)$ Sasaki uzayında $N^2(c)$ silindirinde yatan herhangi bir Legendre eğrisi 1-tiplidir ancak ve ancak Legendre eğrisi sabit eğriliklidir' önermesini ispatlamışlardır [9]. Camcı tezinde bu teoriyi herhangi bir sonlu tipte eğri için de ispatlamıştır [8].

Üç boyutlu Sasaki uzaylarında Legendre eğrileri haricindeki eğriler için Serret-Frenet denklemlerinin bulunması zor bir problemdir. Hatta üçten farklı boyuttaki Sasaki uzaylarında bir Legendre eğrisi için Serret-Frenet denklemlerinin bulunması hala çözülememiş bir problemdir.

Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu konuya Gauss'un Egregium ve Gauss-Bonnet teoremleri örnektir. Gauss gibi pek çok matematikçinin eğriler ve yüzeyler teorisinin gelişimine katkıları olmuştur. Yüzeyler, Frenet hareketlerinin bir eğriye etki etmesiyle elde edileceğinden, yüzeylerin sınıflandırılması hareketlerde seçilen eğriye bağlı olacaktır. $\mathbb{R}^3(-3\epsilon)$ Sasaki uzayında Legendre eğrilerinin üç boyutlu Öklid uzayına göre daha doğal eğriler olduğu Baikoussis ve Blair tarafından gösterilmiştir [9]. Benzer şekilde, $\mathbb{R}^3(-3\epsilon)$ Sasaki uzayındaki integral yüzeyleri üç boyutlu Öklid uzayına göre daha doğal yüzeylerdir.

Gök, doktora tezinde kontak geometride yüzeyler teorisini ayrıntılarıyla incelemiştir. Gök bu çalışmasında $\mathbb{R}^3(-3\epsilon)$ Sasaki uzayında herhangi bir yüzeyin şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, Ortalama eğriliği ve ilk kez $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey için Gauss Egregium teoremini elde etmiştir [10].

Öklid uzayında ve Lorentz (Minkowski) uzayında regle yüzeyler için bir çok çalışma yapılmıştır. Regle yüzey kavramı, Fransızca surface regleé'den gelmiş olup çizgiler yüzeyi (ışın yüzeyi) olarak da adlandırılabilir. $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey, bir parametreye bağlı doğrular ailesinin geometrik yeri olarak tanımlanır. Regle yüzeylerin en meşhur örnekleri silindir ve koni yüzeyleridir.

Genelleştirilmiş regle yüzeyler teorisi üzerinde 1960'lı yıllarda Juza çalışmıştır [11]. Daha sonra bu konu ile ilgili çalışmalar Frank , Giering ve Thas ile devam etmiştir [12],[13].

Ergüt, yüksek lisans tezinde $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında Frenet hareketi altında regle yüzeyler için boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi kavramlarını incelemiştir [14].

Sabuncuoğlu, doçentlik tezinde regle yüzeyleri ve özelliklerini araştırmıştır [15].

Regle yüzeyler üzerine bir başka çalışma Çalışkan tarafından hazırlanmış olan doktora tezidir [16].

$\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^n$ de regle yüzeyler için yapılan bu çalışmalar Lorentz (Minkowski) uzayına taşınmıştır. Turgut, doktora tezinde timelike ve spacelike regle yüzeyler için boğaz noktası, boğaz çizgisi, dağılma parametresi kavramlarını ele almıştır [17].

Yaylı, Minkowski uzayında yaptığı çalışmasında Frenet hareketi altında dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve spacelike doğrultmanlı bir spacelike regle yüzey için dağılma parametresini hesaplayarak yüzeyin açılabilir olması için dayanak eğrisinin bir helis eğrisi olması gerektiğini ispatlamıştır. Bunlara ilaveten doğrultmanın özel halleri için elde edilen regle yüzeylere dair teoremler vermiştir [18]

Yüksel, yapılan bu çalışmaları Bishop çatılı regle yüzeyler için Minkowski uzayında ele almıştır. Bishop çatılı regle yüzeyler için dağılma parametresini hesaplamış ve yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şartları vermiştir. Yine bu çalışmada yüzeyin I. ve II. temel formunun katsayıları ve ortalama eğriliği elde edilmiştir. Yüzeyin minimal olması ve striksiyon eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şartları verilmiştir [19].

Ayrıca Damar doktora tezinde 3-boyutlu Öklidiyen uzayda Bishop çatılı DNA ve regle yüzeyleri incelemiştir [20].

Bu tez çalışmasında Camcı ve Gök'ün çalışmaları doğrultusunda 3-boyutlu Sasakian uzayında Legendre dayanak eğrisi tarafından üretilen regle yüzeylerin; doğrultman vektörünün genel ve özel halleri, Gauss ve ortalama eğriliği incelenmiştir.

Son bölümde ise bazı özel yüzeyler için karakterizasyonlar elde edilmiştir.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Afin Uzaylar

Tanım 1.1.1. (**Afin Uzay**) A boştan farklı bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$X : A \times A \to V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ için

$$\overrightarrow{(P,Q)} \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir [21].
(i) $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$
(ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in A$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Örnek 1.1.1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ cümlesini göz önüne alalım. $\mathbb{R}^n$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(P,Q) \to f(P,Q) = Q - P$$

fonksiyonu afin uzay tanımındaki (i) ve (ii) önermelerini doğrular.
Demek oluyor ki $\mathbb{R}^n$ nokta cümlesinde bir noktayı başlangıç noktası olarak seçersek (ii) önermesi uyarınca n in geri kalan her bir noktasına $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının bir vektörü karşılık gelir. Bir başka deyişle $\mathbb{R}^n$ in afin uzay olduğu düşünülerek her elemanına bir nokta gibi ve aynı zamanda bir vektör uzayı olduğu düşünülerek de bir vektör gibi bakılabilir [21].

Tanım 1.1.2. (**Afin Çatı**) Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P_0, P_1, \ldots, P_n$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2 \ldots, P_0P_n\}$ vektörlerinin cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$

nokta $n+1$ lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_i noktalarına da çatının bitim noktaları denir [21].

1.2. Öklid Uzayları

Tanım 1.2.1. (**Öklid Uzayı**) Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım işlemi

$$\langle , \rangle V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

olmak üzere

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır [21].

Örnek 1.2.1. 3-boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş E^3 afin uzayını ele alalım. Bu $\mathbb{R}^3$vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \left\{x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece E^3 afin uzayı 3-boyutlu öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir [21].

Tanım 1.2.2. (**Öklid Çatısı**) Bir n-boyutlu reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ nokta $n+1$ - lisi için eğer $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ vektör sistemi V nin ortonormal bir bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ Öklid çatısı denir [21].

Örnek 1.2.2. E^n de $E_0 = (0,0,\ldots,0), E_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, E_n = (1,0,\ldots,0)$ noktaları bir dik çatı oluştururlar. Gerçekten,$\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$ dir. O halde $\left\{\overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j}\right\}$ sistemi $\mathbb{R}^n$vektör uzayı için bir ortonormal bazdır [21].

Tanım 1.2.3. (**Standart Öklid Çatısı**) E^n deki $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir [21].

Tanım 1.2.4. (**Öklid Koordinat Sistemi**) E^n de bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E_i}$$

dir. Buradaki

$$x_i : E^n \to \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

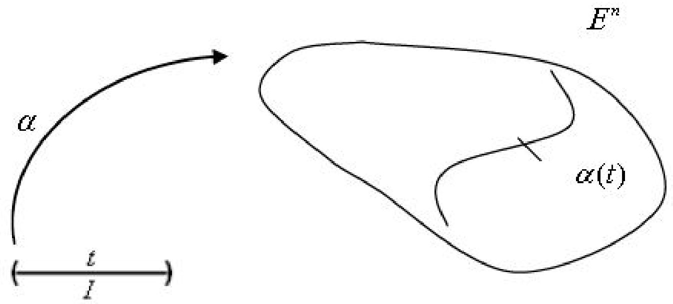
fonksiyonlarına x noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n-lisine de E^n in Öklid koordinat sistemi denir [21].

Tanım 1.2.5. (E^n **de Eğri**) $I, \mathbb{R}$ nin irtibatlı açık alt cümlesi ve E^n, n-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere,

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s))$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de (I, α) komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi adı verilir [39].



Şekil 1.1. Eğri

Tanım 1.2.6. (**Eğrinin Hız Vektörü**) E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \to E^n$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s))$ olmak üzere

$$\alpha'(s) = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}, \frac{d\alpha_2}{ds}, \ldots, \frac{d\alpha_n}{ds} \right)$$

dir. $(\alpha'(s), \alpha(s)) \in T_{E^n}(s)$ tanjant vektörüne M eğrisinin $s \in I$ parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir [21].

Tanım 1.2.7. (**Birim Hızlı Eğri**) E^n de M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlıdır denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir. $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere t_1 den t_2 ye M eğrisinin yay uzunluğu diye, eğrinin t_1 ve t_2 noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt; \ t \in I$$

reel sayısına denir [21].

Tanım 1.2.8. (**Regüler Eğri**) E^n de Meğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| \neq 1$$

ise M eğrisine regüler eğri denir [21].

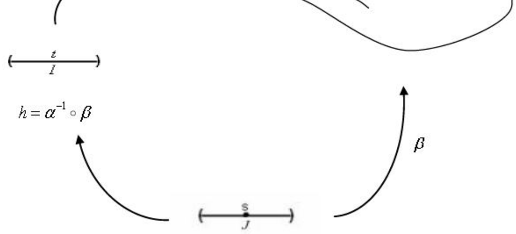
Teorem 1.2.1. E^n de her regüler eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır [21].

Tanım 1.2.9. (**Parametre Değişimi**) E^n de bir Meğrisi (I,α) ve (J,β) gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \to I$$

$$s \to h(s) = t$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir h fonksiyonuna parametre değişim fonksiyonu denir [21].



Şekil 1.2. Parametre Değişimi

1.3. Frenet Çatısı

1.3.1. Öklid Uzayında Frenet 3-Ayaklısı

$\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğ ile belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. T, I aralığının her bir s noktasına $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s)$ vektörüne karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre T, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına α eğrisinin teğet vektör alanı denir.Kısaca $T = \alpha'$ olarak yazılır.

$$\begin{aligned} \kappa : I &\to \mathbb{R} \\ s &\to \kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\| \end{aligned}$$

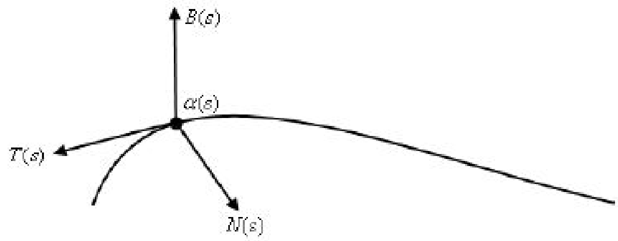
fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu**, $\kappa(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir.
$T = \alpha'$ olduğundan $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ olur.

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T(s)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normali denir. N vektör alanına,α eğrisinin asli normal vektör alanı denir.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle ile tanımlı B vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir. B vektör alanına, α eğrisinin binormal vektör alanı denir. Bu tanımlara göre $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir. T, N, B vektör alanlarına α eğrisi üstünde **Frenet vektör alanları** denir. Sonuç olarak T, N, B birim ve birbirine dik olan vektörlerden oluşan bir çatıdır [39].



Şekil 1.3. Frenet Çatısı

Tanım 1.3.1. (Burulma Fonksiyonu): $\mathbb{R}$ uzayında birim hızlı

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \to \mathbb{R}$$

$$s \to \tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [39].

Bir eğrinin karakterizasyonunda κ eğriliği ve τ torsiyonu önemli bir rol oynar. Örneğin;
(i) $\kappa = 0$ ise eğri bir doğrudur.
(ii) $\kappa \neq 0$ ve $\tau = 0$ ise eğri düzlemseldir.
(iii) $\kappa = sabit$ve $\tau \equiv 0$ ise eğri yarı çapı $\frac{1}{\kappa}$ olan bir çemberdir.
Böylece bir eğrinin eğriliğini ve torsiyonunu kullanarak eğrinin biçimini ve uzunluğunu belirleyebiliriz [38].

Tanım 1.3.2. Teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğrilere genel helis veya sabit eğimli eğri denir. Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır. Eğer $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = sabit \neq 0$ ise eğriye dairesel helis denir [24].

Teorem 1.3.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında regüler bir $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi κ ve τ eğrilikleriyle verilsin. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right] = sabit$$

olmasıdır [25].

Teorem 1.3.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dir [39]. Teorem1.3.2 de elde edilen eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için Frenet formülleri denir. Frenet formüllerindeki katsayılar matrisi olan

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ters simetrik bir matrisdir.

Tanım 1.3.3. (Frenet Hareketi) α, s parametreli ve her $\alpha(s)$ noktasında regüler bir eğri olsun. T, N, B eğrinin her noktasındaki Frenet çatısının birim vektörleri olmak üzere

$$A = [T, N, B]$$

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 & b_1 \\ t_2 & n_2 & b_2 \\ t_3 & n_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

ortogonal bir matristir yani $\det A = +1$ ve $A^T = A^{-1}$ dir. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısının, eğri boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen hareket $Y = AX + C$denklemi ile verilir. Bu hareket Frenet hareketi olarak adlandırılır. Uzayda X noktasının bu hareket altında yörüngesi, seçilen eğrinin cinsine göre değişir. Burada, "AX" kısmına hareketin dönme kısmı ve C ye de öteleme vektörü kısmı denir [26].

Tanım 1.3.4. (**Yüzey**) $M \subset E^3$ olmak üzere $\forall p \in M$ için, M nin içinde görüntüsü p nin bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat parçası ($x^{-1} : x(D) \to D$ sürekli) varsa, M ye bir yüzey denir [23].

Tanım 1.3.5. (**Parametre Eğrileri**)

$$x : D \to E^3$$

koordinat parçası olsun. Bu koordinat parçası

$$x : D \to \mathrm{E}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \text{x(u,v)}$$

olmak üzere ya da v sabit tutulduğunda bir eğri üretir. $v = v_0$ için $u \rightarrow x(u, v_0)$ eğrisine u-parametre eğrisi, $u = u_0$ için $v \rightarrow x(u_0, v)$ eğrisine v-parametre eğrisi denir [23].

Tanım 1.3.6. (**Asimptotik Eğri**) α, Myüzeyi üzerinde bir regüler eğri olsun. Eğer α'' ivme vektörü daima M yüzeyine teğet ise, α eğrisine bir asimptotik eğri denir [23].

Tanım 1.3.7. (**Geodezik**) α, Myüzeyi üzerinde bir regüler eğri olsun. Eğer α'' ivme vektörü daima M yüzeyine dik ise, α eğrisine bir geodezik denir [23].

Tanım 1.3.8. (**Regle Yüzey**) Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall p \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise Mye bir regle yüzey ve $\forall p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı (ana doğrusu) denir [21].
Regle yüzeyin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$s \rightarrow \vec{\alpha}(s)$$

eğrisi seçilir ve regle yüzeyin **dayanak eğrisi** adıyla bilinir. M regle yüzeyin α dayanak eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişken bir nokta

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$v \rightarrow \beta(v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{a}(s)$$

şeklindedir. Burada

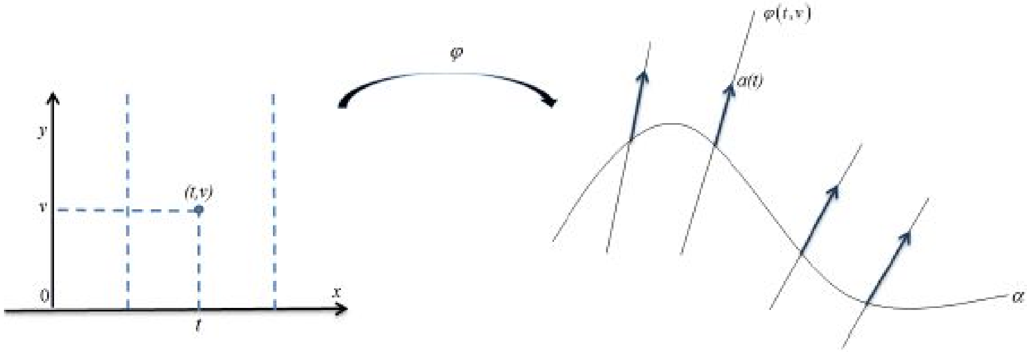
$$\vec{a}(s) = (\vec{a}_1(s), \vec{a}_2(s), \vec{a}_3(s))$$

birim doğrultman vektörünü göstermektedir. Böylece regle yüzey

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$(s, v) \rightarrow \varphi(s, v)$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur [21].



Şekil 1.4. Regle Yüzey

Tanım 1.3.9. (**Kapalı Regle Yüzey**) Bir

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$(s,v) \rightarrow \varphi(s,v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{a}(s)$$

regle yüzeyi $\forall s \in I$ için

$$\varphi(s+2\pi) = \varphi(s,v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzey kapalıdır denir [21].

Tanım 1.3.10. (**Ortogonal Yörünge**) Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörüngesi** denir ve

$$\langle \vec{a}, d\varphi \rangle = 0$$

şeklinde bulunur [21].

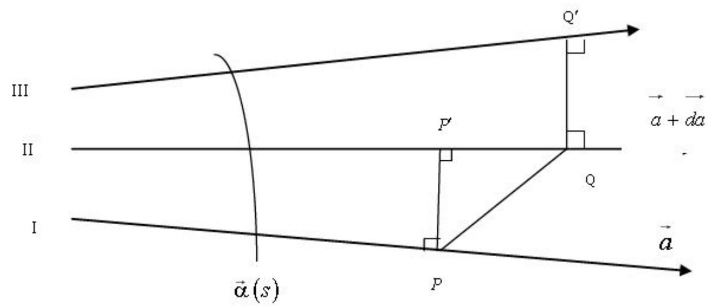
Tanım 1.3.11. (**Boğaz Noktası**)Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** adı verilir [21].

Tanım 1.3.12. (**Boğaz Çizgisi**) Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca H / H' hareketinde boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)** adı verilir [21].

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyin merkez noktasının $\vec{\overline{\alpha}}$ yer vektörü; dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yer vektörü, $\vec{a}(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan v uzaklığı cinsinden,

$$\overline{\alpha}(s,\overline{v}) = \vec{\alpha}(s) + \overline{v}\vec{a}(s) \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\overline{v}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{a}(s)$ ve $\vec{a}(s)+d\vec{a}(s)$ olan komşu üç doğrusu verilsin.



Şekil 1.5. Boğaz Çizgisi

$\overrightarrow{PP'}$ ve $\overrightarrow{QQ'}$ komşu ana doğrularının ortak dikmelerinin ana doğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İki komşu ana doğrunun ortak dikmesi,

$$\vec{a}(s)\wedge\left[\vec{a}(s)+\vec{a}'(s)ds\right]=\vec{a}(s)\wedge\vec{a}'(s)ds$$

bağıntısından dolayı $\vec{a}\wedge\vec{a}'$ vektörüne paraleldir. Limit durumunda $\overrightarrow{PQ}$ vektörü $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\left\langle\vec{a},\overrightarrow{PQ}\right\rangle&=0,\\ \left\langle\vec{a}+\vec{a}',\overrightarrow{PQ}\right\rangle&=0,\\ \left\langle\vec{a}',\overrightarrow{PQ}\right\rangle&=0\end{aligned}\tag{1.2}$$

elde edilir. Ayrıca (1.1) den dayanak eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\frac{\overrightarrow{d\vec{\alpha}}}{ds}=\vec{T}+\frac{dv}{ds}\vec{a}+v\frac{\overrightarrow{d\alpha}}{ds}$$

(1.2) de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left\langle\frac{\overrightarrow{da}}{ds},\frac{\overrightarrow{d\vec{\alpha}}}{ds}\right\rangle=0$$

$$\left\langle\frac{\overrightarrow{da}}{ds},\vec{T}+\frac{dv}{ds}\vec{a}+v\frac{\overrightarrow{d\alpha}}{ds}\right\rangle=0$$

$$\left\langle\vec{a}',\vec{T}\right\rangle+v\|\vec{a}'\|^2=0$$

$$v=\frac{\left\langle\vec{a}',\vec{T}\right\rangle}{\|\vec{a}'\|^2}\tag{1.3}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (1.1) den

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{r}(s) - \frac{\left\langle \vec{a}', \vec{T} \right\rangle}{\|\vec{a}'\|^2} \vec{a}(s)$$

elde edilir. Eğer $\|\vec{a}'\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (1.3) de

$$v = 0, \ \left\langle \vec{a}', \vec{T} \right\rangle = 0 \tag{1.4}$$

alınması yeterlidir [21].

Tanım 1.3.13. (**Teğet Düzlem**) Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin bir ana doğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme, teğet düzlem denir [21].
Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin

$$\varphi(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{a}(s)$$

denkleminden s ve v ye göre kısmi türev alındığında

$$\vec{\varphi}_s = \vec{T} + v\vec{a}', \ \ \vec{\varphi}_v = \vec{a}(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_s \wedge \varphi_v = \vec{T} \wedge \vec{a} + v\vec{a}' \wedge \vec{a}$$

olur. Ayrıca yüzey normali

$$N = \frac{\varphi_s \wedge \varphi_v}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|}\left(\vec{T} \wedge \vec{a} + v\vec{a}' \wedge \vec{a}\right) \tag{1.5}$$

olduğundan ve μ sabit olmak üzere teğet düzlemin bir noktadaki vektörel denklemi

$$\left\langle \mu\vec{a}, \vec{N} \right\rangle = 0$$

veya (1.5) den

$$N = \frac{\varphi_s \wedge \varphi_v}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|}\left(\vec{T} \wedge \vec{a} + v\vec{a}' \wedge \vec{a}\right) = 0$$

dır.Buradan

$$\det\left[\mu\vec{a}, \vec{T} + v\vec{a}', \vec{a}'\right] = 0$$

olarak bulunur.

Tanım 1.3.14. (**Açılabilir Regle Yüzey**) Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilirdir denir [21].

Tanım 1.3.15. (**Dağılma Parametresi**) Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın ana doğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir [21].

Ana doğrularının birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan bir regle yüzeyin dağılma parametresini P_a ile gösterelim.Komşu iki ana doğrunun ortak dikmesi doğrultusundaki bir vektör (1.5) den dolayı $\vec{a}\wedge\vec{a}'$ vektörüne paralel olduğundan, bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|\vec{a}\wedge\vec{a}'\|}=\frac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|\vec{a}\|\|\vec{a}'\|\|\sin\theta\|}=\frac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|\vec{a}'\|}$$

dir. Dayanak eğrisinin komşu iki noktası;

$$\vec{\alpha}(s)\ \ ve\ \ \vec{\alpha}(s)+d\vec{\alpha}(s)$$

ile gösterilsin, bu noktalardaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık $\overrightarrow{d\alpha}$ vektörünün $\frac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|\vec{a}'\|}$ vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklığı

$$\begin{aligned} z &= \left\langle \overrightarrow{d\alpha}, \frac{\vec{a}\wedge\vec{a}'}{\|\vec{a}'\|}\right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\vec{a}'\|}\left\langle \overrightarrow{d\alpha}, \vec{a}\wedge\vec{a}'\right\rangle \\ &= \frac{det\left[\overrightarrow{d\alpha},\vec{a},\vec{a}'\right]}{\|\vec{a}'\|} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer ana doğruların küresel göstergeleri göz önüne alınırsa bu göstergenin yay elementi olan

$$d\Psi=\|\frac{d\vec{a}}{ds}\|ds$$

komşu iki ana doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{z}{d\Psi} \\ &= \frac{det\left[\overrightarrow{d\alpha},\vec{a},\vec{a}'\right]}{\|\vec{a}'\|^2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

bulunur. Regle yüzeyler için dral, koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır [21].

Teorem 1.3.3. Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [21].

1.4. Riemann Manifoldu ve Riemann Konneksiyonu

Tanım 1.4.1. (**Riemann metriği**)M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde tanımlı bir g simetrik bi-lineer formu pozitif tanımlı ise

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{E})$$

şeklinde tanımlı bir (0,2) tipinde g metrik tensörüne M de **Riemann metriği** adı verilir [**?**].

Tanım 1.4.2. M bir C^∞ manifold olsun.M üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanabiliyorsa (M, g) ikilisine bir **Riemann manifoldu** denir. Eğer g Riemann metriğinde pozitif tanımlılık aksiyomu yerine non- dejenere aksiyomunu sağlıyorsa (M, g) ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir [35].

Teorem 1.4.1. V vektör uzayının bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun.

$$\epsilon_i = g(e_i, e_i)$$

olmak üzere $\forall X \in V$ vektörü

$$X = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(X, \epsilon_i)\epsilon_i \tag{1.7}$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir [23].

Tanım 1.4.3. Bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir Riemann konneksiyonu D olsun. D nin M ye ait bir bölge üzerindeki

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

bi-lineer dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, h \in C^\infty(M, \mathbb{E})$ için

(i) $D_X(Y+Z) = +D_X Z$

(ii)$D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z$

(iii)$D_{fX} Y = f D_X Y$

(iv)$D_X f Y = f D_X Y + X(f) Y$

özelliklerini sağlıyorsa D ye M üzerinde tanımlı bir **afin konneksiyon** veya **kovaryant türev** adı verilir [35].

Tanım 1.4.4. (M,g) bir Riemann manifoldu ve D de M üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere D dönüşümü

(i) $D_X Y - D_Y X = [X,Y]$

(ii)$Zg(X,Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y)$

şartlarını sağlıyorsa D ye M nin **Levi-Civita konneksiyonu** denir [35].

Tanım 1.4.5. $\bar{M}$ ve M sırasıyla n ve $n+k$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere $\bar{M}$, M nin alt manifoldu olsun. Mde normal birim vektör alanı ϵ ve $D_X\epsilon$ nın teğet ve normal bileşenleri, sırasıyla $-A_\epsilon(X)$ ve $(\nabla_X)^\perp\epsilon$ olmak üzere,

$$A : \chi(M) \times \chi(M)^\perp \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece;

$$D_X\epsilon = -A_\epsilon(X) + (\nabla_X)^\perp\epsilon \tag{1.8}$$

biçiminde tanımlı denkleme **Weingarten denklemi** adı verilir.Burada A_ϵ a **şekil operatörü**, $\nabla^\perp$ ifadesine de M nin normal demetindeki konneksiyon adı verilir [35].

Teorem 1.4.2. n-boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifoldu M ve bu manifold üzerinde diferensiyel 1−form ω olsun. M üzerinde,

$$\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0, d\omega)^{p+1} = 0 \tag{1.9}$$

olacak şekilde verilsin. Bu durumda, M manifoldunun her noktasında

$$\omega = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i \tag{1.10}$$

olacak şekilde M nin her noktası civarında bir $(x^1, x^2, ..., x^p, y^1, y^2, ..., y^{n-p})$ koordinat sistemi vardır [2].

Böylece Darboux teoremine göre $2n+1$ boyutlu M manifoldunun her noktası civarında,

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i \tag{1.11}$$

olacak şekilde $(x^1, x^2, ..., x^p, y^1, y^2, ..., y^n, z)$ koordinatları vardır.

Tanım 1.4.6. $\mathbb{E}^{2n+1}$ üzerinde kartezyen koordinatlar $(x^1, x^2, ..., x^p, y^1, y^2, ..., y^n, z)$ ve $\mathbb{E}^{2n+1}$ de bir diferensiyel 1−form

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

olsun. $\mathbb{E}^{2n+1}$ in açık alt cümleleri U ve $U^{'}$ olmak üzere

$$f : U \to U^{'}$$

diffeomorfizmi için

$$f_{*} : \chi(U) \to \chi(U^{'}), f^{*} : \Omega(U^{'}) \to \Omega(U)$$

$$\tau : U \to \mathbb{E}$$

olmak üzere

$$f^{*}\eta = \tau.\eta \tag{1.12}$$

oluyorsa f ye **Kontak transformasyon** denir.Burada $\chi(U), U$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı, $\Omega(U)$ da $\chi(U)$ vektör uzayının dualidir.
U üzerindeki bütün kontak taransformasyonların cümlesi Γ ise

$$\Gamma = \left\{ f | f : U \to U^{'} ; f^{*}\eta = \tau.\eta, U, U^{'} \subset \mathbb{E}^{2n+1} \right\} \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanır ve fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir yarı gruptur [2].

1.5. Yönlendirilebilir Manifoldlar

Tanım 1.5.1. $V, n-$boyutlu reel vektör uzayı ve L de V vektör uzayının sıralı bazlarının cümlesi olsun. $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \in L$ için

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

olacak şekilde $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ vardır.

$$u = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \sim v = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \Leftrightarrow det(a_{ij}) > 0$$

bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının iki denklik sınıfı vardır. Şayet

$$det(a_{ij}) > 0$$

ise u ile v **aynı yönlendirmeye sahip**,

$$det(a_{ij}) < 0$$

ise u ile v **karşıt yönlendirmeye sahiptir** denir [4].

Tanım 1.5.2. $n-$boyutlu bir M manifoldu üzerinde hiç bir yerde sıfır olmayan bir Ω $n-$formu varsa, M manifolduna **yönlendirilebilir(orientable) manifold** denir. Bu formların her birine **yönlendirme(orientation)** ve bu seçilen yönlendirmeyle birlikte bu manifolda da **yönlendirilmiş (oriented) manifold** denir [4].

Tanım 1.5.3. $F = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ cümlesi bir M manifoldunun atlası olsun. Şayet $\forall \alpha, \beta \in \wedge$ için $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ haritaları gözönüne alınırsa

$$\varphi_\alpha o (\varphi_\beta)^{-1}$$

dönüşümünün Jacobian matrisi pozitif determinanta sahipse bu atlasa M üzerinde **uygun yönlendirilmiş atlas** denir [4].

Teorem 1.5.1. $M, n-$boyutlu bir manifold olsun.Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir [4].

(i) M manifoldu yönlendirilebilirdir.

(ii) M üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan $n-$form vardır.

(iii) M üzerinde uygun yönlendirilmiş bir atlas vardır .

Teorem 1.5.2. Herhangi bir manifoldun tanjant demeti manifold olarak yönlendirilebilirdir [28].

Teorem 1.5.3. Yönlendirilebilir bir manifoldun her alt manifoldu da yönlendirilebilirdir [28].

1.6. Kontak Manifold

Tanım 1.6.1. $2n+1$ boyutlu bir C^∞ diferensiyellenebilir M manifoldu verilsin.Eğer bu manifold üzerinde her noktada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \tag{1.14}$$

şartını sağlayan bir η diferensiyel $1-$formu varsa η ya **kontak form**,(M, η) ikilisine de **kontak manifold** denir.Kontak manifoldlarda $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ bağıntısı M manifoldu üzerinde bir hacim elementine karşılık gelir ve bundan dolayı M manifoldu yönlendirilebilirdir. Burada $(d\eta)^n$ ifadesi $(d\eta)$ nın kendisi ile n defa çarpımını gösterir,yani;

$$(d\eta)^n = d\eta \wedge d\eta \wedge ... \wedge d\eta \tag{1.15}$$

dir. η 1$-$form olduğundan $d\eta$, 2$-$form ve $\eta\wedge(d\eta)^n)$ ifadesi $2n+1-$form olur.Bu yüzden Kontak manifoldlar $2n+1$boyutlu manifoldlardır [42].

Örnek 1.6.1. $2n+1$ boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

diferensiyel 1$-$formunu gözönüne alalım. M manifoldu üzerinde her noktada

$$\eta\wedge(d\eta)^n) \neq 0$$

olduğundan η kontak form,(M,η) ikilisi $2n+1-$boyutlu kontak manifold olur.Burada $(x^1,x^2,...,x^p,y^1,y^2,...,y^n,z)\in\mathbb{E}^{2n+1}$ dir [10].

Örnek 1.6.2. 3$-$boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1$-$formunu gözönüne alalım.M manifoldu üzerinde her noktada

$$\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$$

olduğundan η kontak form,(M,η) ikilisi 3$-$boyutlu kontak manifold olur.Burada $(x,y,z)\in\mathbb{E}^3$ dür [10].

Tanım 1.6.2. $(2n+1)-$boyutlu (M,η) kontak manifoldu olmak üzere

$$D = \left\{X \in \chi(M) : \eta(X) = 0\right\} \tag{1.16}$$

biçiminde tanımlı D cümlesine M manifoldunun **kontak dağlım (distribution)** denir [42].

Tanım 1.6.3. (M,η) ikilisi $(2n+1)-$boyutlu kontak manifold ve $Ker\eta$, η kontak formunun çekirdeği olmak üzere

$$Ker\eta = D \tag{1.17}$$

dir [29].

Tanım 1.6.4. (M,η) kontak manifoldu üzerinde $X\neq\xi$ için,

$$\left.\begin{array}{l}\eta(\xi)=1\\ d\eta(\xi,X)=0\end{array}\right\} \tag{1.18}$$

olacak şekilde bir $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı varsa ξ ye η kontak yapısının **karakteristik vektör alanı** denir. Burada

$$\xi : M \to \bigcup_{p\in M} T_M(P) \tag{1.19}$$

şeklinde tanımlı $1:1$ ve örten (1,0) tipinde tensör alanıdır [1].

Örnek 1.6.3. 3−boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1−formu için

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

vektör alanı karakteristik vektör alanıdır [10].

Sonuç 1.6.1. η formu M üzerinde kontak form olduğundan D üzerinde $(d\eta)^n \neq 0$ dır. Böylece $d\eta$, 2 formu D üzerinde non-dejenere, antisimetrik bir lineer form olur. Çünkü $X, Y \in D$ için

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])) = -\frac{1}{2}\eta([X,Y] \tag{1.20}$$

olduğundan $d\eta$ nın antisimetrik olduğu açıktır. $\forall X, Y \in D$ için

$$d\eta(X,Y) = 0$$

iken kabul edelim ki, $X \neq 0$ olsun.

$$boy D = 2n$$

olduğundan D uzayının bir

$$\{X, Y_1, ..., Y_{2n-1}\}$$

bazı vardır. Fakat burada $d\eta(X, Y_1, ..., Y_{2n-1}) = 0$ olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $X = 0$ ve $d\eta$, 2-formu D dağılımı üzerinde non-dejenere olur [10].

Tanım 1.6.5. M^{2n+1} difrensiyellenebilir manifold ve Γ kontak dönüşümlerin cümlesi olsun.Eğer M^{2n+1} i örten U_α açık cümlelerinin ailesi ve

$$f_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{E}^{2n+1}$$

homeomorfizmler $\forall \alpha, \beta$ için $f_\alpha o f_\beta^{-1}$ tanımlı iken $f_\alpha o f_\beta^{-1} \in \Gamma$ oluyorsa M^{2n+1} diferensiyellenebilir manifolduna **geniş anlamda kontak manifold** denir [42].

Tanım 1.6.6. (Geniş anlamda kontak yapı):M^{2n+1} geniş anlamda kontak manifold olsun.$\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, f_\beta)\}$ cümleleri M^{2n+1} üzerinde birer atlas olmak üzere "$\{(U_\alpha, f_\alpha)\} \sim \{(U_\beta, f_\beta)\}$ ancak ve ancak $f_\beta o f_\alpha^{-1}$ tanımlı iken $f_\beta o f_\alpha^{-1} \in \Gamma$ oluyorsa" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına M^{2n+1} üzerinde **geniş anlamda kontak yapı** denir [42].

Sonuç 1.6.2. Darboux teoreminin bir sonucu olarak her kontak manifold geniş anlamda kontak manifolddur.Fakat bunun tersi doğru değildir [42].

1.7. Hemen Hemen Kontak Manifold

Tanım 1.7.1. M bir $2n+1$–boyutlu manifold ve φ, ξ, η da M üzerinde sırasıyla,(1,1),(1,0),(0,1) tipinde tensör alanları olsun.Eğer φ, ξ, η için,$\forall X \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} \eta(\xi) = 1, \\ \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \end{array}\right\} \tag{1.21}$$

koşullarını sağlıyorsa (φ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde **hemen hemen kontak yapı** ve (M, φ, ξ, η) dörtlüsüne de **hemen hemen kontak manifold** denir [42].

Örnek 1.7.1. $\mathbb{E}^3$ de (x, y, z) standart koordinatlar olmak üzere η kontak formu

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - y dx) \tag{1.22}$$

şeklinde verilsin.Burada $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z} \in \chi(\mathbb{E}^3)$ için

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \frac{1}{2}(dz - y dx)(2\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= dz(\frac{\partial}{\partial z}) - y dx(2\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür.Ayrıca φ endomorfizmine karşılık gelen matris

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

dir. Böylece

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \chi(\mathbb{E}^3)$$

$$\begin{aligned}
\varphi^2(X) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 - y x_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\varphi^2(X) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(x_3 - y x_1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada $X = (x_1, x_2, x_3) \in \chi(\mathbb{E}^3)$ olmak üzere

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

dir. Ayrıca $\eta(X)$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= \frac{1}{2}(dz - y\,dx)(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z}) \\
&= \big(dz(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z}) - y\,dx(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z})) \\
&= \frac{1}{2}(x_3 - y x_1)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$$

dir. Böylece $(\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen kontak manifolddur [29].

Teorem 1.7.1. $2n+1-$ boyutlu (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontak manifold olmak üzere $X, \xi \in \chi(M), X \neq \xi$ için

(i) $\varphi(\xi) = 0,$

(ii) $\eta o \varphi = 0,$

(iii) $rank \varphi = 2n$

dir [42].

Tanım 1.7.2. (M,φ,ξ,η), $2n+1-$ boyutlu hemen hemen kontak manifold olsun ve g Riemann metriği iken $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $\xi\in\chi(M)$ için

$$g(X,\xi) = \eta(X), \tag{1.24}$$

$$g(\varphi(X),\varphi(Y)) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(y) \tag{1.25}$$

şartlarını sağlayan (φ,ξ,η,g) yapısına **hemen hemen kontak metrik yapı** ve (M,φ,ξ,η,g) beşlisine de **hemen hemen kontak metrik manifold** denir [2].

Örnek 1.7.2. Bir önceki örnekteki $(\mathbb{E}^3(-3),\varphi,\xi,\eta)$ hemen hemen kontak manifoldunda g metriği

$$g=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Böylece $X=(x_1,x_2,x_3)\in\chi(\mathbb{E}^3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g(X,\xi) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(x_3-y\,x_1) \end{aligned}$$

olup

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

olduğu görülür.

Burada $\forall X=(x_1,x_2,x_3)$ ve $Y=(y_1,y_2,y_3)\in\chi(\mathbb{E}^3)$ olmak üzere

$$\varphi(X)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ y\,x_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(Y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ y\,y_2 \end{bmatrix}$$

olup

$$g(\varphi(X),\varphi(Y))=(\varphi(X))^T g\,\varphi(Y)$$

eşitliği yardımıyla

$$g(\varphi(X),\varphi(Y)) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & y\,x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ y\,y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -x_1 & -y_1 \\ 0 & y\,y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(x_2 y_2 + x_1 y_1)$$

dir. Ayrıca

$$\eta(X) = \frac{1}{2}(x_3 - y\,x_1)$$

ve

$$\eta(Y) = \frac{1}{2}(y_3 - y\,y_1)$$

olup

$$\begin{aligned} \eta(X)\eta(Y) &= \frac{1}{4}(x_3 y_3 - y\,x_3 y_1 - y\,x_1 y_3 + y^2 x_1 y_1), \\ g(X,Y) &= \frac{1}{4}((1+y^2)x_1 y_1 - y\,x_1 y_3 + x_2 y_2 - y\,x_3 y_1 + x_3 y_3), \\ &= \frac{1}{4}(x_2 y_2 + x_1 y_1) + \frac{1}{4}(x_3 y_3 - y\,x_3 y_1 - y\,x_1 y_3 + y^2 x_1 y_1) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{E}^3)$ için

$$g(\varphi(X),\varphi(Y)) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olduğundan $(\mathbb{R}^3(-3), \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisi bir hemen hemen kontak metrik manifold olur [29].

Tanım 1.7.3. (φ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)-$ boyutlu bir hemen hemen kontak M manifoldunda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\varphi(X),\varphi(Y)) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{1.26}$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [42].

Sonuç 1.7.1. (φ, ξ, η) yapısı ile verilen $(2n+1)-$ boyutlu bir hemen hemen kontak M manifoldunda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi(X), Y) + g(X, \varphi(Y)) = 0 \tag{1.27}$$

dır [42].

Sonuç 1.7.2. (φ,ξ,η) yapısı ile verilen $(2n+1)-$ boyutlu bir hemen hemen kontak M manifoldunda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X,\varphi(X)) = 0 \tag{1.28}$$

dır [42].

Teorem 1.7.2. $M,(2n+1)-$ boyutlu kontak manifoldu verilsin. Dolayısıyla M de kontak η, 1-formu vardır. Bu η, 1-formu yardımıyla M de

$$d\eta(X,Y) = g(X,\varphi(Y)) \tag{1.29}$$

olacak şekilde (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısı vardır [2].

Tanım 1.7.4. (M,φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y) = g(X,\varphi(Y)) = d\eta(X,Y) \tag{1.30}$$

şeklinde tanımlı Φ, 2-formuna (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısının **II. Temel formu** adı verilir. Burada

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulu

$$\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$$

biçimini alır [2].

Tanım 1.7.5. $M,(2n+1)-$ boyutlu manifold (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin. Eğer

$$d\eta(X,Y) = g(X,\varphi(Y))$$

oluyorsa (M,φ,ξ,η,g) ye **kontak metrik manifold**, (φ,ξ,η,g) yapısına da M de **kontak metrik yapı** denir [2].

Sonuç 1.7.3. Her kontak metrik manifold, kontak manifolddur [29].

Teorem 1.7.3. $(M,\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y) = \frac{1}{2}\left[g(D_X\xi,Y) - g(D_Y\xi,X)\right] \tag{1.31}$$

dir [2].

Teorem 1.7.4. $(M,\varphi,\xi,\eta,g,\varepsilon)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Bu durumda $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} d\eta(X,\xi) &= 0, && (1.32)\\ d\eta(\varphi(X),Y) &= -d\eta(X,\varphi(Y)) && (1.33)\end{aligned}$$

dir [2].

1.8. Hemen Hemen Kontak Manifoldlarda Torsiyon Tensörü

Tanım 1.8.1. (Hemen hemen kompleks yapı): $M,(2n{+}1)-$ boyutlu manifold (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin. Biliyoruz ki, $\mathbb{R}$ reel ekseni de bir manifolddur. Dolayısıyla $M\times\mathbb{R}$ kartezyen çarpım uzayı da $(2n+2)-$ boyutlu bir çarpım manifoldu olacaktır. Burada vektör alanları

$$\chi(\mathbb{E})=\left\{f\frac{d}{dt}:f\in C^{\infty}(M,\mathbb{E})\right\} \tag{1.34}$$

$$\chi(Mx\mathbb{E})=\left\{\left(X,f\frac{d}{dt}\right):X\in\chi(M)\right\} \tag{1.35}$$

şeklindedir.Şimdi J kompleks dönüşümü

$$J:\chi(Mx\mathbb{E})\longrightarrow\chi(Mx\mathbb{E})$$

olmak üzere

$$J\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=\left(\varphi(X)-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}\right) \tag{1.36}$$

şeklinde tanımlanır.Burada J ye $\chi(Mx\mathbb{E})$ üzerinde **hemen hemen kompleks yapı** denir [2].

Teorem 1.8.1. J kompleks dönüşümü aşağıda verilen özellikleri sağlar.

(i) J lineer bir dönüşümdür.

(ii) $J^2=-I$

[2].

Teorem 1.8.2. $M,(2n+1)-$ boyutlu manifold $(\varphi,\xi,\eta,)$ hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. J lineer dönüşümüne $(2n+2)x(2n+2)$ tipinde bir matris karşılık gelir ve bu matris

$$J=\begin{bmatrix}0 & I_n & 0 & 0\\ -I_n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \tag{1.37}$$

şeklindedir.

Tanım 1.8.2. (Nijenhuis torsiyon tensörü): F bir M manifoldu üzerinde (1,1) tipinde tensör alanı olmak üzere N_F tensör alanı

$$N_F : \chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

ve

$$N_F(X,Y)=F^2([X,Y])+[F(X),F(Y)]-F([F(X),Y])-F([X,F(Y)]) \tag{1.38}$$

olacak şekilde (1,2) tipinde bir tensör alanı dır.N_F tensör alanı na F nin **Nijenhuis torsiyon tensör alanı** denir.

I.Özel hal:

$F=\varphi$ olması durumunda $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$N_\varphi(X,Y)=-[X,Y]+\eta[X,Y]\xi+\left[\varphi(X),\varphi(Y)\right]-\varphi\left[\varphi(X),Y\right]-\varphi\left[X,\varphi(Y)\right] \tag{1.39}$$

şeklinde tanımlanan N_φ tensör alanına φ nin **Nijenhuis torsiyon tensör alanı** denir.

II.Özel hal:

$F=J$ olması durumunda $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$N_J(X,Y)=-[X,Y]+[J(X),J(Y)]+J[J(X),Y]-J[X,J(Y)] \tag{1.40}$$

şekilde tanımlanan N_J tensör alanına J nin **Nijenhuis torsiyon tensör alanı** denir [2].

Sonuç 1.8.1. N_F Nijenhuis torsiyon tensörü bilineer ve antisimetrik tensördür.

Tanım 1.8.3. (İntegrallenebilir manifold): Eğer J nin Nijenhuis torsiyon tensör alanı N_J özdeş olarak sıfır ise, J hemen hemen kontak yapısına **integrallenebilir** denir [2].

Tanım 1.8.4. (Normal manifold): Eğer $M\times\mathbb{R}$ de J kompleks yapısı integrallenebilir ise $(\varphi,\xi,\eta,)$ hemen hemen kontak yapısına normal yapı denir [2].

Tanım 1.8.5. (Braket Operatörü): $(2n+1)-$ boyutlu bir M manifoldu, $(\varphi,\xi,\eta,)$ hemen hemen kontak yapısı ile verilsin.$M\times\mathbb{E}$ de $[,]$ operatörü

$$\begin{aligned} [,]:\chi(M\times\mathbb{R})\times\chi(M\times\mathbb{R}) &\quad\to\quad \chi(M\times\mathbb{R}) \\ \left(\left(X,f\frac{d}{dt}\right),\left(Y,g\frac{d}{dt}\right)\right) &\quad\longrightarrow\quad \left[\left(X,f\frac{d}{dt}\right),\left(Y,g\frac{d}{dt}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.41}$$

olmak üzere

$$\left[\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right] = \left([X,Y], \left(X(g) - Y(f)\frac{d}{dt}\right)\right) \tag{1.42}$$

şeklinde tanımlı ise $[,]$ operatörüne $\chi(M \times \mathbb{E})$ de **Braket Operatörü** adı verilir [42].

Teorem 1.8.3. $(2n+1)$– boyutlu bir M manifoldu $(\varphi, \xi, \eta,)$ hemen hemen kontak yapısı ile verilsin. $\chi(M \times \mathbb{R})$ de tanımlı $[,]$ Braket operatörü

(i) antisimetriktir.

(ii) Jacobi özdeşliğini sağlar.

Böylece tanımladığımız bu operatör bir Lie braket operatörüdür [1].

Tanım 1.8.6. (Lie türevi): M üzerinde tanımlı bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş lokal dönüşümlü 1-parametreli grup φ_t olsun.X vektör alanına göre F tensör alanının Lie türevi

$$L_x F = [X, F] \tag{1.43}$$

eşitliği ile tanımlanır [2].

Tanım 1.8.7. (Killing vektör alanı): M Riemann manifoldu g metriği ile verilsin. $X \in \chi(M)$ vektör alanın için M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanına **Killing vektör alanı** denir.Başka bir ifadeyle

$$L_x g = 0 \tag{1.44}$$

dır [2].

Teorem 1.8.4. $(2n+1)$– boyutlu bir M manifoldu $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ normal kontak metrik yapısı ile verilsin.Bu durumda M manifolduna **Sasaki manifoldu** ve (φ, ξ, η, g) yapısına da **Sasaki yapı** denir. Burada g Riemann veya Lorentzian metrik iken $g(\xi, \xi) = \epsilon,\ \ \epsilon = \pm 1$ dir [7].

Teorem 1.8.5. $(2n+1)$– boyutlu bir M manifoldu $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ hemen hemen kontak metrik yapısı ile verilsin.Bu durumda M manifoldu Sasaki manifoldudur ancak ve ancak $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\left(\nabla_X \varphi\right) Y = \epsilon g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{1.45}$$

dir [7].

2. BÖLÜM

KONTAK MANİFOLDLARDA YÜZEYLER TEORİSİ

Bu bölümde, ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler kaynakları ile birlikte verilmiştir.

Çetin Camcı Kontak manifoldlarda vektörel çarpım tanımını yapmıştır [8]. Ayrıca İsmail Gök Sasaki uzayında herhangi bir yüzeyin şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, Ortalama eğriliği ve $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzeyin Gauss Egregium teoremini elde etmiştir [10]. Kontak manifoldlarda eğriler ve yüzeyler teorisi [8], [34] ve [10] numaralı referanslarda ayrıntılı olarak verildi.
Bu bölümde amacımız, hemem hemen kontak manifoldlarda yüzeyler teorisini detaylı biçimde incelemektir.

2.1. Kontak Manifoldlarda Vektörel Çarpım

Tanım 2.1.1. (Vektörel Çarpım)$(M,\varphi,\xi,\eta,g,)$ hemen hemen kontak manifold olmak üzere $\forall X,Y\in\chi(M)$ için M üzerinde

$$\wedge:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

dönüşümü

$$X\wedge Y=-g(X,\varphi(Y))\xi-\eta(Y)\varphi(X)+\eta(X)\varphi(Y) \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlansın.Burada $X\wedge Y$ vektörüne X ile Y nin vektörel çarpımı adı verilir [8].

Teorem 2.1.1. $(M,\varphi,\xi,\eta,g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde
$\forall X,Y\in\chi(M)$ için X ile Y vektörlerinin her ikisi de $X\wedge Y$ vektörüne ortogonaldir [8].

İspat: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için X ile $X \wedge Y$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
g(X, X \wedge Y) &= g(X, -g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y)) \\
&= g(X, -g(X, \varphi(Y))\xi - g(X, \eta(Y)\varphi(X)) + g(X, \eta(X)\varphi(Y)) \\
&= -g(X, \varphi(Y))g(X, \xi) - \eta(Y)g(X, \varphi(X)) + \eta(X)g(X, \varphi(Y)) \\
&= -g(X, \varphi(Y))\eta(X) - \eta(Y)g(X, \varphi(X)) + \eta(X)g(X, \varphi(Y)) \\
&= -\eta(Y)g(X, \varphi(X)).
\end{aligned}$$

olup,

$$g(X, \varphi(X)) = 0$$

olduğundan

$$g(X, X \wedge Y) = 0$$

dır. Benzer mantıkla

$$g(Y, X \wedge Y) = 0$$

olduğu gösterilebilir. □

Teorem 2.1.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde vektörel çarpım **anti-simetrik** bir dönüşümdür [8].

İspat: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için doğru olan $X \wedge Y$ ifadesinde X yerine Y, Y yerine X alınırsa

$$\begin{aligned}
Y \wedge X &= -g(Y, \varphi(X))\xi - \eta(X)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(X)) \\
&= g(\varphi(Y), X)\xi - \eta(X)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(X) \\
&= -\left[-g(X, \varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y)\right]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$Y \wedge X = -X \wedge Y$$

olup $\wedge$ dönüşümü anti-simetriktir. □

Teorem 2.1.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde vektörel çarpım **alterne** bir dönüşümdür [8].

İspat: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için doğru olan $X \wedge Y$ ifadesinde $X = Y$ alınırsa

$$\begin{aligned} X \wedge X &= -g(X, \varphi(X))\xi - \eta(X)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(X)) \\ &= -g(X, \varphi(X)) \end{aligned}$$

olur ki,

$$g(X, \varphi(X) = 0$$

olduğundan

$$X \wedge X = 0$$

dır. □

Teorem 2.1.4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$Y \wedge \varphi(X) = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \tag{2.2}$$

ve

$$\varphi(X) = \xi \wedge X \tag{2.3}$$

dir [8].

İspat: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için doğru olan $X \wedge Y$ ifadesinde X yerine Y , Y yerine $\varphi(X)$ alınırsa

$$\begin{aligned} Y \wedge \varphi(X) &= -g(Y, \varphi^2(X))\xi - \eta(\varphi(X))\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi^2(X), \quad \eta o \varphi = 0 \\ &= -g(Y, -X + \eta(X)\xi)\xi + \eta(Y)(-X + \eta(X)\xi) \\ &= g(X, Y)\xi - \eta(X)g(Y, \xi)\xi - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi \\ &= g(X, Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)\xi - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi \\ &= g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \end{aligned}$$

ve benzer mantıkla $X \wedge Y$ ifadesinde X yerine ξ , Y yerine X alınırsa

$$\begin{aligned} \xi \wedge X &= -g(\xi, \varphi(X))\xi - \eta(X)\varphi(\xi) + \eta(\xi)\varphi(X) \\ &= g(\varphi(\xi), X)\xi - \eta(X)\varphi(\xi) + \eta(\xi)\varphi(X) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\varphi(\xi) = 0,$$

$$\eta(\xi)=1$$

olduğundan

$$\xi \wedge X = \varphi(X)$$

elde edilir. □

Tanım 2.1.2. $(M,\varphi,\xi,\eta,g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için $g(X \wedge Y, Z)$ sayısına X,Y,Z vektörlerinin karma çarpımı denir. $g(X \wedge Y, Z)$ veya (X,Y,Z) ile de gösterilir. $\{X,Y,X \wedge Y\}$ üçlüsü pozitif yönlü bir çatı oluşturur [8].

Teorem 2.1.5. $(M,\varphi,\xi,\eta,g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$(X,Y,Z) = -\left[g(X,\varphi(Y))\eta(Z) + g(Y,\varphi(Z))\eta(X) + g(Z,\varphi(X))\eta(Y)\right] \tag{2.4}$$

veya $\{e,\varphi(e),\xi\}$ ortonormal bazına göre $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında

$$(X,Y,Z) = \det(X,Y,Z) \tag{2.5}$$

olur [8].

İspat: $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
g(X \wedge Y, Z) &= g(-g(X,\varphi(Y))\xi - \eta(Y)\varphi(X) + \eta(X)\varphi(Y), Z) \\
&= -g(X,\varphi(Y))g(\xi,Z) - \eta(Y)g(\varphi(X),Z) + \eta(X)g(\varphi(Y),Z) \\
&= -g(X,\varphi(Y))\eta(Z) - \eta(Y)g(Z,\varphi(X)) - \eta(X)g(Y,\varphi(Z)) \\
&= -\left[g(X,\varphi(Y))\eta(Z) + g(Y,\varphi(Z))\eta(X) + g(Z,\varphi(X))\eta(Y)\right]
\end{aligned}$$

olur. $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayının bir ortonormal bazı $\{e,\varphi(e),\xi\}$ olmak üzere $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ vektörlerinin bu baza göre ifadesi

$$X = x_1 e + x_2\varphi(e) + x_3\xi \tag{2.6}$$

$$Y = y_1 e + y_2\varphi(e) + y_3\xi \tag{2.7}$$

$$Z = z_1 e + z_2\varphi(e) + z_3\xi \tag{2.8}$$

ve bundan yararlanarak

$$\varphi(X) = -x_2 e + x_1\varphi(e) \tag{2.9}$$

$$\varphi(Y) = -y_2 e + y_1\varphi(e) \tag{2.10}$$

$$\varphi(Z) = -z_2 e + z_1\varphi(e) \tag{2.11}$$

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen denklemler $g(X \wedge Y, Z)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(X \wedge Y, Z) &= -g(X, \varphi(Y))\eta(Z) + g(Y, \varphi(Z))\eta(X) + g(Z, \varphi(X))\eta(Y) \\ &= -((x_2 y_1 - x_1 y_2)z_3 + (y_2 z_1 - y_1 z_2)x_3 + (z_2 x_1 - z_1 x_2)y_3) \\ &= \det(X, Y, Z) \end{aligned}$$

dir. □

Teorem 2.1.6. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y) \tag{2.12}$$

dir [8].

İspat: $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Teorem (2.1.5) kullanarak, sırasıyla

$$\begin{aligned} g(Y \wedge Z, X) &= g(-g(Y, \varphi(Z))\xi - \eta(Z)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(Z), X) \\ &= -g(Y, \varphi(Z))g(\xi, X) - \eta(Z)g(\varphi(Y, X)) + \eta(Y)g(\varphi(Z), X) \\ &= -g(Y, \varphi(Z))\eta(X) - g(X, \varphi(Y))\eta(Z) - g(Z, \varphi(X))\eta(Y) \\ &= -\left[g(X, \varphi(Y))\eta(Z) + g(Y, \varphi(Z))\eta(X) + g(Z, \varphi(X))\right]\eta(Y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(Z \wedge X, Y) &= g(-g(Z, \varphi(X))\xi - \eta(X)\varphi(Z) + \eta(Z)\varphi(X), Y) \\ &= -g(Z, \varphi(X))g(\xi, Y) - \eta(X)g(\varphi(Z), Y)) + \eta(Z)g(\varphi(X), Y) \\ &= -g(Z, \varphi(X))\eta(Y) - g(\varphi(Z), Y)\eta(X) - g(\varphi(X), Y)\eta(Z) \\ &= -\left[g(X, \varphi(Y))\eta(Z) - g(Y, \varphi(Z))\eta(X) + g(Z, \varphi(X))\eta(Y)\right] \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y)$$

olduğu görülür. □

Teorem 2.1.7. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$g(X, \varphi(Y))Z + g(Y, \varphi(Z))X + g(Z, \varphi(X))Y = -\det(X, Y, Z)\xi$$

dir. Burada ξ karakteristik vektör alanıdır [8].

Teorem 2.1.8. $(M,\varphi,\xi,\eta,g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$(X\wedge Y)\wedge Z=g(X,Z)Y-g(Y,Z)X \tag{2.13}$$

dir [8].

İspat: $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için (2.1) denklemini kullanarak verilen eşitliğin her iki yanının ayrı ayrı, aynı ifadeye eşit olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(X\wedge Y)\wedge Z &= (-g(X,\varphi(Y))\xi-\eta(Y)\varphi(X)+\eta(X)\varphi(Y))\\
&= -g(-g(X,\varphi(Y))\xi-\eta(Y)\varphi(X)+\eta(X)\varphi(Y)),\varphi(Z))\xi\\
&\quad -\eta(Z)\varphi(-g(X,\varphi(Y))\xi-\eta(Y)\varphi(X)+\eta(X)\varphi(Y)))\\
&\quad +\eta(-g(X,\varphi(Y))\xi-\eta(Y)\varphi(X)+\eta(X)\varphi(Y))\varphi(Z)\\
&= (g(X,\varphi(Y)))g(\xi,\varphi(Z))+\eta(Y)g(\varphi(X),\varphi(Z))\\
&\quad -\eta(X)g(\varphi(Y),\varphi(Z))\xi+\eta(Z)g(X,\varphi(Y))\varphi(\xi)\\
&\quad +\eta(Y)\eta(Z)\varphi^2(X)-\eta(X)\eta(Z)\varphi^2(Y)-g(\varphi(X),Y)\eta(\xi)\varphi(Z)\\
&\quad -\eta(Y)(\eta o\varphi)(X)\varphi(Z)+\eta(X)(\eta o\varphi)(Y)\varphi(Z)\\
&= \eta(Y)g(X,Z)-\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)-\eta(X)g(Y,Z)\\
&\quad +\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi-\eta(Y)\eta(Z)+\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi\\
&\quad +\eta(X)\eta(Z)-\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\xi-g(X,\varphi(Y))\varphi(Z)
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
X &= x_1e+x_2\varphi(e)+x_3\xi\\
Y &= y_1e+y_2\varphi(e)+y_3\xi\\
Z &= z_1e+z_2\varphi(e)+z_3\xi\\
\varphi(X) &= -x_2e+x_1\varphi(e)\\
\varphi(Y) &= -y_2e+y_1\varphi(e)\\
\varphi(Z) &= -z_2e+z_1\varphi(e)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(X\wedge Y)\wedge Z &= (-y_3g(X,Z)-x_3g(Y,Z))\xi - y_3z_3X + x_3z_3Y \\ &\quad (-x_2y_1-x_1y_2)(-z_2e+z_1\varphi(e)) \\ &= (z_2(x_2y_1-x_1y_2)+z_3(x_3y_1-x_1y_3))e \\ &\quad +(z_1(x_1y_2-x_2y_1)+z_3(x_3y_2-x_2y_3))\varphi(e) \\ &\quad +(y_3g(X,Z)-x_3g(Y,Z))\xi\end{aligned} \tag{2.14}$$

dır. Şimdi de $g(X,Z)Y-g(Y,Z)X$ ifadesinin eşitini bulalım.

$$\begin{aligned}g(X,Z)Y-g(Y,Z)X &= (x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)(y_1e+y_2\varphi(e)+y_3\xi) \\ &\quad -(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)(x_1e+x_2\varphi(e)+x_3\xi) \\ &= (x_1y_1z_1+x_2y_1z_2+x_3y_1z_3-x_1y_1z_1-x_1y_2z_2-x_1y_3z_3)e \\ &\quad (x_1y_2z_1+x_2y_2z_2+x_3y_2z_3-x_2y_1z_1-x_2y_2z_2-x_2y_3z_3)\varphi(e) \\ &\quad +(y_3g(X,Z)-x_3g(Y,Z))\xi \\ &= (z_2(x_2y_1-x_1y_2)+z_3(x_3y_1-x_1y_3))e \\ &\quad +(z_1(x_1y_2-x_2y_1)+z_3(x_3y_2-x_2y_3))\varphi(e) \\ &\quad +(y_3g(X,Z)-x_3g(Y,Z))\xi\end{aligned} \tag{2.15}$$

dır. O halde (2.14) ve (2.15) denklemleri yardımıyla

$$(X\wedge Y)\wedge Z = g(X,Z)Y-g(Y,Z)X$$

olur. □

Teorem 2.1.9. $(M,\varphi,\xi,\eta,g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$(X\wedge Y)\wedge Z+(Y\wedge Z)\wedge X+(Z\wedge X)\wedge Y=0 \tag{2.16}$$

dır. Bu eşitliğe **"Jacobi özdeşliği"** adı verilir [8].

İspat: $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(X\wedge Y)\wedge Z &= g(X,Z)Y-g(Y,Z)X \\ (Y\wedge Z)\wedge X &= g(Y,X)Z-g(Z,X)Y \\ (X\wedge Y)\wedge Z &= g(Z,Y)X-g(X,Y)Z\end{aligned}$$

olur. Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanır ise

$$(X \wedge Y) \wedge Z + (Y \wedge Z) \wedge X + (X \wedge Y) \wedge Z = 0$$

dır. □

Teorem 2.1.10. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$g(X \wedge Y, Z \wedge W) = g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W) \tag{2.17}$$

dır. Bu eşitliğe **"Lagrange özdeşliği"** adı verilir [8].

İspat: $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g(X \wedge Y, Z \wedge W) = (X \wedge Y, Z, W) &= (X \wedge Y, Z, W) \\ &= g((X \wedge Y) \wedge Z, W) \\ &= g(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X, W) \\ &= g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W) \end{aligned}$$

bulunur. □

Teorem 2.1.11. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X \wedge Y, X \wedge Y) = g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y) \tag{2.18}$$

dir [8].

Teorem 2.1.12. $(M, \varphi, \xi, \eta, g,)$ hemen hemen kontak manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla_Z (X \wedge Y) = (\nabla_Z X) Y + X \wedge (\nabla_Z Y) \tag{2.19}$$

dir. Burada ∇, M nin Levi-Civita koneksiyonudur [8].

2.2. $\mathbb{R}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Herhangi Bir Yüzey İçin Şekil Operatörü Matrisinin Hesabı

Önerme 2.2.1. $M, \mathbb{R}^n$ de bir yüzey olsun. M nin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} X: &\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3(-3) \\ : &\quad (u,v) \to X(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)) \end{aligned}$$

olsun. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$X_u = f_{1,u}\frac{\partial}{\partial x} + f_{2,u}\frac{\partial}{\partial y} + f_{3,u}\frac{\partial}{\partial z}$$

dir. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}(\varphi(e) - y\xi), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}e, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\xi$$

olduğundan

$$X_u = \frac{1}{2}f_{2,u}e + \frac{1}{2}f_{1,u}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})\xi \tag{2.20}$$

ve benzer mantıkla

$$X_v = \frac{1}{2}f_{2,v}e + \frac{1}{2}f_{1,v}\varphi(e) + \frac{1}{2}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})\xi \tag{2.21}$$

olarak bulunur [10].

I.Hal: $g(X_u, X_v) = 0$ ise eğrilik çizgileri yüzeyin parametre eğrileridir. Başka bir ifadeyle

$$S(X_u) = \lambda X_u \quad ve \quad S(X_v) = \mu X_v$$

olur.

II.Hal: $g(X_u, X_v) \neq 0$ ise eğrilik çizgileri yüzeyin parametre eğrileri değildir. Genel ispat olması bakımından II. hali ispatlayalım: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$X = x_1 e + x_2\varphi(e) + x_3\xi$$

ve

$$Y = y_1 e + y_2\varphi(e) + y_3\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= -x_2 e + x_1 \varphi(e), \\
\varphi(Y) &= -y_2 e + y_1 \varphi(e), \\
g(X, \varphi(Y)) &= x_2 y_1 - x_1 y_2, \\
\eta(X) &= x_3, \\
\varphi(\xi) &= 0, \\
\eta o \varphi &= 0, \\
\eta(\xi) &= 1, \\
g(X, \varphi(Y)) &= -g(\varphi(X,)Y), \\
g(X, \varphi(X)) &= 0
\end{aligned}$$

değerleri yardımıyla

$$\varphi(X_u) = -\frac{1}{2} f_{1,u} e + \frac{1}{2} f_{2,u} \varphi(e), \tag{2.22}$$

$$\varphi(X_v) = -\frac{1}{2} f_{1,v} e + \frac{1}{2} f_{2,v} \varphi(e) \tag{2.23}$$

ve

$$\eta(X_u) = \frac{1}{2}(f_{3,u} e - f_2 f_{1,u}), \tag{2.24}$$

$$\eta(X_v) = \frac{1}{2}(f_{3,v} e - f_2 f_{1,v}) \tag{2.25}$$

olduğundan $X_u \wedge X_v$ çarpımı $\{e, \varphi(e), \xi\}$ ortonormal baz vektörlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \frac{1}{4}[f_{1,u}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v}) - f_{2,u}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})]e \\
&\quad + \frac{1}{4}[f_{2,v}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u}) - f_{2,u}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})]\varphi(e) \\
&\quad + \frac{1}{4}(f_{1,v} f_{2,u} - f_{1,u} f_{2,v})\xi
\end{aligned} \tag{2.26}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
E = \ & g(X_u, X_u) = \frac{1}{4} f_{2,u}^2 + \frac{1}{4} f_{1,u}^2 + \frac{1}{4}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})^2, \\
F = \ & g(X_u, X_v) = \frac{1}{4} f_{2,u} f_{2,v} + \frac{1}{4} f_{1,u} f_{1,v} + \frac{1}{4}(f_{3,u} - f_2 f_{1,u})(f_{3,v} - f_2 f_{1,v}), \\
G = \ & g(X_v, X_v) = \frac{1}{4} f_{2,v}^2 + \frac{1}{4} f_{1,v}^2 + \frac{1}{4}(f_{3,v} - f_2 f_{1,v})^2
\end{aligned} \tag{2.27}$$

olduğundan M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N=\frac{X_u\wedge X_v}{\|X_u\wedge X_v\|}$$

ifadesi

$$\|X_u\wedge X_v\|^2=g(X_u,X_u)g(X_v,X_v)-g^2(X_u,X_v)$$

denklemi yardımıyla

$$N=\frac{X_u\wedge X_v}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{2.28}$$

olur. Yüzeye ait ikinci mertebeden türevler $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında tanımlı kovaryant türev operatörü yardımıyla

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \frac{1}{2}f_{2,uu}e+\frac{1}{2}f_{1,uu}\varphi(e)+\frac{1}{2}(f_{3,uu}-f_{2,u}f_{1,u}-f_{1,uu}f_2)\xi \\ &\quad -2\eta(X_u)\varphi(X_u)-g(X_u,\varphi(X_u))\xi \end{aligned}$$

olup (2.23)-(2.27) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \frac{1}{2}f_{2,uu}e+\frac{1}{2}f_{1,uu}\varphi(e)+\frac{1}{2}(f_{3,uu}-f_{2,u}f_{1,u}-f_{1,uu}f_2)\xi \\ &\quad -(f_{3,u}-f_2f_{1,u})(-\frac{1}{2}f_{1,u}e+\frac{1}{2}f_{2,u}\varphi(e))-\Big[-\frac{1}{4}f_{1,u}f_{2,u}+\frac{1}{4}f_{2,u}f_{1,u}\Big]\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \frac{1}{2}\big[f_{2,uu}+f_{1,u}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})\big]e+\frac{1}{2}\big[f_{1,uu}-f_{2,u}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})\big]\varphi(e) \\ &\quad +\frac{1}{2}[f_{3,uu}-f_{2,u}f_{1,u}-f_{1,uu}f_2]\xi \end{aligned} \tag{2.29}$$

dir. Benzer mantıkla X_{uv} ve X_{vv} türevleri

$$\begin{aligned} X_{uv} &= \frac{1}{2}\big[f_{2,uv}+\frac{1}{2}f_{1,v}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})+\frac{1}{2}f_{1,u}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})\big]e \\ &\quad \frac{1}{2}\big[f_{1,uv}-\frac{1}{2}f_{2,v}(f_{3,u}-f_2f_{1,u})-\frac{1}{2}f_{2,u}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})\big]\varphi(e) \\ &= \frac{1}{2}\big[f_{3,uv}-\frac{1}{2}f_{2,v}f_{1,u}-f_{1,uv}f_2-\frac{1}{2}f_{1,v}f_{2,u}\big]\xi \end{aligned} \tag{2.30}$$

ve

$$\begin{aligned} X_{vv} &= \frac{1}{2}\big[f_{2,vv}+f_{1,v}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})\big]e \\ &\quad +\frac{1}{2}\big[f_{1,vv}-f_{2,v}(f_{3,v}-f_2f_{1,v})\big]\varphi(e) \\ &\quad +\frac{1}{2}\big[f_{3,vv}-f_{2,v}f_{1,v}-f_{1,vv}f_2\big]\xi \end{aligned} \tag{2.31}$$

eşitlikleri ile bulunur. Ayrıca yukarıda bulduğumuz X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned} l &= g(N, X_{uu}) \\ m &= g(N, X_{uv}) \\ n &= g(N, X_{vv}) \end{aligned} \tag{2.32}$$

değerleri kolaylıkla hesaplanabilir [10].

$\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında bir M yüzeyinin şekil operatörü

$$\begin{aligned} &S : \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ &X \rightarrow S(X) = \nabla_X N \end{aligned} \tag{2.33}$$

lineer dönüşümdür. Burada ∇ ve N sırasıyla $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayının Riemann konneksiyonu ve M yüzeyinin birim normal vektör alanıdır. $\{X_u, X_v\}$ cümlesi $\chi(M)$ nin bir bazı olduğundan buradaki her vektör bu baz vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılır. Kolaylıkla gösterilebilir ki,

$$\begin{aligned} S(X_u) &= \frac{Gl - Fm}{EG - F^2} X_u + \frac{Em - Fl}{EG - F^2} X_v \\ S(X_v) &= \frac{Gm - Fn}{EG - F^2} X_u + \frac{En - Fm}{EG - F^2} X_v \end{aligned}$$

olup M yüzeyinin $\{X_u, X_v\}$ bazına göre şekil operatörü matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{Gl - Fm}{EG - F^2} & \dfrac{Em - Fl}{EG - F^2} \\ \\ \dfrac{Gm - Fn}{EG - F^2} & \dfrac{En - Fm}{EG - F^2} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

dir [10].

2.2.1. $\mathbb{R}^3(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Herhangi Bir Yüzeyin Gauss ve Ortalama Eğriliği

Teorem 2.2.1. $M, \mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyi için Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \tag{2.35}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Gl + En - 2Fm}{EG - F^2}\right) \tag{2.36}$$

dir [10].

Teorem 2.2.2. $M, \mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. S, M üzerinde şekil operatörü matrisi ve $\chi(M)$ nin bir bazı $\{u, v\}$ olsun. Bu durumda K, M yüzeyinin Gauss eğriliği olmak üzere

$$S(u) \wedge S(v) = K(u \wedge v), \tag{2.37}$$

$$g(S(u) \wedge S(v), u \wedge v) = K\|(u \wedge v)\|^2, \tag{2.38}$$

$$K = \frac{g(S(u), u)g(S(v), v) - g(S(u), v)g(S(v), u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)g(v, u)} \tag{2.39}$$

dır [10].

İspat: $\chi(M)$ nin bir bazı $\{u, v\}$ ve $S(u), S(v) \in \chi(M)$ olduğundan

$$\begin{aligned} S(u) &= au + bv \\ S(v) &= cu + dv \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} S(u) \wedge S(v) &= (au + bv) \wedge (cu + dv) \\ &= ac(u \wedge u) + ad(u \wedge v) + bc(v \wedge u) + bd(v \wedge v) \\ &= ad(u \wedge v) - bc(u \wedge v) \\ &= (ad - bc)(u \wedge v) \\ &= \det S.(u \wedge v) \\ &= K(u \wedge v) \end{aligned}$$

olur. Böylece (2.34) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} g(S(u) \wedge S(v), u \wedge v) &= g(K.(u \wedge v), u \wedge v) \\ &= Kg(u \wedge v, u \wedge v) \\ &= K(g(u, u)g(v, v) - g(u, v)g(v, u)) \end{aligned} \tag{2.40}$$

olduğundan

$$g(S(u) \wedge S(v), u \wedge v) = K\|u \wedge v\|^2 \tag{2.41}$$

dır.

$$g(X \wedge Y, Z \wedge W) = g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)$$

eşitliği yardımıyla

$$g(S(u)\wedge S(v), u\wedge v) = g(S(u),u)g(S(v),v) - g(S(v),u)g(S(u),v) \tag{2.42}$$

olup (2.37) ve (2.38) denklemleri kullanılarak

$$g(S(u),u)g(S(v),v) - g(S(v),u)g(S(u),v) = K(g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u))$$

ve

$$K = \frac{g(S(u),u)g(S(v),v) - g(S(v),u)g(S(u),v)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)}$$

bulunur. □

Teorem 2.2.3. M, $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. S, M üzerinde şekil operatörü matrisi ve $\chi(M)$ nin bir bazı $\{u,v\}$ olsun. Bu durumda H, M nin ortalama eğriliği olmak üzere

$$S(u)\wedge v + u\wedge S(v) = 2Hu\wedge v, \tag{2.43}$$

$$g(S(u)\wedge v + u\wedge S(v), u\wedge v) = 2H\|u\wedge v\|^2, \tag{2.44}$$

$$2H = \frac{g(S(u),u)g(v,v) - g(S(u),v)g(v,u) + g(u,u)g(S(v),v) - g(S(v),u)g(v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)g(v,u)} \tag{2.45}$$

dır [10].

İspat: $\chi(M)$ nin bir bazı $\{u,v\}$ ve $S(u), S(v) \in \chi(M)$ olduğundan

$$\begin{aligned} S(u) &= au + bv \\ S(v) &= cu + dv \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} S(u)\wedge v + u\wedge S(v) &= (au+bv)\wedge v + u\wedge(cu+dv) \\ &= a(u\wedge v) + b(v\wedge v) + c(u\wedge u) + d(u\wedge v) \\ &= (a+d)(u\wedge v) \\ &= 2H(u\wedge v) \end{aligned}$$

olur. (2.40) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} g(S(u)\wedge v+u\wedge S(v),u\wedge v) &= g(2H(u\wedge v),u\wedge v) \\ &= 2Hg(u\wedge v,u\wedge v) \\ &= 2H(g(u,u)g(v,v)-g(u,v)g(v,u)) \\ &= 2H\|u\wedge v\|^2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(S(u)\wedge v+u\wedge S(v),u\wedge v) &= g(S(u)\wedge v,u\wedge v)+g(u\wedge S(v),u\wedge v) \\ &= g(S(u),u)g(v,v)-g(v,u)g(S(u),v) \\ &+ (g(u,u)g(S(v),v)-g(S(v),u)g(v,u)) \end{aligned} \tag{2.47}$$

olup,(2.44) ve (2.45) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 2H(g(u,u)g(v,v)-g(u,v)g(v,u)) &= g(S(u),u)g(v,v)-g(v,u)g(S(u),v)) \\ &+ g(u,u)g(S(v),v))-g(S(v),u))g(v,u) \end{aligned}$$

$$2H=\frac{g(S(u),u)g(v,v)-g(S(u),v))g(v,u)+g(u,u)g(S(v),v))-g(S(v),u))g(v,u)}{g(u,u)g(v,v)-g(u,v)g(v,u)}$$

olur. □

Sonuç 2.2.1. M, $\mathbb{R}^3(-3)$ Sasaki uzayında bir yüzey olsun. S, M üzerinde şekil operatörü matrisi ve $\chi(M)$ nin bir bazı $\{u,v\}$ olsun. Bu durumda K, M nin Gauss eğriliği, H, M nin ortalama eğriliği olmak üzere

$$K=\frac{g(S(X_u),X_u)g(S(X_v),X_v)-g(S(X_u),X_v)g(S(X_v),X_u)}{g(X_u,X_u)g(X_v,X_v)-g(X_u,X_v)g(X_v,X_u)}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{g(S(X_u),X_u)g(X_v,X_v)-g(S(X_u),X_v)g(X_v,X_u)+g(X_u,X_u)g(S(X_v),X_v)}{g(X_u,X_u)g(X_v,X_v)-g(X_u,X_v)g(X_v,X_u)} \\ &- \frac{g(S(X_v),X_u)g(X_v,X_u)}{g(X_u,X_u)g(X_v,X_v)-g(X_u,X_v)g(X_v,X_u)} \end{aligned}$$

bulunur [10].

2.2.2. $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlarda Kovaryant Türev Operatörü

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunda

$$g_{ab} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \delta_{ij} + y_i y_j & 0 & -y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y_j & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$$g^{ab} = 4\begin{bmatrix} \delta_{ij} & 0 & y_i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ y_j & 0 & 1+\sum(y^i)^2 \end{bmatrix}$$

olduğu biliniyor. $n = 1$ durumu göz önüne alınırsa

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kh}(g_{ih,j} + g_{hj,i} + g_{ij,h})$$

Christoffel sembolleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_e \varphi(e) &= \xi = -\nabla_{\varphi(e)} e \\ \nabla_\xi e &= -\varphi(e) = \nabla_e \xi \\ \nabla_\xi \varphi(e) &= e = \nabla_{\varphi(e)} \xi \\ \nabla_e e &= \nabla_{\varphi(e)} \varphi(e) = \nabla_\xi \xi = 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$X = x_1 e + x_2 \varphi(e) + x_3 \xi$$

ve

$$Y = y_1 e + y_2 \varphi(e) + y_3 \xi$$

vektör alanları için

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X y_1 e + y_2\varphi(e) + y_3\xi \\
&= \nabla_X y_1 e + \nabla_X(y_2\varphi(e)) + \nabla_X(y_3\xi) \\
&= X[y_1]e + y_1\nabla_X e + X[y_2]\varphi(e) + y_2\nabla_X\varphi(e) \\
&\quad + X[y_3]\xi + y_3\nabla_X\xi \\
&= X[y_1]e + X[y_2]\varphi(e) + X[y_3]\xi \\
&\quad + y_1\nabla_{x_1 e + x_2\varphi(e) + x_3\xi} e + y_2\nabla_{x_1 e + x_2\varphi(e) + x_3\xi}\varphi(e) \\
&\quad + y_3\nabla_{x_1 e + x_2\varphi(e) + x_3\xi}\xi \\
&= X[y_1]e + X[y_2]\varphi(e) + X[y_3]\xi \\
&\quad + y_1(x_1\nabla_e e + x_2\nabla_{\varphi(e)} e + x_3\nabla_\xi e) \\
&\quad + y_2(x_1\nabla_e\varphi(e) + x_2\nabla_{\varphi(e)}\varphi(e) + x_3\nabla_\xi\varphi(e)) \\
&\quad + y_3(x_1\nabla_e\xi + x_2\nabla_{\varphi(e)}\xi + x_3\nabla_\xi\xi)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= D_X Y + x_1 y_2\xi - x_1 y_3\varphi(e) + x_2 y_1\xi + x_2 y_3 e - x_3 y_1\varphi(e) + x_3 y_2 \qquad (2.49)\\
&= D_X Y - y_3(x_1\varphi(e) - x_2 e) - x_3(y_1\varphi(e) - y_2 e) + \xi(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
&= D_X Y - \eta(Y)\varphi(X) - \eta(X)\varphi(Y) - g(X,\varphi(Y))\xi \\
&= D_X Y - \eta(Y)\varphi(X) - \eta(X)\varphi(Y) - d\eta(X,Y)\xi
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada

$$D_X Y = X[y_1]e + X[y_2]\varphi(e) + X[y_3]\xi$$

dır [10], [18].

Teorem 2.2.4. $\mathbb{R}^3(-3)$ üzerinde bir

$$\begin{aligned}
X: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3(-3) \\
& (u,v) \to X(u,v) \; = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))
\end{aligned}$$

yüzeyi için Gauss-Egregium teoremi

$$\begin{aligned}
K &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4E^2G} - \frac{1}{E}\left\{\left(\frac{E_v}{2G}\right)v + \left(\frac{G_u}{2G}\right)u\right\} - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} \qquad (2.50)\\
&\quad + 3G - \eta^2\left(\frac{4G}{E}X_u + 4X_v\right)
\end{aligned}$$

denklemi ile ifade edilir [10].

Sonuç 2.2.2. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında bir

$$\begin{aligned} X: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3(-3) \\ (u,v) \to X(u,v) & = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)) \end{aligned}$$

yüzeyi için $\frac{4G}{E}X_u + 4X_v$ vektörü "Kontak Distribution" da yatan bir vektör alanı ise bu yüzey için Gauss-Egregium teoremi

$$\begin{aligned} K &= \frac{E_u G_u + E_v^2}{4E^2G} - \frac{1}{E}\left\{\left(\frac{E_v}{2G}\right)v + \left(\frac{G_u}{2G}\right)u\right\} \\ & \quad - \frac{E_v G_v + G_u^2}{4EG^2} + 3G \end{aligned} \tag{2.51}$$

olur [10].

3. BÖLÜM

3-BOYUTLU SASAKI UZAYINDA YÜZEYLER

Bu bölümde dayanak eğrisi Legendre eğrisi olan regle yüzeyler karakterize edilmiştir. Doğrultman vektörünün özel durumları için ayrı ayrı dağılma parametresi hesaplanmıştır.

3.1. Legendre Eğrilerinin Serret-Frenet Çatısı

Tanım 3.1.1. Kontak manifoldun 1-boyutlu integral alt manifolduna **Legendre eğrisi** denir [1].

Teorem 3.1.1. M bir $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ Kontak metrik yapısı ile verilmiş üç boyutlu manifold olsun. Bu durumda M bir Sasaki uzayıdır ancak ve ancak manifold üzerindeki her bir Legendre eğrisinin torsiyonu ϵ dur. Bu teoremin $\epsilon = 1$ durumundaki ilk ispatını 1994 yılında [6] ve [42] yapmıstır. $\epsilon = \pm 1$ durumundaki genel ispatı ise Belkhelfa ve arkadaşları tarafından verilmiştir [7].

Teorem 3.1.2. γ yay-parametresi ile verilmiş bir Legendre eğrisi olsun.Bu durumda Frenet formulleri

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \kappa\varphi(\gamma'), \tag{3.1}$$

$$\nabla_{\gamma'}\varphi(\gamma') = -\kappa\gamma' + \xi \tag{3.2}$$

$$\nabla_{\gamma'}\xi = -\varphi(\gamma') \tag{3.3}$$

dir [7].

Teorem 3.1.3. $\mathbb{R}^3(-3\epsilon)$ uzayındaki herhangi bir Legendre eğrisinin eğriliği, eğrinin Öklid metriğine göre xy- düzlemine izdüşüm eğrisinin eğriliğinin iki katına eşittir [7].

Teorem 3.1.4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Sasaki uzay formu üzerinde $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi genel helistir ancak ve ancak γ eğrisinin eğriliği sabittir [8].

3.2. Dayanak Eğrisi Legendre Eğrisi Olan Regle Yüzeyler

$\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında γ Legendre dayanak eğrisi ve X sabit doğrultusu tarafından üretilen bir M regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \phi: \quad I \times \mathbb{E} \quad &\rightarrow \mathbb{E}^3(-3) \\ (s,v) \quad &\rightarrow \phi(s,v) = \gamma(s) + vX(s) \end{aligned} \tag{3.4}$$

olsun. Buna göre

$$P_x = \frac{\det(\gamma', X, D_{\gamma'}X)}{g(\nabla_{\gamma'}X, \nabla_{\gamma'}X)} \tag{3.5}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Striksiyon çizgisinin parametrik denklemi

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) - \frac{g(\gamma'(s), X'(s))^2}{\|\nabla_{\gamma'}X\|} X(s) \tag{3.6}$$

olsun. Burada ∇, kovaryant türev operatörüdür.

γ Legedre eğrisi ve X birim sabit doğrultusu tarafından üretilen regle yüzeyler için P_X ifadelerini hesaplayalım:

$$X \in Sp\left\{\gamma', \varphi(\gamma'), \xi\right\} \;\; ve \;\; X = x_1\gamma' + x_2\varphi(\gamma') + x_3\xi \tag{3.7}$$

öyle ki,

$$g(X,X) = 1.$$

ve (3.7) eşitliğinin türevi alınır ve γ baz eğrisinin Frenet formulleri kullanılırsa

$$\nabla_{\gamma'}X = -\kappa x_2\gamma' + (\kappa x_1 - x_3)\varphi(\gamma') + x_2\xi \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.5) denkleminden

$$P_x = \frac{1 - x_1^2 - \kappa x_1 x_3}{x_2^2 + x_3^2 - 2\kappa x_1 x_3 + \kappa^2(1 - x_3^2)} \tag{3.9}$$

bulunur.

Teorem 3.2.1. M, (3.4) parametrizasyonu ile verilmiş bir regle yüzey olsun. $P_X = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ dayanak eğrisinin κ eğriliği

$$\kappa = \frac{1 - x_1^2}{x_1 x_3} \tag{3.10}$$

olan bir Legendre helis eğrisi olmasıdır.

İspat: M regle yüzeyi için $P_X = 0$ olsun. (3.9) eşitliğinden

$$1 - x_1^2 - \kappa x_1 x_3 = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\kappa = \frac{1 - x_1^2}{x_1 x_3} = s\,b\,t$$

O halde, γ eğrisi bir Legendre helistir. □

3.3. Dayanak Eğrisi Legendre Eğri Olan Bazı Özel Regle Yüzeyler

3.3.1. Doğrultman Vektörünün $X = \gamma'$ Olması Hali

$\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında dayanak eğrisi Legendre eğri olan bir M regle yüzeyinin parametrik denklemi genel olarak

$$\begin{aligned} \phi(s,v) &= \gamma(s) + vX(s) \\ &= \gamma(s) + v\left(x_1\gamma' + x_2\varphi(\gamma') + x_3\xi\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

ile tanımlanmıştı. Bu özel durum için

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = 0 \tag{3.12}$$

olmalıdır. O halde (3.12) eşitlikleri (3.11) de yerine yazılırsa Frenet çatısının γ' teğet vektörü tarafından üretilen regle yüzey

$$M_{\gamma'} = \gamma(s) + v\gamma' \tag{3.13}$$

parametrizasyonu ile verilir.

Teorem 3.3.1. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultusu γ' vektör alanı olan regle yüzey $M_{\gamma'}$ olsun. $M_{\gamma'}$ yüzeyi için her zaman $P_{\gamma'} = 0$ dır.

İspat: Genel durum için hesaplanan (3.9) eşitliğinde (3.12) değerleri yerine yazılırsa ispat açıktır. □

3.3.2. Doğrultman Vektörünün $X = \varphi(\gamma')$ Olması Hali

Bu durumda

$$x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = 1 \tag{3.14}$$

olmalıdır. O halde $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultusu $\varphi(\gamma')$ vektörü olan regle yüzey

$$M_{\varphi(\gamma')} = \gamma(s) + v\varphi(\gamma') \tag{3.15}$$

parametrik denklemine sahiptir.

Teorem 3.3.2. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında γ dayanak eğrisi, $\varphi(\gamma')$ doğrultusu tarafından üretilen regle yüzey $M_{\varphi(\gamma')}$ olsun. $M_{\varphi(\gamma')}$ yüzeyi için

$$P_{\varphi(\gamma')} = \frac{1}{1+\kappa^2} \tag{3.16}$$

dir.

İspat: Genel durum için hesaplanan (3.9) eşitliğinde (3.14) değerleri yerine yazılırsa teoremin ispatı kolayca görülür. □

3.3.3. Doğrultman Vektörünün $X = \xi$ Olması Hali

Bu durumda, (3.9) denkleminde

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 1 \tag{3.17}$$

olmalıdır. O halde Frenet çatısının ξ vektörü tarafından üretilen regle yüzey

$$M_\xi = \gamma(s) + v\xi \tag{3.18}$$

parametrik denklemi ile verilir.

Teorem 3.3.3. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında γ dayanak eğrisi, ξ doğrultusu tarafından üretilen regle yüzey M_ξ olsun. M_ξ yüzeyi için

$$P_\xi = 1 \tag{3.19}$$

olur.

İspat: Genel durum için hesaplanan (3.9) eşitliğinde (3.17) değerleri yerine yazılırsa ispat tamamlanır. □

3.3.4. Doğrultman Vektörünün $X \in Sp\left\{\varphi(\gamma'), \xi\right\}$ Olması Hali

X doğrultmanı $\varphi(\gamma')$ ve ξ vektörlerinin gerdiği düzlemde yatan sabit bir birim vektör olsun. Bu durumda

$$x_1 = 0, \ \ x_2^2 + x_3^2 = 1, \ x_2 \neq 0, \ x_3 \neq 0 \tag{3.20}$$

olur. Yüzeyin parametrik denklemi

$$M_{\varphi(\gamma'),\xi} = \gamma(s) + v\left(x_2\varphi(\gamma') + x_3\xi\right) \tag{3.21}$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.3.4. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında γ dayanak eğrisi, $X \in Sp\left\{\varphi(\gamma'), \xi\right\}$ doğrultusu tarafından üretilen regle yüzey $M_{\varphi(\gamma'),\xi}$ olsun. $M_{\varphi(\gamma'),\xi}$ yüzeyi için

$$P_{\varphi(\gamma'),\xi} = \frac{1}{1+\kappa^2 x_2^2} \tag{3.22}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı genel durum için hesaplanan (3.9) eşitliğinde (3.20) değerleri yerine yazılırsa kolayca görülür. □

3.3.5. Doğrultman Vektörünün $X \in Sp\left\{\gamma', \xi\right\}$ Olması Hali

X doğrultmanı γ' ve ξ vektörlerinin gerdiği düzlemde yatan sabit bir birim vektör olsun. Bu durumda

$$x_2 = 0, \ \ x_1^2 + x_3^2 = 1, \ x_1 \neq 0, \ x_2 \neq 0 \tag{3.23}$$

olur. Yüzeyin parametrik denklemi

$$M_{\gamma',\xi} = \gamma(s) + v\left(x_1\gamma' + x_3\xi\right) \tag{3.24}$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.3.5. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultmanı $X \in Sp\{\gamma', \xi\}$ olan regle yüzey $M_{\gamma',\xi}$ olsun. $M_{\gamma',\xi}$ yüzeyi için

$$P_x = \frac{x_3^2 - \kappa x_1 x_3}{x_3^2 - 2\kappa x_1 x_3 + \kappa^2 x_1^2} \tag{3.25}$$

bulunur. $P_x = 0$ olması için gerek ve yeter şart γ Legendre eğrisinin Legendre helis olmasıdır.

İspat: Genel durum için hesaplanan (3.9) eşitliğinde (3.20) değerleri yerine yazılırsa

$$P_x = \frac{x_3^2 - \kappa x_1 x_3}{x_3^2 - 2\kappa x_1 x_3 + \kappa^2 x_1^2}$$

olur. Böylece $P_X = 0$ ise,

$$\kappa = \frac{x_3}{x_1} = sbt$$

dir. O halde, γ eğrisi bir Legendre helistir. □

3.3.6. Doğrultman Vektörünün $X \in Sp\{\gamma', \varphi(\gamma')\}$ Olması Hali

X doğrultmanı, γ' ve $\varphi(\gamma')$ vektörlerinin gerdiği düzlemde yatan bir vektör olsun. Bu durumda

$$x_3 = 0, \;\; x_1^2 + x_2^2 = 1, \;\; x_1 \neq 0, \;\; x_2 \neq 0 \tag{3.26}$$

olur. Yüzeyin parametrik denklemi

$$M_{\gamma',\varphi(\gamma')} = \gamma(s) + v\left(x_1\gamma' + x_2\varphi(\gamma')\right) \tag{3.27}$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.3.6. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultmanı $X \in Sp\{\gamma', \varphi(\gamma')\}$ olan regle yüzey $M_{\gamma',\varphi(\gamma')}$ olsun. $M_{\gamma',\varphi(\gamma')}$ yüzeyi için

$$P_{\gamma',\varphi(\gamma')} = \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} \tag{3.28}$$

olur.

4. BÖLÜM

KONTAK GEOMETRİDE REGLE YÜZEYLER İÇİN ŞEKİL OPERATÖRÜ MATRİSİNİN HESABİ

Bu bölümde, kontak manifoldlarda şekil operatörünün katsayıları hesaplanarak regle yüzeyin, doğrultman vektörünün özel durumlarına göre Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği ile olan ilişkisi incelenecektir.
Öncelikle şekil operatörünün temel özelliklerini verelim:

Tanım 4.0.1. M, bir C^{∞} manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^{∞} fonksiyonların halkası $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle , \rangle = \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada, $\langle , \rangle$ işlemine M üzerinde **iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği** veya **diferansiyellenebilir metrik** denir [21].

Tanım 4.0.2. M, bir C^{∞} manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X,Y) &\rightarrow D(X,Y) = D_X^Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için

1. $D_{fX+gY}^{Z} = fD_X^Z + gD_Y^Z \quad \forall X,Y,Z \in \chi(M), \forall f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

2. $D_X^{fY} = fD_X^Y + \left(Xf\right)Y \quad \forall X,Y, \in \chi(M), \forall f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir **afin konneksiyon** ve D_X e de X e göre **kovaryant türev operatörü** denir [21].

Tanım 4.0.3. E^n de bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya M nin **Weingarten dönüşümü** denir [21].

Tanım 4.0.4. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow K(P) = \det S(P) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, M nin **Gauss eğrilik fonksiyonu** ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki **Gauss eğriliği** denir [21].

Tanım 4.0.5. E^n de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\rightarrow H(P) = iz(S(P)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, M nin **ortalama eğrilik fonksiyonu** ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki **ortalama eğriliği** denir [21].

Şimdi hemen hemen kontak metrik manifoldlarda Weingarten matrisinin hesabı için gerekli bazı ifadeleri hatırlatarak işe başlayalım. $\{\gamma', \varphi(\gamma'), \xi\}$ bazına göre $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$X = x_1\gamma' + x_2\varphi(\gamma') + x_3\xi \quad ve \quad Y = y_1\gamma' + y_2\varphi(\gamma') + y_3\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= -x_2\gamma' + x_1\varphi(\gamma'),\\
\varphi(Y) &= -y_2\gamma' + y_1\varphi(\gamma'),\\
g(X,\varphi(Y)) &= x_2y_1 - x_1y_2,\\
\eta(X) &= x_3,\\
\varphi(\xi) &= 0,\\
\eta o \varphi &= 0,\\
\eta(\xi) &= 1,\\
g(X,\varphi(Y)) &= -g(\varphi(X,)Y),\\
g(X,\varphi(X)) &= 0
\end{aligned}$$

dır. İlk olarak $\mathbb{R}^3(-3)$ de

$$\begin{aligned}
\phi: \quad I\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3(-3) \\
\phi(s,v) &= \gamma(s) + vX(s) = \gamma(s) + v\left(x_1\gamma'(s) + x_2\varphi(\gamma')(s) + x_3\xi(s)\right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

parametrizasyonu ile verilen dayanak eğrisi Legendre eğrisi olan M_X regle yüzeyi için gerekli kısmi türevleri hesaplayalım. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{\phi_s,\phi_v\}$ olmak üzere

$$\phi_s = (1 - vx_2\kappa)\gamma' + (vx_1\kappa - vx_3)\varphi(\gamma') + vx_2\xi \tag{4.4}$$

$$\phi_v = \left(x_1\gamma'(s) + x_2\varphi(\gamma')(s) + x_3\xi(s)\right) \tag{4.5}$$

dır. Ayrıca

$$\varphi(\phi_s) = (vx_3 - vx_1\kappa)\gamma' + (1 - vx_2\kappa)\varphi(\gamma') \tag{4.6}$$

$$\varphi(\phi_v) = -x_2\gamma' + x_1\varphi(\gamma') \tag{4.7}$$

$$\eta(\phi_s) = vx_2 \tag{4.8}$$

$$\eta(\phi_v) = x_3 \tag{4.9}$$

olup, Tanım 2.1.1 de (4.5)-(4.8) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\phi_s\wedge\phi_v &= -g\left(\phi_s,\varphi(\phi_v)\right)\xi - \eta(\phi_v)\varphi(\phi_s) + \eta(\phi_s)\varphi(\phi_v)\\
&= \left(vx_1x_3\kappa - vx_2^2 - vx_3^2\right)\gamma'\\
&+ (-x_3 + vx_2x_3\kappa + vx_1x_2)\varphi(\gamma')\\
&+ \left(x_2 - vx_2^2\kappa - vx_1^2\kappa + vx_1x_3\right)\xi
\end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. M_X regle yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N=\frac{1}{\|\phi_s\wedge\phi_v\|}\left[\begin{array}{c}(v x_1 x_3\kappa-v x_2^2-v x_3^2\gamma' \\ +(-x_3+v x_2 x_3\kappa+v x_1 x_2)\varphi(\gamma' \\ +\left(x_2-v x_2^2\kappa-v x_1^2\kappa+v x_1 x_3\right)\xi\end{array}\right] \tag{4.11}$$

dir.

$$E = g(\phi_s,\phi_s)=1-2v x_2\kappa+v^2x_1^2\kappa^2+v^2x_2^2\kappa^2+v^2x_3^2+v^2x_2^2-2v^2x_1x_3\kappa \tag{4.12}$$

$$F = g(\phi_s,\phi_v)=x_1 \tag{4.13}$$

$$G = g(\phi_v,\phi_v)=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \tag{4.14}$$

olur. İkinci merteben $\phi_{ss},\phi_{sv},\phi_{vv}$ türevleri hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}\phi_{ss} &= \nabla_{\phi_s}^{\phi_s} \\ &= \left(-v x_2\kappa'-2v^2x_2x_3+2v^2x_1x_2\kappa\right)\gamma'+\left(v x_1\kappa'-2v x_2+2v^2x_2^2\kappa\right)\varphi(\gamma')\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\phi_{sv} &= \nabla_{\phi_v}^{\phi_s} \\ &= \left(-x_2\kappa+v x_2^2+v x_1x_3\kappa-v x_3^2\right)\gamma' \\ &+ (x_1\kappa-2x_3-v x_1x_2+v x_2x_3\kappa)\varphi(\gamma') \\ &+ \left(v x_2^2\kappa-x_2\right)\xi\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\phi_{vv} &= \nabla_{\phi_v}^{\phi_v} \\ &= x_2x_3\gamma'-x_1x_3\varphi(\gamma')\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Ayrıca ikinci mertebeden türevler yardımıyla l,m,n değerlerini hesaplanırsa

$$l=g(N,\phi_{ss})=\frac{1}{\|\phi_s\times\phi_v\|}g\left(\phi_{ss},\phi_s\wedge\phi_v\right) \tag{4.18}$$

olup, (4.18) eşitliğinde (4.15) ifadesi yerine yazılırsa

$$l=\frac{1}{\|\phi_s\wedge\phi_v\|}\left[\begin{array}{c}\left(-v x_3^2+v x_1x_3\kappa-v x_2^2\right)\left(-v x_2\kappa'-2v^2x_2x_3+2v^2x_1x_2\kappa\right) \\ +(-x_3+v x_2x_3\kappa+v x_1x_2)\left(v x_1\kappa'-2v x_2+2v^2x_2^2\kappa\right)\end{array}\right] \tag{4.19}$$

bulunur.

$$m=g(N,\phi_{sv})=\frac{1}{\|\phi_s\wedge\phi_v\|}g\left(\phi_{sv},\phi_s\wedge\phi_v\right) \tag{4.20}$$

olup, (4.20) eşitliğinde (4.16) ifadesi yerine yazılırsa

$$m=\frac{1}{\|\phi_s\wedge\phi_v\|}\left[\begin{array}{c}\left(-v x_3^2+v x_1x_3\kappa-v x_2^2\right)\left(-x_2\kappa+v x_2^2+v x_1x_3\kappa-v x_3^2\right) \\ +(-x_3+v x_2x_3\kappa+v x_1x_2)(x_1\kappa-2x_3-v x_1x_2+v x_2x_3\kappa) \\ \left(x_2-v x_2^2-v x_1^2\kappa+v x_1x_3\right)\left(v x_2^2\kappa-x_2\right)\end{array}\right] \tag{4.21}$$

elde edilir.

$$n = g(N,\phi_{vv}) = \frac{1}{\|\phi_s \wedge \phi_v\|} g\left(\phi_{vv}, \phi_s \wedge \phi_v\right) \tag{4.22}$$

olup, (4.22) eşitliğinde (4.17) ifadesi yerine yazılırsa

$$n = \frac{1}{\|\phi_s \wedge \phi_v\|} \left[\begin{array}{c} x_2 x_3 \left(-v x_3^2 + v x_1 x_3 \kappa - v x_2^2\right) \\ -x_1 x_3 \left(-x_3 + v x_2 x_3 \kappa + v x_1 x_2\right) \end{array} \right] \tag{4.23}$$

değerleri bulunur. E,F,G ve l,m,n katsayıları (2.35) denkleminde yerine yazılırsa M_X regle yüzeyinin şekil operatörü matrisi kolaylıkla bulunur.

Teorem 4.0.7. M_X, (4.3) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Eğer bu regle yüzeyin dayanak eğrisi aynı zamanda asimptotik eğri ise, γ bir Legendre helis ve

$$\kappa = \frac{x_3 - v x_1 x_2}{v x_2 x_3} \tag{4.24}$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki, $\gamma(s)$ M_X regle yüzeyinin bir asimptotik eğrisi olsun. Yani N, yüzeyin normal vektörünü göstermek üzere

$$g(\nabla_{\gamma'}\gamma', N) = 0 \tag{4.25}$$

olmalıdır. Burada (3.1) and (4.11) denklemlerinde $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ ve N ifadelerinin eşitleri yazılır gerekli işlemler yapılırsa

$$\kappa = 0$$

$$\kappa = \frac{x_3 - v x_1 x_2}{v x_2 x_3}$$

elde edilir. □

Teorem 4.0.8. M_X, (4.3) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. M_X regle yüzeyi için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Yüzeyin s-parametre eğrilerinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\left[\begin{array}{c} \left(-v x_2 \kappa' - 2v^2 x_2 x_3 + 2v^2 x_1 x_2 \kappa\right)\left(-v x_3^2 + v x_1 x_3 \kappa - v x_2^2\right) \\ + \left(v x_1 \kappa' - 2v x_2 + 2v^2 x_2^2 \kappa\right)\left(-x_3 + v x_2 x_3 \kappa + v x_1 x_2\right) \end{array} \right] = 0 \tag{4.26}$$

olmasıdır.

(ii) Yüzeyinin v-parametre eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$x_1 x_3^2 - v x_2 x_3^2 - v x_2^3 x_3 - v x_1^2 x_2 x_3 = 0 \tag{4.27}$$

olmasıdır.

İspat:

(i) Eğer M_X yüzeyinin s-parametre eğrileri asimptotik eğri ise

$$g(\phi_{ss}, N) = 0$$

olur. (4.11) ve (4.15) eşitliklerinden, (4.26) elde edilir. Tersinin ispatı açıktır.

(ii) Yüzeyinin v-parametre eğrileri asimptotik eğri ise,

$$g(\phi_{vv}, N) = 0$$

dır. (4.11) ve (4.17) eşitliklerinde gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.27) elde edilir. Benzer şekilde tersinin ispatını görmek kolaydır. □

Teorem 4.0.9. M_X, (4.3) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. M_X regle yüzeyinin dayanak eğrisi aynı zamanda striksiyon çizgisidir.

İspat: Yüzeyinin dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olsun. Bu durumda $g(\gamma', \nabla_{\gamma'} X) = 0$ olduğundan (3.5) denkleminden

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.0.10. M_X, (4.3) parametrizasyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. M_X regle yüzeyinin dayanak eğrisi aynı zamanda geodezik eğri ise, γ bir Legendre helis veya aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\left(v x_1 x_3 \kappa - v x_3^2 - v x_2^2\right) = 0 \tag{4.28}$$

$$\left(x_2 - v x_2^2 \kappa - v x_1^2 \kappa + v x_1 x_3\right) = 0 \tag{4.29}$$

İspat: M_X regle yüzeyinin dayanak eğrisi bu yüzey üzerinde geodezik eğri olsun. O halde,

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' \wedge N = 0$$

olmalıdır.

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' \wedge N = -g\left(\nabla_{\gamma'}\gamma', \varphi(N)\right)\xi - \eta(N)\varphi(\nabla_{\gamma'}\gamma') + \eta(\nabla_{\gamma'}\gamma')\varphi(N)$$

ifadesi düzenlenirse

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' \wedge N = \kappa\left(x_2 - v x_1^2\kappa - v x_2^2\kappa + v x_1 x_3\right)\gamma' - \kappa\left(v x_1 x_3\kappa - v x_3^2 - v x_2^2\right)\xi$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar. □

Şimdi M_X yüzeyine ait özel durumları inceleyelim:

4.1. Özel Hallerde Regle Yüzeyin Şekil Operatörü Matrisinin Katsayıları

4.1.1. Doğrultman Vektörünün $X = \gamma'$ Olması Hali

$M_{\gamma'}$ dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultmanı γ' teğet vektörü olan regle yüzey olsun. (4.4) ve (4.5) denklemleri yardımıyla bu yüzey için

$$\phi_s = \gamma'(s) - v\kappa\varphi(\gamma')(s) \tag{4.30}$$

ve

$$\phi_v = \gamma'(s) \tag{4.31}$$

olarak elde edilir.

$$\phi_s \wedge \phi_v = -g(\phi_s, \varphi(\phi_v))\xi - \eta(\phi_v)\varphi(\phi_s) + \eta(\phi_s)\varphi(\phi_v)$$

ifadesinde

$$\varphi(\phi_s) = -v\kappa\gamma' + \varphi(\gamma') \tag{4.32}$$

$$\varphi(\phi_v) = \varphi(\gamma') \tag{4.33}$$

$$\eta(\phi_s) = 0 \tag{4.34}$$

$$\eta(\phi_v) = 0 \tag{4.35}$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\phi_s \wedge \phi_v = -v\kappa\xi \tag{4.36}$$

olur. Burada

$$\|\phi_s \wedge \phi_v\| = g(\phi_s, \phi_s)g(\phi_v, \phi_v) - g^2(\phi_s, \phi_v)$$

olup, $M_{\gamma'}$ yüzeyi için

$$E_{\gamma'} = 1+v^2\kappa^2 \tag{4.37}$$

$$F_{\gamma'} = 1 \tag{4.38}$$

$$G_{\gamma'} = 1 \tag{4.39}$$

olarak elde edilir.

Önerme 4.1.1. $M_{\gamma'}$, $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultmanı γ' teğet vektör alanı olan bir regle yüzey olsun. $M_{\gamma'}$ yüzeyinin normal vektörü

$$N_{\gamma'} = \mp\xi \tag{4.40}$$

olarak elde edilir.

İspat: $M_{\gamma'}$ regle yüzeyinin birim normal vektörü (2.29) denklemiyle verilmişti. (4.36)-(4.39) değerleri yerine yazılırsa özel durum için normal vektörü olan $N_{\gamma'}$ hesaplanır. □

Şimdi M yüzeyine ait ikinci türevleri (2.30)-(2.32) denklemlerini kullanarak hesaplayalım. Burada $x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = 1$ alınırsa

$$\phi_{ss} = v\kappa'\varphi(\gamma') \tag{4.41}$$

$$\phi_{sv} = \kappa\varphi(\gamma') + v\kappa\xi \tag{4.42}$$

ve

$$\phi_{vv} = 0 \tag{4.43}$$

eşitlikleri ile bulunur. Ayrıca yukarıda bulunan $\phi_{ss}, \phi_{sv}, \phi_{vv}$ türevleri yardımıyla $l = n = 0$ ve $m = -1$ olarak bulunur. $M_{\gamma'}$ yüzeyine ait temel form katsayıları yazılarak yüzeyin $S_{\gamma'}$ şekil operatörü matrisi katsayıları

$$s_{\gamma'}^{11} = \frac{1}{\upsilon^2\kappa^2} \tag{4.44}$$
$$s_{\gamma'}^{12} = \frac{-\left(1+\upsilon^2\kappa^2\right)}{\upsilon^2\kappa^2} \tag{4.45}$$
$$s_{\gamma'}^{21} = \frac{-1}{\upsilon^2\kappa^2} \tag{4.46}$$
$$s_{\gamma'}^{22} = \frac{1}{\upsilon^2\kappa^2} \tag{4.47}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.1. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\gamma'}$ regle yüzeyine ait olan şekil operatörünün matrisi

$$S_{\gamma'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\upsilon^2\kappa^2} & \frac{-(1+\upsilon^2\kappa^2)}{\upsilon^2\kappa^2} \\ \\ \frac{-1}{\upsilon^2\kappa^2} & \frac{1}{\upsilon^2\kappa^2} \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

dir.

İspat: (4.44)-(4.47) denklemlerinden ispat açıktır. □

Teorem 4.1.2. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\gamma'}$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\gamma'} = \frac{-1}{\upsilon^2\kappa^2} \tag{4.49}$$
$$H_{\gamma'} = \frac{1}{\upsilon^2\kappa^2} \tag{4.50}$$

denklemleri ile verilir.

İspat: $M_{\gamma'}$ regle yüzeyine ait olan $S_{\gamma'}$ şekil operatörünün katsayıları (4.1) ve (4.2) denklemlerinde göz önüne alınırsa $K_{\gamma'}$ ve $H_{\gamma'}$ eğrilikleri bulunur. □

Teorem 4.1.3. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\gamma'}$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi striksiyon çizgisi ile çakışır.

İspat: $M_{\gamma'}$, γ' teğet doğrultusu tarafından üretilen regle yüzey olsun. (3.1) denkleminden

$$g(\gamma', \nabla_{\gamma'}^{X}) = g(\gamma', \kappa\varphi(\gamma')) = 0 \tag{4.51}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.1.4. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\gamma'}$ regle yüzeyi için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.
(i)Yüzeyin s-parametre eğrileri asimptotik eğridir.
(ii)Yüzeyin v-parametre eğrileri asimptotik eğridir.

İspat: **(i)** $M_{\gamma'}$ regle yüzeyinin s-parametre eğrilerinin asimptotik eğri olması için $N_{\gamma'}$, regle yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere

$$g(\phi_{ss}, N_{\gamma'}) = 0$$

olmalıdır. (4.40)- (4.41) eşitliklerinden

$$v\kappa' g(\varphi(\gamma'), \xi) = 0 \tag{4.52}$$

olduğundan yüzeyin s-parametre eğrileri asimptotiktir .
Tersine durum açıktır.
(ii) Yüzeyin v-parametre eğrilerinin asimptotik olması için

$$g(\phi_{vv}, N_{\gamma'}) = 0$$

olmalıdır. $\phi_{vv} = 0$ olduğundan v-parametre eğrileri de asimptotiktir. □

Teorem 4.1.5. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\gamma'}$ regle yüzeyi için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.
(i) Yüzeyin s-parametre eğrileri geodezik ise γ eğrisi Legendre helistir.
(ii) Yüzeyin v-parametre eğrileri geodezik eğridir.

İspat: **(i)** $M_{\gamma'}$, yüzeyinin s-parametre eğrileri geodezik eğri olsun. Bu durumda

$$\phi_{ss} \wedge N_{\gamma'} = 0$$

olmalıdır. (4.40) ve (4.41) değerleri yerine yazılırsa

$$\phi_{ss} \wedge N_{\gamma'} = -\kappa'\gamma'$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sıfıra eşit olması durumunda

$$\kappa' = 0$$

olduğundan γ eğrisi Legendre helistir.
(ii) $M_{\gamma'}$, yüzeyinin v-parametre eğrilerinin geodezik olması için

$$\phi_{vv} \wedge N_{\gamma'} = 0$$

olmalıdır. $\phi_{vv} = 0$ olduğundan v-parametre eğrileri geodezik eğridir. □

4.1.2. Doğrultman Vektörünün $X = \varphi(\gamma')$ Olması Hali

$\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\varphi(\gamma')}$ dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultmanı $\varphi(\gamma')$ normal vektörü olan regle yüzey olsun.
(4.4) ve (4.5) denklemleri yardımıyla

$$\phi_s = (1-\upsilon\kappa)\gamma' + \upsilon\xi \tag{4.53}$$

ve

$$\phi_\upsilon = \varphi(\gamma') \tag{4.54}$$

olarak elde edilir.

$$\phi_s \wedge \phi_\upsilon = -g(\phi_s, \varphi(\phi_\upsilon))\xi - \eta(\phi_\upsilon)\varphi(\phi_s) + \eta(\phi_s)\varphi(\phi_\upsilon)$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} \varphi(\phi_s) &= (1-\upsilon\kappa)\varphi(\gamma') && (4.55)\\ \varphi(\phi_\upsilon) &= -\gamma' && (4.56)\\ \eta(\phi_s) &= \upsilon && (4.57)\\ \eta(\phi_\upsilon) &= 0 && (4.58) \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\phi_s \wedge \phi_\upsilon = -\upsilon\gamma' + (1-\upsilon\kappa)\xi \tag{4.59}$$

olur.

$$\|\phi_s \wedge \phi_\upsilon\| = g(\phi_s, \phi_s)g(\phi_\upsilon, \phi_\upsilon) - g^2(\phi_s, \phi_\upsilon)$$

olup, $M_{\varphi(\gamma')}$ yüzeyi için

$$\begin{aligned} E_{\varphi(\gamma')} &= (1-\upsilon\kappa)^2 + \upsilon^2 && (4.60)\\ F_{\varphi(\gamma')} &= 0 && (4.61)\\ G_{\varphi(\gamma')} &= 1 && (4.62) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.2. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\varphi(\gamma')}$, dayanak eğrisi Legendre eğrisi ve doğrultmanı $\varphi(\gamma')$ olan regle yüzey olsun. $M_{\varphi(\gamma')}$ yüzeyinin birim normal vektörü

$$N_{\varphi(\gamma')} = \frac{-\upsilon\gamma' + (1-\upsilon\kappa)\xi}{(1-\upsilon\kappa)^2 + \upsilon^2} \tag{4.63}$$

dir.

İspat: M_X regle yüzeyinin birim normal vektörü (2.29) denklemiyle verilmişti. (4.60)-(4.62) değerleri yerine yazılırsa özel durum için normal vektörü olan $N_{\varphi(\gamma')}$ hesaplanır. □

Şimdi M yüzeyine ait ikinci türevleri (4.15)-(4.17) denklemlerini kullanarak hesaplayalım. Burada $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \phi_{ss} &= -v\kappa'\gamma' - 2v(1-v\kappa)\varphi(\gamma') && (4.64) \\ \phi_{sv} &= (-\kappa + v)\gamma' + v\kappa\xi && (4.65) \\ \phi_{vv} &= 0 && (4.66) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca yukarıda bulunan $\phi_{ss}, \phi_{sv}, \phi_{vv}$ türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{(1-v\kappa)^2 + v^2} v^2\kappa' && (4.67) \\ m &= \frac{1}{(1-v\kappa)^2 + v^2}\left(-v^2 + 2v\kappa - v^2\kappa^2\right) && (4.68) \\ n &= 0 && (4.69) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda $M_{\varphi(\gamma')}$ regle yüzeyinin $S_{\varphi(\gamma')}$ şekil operatörü matrisi

$$\begin{aligned} s^{11}_{\varphi(\gamma')} &= \frac{v^2\kappa'}{\left[(1-v\kappa)^2 + v^2\right]^2} && (4.70) \\ s^{12}_{\varphi(\gamma')} &= \frac{-v^2 + 2v\kappa - v^2\kappa^2}{\left[(1-v\kappa)^2 + v^2\right]^2} && (4.71) \\ s^{21}_{\varphi(\gamma')} &= \frac{-v^2 + 2v\kappa - v^2\kappa^2}{\left[(1-v\kappa)^2 + v^2\right]^2} && (4.72) \\ s^{22}_{\varphi(\gamma')} &= 0 && (4.73) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.6. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\varphi(\gamma')}$ regle yüzeyine karşılık gelen şekil operatörünün matrisi

$$S_{\varphi(\gamma')} = \begin{bmatrix} \dfrac{v^2\kappa'}{[(1-v\kappa)^2 + v^2]^2} & \dfrac{-v^2 + 2v\kappa - v^2\kappa^2}{[(1-v\kappa)^2 + v^2]} \\ \\ \dfrac{-v^2 + 2v\kappa - v^2\kappa^2}{[(1-v\kappa)^2 + v^2]^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

dir.

İspat: (4.70)-(4.73) eşitliklerinden ispat açıktır. $\square$

Teorem 4.1.7. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\varphi(\gamma')}$ regle yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\varphi(\gamma')} = \frac{-v^2 + 2v\kappa - v^2\kappa^2}{[(1-v\kappa)^2 + v^2]^2} \tag{4.75}$$

ve

$$H_{\varphi(\gamma')} = \frac{v^2\kappa'}{2[(1-v\kappa)^2 + v^2]^2} \tag{4.76}$$

olarak bulunur.

İspat: $M_{\varphi(\gamma')}$ regle yüzeyinin (4.74) de verilen $S_{\varphi(\gamma')}$ şekil operatörü matrisi ve (4.1)-(4.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa $K_{\varphi(\gamma')}$ ve $H_{\varphi(\gamma')}$ eğrilikleri bulunur. $\square$

Teorem 4.1.8. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\varphi(\gamma')}$ regle yüzeyi için aşağıdaki sonuçlar gerçeklenir
(i)Yüzeyin s-parametre eğrileri asimptotik eğri ise γ dayanak eğrisi bir Legendre helistir.
(ii)Yüzeyin v-parametre eğrileri asimptotik eğridir.

İspat: **(i)** Eğer yüzeyin s-parametre eğrileri asimptotik ise $N_{\varphi(\gamma')}$ yüzeyin birim normal vektörü olmak üzere

$$g(\phi_{ss}, N_{\varphi(\gamma')}) = 0$$

dır. Buradan (4.63) ve (4.64) eşitliklerinden

$$\kappa = sabit$$

olur. O halde γ eğrisi bir Legendre helistir.
(ii) Yüzeyin v-parametre eğrilerinin asimptotik eğri olması için

$$g(\phi_{vv}, N_{\varphi(\gamma')}) = 0$$

olmalıdır. $\phi_{vv} = 0$ olduğundan v-parametre eğrileri asimptotik eğridir. $\square$

Teorem 4.1.9. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında $M_{\varphi(\gamma')}$, yüzeyi için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.
(i) Yüzeyin s-parametre eğrileri geodezik eğridir ancak ve ancak

$$-2v(1-v\kappa)^2\gamma' + v(1-v\kappa)\kappa'\varphi(\gamma') - 2v^2(1-v\kappa)\xi = 0 \tag{4.77}$$

denklemi sağlanır.
(ii) Yüzeyin v-parametre eğrileri geodezik eğridir.

İspat: **(i)** Kabul edelim ki yüzeyin s-parametre eğrileri bir geodezik olsun. Bu durumda

$$\phi_{ss} \wedge N_{\varphi(\gamma')} = 0$$

dır. O halde, (4.63) ve (4.66) değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\kappa = \frac{1}{v} \tag{4.78}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

(ii)Yüzeyin v-parametre eğrilerinin asimptotik olması için

$$\phi_{vv} \wedge N_{\varphi(\gamma')} = 0$$

olmalıdır. $\phi_{vv} = 0$ olduğundan v-parametre eğrileri geodezik eğridir. □

4.1.3. Doğrultman Vektörünün $X = \xi$ Olması Hali

M_ξ, dayanak eğrisi γ Legendre eğrisi ve doğrultmanı ξ binormal vektörü olan regle yüzey olsun. (4.5) ve (4.6) denklemleri yardımıyla bu yüzey için

$$\phi_s = \gamma'(s) - v\varphi(\gamma') \tag{4.79}$$

ve

$$\phi_v = \xi(s) \tag{4.80}$$

olarak bulunur.

$$\phi_s \wedge \phi_v = -g(\phi_s, \varphi(\phi_v))\xi - \eta(\phi_v)\varphi(\phi_s) + \eta(\phi_s)\varphi(\phi_v)$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} \varphi(\phi_s) &= v\gamma' + \varphi(\gamma') && (4.81)\\ \varphi(\phi_v) &= 0 && (4.82)\\ \eta(\phi_s) &= 0 && (4.83)\\ \eta(\phi_v) &= 1 && (4.84) \end{aligned}$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\phi_s \wedge \phi_v = -v\gamma' - \varphi(\gamma') \tag{4.85}$$

dir. Buradan

$$\|\phi_s \wedge \phi_v\| = g(\phi_s,\phi_s)g(\phi_v,\phi_v) - g^2(\phi_s,\phi_v)$$

olup, M_ξ yüzeyi için

$$E_\xi = 1+v^2 \tag{4.86}$$

$$F_\xi = 0 \tag{4.87}$$

$$G_\xi = 1 \tag{4.88}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.3. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında M_ξ regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$N_\xi = \frac{-v\gamma' - \varphi(\gamma')}{1+v^2} \tag{4.89}$$

dır.

İspat: M_X regle yüzeyinin birim normal vektörü (2.29) denklemiyle verilmişti. (4.86)-(4.88) değerleri yerine yazılırsa özel durum için normal vektörü olan N_ξ hesaplanır. □

Şimdi M_ξ regle yüzeyine ait ikinci türevleri (4.15)-(4.17) denklemleri yardımıyla hesaplayalım. Burada $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1$ alınırsa

$$\phi_{ss} = 0 \tag{4.90}$$

$$\phi_{sv} = -v\gamma' - 2\varphi(\gamma') \tag{4.91}$$

$$\phi_{vv} = 0 \tag{4.92}$$

eşitlikleri ile bulunur. Ayrıca yukarıda bulunan $\phi_{ss}, \phi_{sv}, \phi_{vv}$ türevleri yardımıyla

$$l = 0 \tag{4.93}$$

$$m = \frac{v^2+2}{v^2+1} \tag{4.94}$$

$$n = 0 \tag{4.95}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu yüzeyin E_ξ, F_ξ, G_ξ ve l, m, n katsayıları yardımıyla M_ξ yüzeyine ait S_ξ şekil operatörü matrisinin bileşenleri

$$s_\xi^{11} = 0 \tag{4.96}$$

$$s_\xi^{12} = \frac{v^2+2}{v^2+1} \tag{4.97}$$

$$s_\xi^{21} = \frac{v^2+2}{(v^2+1)^2} \tag{4.98}$$

$$s_\xi^{22} = 0 \tag{4.99}$$

dir.

Teorem 4.1.10. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında M_ξ regle yüzeyine karşılık gelen şekil operatörünün matrisi

$$S_\xi = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{v^2+2}{v^2+1} \\ \dfrac{v^2+2}{(v^2+1)^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

dir.

İspat: (4.96)-(4.99) denklemlerinden ispat açıktır. □

Teorem 4.1.11. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında M_ξ regle yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K_\xi = \frac{-v^2-2}{(v^2+1)^2} \tag{4.101}$$

ve

$$H_\xi = 0 \tag{4.102}$$

olarak bulunur.

İspat: M_ξ regle yüzeyinin şekil operatörü matrisi ve (4.1)-(4.2) eşitlikleri göz önüne alınırsa K_ξ ve H_ξ eğrilikleri bulunur. □

Teorem 4.1.12. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında M_ξ regle yüzeyi için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Yüzeyin s-parametre eğrileri asimptotik eğridir.

(ii) Yüzeyin v-parametre eğrileri asimptotik eğridir.

İspat:

(i)Eğer yüzeyin s-parametre eğrileri asimptotik ise N_ξ yüzeyin birim normali olmak üzere, bu yüzey için $\phi_{ss} = 0$ ve dolayısıyla

$$g(\phi_{ss}, N_\xi) = 0$$

dır. O halde, yüzeyin s-parametre eğrileri asimptotik eğridir.

(ii) Benzer şekilde $\phi_{vv} = 0$ olduğundan

$$g(\phi_{vv}, N_\xi) = 0$$

dır. Dolayısıyla yüzeyin v-parametre eğrileri de asimptotik eğridir. □

Teorem 4.1.13. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında M_ξ regle yüzeyi için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.
(i) Yüzeyin s-parametre eğrileri geodezik eğridir.
(ii) Yüzeyin v-parametre eğrileri geodezik eğridir.

İspat: **(i)** Yüzeyin s-parametre eğrileri geodezik eğri ise

$$\phi_{ss} \wedge N_\xi = 0$$

olmalıdır. Bu yüzey için $\phi_{ss} = 0$ olduğundan ispat açıktır.
(ii)Yüzeyin v-parametre eğrilerinin asimptotik olması için

$$\phi_{vv} \wedge N_\xi = 0$$

olmalıdır. $\phi_{vv} = 0$ olduğundan yüzeyin v-parametre eğrileri geodezik eğridir. □

5. BÖLÜM

KONTAK GEOMETRİDE BAZI YÜZEY ÖRNEKLERİ

Bu bölümde $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında parametrik denklemleri bilinen bazı yüzeylerin şekil operatörü matrisi araştırılacaktır.
Öncelikle Öklid uzayında dönel yüzeyin ve öteleme yüzeyin temel özelliklerini verelim:

5.1. Dönel Yüzeyler İçin Şekil Operatörü Matrisinin Hesabı

Tanım 5.1.1. (Dönel Yüzey) xz- koordinat düzleminde verilen bir

$$y=0,\ \ F(x,y,z)=0 \tag{5.1}$$

eğrisinin z ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzeye **dönel yüzey** denir. Burada farklı koordinat düzlemlerindeki eğrilerin farklı eksenler etrafında döndürülmesiyle de dönel yüzeyler elde edilebilir [32].

Örnek 5.1.1. Uzayda $x=1,\ y=0,\ z\in\mathbb{R}$ denklemleriyle verilen doğruyu z ekseni etrafında döndürelim. Bu dönme esnasında
(i) z koordinatı değişmez.
(ii) z - ekseni etrafındaki dönme aslında xy- düzleminin ve xy- düzlemine paralel bütün düzlemlerin dönmesidir.
O halde xy- koordinat düzlemindeki dönmenin paralel düzlemler boyunca uygulanmasından başka bir şey değildir.
xy- düzleminin θ radyan dönmesi sonucu elde edilen yeni noktaların koordinatları

$$\left(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta,z\right)$$

olur. Buradan dönel yüzeyin denklemi

$$\left\{\left(x,y,z\right)|x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ z\in\mathbb{R},\ \theta\in[0,2\pi]\right\} \tag{5.2}$$

dir.

$$x^2+y^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \tag{5.3}$$

olduğundan yüzeyin $\mathbb{R}^3$ kartezyen koordinatlardaki denklemi

$$x^2+y^2=1,\ z\in\mathbb{R} \tag{5.4}$$

ifadesi ile verilir. Bu yüzey $\mathbb{R}^3$ uzayında bir dik silindire karşılık gelir. Benzer yöntemle koni ve R yarıçaplı küre yüzeyi elde edilebilir [32].

$M\subset\mathbb{R}^3(-3)$ yüzeyi verilsin. Bu yüzey Öklid uzayındaki dönel yüzeyin parametrik denklemine sahip olsun. Yani, yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} X: I\times\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3(-3) \\ (u,v) &\rightarrow X(u,v)=\big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big) \end{aligned} \tag{5.5}$$

olsun. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{X_u,X_v\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} X_u &= f'(u)\cos v\frac{\partial}{\partial x}+f'(u)\sin v\frac{\partial}{\partial y}+g'(u)\frac{\partial}{\partial z} \\ X_v &= -f(u)\sin v\frac{\partial}{\partial x}+f(u)\cos v\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{2}(\varphi(e)-y\xi),\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}e,\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\xi$$

olduğundan (2.18) ve (2.19) denklemleri kullanılarak $\{e,\varphi(e),\xi\}$ bazına göre düzenlenirse

$$X_u = \frac{1}{2}f'(u)\sin v\, e+\frac{1}{2}f'(u)\cos v\,\varphi(e)+\frac{1}{2}\big(g'(u)-f(u)f'(u)\sin v\cos v\big)\xi \tag{5.6}$$

$$X_v = \frac{1}{2}f(u)\cos v\, e-\frac{1}{2}f(u)\sin v\,\varphi(e)-\frac{1}{2}f^2(u)\sin^2 v\,\xi \tag{5.7}$$

olarak bulunur. Bu iki vektör alanı yardımıyla

$$g(X_u,X_v)=\frac{1}{4}\big[g'(u)-f(u)f'(u)\sin v\cos v\big]f^2(u)\sin^2 v \tag{5.8}$$

ve

$$h(u,v)=g'(u)-f(u)f'(u)\sin v\cos v \tag{5.9}$$

denilirse

$$g(X_u,X_v)=\frac{1}{4}f^2(u)\sin^2 v\,h(u,v) \tag{5.10}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \varphi(X_u) &= -\frac{1}{2}f'(u)\cos v\, e + \frac{1}{2}f'(u)\sin v\, \varphi(e) && (5.11)\\ \varphi(X_v) &= \frac{1}{2}f(u)\sin v\, e + \frac{1}{2}f(u)\cos v\, \varphi(e) && (5.12)\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.22)-(2.23) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \eta(X_u) &= \frac{1}{2}\big(g'(u) - f(u)f'(u)\sin v\cos v\big) && (5.13)\\ \eta(X_v) &= \frac{1}{2}f^2(u)\sin^2 v && (5.14)\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \frac{1}{4}[f^2(u)f'(u)\cos v\sin^2 v - f(u)\sin v\, h(u,v)]e && (5.15)\\ &+ \frac{1}{4}[f(u)\cos v\, h(u,v) - f^2(u)f'(u)\sin^3 v]\varphi(e)\\ &- \frac{1}{4}\big[f(u)f'(u)\big]\xi \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E = \quad & g(X_u,X_u) = \frac{1}{4}\big[[f'(u)]^2\sin^2 v + [f'(u)]^2\cos^2 v + h(u,v)^2\big] && (5.16)\\ F = \quad & g(X_u,X_v) = -\frac{1}{4}f^2(u)\sin^2 v\, h(u,v) && (5.17)\\ G = \quad & g(X_v,X_v) = \frac{1}{4}\big[f^2(u) + f^4(u)\sin^4 v\big] && (5.18)\end{aligned}$$

dir. M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \tag{5.19}$$

ifadesi

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = g(X_u,X_u)g(X_v,X_v) - g^2(X_u,X_v)$$

denklemi yardımıyla

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{5.20}$$

eşitliği ile verilir.

Önerme 5.1.1. $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında (5.5) parametrizasyonu ile verilen $X(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektörü

$$N = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{4}[f^2(u)f'(u)\cos v\sin^2 v - f'(u)\sin v\, h(u,v)]e \\ +\frac{1}{4}[f(u)\cos v\, h(u,v) - f^2(u)f'(u)\sin^3 v]\varphi(e) \\ -\frac{1}{4}\big[f(u)f'(u)\big]\xi \end{bmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \tag{5.21}$$

dir.

İspat: $X(u,v)$ dönel yüzeyinin birim normal vektörü (5.20) denklemiyle yardımıyla (5.21) denklemi kolaylıkla yazılabilir. $\square$

Şimdi $X(u,v)$ yüzeyine ait ikinci türevleri (2.27)-(2.29) denklemlerini kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \frac{1}{2}\big[f''(u)\sin v + f'(u)\cos v\, h(u,v)\big]e \\ &+ \frac{1}{2}\big[f''(u)\cos v - f'(u)\sin v\, h(u,v)\big]\varphi(e) \\ &+ \frac{1}{2}[g''(u) - [f'(u)]^2 \sin v \cos v - f(u)f''(u)\sin v \cos v]\xi \end{aligned} \tag{5.22}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.28) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} X_{uv} &= \frac{1}{2}\Big[f'(u)\cos v - \frac{1}{2}f(u)\sin v\, h(u,v) - \frac{1}{2}f^2(u)f'(u)\sin^2 v\cos v\Big]e \\ &+ \frac{1}{2}\Big[-f'(u)\sin v - \frac{1}{2}f(u)\cos v\, h(u,v) - \frac{1}{2}f^2(u)f'(u)\sin^3 v\Big]\varphi(e) \\ &+ \frac{1}{2}[-f(u)f'(u)\cos 2v + \frac{1}{2}f(u)f'(u)]\xi \end{aligned} \tag{5.23}$$

elde edilir. (2.29) eşitliğinden

$$\begin{aligned} X_{vv} &= \frac{1}{2}\big[-f(u)\sin v + f^3(u)\sin^3 v\big]e \\ &- \frac{1}{2}\big[f(u)\cos v + f^3(u)\sin^2 v\cos v\big]\varphi(e) \\ &+ \frac{1}{2}\big[f^2(u)\sin 2v\big]\xi \end{aligned} \tag{5.24}$$

bulunur. Ayrıca yukarıda bulunan X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned} l &= g(N, X_{uu}) \\ m &= g(N, X_{uv}) \\ n &= g(N, X_{vv}) \end{aligned}$$

değerleri

$$l = \frac{\left[\begin{array}{c} \frac{1}{8}(f^2(u)f'(u)\cos v\sin^2 v + f(u)\sin v\, h(u,v))(f''(u)\sin v + f'(u)\cos v\, h(u,v)) \\ +\frac{1}{8}(f^(u)\cos v\, h(u,v) - f^2(u)f'(u)\sin^3 v)(f''(u)\cos v - f'(u)\sin v\, h(u,v)) \\ -\frac{1}{8}(f(u)f'(u)\big(g''(u) - (f'(u))^2\cos v\sin v - f(u)f''(u)\cos v\sin v\big)) \end{array}\right]}{\|X_u \times X_v\|} \tag{5.25}$$

$$m=\frac{\begin{bmatrix}\frac{1}{8}(f^2(u)f'(u)\sin^2 v\cos v+f(u)\sin v\,h(u,v))(f'(u)\cos v-\frac{1}{2}f'(u)\sin v\,h(u,v)+\frac{1}{2}f^2(u)f'(u)\sin^2 v\cos v)\\ +\frac{1}{8}(f(u)\cos v\,h(u,v)-f^2(u)f'(u)\sin^3 v)(-f'(u)\sin v-\frac{1}{2}f'(u)\cos v\,h(u,v)-\frac{1}{2}f^2(u)f'(u)\sin^3 v)\\ \frac{1}{8}\left[f(u)f'(u)\right]^2(\cos 2v-\frac{1}{2})\end{bmatrix}}{\|X_u\times X_v\|} \tag{5.26}$$

$$n=\frac{\begin{bmatrix}\frac{1}{8}(-f^2(u)f'(u)\sin^2 v\cos v+f(u)\sin v\,h(u,v))(f^3(u)\sin^3 v-f(u)\sin v)\\ +\frac{1}{8}(f^2(u)f'(u)\sin^3 v-f(u)\cos v\,h(u,v))(f(u)\cos v+f^3(u)\sin^2 v\cos v)\\ -\frac{1}{8}f^3(u)f'(u)\sin 2v\end{bmatrix}}{\|X_u\times X_v\|} \tag{5.27}$$

şeklinde bulunur. Böylece (2.32)-(2.35) eşitliklerinden yüzeye ait şekil operatörü matrisinin bileşenleri elde edilir.

5.2. Öteleme Yüzeyi İçin Şekil Operatörü Matrisinin Hesabı

Tanım 5.2.1. (Monge Yüzeyi)

$$\begin{aligned}\Phi:\mathbb{E}^2 &\rightarrow \mathbb{E}^3\\ (u,v) &\rightarrow \Phi(u,v)=\big(u,v,f(u,v)\big)\end{aligned} \tag{5.28}$$

şeklinde tanımlanan yüzeye **Monge yüzey** denir. Burada

$$f:\mathbb{E}^2\rightarrow\mathbb{E}$$

bir fonksiyondur [21].

Tanım 5.2.2. (Öteleme Yüzeyi)

$$\begin{aligned}\Phi:E^2 &\rightarrow E^3\\ (u,v) &\rightarrow \Phi\big(u,v,f(u,v)\big)\end{aligned} \tag{5.29}$$

olmak üzere $\Phi(u,v)$ Monge yüzeyinde

$$f(u,v)=h(u)+g(v) \tag{5.30}$$

biçiminde ise yüzeyi

$$\Phi(u,v)=\big(u,v,h(u)+g(v)\big)=(u,0,h(u))+\big(0,v,g(v)\big) \tag{5.31}$$

veya

$$\Phi(u,v)=\alpha(u)+\beta(v) \tag{5.32}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda yüzeye **öteleme yüzeyi** adı verilir.
Ayrıca, E^3 de bir S yüzeyi

$$z=g(x)-h(y) \tag{5.33}$$

şeklinde yazılabiliyorsa S yüzeyi yine öteleme yüzeyidir [21].

$M\subset\mathbb{R}^3(-3)$ yüzeyi verilsin. Bu yüzey Öklid uzayındaki öteleme yüzeyinin parametrik denklemine sahip olsun. Yani;

$$\begin{aligned} X: I\times\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3(-3) \\ (u,v) &\rightarrow X(u,v)=\big(u,v,f(u)+g(v)\big) \end{aligned} \tag{5.34}$$

olsun. $\chi(M)$ nin bir bazı $\{X_u,X_v\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} X_u &= \big(1,0,f'(u)\big)=1\frac{\partial}{\partial x}+f'(u)\frac{\partial}{\partial z} \\ X_v &= \big(0,g'(v),1\big)=g'(v)\frac{\partial}{\partial y}+1\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{5.35}$$

dır. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{2}(\varphi(e)-y\xi),\ \ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}e,\ \ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\xi$$

olduğundan (5.32) denklemi $\{e,\varphi(e),\xi\}$ bazına göre düzenlenirse

$$X_u = \frac{1}{2}\varphi(e)-\frac{1}{2}(f'(u)-v)\xi \tag{5.36}$$

$$X_v = \frac{1}{2}g'(v)e+\frac{1}{2}\xi \tag{5.37}$$

olarak bulunur. Bu iki vektör alanı yardımıyla

$$g(X_u,X_v)=-\frac{1}{4}(v,f'(u)) \tag{5.38}$$

elde edilir.

$$\varphi(X_u) = -\frac{1}{2}e \tag{5.39}$$

$$\varphi(X_v) = \frac{1}{2}g'(v)\varphi(e) \tag{5.40}$$

bulunur.

$$\eta(X_u) = -\frac{1}{2}(v+f'(u)) \tag{5.41}$$

$$\eta(X_v) = \frac{1}{2} \tag{5.42}$$

olduğundan dolayı

$$X_u \wedge X_v = \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}g(v)'(v+f'(u))\varphi(e) - \frac{1}{4}g'(v)\xi \tag{5.43}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E = \quad & g(X_u, X_u) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(v+f'(u))^2, \\ F = \quad & g(X_u, X_v) = -\frac{1}{4}(v+f'(u)) \\ G = \quad & g(X_v, X_v) = \frac{1}{4}\left((g'(v))^2 + 1\right) \end{aligned} \tag{5.44}$$

olduğundan $X(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

ifadesi

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = g(X_u, X_u)g(X_v, X_v) - g^2(X_u, X_v)$$

denklemi yardımıyla

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{5.45}$$

eşitliği ile verilir.

Önerme 5.2.1. $X(u,v)$, $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında (5.34) parametrizasyonu ile verilen öteleme yüzey olsun. $X(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektörü

$$N = \frac{\frac{1}{4}e + \frac{1}{4}g'(v)(v+f'(u))\varphi(e) - \frac{1}{4}g'(v)\xi}{\|\frac{1}{4}e + \frac{1}{4}g'(v)(v+f'(u))\varphi(e) - \frac{1}{4}g'(v)\xi\|} \tag{5.46}$$

dir.

Şimdi yüzeye ait ikinci mertebeden türevleri hesaplayalım: (2.27) eşitliği kullanılarak

$$X_{uu} = \frac{1}{2}\left(f'(u) - v\right)e + \frac{1}{2}f(u)''\xi \tag{5.47}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.28) eşitliği kullanılarak

$$X_{uv} = \frac{1}{4}g'(v)e - \frac{1}{4}\left(f'(u) - v\right)\varphi(e) - \frac{1}{4}\xi \tag{5.48}$$

elde edilir.(2.29) eşitliğinden

$$X_{vv} = -\frac{1}{2}g'(v)\varphi(e) + \frac{1}{2}g''(v)\xi \tag{5.49}$$

bulunur. Ayrıca yukarıda bulunan X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} türevleri yardımıyla

$$\begin{aligned} l &= g(N, X_{uu}) \\ m &= g(N, X_{uv}) \\ n &= g(N, X_{vv}) \end{aligned}$$

olmak üzere l, m, n değerleri

$$l = \frac{\frac{1}{8}(f'(u) - v) - \frac{1}{8}f''(u)g'(v)}{\|X_u \wedge X_v\|} \tag{5.50}$$

$$m = \frac{\frac{1}{16}g'(v) - \frac{1}{16}g'(v)((f'(u))^2 - v^2) + \frac{1}{16}g'(v)}{\|X_u \wedge X_v\|} \tag{5.51}$$

$$n = \frac{\frac{-1}{8}(g'(v))^2(v + f'(u)) - \frac{1}{8}g''(v)g'(v)}{\|X_u \wedge X_v\|} \tag{5.52}$$

dır. (2.32)-(2.35) eşitliklerinden yüzeye ait şekil operatörü matrisinin bileşenleri elde edilir.

6. BÖLÜM

TARTIŞMA- SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1. Tartışma ve Sonuç

Bu tez çalışmasında $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında Legendre dayanak eğrisi tarafından üretilen regle yüzeyler ele alındı.

Hemen hemen kontak metrik manifold yapısı ilgili temel kavramlara yer verildi.

Legendre eğrisi için Frenet çatısı ifade ve ispat edildi.

$\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında doğrultmanın özel hali için elde edilen regle yüzeyler Legendre eğrisinin Frenet çatısına göre $P_X = 0$ olma açısından incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

1) $X = \gamma'$ olması halinde $P_{\gamma'} = 0$ dır.

2) $X = \varphi(\gamma')$ olması halinde $P_{\varphi(\gamma')} = \dfrac{1}{1+\kappa^2}$ dır.

3) $X = \xi$ olması halinde $P_\xi = 1$ dır.

4) $X \in Sp\left\{\varphi(\gamma'), \xi\right\}$ olması halinde $P_x = \dfrac{1}{1+\kappa^2 x_2^2}$ dır.

5) $X \in Sp\left\{\gamma', \xi\right\}$ olması halinde

$$P_x = \frac{x_3^2 - \kappa x_1 x_3}{x_3^2 - 2\kappa x_1 x_3 + \kappa^2 x_1^2}$$

dir. $P_X = 0$ dır ancak ve ancak γ bir Legendre helistir.

6) $X \in Sp\left\{\gamma', \varphi(\gamma')\right\}$ olması halinde $P_x = \dfrac{x_2^2}{1+x_2^2}$ dir.

Genel durum için eğer M yüzeyinin dayanak eğrisi bir helis ise, γ eğrisinin aynı zamanda asimptotik ve geodezik eğri olduğu görüldü.

Doğrultmanın özel hali için elde edilen regle yüzeyler incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

1) $X = \gamma'$ olması halinde $M_{\gamma'}$, regle yüzeyi için ortalama eğriliği $H_{\gamma'} = \dfrac{1}{v^2\kappa^2}$ bulundu.

Yüzeyin s-parametre eğrilerinin ve v-parametre eğrilerinin hem asimptotik hem geodezik eğri olduğu görüldü.

2) $X = \varphi(\gamma')$ olması halinde $M_{\varphi(\gamma')}$ regle yüzeyi için ortalama eğriliği

$$H_{\varphi(\gamma')} = \frac{1}{2}\frac{v^2\kappa'}{\left[(1-v\kappa)^2 + v^2\right]^2}$$

bulundu.

Eğer γ bir helis ise yüzeyin s-parametre eğrilerinin asimptotik olduğu görüldü.

Yüzeyin s-parametre eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter koşul verildi.

Yüzeyin v-parametre eğrilerinin hem asimptotik hem geodezik olduğu görüldü.

3) $X = \xi$ olması halinde M_ξ , regle yüzeyi için $H_\xi = 0$ olduğu görüldü.

Yüzeyin s-parametre eğrileri ve v-parametre eğrilerinin hem asimptotik hem geodezik eğri olduğu görüldü.

Ayrıca, öteleme ve dönme yüzeyleri için birim normal vektör alanı ve şekil operatörü matrisinin bileşenleri hesaplandı.

6.2. Öneriler

Bu çalışmada $\mathbb{R}^3(-3)$ uzayında Legendre eğrisi tarafından üretilen regle yüzeyler ele alınmıştır. Genel ve özel durumlarda oluşturulan regle yüzeyler karakterize edilmiştir.

Her bir yüzey tek tek ele alınarak yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri, şekil operatörünün katsayıları hesaplanmıştır. Genel ve özel durumları için yüzeyin parametre eğrilerinin geodezik ve asimptotik olma durumları araştırılmıştır.
Bundan sonraki çalışmalarda eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri hesaplanarak yüzeyler farklı açılardan karakterize edilebilir. Ayrıca, helicoidal yüzey, kanal yüzeyi gibi farklı yüzeyler de kontak geometride incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Blair, D. E., 2002. Riemannian Geometry of Contact ve Simplectic Manifolds. Birkhauser, Boston.
2. Yano, K., Kon, M., 1984. Structures on Manifolds. **Series in Pure Mathematics, Vol: 3**, Singapore .
3. Gray, A., 1998. Modern Differential Geometry. Cre pres.
4. Boothby, W. M., 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press.
5. Geiges, H., 1990. Contact Geometry to Appear in The Handbook of Diferential Geometry.Vol.2.
6. Baikousis, C., Blair, D. E., 1991. Finite Type Integral Submanifold of The Contact Manifold $R^{2n+1}(-3)$. **Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica 19**(4);327-350
7. Belkelfa, M. Hırıca, I.E., Rosca, R. and Verstraelen, L., 2002. On Legendre curves in Riemannian and Lorentzian Sasaki Spaces. **Soochow J.Math. 28**;81-91
8. Camcı, Ç., 2009. Kontak Geometride Eğriler Teorisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
9. Baikousis, C., Blair, D.E., 1994. On Legendre curves in contact 3-manifolds. Geom. Dedicate, 49; 135-142.
10. Gök, İ., 2011. Kontak Geometride Yüzeyler Teorisi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.
11. Juza, M., 1962. Ligne de striction sur une generalisation a plusierurs dimensions dıune surface regle, **Czechosl. Math. J. 12**(87): 243-250.
12. Frank, H., Giering, O., 1976. Verallgemeinerte fegelflachen. Math. Zelt. 150: 261-271.
13. Thas, C., 1978. Properties of ruled surfaces in the Euclidean space E^n. Academica Sinica. 6(1): 133-142.
14. Ergüt, M., 1980. Regle Yüzeyler. Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Yüksek Lisans Tezi, Elazığ, 68s.
15. Sabuncuoğlu, A., 1982. Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doçentlik tezi, 60 s. Ankara.

16. Çalışkan, M., 1983. Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri. Doktora tezi, İnönü Üniversitesi, 47s. Malatya.
17. Turgut, A., 1995. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Ankara 97s.
18. Yaylı, Y., Saracoglu, S., 2012. On developable ruled surfaces in Minkowski space. **Advances in Applied Clifford Algebras, vol. 22**, no. 2, pp. 499-510.
19. Yüksel, N., 2013. The ruled surfaces according to Bishop frame in Minkowski 3-space. **Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis**.
20. Damar, E., 2015. 3-Boyutlu Öklidiyen Uzayda Bishop Çatılı DNA VE Regle Yüzeyler. Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi, Doktora Tezi, Kayseri.
21. Hacısalihoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri. Cilt 1-2. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
22. Sato, I., 1976. On a Structure Similar to the almost Contact Structure. **Tensor(N.S)**, No.3.219-224.
23. O Neill, B., 2006. Elementary Differential Geometry. Revised second ed. Academic Press, 503 p. USA.
24. Izumiya, S., Takeuchi, N., 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves. **Journal of Geometry, 74**: 97-109.
25. Izumiya S., Takeuchi N., 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. **Turk J Math, 28**: 153-163.
26. Bottema, O. Roth, B., 1979. Theoretical Kinematics. North Holland publ.
27. Ramesh, S., 2003. Contact Hypersurfaces of Kaehler manifolds. **J. Geom.,78**, 156 - 167 .
28. Carmo, D., Manfredo Perdigao do. 1992. Riemannian Geometry. Birkhauser. Boston.
29. Gök, İ., 2005. Kontak Manifoldlarda Esas Formlar ve Yönlendirme. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara .
30. Kobayashi, O., Nomuzi, K., 1996. Foundations of Differential Geometry.**Wiley-Interscience Publication,Vol: 1**.
31. Yüksel, N., Yılmaz, T., Karacan, M.K., 2011. Tubular surfaces with Bishop frame of Weingarten types in Euclidean 3-space. **Acta Universitatis Apulensis, 27**: 39-50.
32. Azcan, H., Üç Boyutlu Uzayda Bazı Yüzeyler ve Koordinat Sistemleri,Anadolu Üniversitesi.

33. Borceux, E., 2004. Simplektik Diferensiyel Geometri Üzerine, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara. **Bulletin of The Institute of Mathematics Academia Sinica 19**(4); 327-350.

34. Camcı, Ç., 2010. Extend Cross Product in a 3-Dimensional Almost Contact Metric Manifold with Applications to Curve Theory,**Turk J.Math, 35**(2011),1-14 .

35. Hacısalihoğlu, H. H., 2003. Tensör Geometri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

36. Kocayiğit, H., 2004. Lorentz 3-Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontak Geometri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

37. Matsumoto, K., 1989. On Lorentzian Paracontact Manifolds. **Bull Yamagata Univ. Natur. Sci.** : No.2,151-156.

38. Millman, R.S. and Parker, G.D. 1977. Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall, 265 p. New Jersey.

39. Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım.

40. Takahassi, T., 1969. Sasakian Manifold with pseudo-Riemann Metric. **Tohoku Math.:J(2**)21, 644-653.

41. Tripathi, M. M., Kılvç E.,Perktaş S. Y.,Keleş S., 2010. Indefinite almost Paracontact Metric Manifolds. **Int. J. Math. Sci., 55**: pp 19.

42. Blair, D. E., 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Math., Vol. 509, Springer-Verlag.

43. Wikipedia, The free encynlopedia. 2016. Kontaktgeometrie. (Web page: ***https://de.wikipedia.org/wiki/Kontaktgeometrie***), (Date accessed: 31 Aug 2016).

44. Xu, Z. Feng, R.Sun, J. G., 2006. Analytic and algebraıc properties of canal surfaces, **Journal of Computational and Applied Mathematic, 195**(2): 220-228.

ÖZGEÇMİŞ

KİSİŞEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Hasibe İKİZ
Uyruğu: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri: 07 Ekim 1988, Niğde
Medeni Durumu: Evli
Tel: +90 535 610 26 20
email: hasibeikiz51@gmail.com
Yazışma Adresi: Havacılık Akademisi Atatürk Havalimanı B Kapısı Yeşilköy 34149 İstanbul

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	ERU Fen Bilimleri Enstitüsü	2012
Lisans	Ahi Evran Üni. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2010
Lise	Anadolu Lisesi, Niğde	2006

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2015-	THY Havacılık Akademisi	Eğitmen

YABANCI DİL

İngilizce

YAYINLAR

1 Keskin,Ö,Yüksel N,Karacan,M.K,and İkiz, H.,2016. Characterization of the parallel curve of the adjoint Curve in $\mathbb{E}^3$,General Mathematics Notes,Vol 35,No:1,pp 9-18.

2 Karacan,M.K, Yüksel N, and İkiz, H., On ruled surface in $\mathbb{R}^3(-3)$ almost contact metric manifold, (Int. J. of Geometric Methods in Modern Physics incelemede).

BİLDİRİLER

1 İkiz H.,Yüksel N., "The ruled surface according to Bishop frame in Minkowski 3-space", Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi XI. Geometri Sempozyumu Ordu 1-5 Temmuz 2013.

2 İkiz, H.,Yüksel N,Karacan,M.K, and Bukcu,B.. " Parallel curves in Minkowski 3-space",Bilecik Şeyh Edebali Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi XII. Geometri Sempozyumu Bilecik 23-26 Haziran 2014.

3 İkiz, H.,Yüksel N,Karacan,M.K, and Keskin,Ö,"The ruled surface generated by adjoint curve of the base curve in $\mathbb{E}^3$ " Yıldız Teknik Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi XIII. Geometri Sempozyumu İstanbul 27-30 Temmuz 2015.

4 İkiz, H.,Yüksel N,Karacan,M.K, and Keskin,Ö,"Characterization of the parallel curve of the adjoint Curve in $\mathbb{E}^3$ " Yıldız Teknik Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi XIII. Geometri Sempozyumu İstanbul 27-30 Temmuz 2015.